

Height-diameter-age equation systems for *Pinus arizonica* Engelman and *Pinus durangensis* Martínez in mixed-species stands in Durango, Mexico

Sistemas de ecuaciones de altura-diámetro-edad para *Pinus arizonica* Engelman y *Pinus durangensis* Martínez en rodales mezclados de Durango, México

Gerónimo Quiñonez-Barraza^{1*}; Dehai Zhao²; Héctor M. De los Santos-Posadas³

¹Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), Campo Experimental Valle del Guadiana. Carretera Durango-Mezquital km 4.5. C. P. 34170. Durango, Dgo., México.

²The University of Georgia, Warnell School of Forestry & Natural Resources. Athens, Georgia, 30606, USA.

³Colegio de Postgraduados, Postgrado en Ciencias Forestales. Carretera México- Texcoco km 36.5. C. P. 56230. Texcoco, Estado de México, México.

*Corresponding author: quinonez.geronimo@inifap.gob.mx; tel.: +52 618 158 7865.

Abstract

Introduction: Total height (H) and diameter at breast height (DBH) are important variables in forest inventory and they are the basis for growth and yield systems.

Objective: To generate three prediction and projection equation systems for *Pinus arizonica* Engelman (Pa) and *Pinus durangensis* Martínez (Pd) in mixed-species stands in Durango, Mexico.

Materials and methods: The outside-bark DBH equations as functions of the inside-bark DBH were developed and the H - DBH relationship was extended to three relationships with the use of age (A): H - DBH , H - A and DBH - A . The equation systems of H - DBH - A were developed from a database of 46 and 66 stem analysis trees with 601 and 760 longitudinal measurements of Pa and Pd , respectively. The equations were fitted with seemingly unrelated regression and Dummy variables approach with common and specific parameters.

Results and discussion: The relationships showed significant accuracy in the assessed fitting statistics (adjusted coefficient of determination, root mean square error, Akaike's information criterion, standard error of the estimate and bias). The inverse equations of the three relationships formed a global system of prediction and projection equations.

Conclusions: The equations are useful for predicting and projecting H and DBH and they can be used as input variables in growth and yield models.

Keywords: Growth and yield models; prediction and projection; Dummy variables; forest inventory; forest management.

Resumen

Introducción: La altura total (H) y el diámetro normal (DBH) son variables importantes en el inventario forestal y son la base de sistemas de crecimiento y rendimiento.

Objetivo: Generar tres sistemas de ecuaciones de predicción y proyección para *Pinus arizonica* Engelman (Pa) y *Pinus durangensis* Martínez (Pd) en rodales mezclados de Durango, México.

Materiales y métodos: Ecuaciones de DBH con corteza como funciones del DBH sin corteza se desarrollaron y la relación H - DBH fue extendida a tres relaciones con el uso de la edad (A): H - DBH , H - A y DBH - A . Los sistemas de ecuaciones de H - DBH - A se desarrollaron a partir de una base de datos de 46 y 66 árboles de análisis troncales con 601 y 760 mediciones longitudinales de Pa y Pd , respectivamente. Los ajustes se realizaron con regresión aparentemente no relacionada y con el enfoque de variables Dummy con parámetros comunes y específicos.

Resultados y discusión: Las relaciones mostraron precisión significativa en los estadísticos de ajuste evaluados (coeficiente de determinación ajustado, raíz del cuadrado medio del error, criterio de información de Akaike, error estándar de la estimación y sesgo). Las ecuaciones inversas de las tres relaciones conformaron un sistema global de ecuaciones de predicción y proyección.

Conclusiones: Las ecuaciones son útiles para predecir y proyectar H y DBH y pueden usarse como variables de entrada en modelos de crecimiento y rendimiento.

Palabras clave: Modelos de crecimiento y rendimiento; predicción y proyección; variables Dummy; inventario forestal; manejo forestal.

Introduction

Tree total height (H) and diameter at breast height (DBH) are the most commonly used variables in forest management and modelling, and therefore the most widely measured in forest inventories. The basis of growth and yield systems depends on accurate measurements of these variables (Misik, Antal, Kárász, & Tóthmérész, 2016; Sharma, 2016), as they are used in the simulation of tree growth (Mehtätalo, de-Miguel, & Gregoire, 2015); furthermore, H is needed to estimate volume, biomass, carbon content and economic value (Gonzalez-Benecke et al., 2018; MacPhee et al., 2018). The H measurement can be costly and time consuming, so it is taken on a subsample in forest inventory plots, while DBH is easily measured (Adame, del Río, & Cañellas, 2008). In the sampling plots it is common to measure DBH from all trees and some of them are selected to measure H , then the rest are generally estimated with H - DBH equations (Santos, Terra, Chaer, & Monte, 2018; Sharma, 2016) due to the exhibited correlation between these variables (Calama & Montero, 2004; Zang, Lei, & Zeng, 2016). These equations are often used to minimize costs associated with forest inventories and to reduce problems related to measurement error (MacPhee, Kershaw, Weiskittel, Golding, & Lavigne, 2018).

The H - DBH relationship has been studied with several approaches and types of datasets. Of the main approaches, local or generalized equations have been used in forestry research. A local equation has the form $H = f(DBH, \omega)$, while a generalized equation has the form $H = f(DBH, BA, HD, \omega)$ with plot or stand variables such as basal area (BA), dominant height (HD) and density (N); in both cases, ω is the parameter vector. In the last two decades, local and generalized equations have been studied in many species, and the most used approach has been nonlinear mixed effects models (Calama & Montero, 2004; Crecente-Campo, Tomé, Soares, & Diéguez-Aranda, 2010; Gómez-García, Diéguez-Aranda, Castedo-Dorado, & Crecente-Campo, 2014; Kearsley et al., 2017; MacPhee et al., 2018; Saunders & Wagner, 2008; Sharma, 2016). In addition, quantile regression, additive generalized model or Dummy variable approaches have been used (Duan, Gao, Wang, & Fu, 2018; Zang et al., 2016). Similarly, in the Mexican research, local and general equations have been reported for species and species groups (Corral-Rivas, Alvarez-Gonzalez, Crecente-Campo, & Corral-Rivas, 2014; Crecente-Campo, Corral-Rivas, Vargas-Larreta, & Wehenkel, 2014; Vargas-Larreta, Castedo-Dorado, Alvarez-Gonzalez, Barrio-Anta, & Cruz-Cobos, 2009). The datasets are often based on H - DBH measurements from forest inventories, measurement and remeasurement plots, or permanent plots. In most studies, generalized equations perform better than local equations; when a local equation is expanded with stand variables, the application may occasionally be complex, because such variables are not always available.

Introducción

La altura total (H) y el diámetro normal (DBH) de los árboles son las variables más utilizadas en el manejo y modelación forestal y, por consiguiente, las más medidas en los inventarios forestales. La base de sistemas de crecimiento y rendimiento depende de mediciones precisas de dichas variables (Misik, Antal, Kárász, & Tóthmérész, 2016; Sharma, 2016), ya que son utilizadas en la simulación del crecimiento de los árboles (Mehtätalo, de-Miguel, & Gregoire, 2015); además, la H es necesaria para estimar el volumen, biomasa, contenido de carbono y valor económico (Gonzalez-Benecke et al., 2018; MacPhee et al., 2018). La medición de la H puede ser costosa y consume tiempo, por lo que se realiza en una submuestra tomada en los sitios de inventario forestal, mientras que el DBH es medido fácilmente (Adame, del Río, & Cañellas, 2008). En las parcelas de muestreo es común la medición del DBH de todos los árboles y algunos son seleccionados para medir la H , después, el resto se estima generalmente con ecuaciones de H - DBH (Santos, Terra, Chaer, & Monte, 2018; Sharma, 2016) debido a la correlación existente entre las variables (Calama & Montero, 2004; Zang, Lei, & Zeng, 2016). Estas ecuaciones se usan frecuentemente para minimizar costos asociados de los inventarios forestales y para reducir problemas relacionados con el error en las mediciones (MacPhee, Kershaw, Weiskittel, Golding, & Lavigne, 2018).

La relación H - DBH se ha estudiado con varios enfoques y tipos de bases de datos. De los enfoques principales, las ecuaciones locales o generalizadas se han utilizado en la investigación forestal. Una ecuación local tiene la forma $H = f(DBH, \omega)$, mientras que la generalizada tiene la forma $H = f(DBH, BA, HD, \omega)$ con variables de parcela o rodal como área basal (BA), altura dominante (HD) y densidad (N); en ambos casos, ω es el vector de parámetros. En las últimas dos décadas, las ecuaciones locales y generalizadas se han estudiado en muchas especies, y el enfoque más utilizado ha sido el de modelos no lineales con efectos mixtos (Calama & Montero, 2004; Crecente-Campo, Tomé, Soares, & Diéguez-Aranda, 2010; Gómez-García, Diéguez-Aranda, Castedo-Dorado, & Crecente-Campo, 2014; Kearsley et al., 2017; MacPhee et al., 2018; Saunders & Wagner, 2008; Sharma, 2016). Adicionalmente, los enfoques de regresión cuantil, modelo generalizado aditivo o de variables Dummy se han utilizado (Duan, Gao, Wang, & Fu, 2018; Zang et al., 2016). De manera similar, en la investigación mexicana, ecuaciones locales y generales se han reportado para especies y grupos de especies (Corral-Rivas, Álvarez-González, Crecente-Campo, & Corral-Rivas, 2014; Crecente-Campo, Corral-Rivas, Vargas-Larreta, & Wehenkel, 2014; Vargas-Larreta, Castedo-Dorado, Álvarez-González, Barrio-Anta, & Cruz-Cobos, 2009). Las bases de datos están basadas frecuentemente en mediciones de H - DBH de inventarios forestales, parcelas de medición y remediación o

In the development of *H-DBH* models, they should capture the full range of population variation, and datasets should take this range with an appropriate sampling design and size (MacPhee et al., 2018). In this study, equations of outside-bark *DBH* as a function of inside-bark *DBH* were developed and the *H-DBH* relationship was extended to the *H-DBH*, *H-A* and *DBH-A* relationships by using age (*A*). Also a prediction and projection equation systems were fitted for *Pinus arizonica* Engelman and *Pinus durangensis* Martínez with Dummy variable approach and using longitudinal measurements of stem analysis data.

Materials and methods

Area of study and data

Data come from 46 and 66 stem analysis trees of *P. arizonica* (*Pa*) and *P. durangensis* (*Pd*), respectively, collected in 2006 in northwest Durango, Mexico. The forest region of study was the ejido San Diego de Tezains, geographically located at 24° 48' 16.98" - 25° 13' 47.25" LN and 105° 53' 9.81"-106° 12' 52.58" LO (Figure 1). The total area is 61 089 ha, of which 28 636 ha are using for timber production (Quiñonez-Barraza, Zhao, De los Santos Posadas, & Corral-Rivas, 2018). The main climate is cold temperate, the mean annual temperature ranges from 5 to 12 °C and the mean annual rainfall is 840 mm (García, 2004; Quiñonez-

parcelas permanentes. En la mayoría de los estudios, las ecuaciones generalizadas poseen un desempeño mejor que las locales; cuando una ecuación local es expandida con variables de rodal, la aplicación puede ser ocasionalmente compleja, debido a que dichas variables no siempre están disponibles.

En el desarrollo de modelos de *H-DBH*, estos deberían capturar el rango completo de la variación de la población, y las bases de datos deberían tomar este rango con un diseño y tamaño de muestreo adecuados (MacPhee et al., 2018). En este estudio, se desarrollaron ecuaciones de *DBH* con corteza en función del *DBH* sin corteza y la relación *H-DBH* fue extendida a las relaciones *H-DBH*, *H-A* y *DBH-A* mediante el uso de la edad (*A*), con el objetivo de ajustar sistemas de ecuaciones de predicción y proyección para *Pinus arizonica* Engelman y *Pinus durangensis* Martínez mediante el enfoque de variables Dummy y utilizando mediciones longitudinales de datos de análisis troncales.

Materiales y métodos

Área de estudio y datos

Los datos provienen de 46 y 66 árboles de análisis troncales de *P. arizonica* (*Pa*) y *P. durangensis* (*Pd*), respectivamente, colectados en 2006 en el noroeste de Durango, México. La región forestal de estudio fue el ejido San Diego de

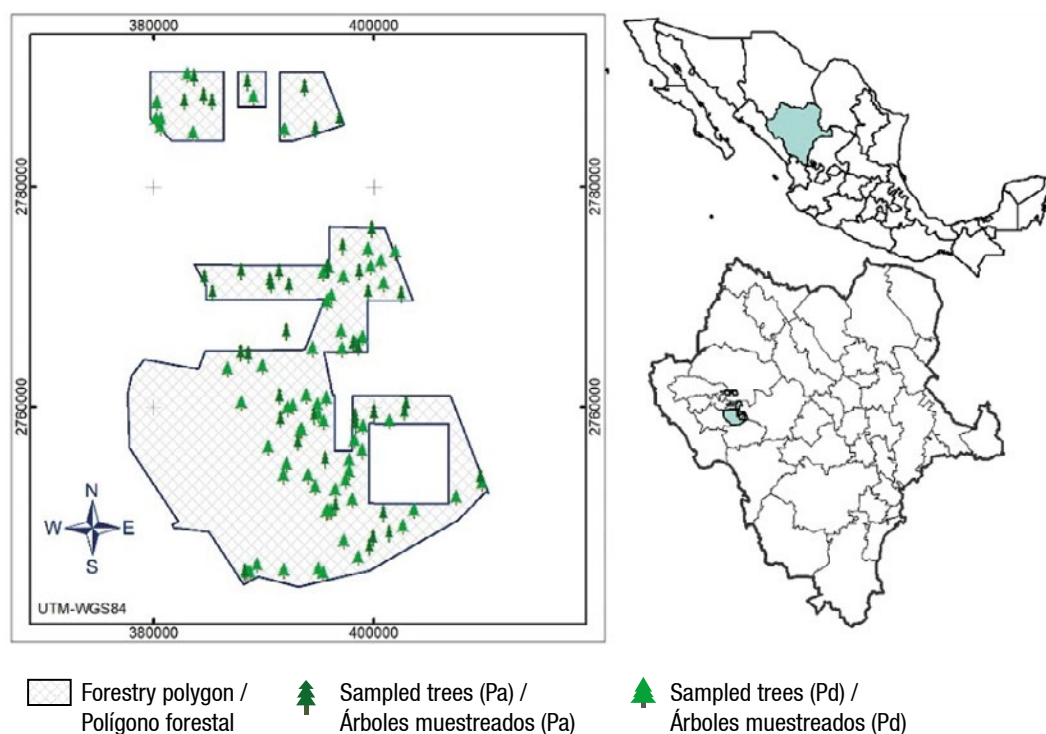


Figure 1. Study area and location of sampled trees from *Pinus arizonica* (*Pa*) and *Pinus durangensis* (*Pd*) in northwest Durango, Mexico.

Figura 1. Área de estudio y localización de los árboles muestreados de *Pinus arizonica* (*Pa*) y *Pinus durangensis* (*Pd*) en el ejido San Diego de Tezains en el noroeste de Durango, México.

Barraza et al., 2019). About 85 % of the stands are uneven-age and mixed and they are represented by the genus *Pinus*, *Quercus*, *Juniperus*, *Cupressus*, *Pseudotsuga*, *Arbutus* and *Alnus*. The stands have been managed according to the continuous cover forestry system with individual selection and natural regeneration, or the rotation forest management system characterized by three or four thinnings and a shelterwood cut (Pukkala & Gadow, 2011; Quiñonez-Barraza et al., 2018). The cutting cycle is 15 years (Quiñonez-Barraza et al., 2018).

Sampled trees were randomly selected in mixed-species stands to cover canopy types, densities, Hs, DBHs, stand structures, ages, and productivity (Figure 1). All trees were cut as close to the ground as possible; each fallen tree was sectioned and measured at 1.3 m, and subsequently every 2 m to the tree top. The DBH, commercial H and number of growth rings were measured in each cross-section. Growth in diameter was examined with the width of the annual growth rings in the DBH cross-section. In the stem analysis trees, 601 and 760 repeated measurements of H-DBH, H-A, and DBH-A were considered for Pa and Pd, respectively. A summary of the individual tree dataset and the measurements of the stem analysis variables for each species is shown in Table 1. Figure 2 illustrates the relationship of outside-bark DBH (DBHob) as a function of inside-bark DBH (DBHib) corresponding to the cross-section at 1.3 m and Figure 3 shows the trends for the H-DBHob, H-A and DBHob-A relationships. The H corresponding to an age for a specific cross section was estimated with the Carmean method (Carmean, 1972; Dyer & Bailey, 1987). With the data from stem analysis, four relationships were tested and modeled for each species: (1) DBHob-DBHib, (2) H-DBHob (H-DBH), (3) H-A in the cross section of the DBH, and (4) DBHob-A (DBH-A) in the cross section of the DBH.

Systems of equations H-DBH-A

The DBHob was modeled with DBHib as a predictor variable. For this purpose, the power, linear and exponential equations were used:

$$DBHob_i = \delta_0 DBHib_i^{\delta_1} + \varepsilon_i$$

$$DBHob_i = \delta_0 + \delta_1 DBHib_i + \varepsilon_i$$

$$DBHob_i = \delta_0 e^{(\delta_1 DBHib_i)} + \varepsilon_i$$

where,

DBHob_i = outside-bark DBH (cm) in the tree i

DBHib_i = inside-bark DBH (cm) in the tree i

δ₀ and δ₁ = parameters to be estimated

e = Euler number

ε_i = error in the tree i.

Tezains, localizada geográficamente en 24° 48' 16.98" - 25° 13' 47.25" LN y 105° 53' 9.81"-106° 12' 52.58" LO (Figura 1). La superficie total es 61 089 ha, de las cuales 28 636 ha tienen producción maderable (Quiñonez-Barraza, Zhao, De los Santos Posadas, & Corral-Rivas, 2018). El clima principal es templado frío, la temperatura media anual varía de 5 a 12 °C y la precipitación media anual es de 840 mm (García, 2004; Quiñonez-Barraza et al., 2019). Alrededor del 85 % de los rodales son incoetáneos y mezclados y están representados por los géneros *Pinus*, *Quercus*, *Juniperus*, *Cupressus*, *Pseudotsuga*, *Arbutus* y *Alnus*. Los rodales han sido manejados de acuerdo con el sistema forestal de cubierta continua con el sistema de selección individual y regeneración natural, o el sistema de manejo forestal de rotación caracterizado por tres o cuatro aclareos y corta de regeneración (Pukkala & Gadow, 2011; Quiñonez-Barraza et al., 2018). El ciclo de corta es de 15 años (Quiñonez-Barraza et al., 2018).

Los árboles muestreados se seleccionaron aleatoriamente en rodales mezclados para cubrir las clases de copas, densidades, alturas, diámetros normales, estructuras de rodal, edades y productividades (Figura 1). Todos los árboles se cortaron lo más cercano al suelo; cada árbol caído fue seccionado y medido a 1.3 m, y subsecuentemente cada 2 m hasta la punta del árbol. En cada sección de corte se midió el DBH, H comercial y número de anillos de crecimiento. El crecimiento en diámetro se examinó con el ancho de los anillos de crecimiento anual en la sección transversal del DBH. En los árboles, 601 y 760 mediciones repetidas de H-DBH, H-A, y DBH-A se consideraron para Pa y Pd, respectivamente. Un resumen de la base de datos de los árboles individuales y las mediciones de las variables de análisis troncales para cada especie se muestra en el Cuadro 1. La Figura 2 ilustra la relación del DBH con corteza (DBHob) como función del DBH sin corteza (DBHib) correspondiente a la sección transversal a 1.3 m y la Figura 3 muestra las tendencias para las relaciones H-DBHob, H-A y DBHob-A. La H correspondiente a una edad para una sección transversal específica se estimó con el método de Carmean (Carmean, 1972; Dyer & Bailey, 1987). Con los datos de análisis troncales, cuatro relaciones se probaron y modelaron para cada especie: (1) DBHob-DBHib, (2) H-DBHob (H-DBH), (3) H-A en la sección transversal del DBH y (4) DBHob-A (DBH-A) en la sección transversal del DBH.

Sistemas de ecuaciones H-DBH-A

El DBHob se modeló con el DBHib como variable predictora. Para este propósito, se utilizaron las ecuaciones potencial, lineal y exponencial:

$$DBHob_i = \delta_0 DBHib_i^{\delta_1} + \varepsilon_i$$

$$DBHob_i = \delta_0 + \delta_1 DBHib_i + \varepsilon_i$$

$$DBHob_i = \delta_0 e^{(\delta_1 DBHib_i)} + \varepsilon_i$$

Table 1. Variables of sampled trees (1) and stem analysis (2) of *Pinus arizonica* and *Pinus durangensis* in mixed-species stands of Durango, Mexico.

Cuadro 1. Variables de árboles muestreados (1) y análisis troncales (2) de *Pinus arizonica* y *Pinus durangensis* en rodales mezclados de Durango, México.

Data/ Datos	Variable	<i>Pinus arizonica</i>					<i>Pinus durangensis</i>				
		n	Min	Max/ Máx	Mean/ Promedio	SD/ DE	n	Min	Max/ Máx	Mean/ Promedio	S/ DE
1	H (m)	46	8.3	30.5	18.1	4.7	66	8.7	26.5	16.1	4.6
	DBH (cm)		14.0	51.0	27.2	10.3		13.0	45.0	24.6	8.9
	A (years/años)		39.0	190.0	76.7	29.8		35.0	172.0	75.2	30.7
2	H (m)	601	1.3	30.5	11.4	6.5	760	1.3	26.5	9.9	5.7
	DBHib (cm)		0.0	44.0	14.5	9.6		0.0	43.6	12.4	8.4
	DBHob (cm)		0.0	48.7	16.3	10.7		0.0	46.5	14.2	9.1
	A (years/años)		3.0	190.0	43.1	27.8		2.0	172.0	42.5	27.6
	A-DBH (years/años)		0.0	181.0	34.9	27.9		0.0	167.0	34.7	27.6

n = number of observations, Min = minimum, Max = maximum, SD = standard deviation, H = height, DBH = diameter at breast height, DBHib = outside-bark DBH, DBHob = inside-bark DBH, A = number of rings on each tree section, A-DBH = age on DBH cross section (i.e., number of rings on 1.3 m cross section).

n = número de observaciones, Mín = mínimo, Máx = máximo, DE = desviación estándar, H = altura, DBH = diámetro normal, DBHib = DBH sin corteza, DBHob = DBH con corteza, A = número de anillos en cada sección del árbol, A-DBH = edad en la sección transversal del DBH (i. e., número de anillos en la sección transversal de 1.3 m).

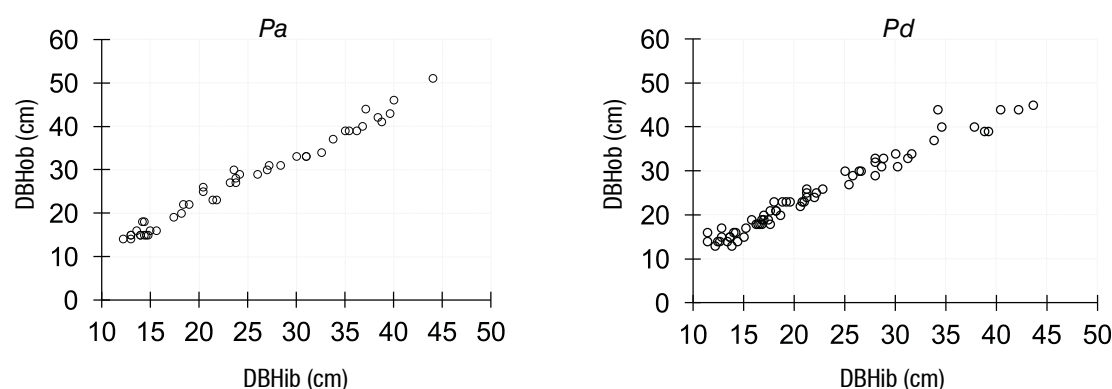


Figure 2. Outside-bark DBH (DBHob) and inside-bark DBH (DBHib) in cross section at 1.3 m for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).

Figura 2. Diámetro normal con corteza (DBHob) y sin corteza (DBHib) en la sección transversal de 1.3 m en *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).

The power equation outperformed the others in a preliminary analysis. Therefore, this relationship was used to predict the DBHob for each measurement in the cross section of the DBHib.

H-DBH, H-A and DBH-A relationships

A prediction model based on the Chapman-Richards equation (Richards, 1959) was used to model H-DBH, H-A and DBH-A relationships. The equation with the lower asymptote (A1) is represented in the following equation:

donde,
 $DBHob_i$ = DBH con corteza (cm) en el árbol i
 $DBHib_i$ = DBH sin corteza (cm) en el árbol i
 δ_0 y δ_1 = parámetros a ser estimados
 e = número de Euler
 ε_i = error en el árbol i .

La ecuación potencial superó a las otras en un análisis preliminar. Por tanto, esta relación se usó para predecir el DBHob para cada medición en la sección transversal del DBHib.

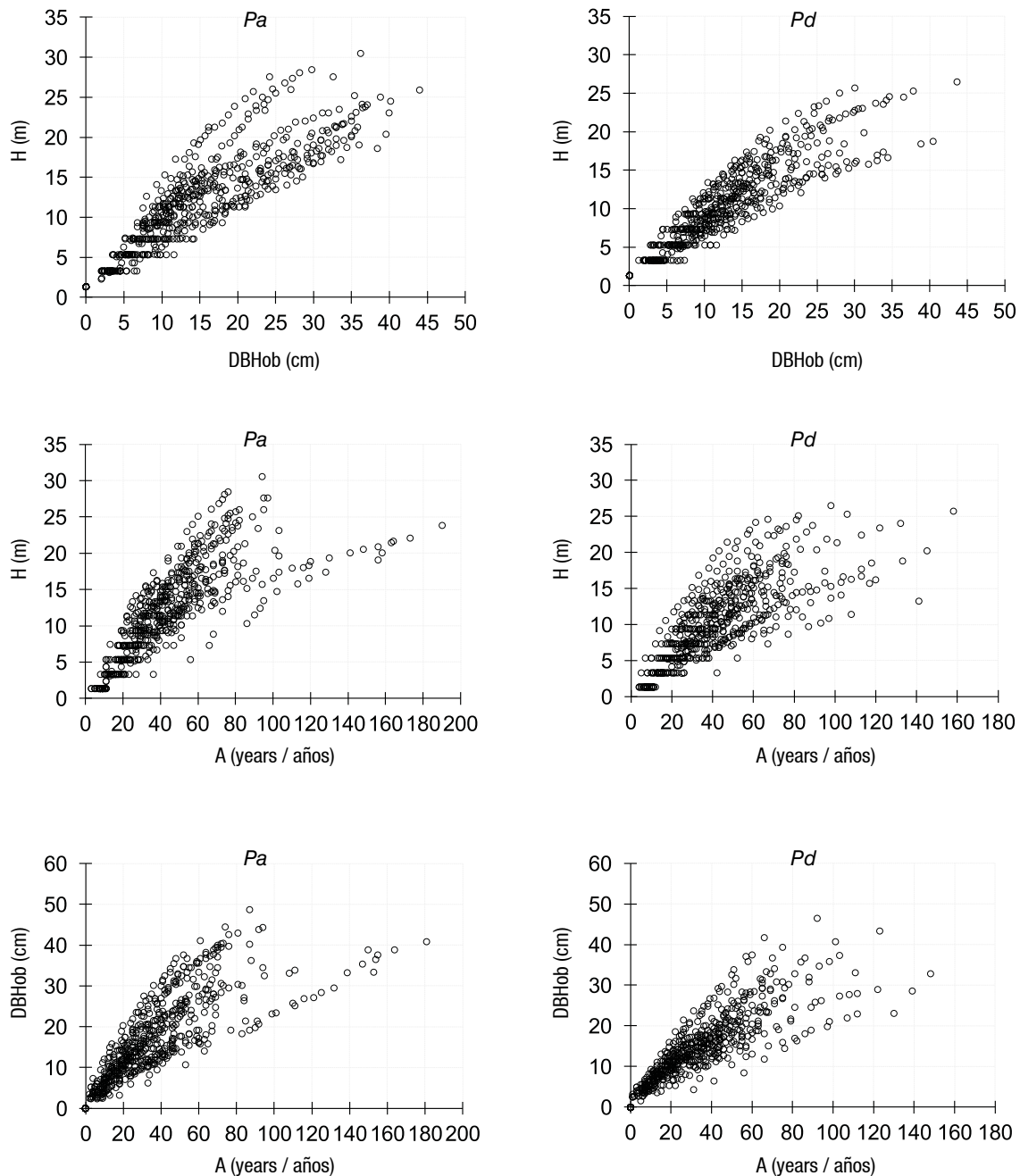


Figure 3. Distribution of H-DBH, H-A and DBH-A relationships (H = height, DBH = diameter at breast height and A = age) for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd), from repetitive measurements of stem analysis.

Figura 3. Distribución de las relaciones H-DBH, H-A y DBH-A (H = altura, DBH = diámetro normal y A = edad) para *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd), a partir de mediciones repetitivas de análisis troncales.

$$Y_{ij} = Al + \alpha_0(1 - e^{-\alpha_1 X_{ij}})^{\alpha_2} + \varepsilon_{ij}$$

where,

Y_{ij} = H j (m) or the DBHob j (cm) in the tree i

X_{ij} = DBHob j (cm) or the age j (A; years) in the DBH cross section of the tree i

α_0 , α_1 and α_2 = parameters to be estimated

e = Euler number

ε_{ij} = error j of tree i.

Relaciones H-DBH, H-A y DBH-A

Un modelo de predicción basado en la ecuación de Chapman-Richards (Richards, 1959) se utilizó para modelar las relaciones H-DBH, H-A y DBH-A. La ecuación con la asíntota inferior (Al) es representada en la ecuación siguiente:

$$Y_{ij} = Al + \alpha_0(1 - e^{-\alpha_1 X_{ij}})^{\alpha_2} + \varepsilon_{ij}$$

In the relations *H-DBH* and *H-A*, *Al* is equal to 1.3 m when *DBH* or *A* is equal to zero. In the *DBH-A* relationship, *Al* is equal to zero when *A* is equal to zero.

The generalized algebraic difference approach (GADA), proposed by Cieszewski and Bailey (2000), was used as a projection equation. The GADA equation reported by Quiñonez-Barraza et al. (2015) was reparameterized with *Al*, and the two-state equation is given by:

$$Y_{2ij} = Al + e \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{\ln(Y_{1ij} - Al) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\alpha_1 X_{1ij}}) + \beta_2} \right) \right]$$

$$(1 - e^{-\alpha_1 X_{2ij}}) \left[\frac{\ln(Y_{1ij} - Al) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\alpha_1 X_{1ij}}) + \beta_2} \right] + \varepsilon_{2ij}$$

where,

Y_{2ij} = *H j* in the *DBHob j* of the tree *i* in state 2, *H j* at *A j* of the tree *i* in state 2, *DBHob j* at *A j* in the tree *i* in state 2, for the relationships *H-DBH*, *H-A* and *DBH-A*, respectively

Y_{1ij} = *H j* in the *DBHob j* in the tree *i* in state 1, *H j* at *A j* in the tree *i* in state 1, and *DBHob j* at *A j* in the tree *i* in state 1, for the relationships *H-DBH*, *H-A* y *DBH-A*, respectively

β_1 , β_2 and α_1 = global parameters to be estimated

ln = natural logarithm

ε_{2ij} = residuals of the *H j* at the *DBHob j* in the tree *i* in state 2, the *H j* at the *A j* in the tree *i* in state 2, and the *DBHob j* at the *A j* in the tree *i* in state 2, for the relations *H-DBH*, *H-A* and *DBH-A*, respectively

X_{1ij} and X_{2ij} = *DBHob j* or *A j* in the tree *i* in states 1 and 2

In this case, the parameter α_1 is compatible with the prediction equation for all relationships, and $Y_{2ij} = 1.3$ when $DBHob_{2ij} = 0$, $Y_{2ij} = 1.3$ when $A_{2ij} = 0$, and $Y_{2ij} = 0$ when $A_{2ij} = 0$ for the relationships *H-DBH*, *H-A* and *DBH-A*, respectively.

Variance-Covariance matrix

In the variance-covariance matrix, a data arrangement was used in the repetitive measurements of *DBH* or *A* (*j*). Y_{ij} y X_{ij} denote the measurement *j* ($j = 1, 2, \dots, m$) in the tree *i* ($i = 1, 2, \dots, n$), $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im})^T$ and $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im})^T$ the growth series *i* for a given measurement of *DBHob j* or *A j*, respectively. The average *H* and *DBHob* (ε) and the variance-covariance matrix (Σ) for *n* trees, given the *DBH* and *A*, were expressed according to Wang, Kane, and Zhao (2017):

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \text{ and } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

Under the seemingly unrelated regression method (SUR), the system of prediction and projection

donde,

Y_{ij} = *H j* (m) o el *DBHob j* (cm) en el árbol *i*

X_{ij} = *DBHob j* (cm) o la edad *j* (*A*; años) en la sección transversal del *DBH* del árbol *i*

α_0 , α_1 y α_2 = parámetros a ser estimados

e = número de Euler

ε_{ij} = error *j* del árbol *i*.

En las relaciones *H-DBH* y *H-A*, *Al* es igual a 1.3 m cuando el *DBH* o la *A* son igual a cero. En la relación *DBH-A*, *Al* es igual a cero cuando *A* es igual a cero.

El enfoque de ecuaciones en diferencia algebraica generalizada (GADA), propuesto por Cieszewski and Bailey (2000), se usó como ecuación de proyección. La ecuación GADA reportada por Quiñonez-Barraza et al. (2015) fue reparametrizada con *Al*, y la ecuación en dos estados es dada por:

$$Y_{2ij} = Al + e \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{\ln(Y_{1ij} - Al) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\alpha_1 X_{1ij}}) + \beta_2} \right) \right]$$

$$(1 - e^{-\alpha_1 X_{2ij}}) \left[\frac{\ln(Y_{1ij} - Al) - \beta_1}{\ln(1 - e^{-\alpha_1 X_{1ij}}) + \beta_2} \right] + \varepsilon_{2ij}$$

donde,

Y_{2ij} = *H j* en el *DBHob j* del árbol *i* en el estado 2, la *H j* a la *A j* del árbol *i* en el estado 2, y el *DBHob j* a la *A j* en el árbol *i* en el estado 2, para las relaciones *H-DBH*, *H-A* y *DBH-A*, respectivamente

Y_{1ij} = *H j* en el *DBHob j* del árbol *i* en el estado 1, la *H j* a la *A j* del árbol *i* en el estado 1, y el *DBHob j* a la *A j* en el árbol *i* en el estado 1, para las relaciones *H-DBH*, *H-A* y *DBH-A*, respectivamente

β_1 , β_2 y α_1 = parámetros globales a ser estimados

ln = logaritmo natural

ε_{2ij} = residuales de la altura *j* en el *DBHob j* del árbol *i* en el estado 2, de la *H j* a la *A j* del árbol *i* en el estado 2, y del *DBHob j* a la *A j* en el árbol *i* en el estado 2, para las relaciones *H-DBH*, *H-A* y *DBH-A*, respectivamente

X_{1ij} y X_{2ij} = *DBHob j* o la *A j* del árbol *i* en los estados 1 y 2

En este caso, el parámetro α_1 es compatible con la ecuación de predicción para todas las relaciones, y $Y_{2ij} = 1.3$ cuando $DBHob_{2ij} = 0$, $Y_{2ij} = 1.3$ cuando $A_{2ij} = 0$, y $Y_{2ij} = 0$ cuando $A_{2ij} = 0$ para las relaciones *H-DBH*, *H-A* y *DBH-A*, respectivamente.

Matriz de varianza-covarianza

En la matriz de varianzas-covarianza se utilizó un arreglo de datos en las mediciones repetitivas de *DBH* o *A* (*j*). La Y_{ij} y X_{ij} denotan la medición *j* ($j = 1, 2, \dots, m$) en el árbol *i* ($i = 1,$

equations for the *H-DBH* relationship can assume the following variance-covariance matrix:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 I & \sigma_{Y_1 Y_2} I \\ \sigma_{Y_1 Y_2} I & \sigma_{Y_2}^2 I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_{Y_1 Y_2} \\ \sigma_{Y_1 Y_2} & \sigma_{Y_2}^2 \end{pmatrix}$$

where I is the order identity matrix $L \times L$ and $\sigma_{Y_1 Y_2}^2 = E(\varepsilon_{Y_1 X} \varepsilon_{Y_2 X'})$ for X_1 or $X_2 = 1, 2, \dots, L$; X_1 or X_2 represent the *DBH* or *A* for the tree i and imply constant variance and covariance between each measurement of the tree i (Zellner, 1962).

Fitting and evaluation of the equations

The *DBHob-DBHib* equations were fitted by ordinary least squares (OLS) in the SAS/ETS® Model procedure (SAS Institute Inc., 2015). The Dummy variables approach (DVA) described by Cieszewski, Harrison, and Martin (2000) was used to simultaneously fit the prediction and projection equations. This method has been used in the *H-A* relationship with common and tree-specific parameters in site index equations (Diéguez-Aranda, Burkhart, & Amateis, 2006; García-Espinoza et al., 2019; Wang, Borders, & Zhao, 2008). In this case, for the projection equations, the initial mean values of *H* and *DBH* (Y_{ij}) and *DBH* or *A* (X_{ij}) were used as specific parameters according to the concept of base-age invariant site index equations, described by Bailey and Clutter (1974); the specific parameters explain the variation between each tree (Ni & Zhang, 2007).

The dummy variables for declaring the specific parameters were represented according to Wang et al. (2008), as $\lambda = \sum_{i=1}^n \gamma_i D_i$ where λ indicates the specific parameter, D_i is the dummy variable with values of 1 for the tree i and 0 otherwise, and γ_i is the specific parameter. The prediction and projection equations were fitted simultaneously with the SUR method in the SAS/ETS® Model procedure (SAS Institute Inc., 2015). The SAS code was based on the DVA proposed by Cieszewski et al. (2000) with modifications (Appendix A). The parameter α_i was compatible between the prediction and projection equations. Additionally, a continuous autoregressive error model (corCAR2) was added to the prediction and projection equations, to correct for the autocorrelation of errors in each tree (Diéguez-Aranda et al., 2006; Lu & Zhang, 2012; Zimmerman et al., 2001). The goodness of fit of the equations was evaluated with the adjusted coefficient of determination (R^2), the root mean square error (RMSE), the Akaike's information criterion (AIC) and the mean bias (E). Additionally, the standard error of estimation (SEE), relative SEE ($RSEE$), mean bias (E) and relative E (RE) were calculated to evaluate the performance of the equations by relative classes of *Hs* and *DBHs*. The statistics were calculated with the following equations:

$2, \dots, n$), $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im})^T$ y $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im})^T$ la serie de crecimiento i para una medición del *DBHib* j o *A* j datos, respectivamente. La *H* y *DBHob* promedio (ε) y la matriz de varianza-covarianza (Σ) para n árboles, dados los *DBH* y *A*, fue expresada de acuerdo con Wang, Kane, y Zhao (2017):

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

Bajo el método de regresión aparentemente no relacionada (SUR), el sistema de ecuaciones de predicción y proyección para la relación *H-DBH* puede asumir la matriz de varianza-covarianza siguiente:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 I & \sigma_{Y_1 Y_2} I \\ \sigma_{Y_1 Y_2} I & \sigma_{Y_2}^2 I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_{Y_1 Y_2} \\ \sigma_{Y_1 Y_2} & \sigma_{Y_2}^2 \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad de orden $L \times L$ y $\sigma_{Y_1 Y_2}^2 = E(\varepsilon_{Y_1 X} \varepsilon_{Y_2 X'})$ para X_1 o $X_2 = 1, 2, \dots, L$; X_1 o X_2 representan los *DBH* o *A* para el árbol i e implican varianza y covarianza constantes entre cada medición del árbol i (Zellner, 1962).

Ajuste y evaluación de las ecuaciones

Las ecuaciones de *DBHob-DBHib* se ajustaron por mínimos cuadrados ordinarios (OLS) en el procedimiento Model de SAS/ETS® (SAS Institute Inc., 2015). El enfoque de variables Dummy (DVA) descrito por Cieszewski, Harrison, y Martin (2000) se usó para ajustar simultáneamente las ecuaciones de predicción y proyección. Este método ha sido utilizado en la relación *H-A* con parámetros comunes y específicos para cada árbol en ecuaciones de índice de sitio (Diéguez-Aranda, Burkhart, & Amateis, 2006; García-Espinoza et al., 2019; Wang, Borders, & Zhao, 2008). En este caso, para las ecuaciones de proyección, los valores iniciales promedio de la *H* y *DBH* (Y_{ij}) y *DBH* o *A* (X_{ij}) se utilizaron como parámetros específicos de acuerdo con el concepto de ecuaciones de índice de sitio invariantes de la edad base, descrito por Bailey y Clutter (1974); los parámetros específicos explican la variación entre cada árbol (Ni & Zhang, 2007).

Las variables indicadoras para declarar los parámetros específicos se representaron de acuerdo con Wang et al. (2008), como $\lambda = \sum_{i=1}^n \gamma_i D_i$, donde λ indica el parámetro específico, D_i es la variable indicadora con valores de 1 para el árbol i y 0 en caso contrario, y γ_i es el parámetro específico. Las ecuaciones de predicción y proyección se ajustaron simultáneamente con el método SUR en el procedimiento Model de SAS/ETS® (SAS Institute Inc., 2015). El código SAS se basó en el DVA propuesto por Cieszewski et al. (2000) con modificaciones (Apéndice A). El parámetro α_i fue compatible entre las ecuaciones de predicción y proyección. Adicionalmente, un modelo

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \times \frac{n-1}{n-1-k}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{n}}$$

$$AIC = n \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{n} \right) + 2k$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)}{n}$$

$$SEE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{n-k}}$$

$$RSEE = \frac{SEE}{\bar{O}} \times 100$$

$$RE = \frac{E}{\bar{O}} \times 100$$

where,

O_i , \hat{P}_i and \bar{O} = observed, predicted and average observed values for the dependent variable, respectively.

n = number of observations

k = number of parameters.

Results and discussion

The preliminarily adjusted equations modeled the *DBHob* as a function of the *DBHib* for each species and the power was better for both species. The results of this equation allowed the modeling of *H-DBH* and *DBH-A* relationships with repetitive measurements of *DBHib* measured in the *DBH* cross section. Table 2 shows the estimated parameters and the statistics of fitting of the potential, linear and exponential equations. The values of R^2 with the power equation were 0.9804 and 0.9664 for *Pa* and *Pd*, respectively. The linear equation was similar to the power, but the intercept parameter was significantly equal to zero ($\alpha = 0.05$) for *Pa*, while the exponential equation showed the poorest fitting.

The application of the *H-DBH* or *DBH-A* equations should use measurements of the *DBHob*, because it is usually measured in forest inventories and used to predict *H*, which reduces the problems associated with measurement error (MacPhee et al., 2018; Misik et al., 2016). If *DBH* measurements are derived from stem analysis data, each *DBHib* measurement should be transformed to *DBHob*. Then, the *H-DBH* relationship can be established to predict *H*, which is one of the most important characteristics in forest structure (Mehtatalo et al., 2015; Wang et al., 2017). The *H* and *DBH* variables

autorregresivo continuo de los errores (corCAR2) se agregó a las ecuaciones de predicción y proyección, para corregir la autocorrelación de los errores en cada árbol (Diéguez-Aranda et al., 2006; Lu & Zhang, 2012; Zimmerman et al., 2001). La bondad de ajuste de las ecuaciones se evaluó con el coeficiente de determinación ajustado (R^2), la raíz del cuadrado medio del error (*RMSE*), el criterio de información de Akaike (*AIC*) y el sesgo promedio (*E*). Adicionalmente, el error estándar de la estimación (*SEE*), *SEE* relativo (*RSEE*), sesgo promedio (*E*) y *E* relativo (*RE*) se calcularon para evaluar el desempeño de las ecuaciones por clases relativas de *H* y *DBH*. Los estadísticos se calcularon con las ecuaciones siguientes:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \times \frac{n-1}{n-1-k}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{n}}$$

$$AIC = n \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{n} \right) + 2k$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)}{n}$$

$$SEE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \hat{P}_i)^2}{n-k}}$$

$$RSEE = \frac{SEE}{\bar{O}} \times 100$$

$$RE = \frac{E}{\bar{O}} \times 100$$

donde,

O_i , \hat{P}_i y \bar{O} = valores observado, predicho y observado promedio de la variable dependiente respectivamente.

n = número de observaciones

k = número de parámetros.

Resultados y discusión

Las ecuaciones ajustadas preliminarmente modelaron el *DBHob* en función del *DBHib* para cada especie y la potencial fue mejor para ambas especies. Los resultados de esta ecuación permitieron modelar las relaciones *H-DBH* y *DBH-A* con mediciones repetitivas del *DBHib* en la sección transversal del *DBH*. En el Cuadro 2 se muestran los parámetros estimados y los estadísticos de ajuste de las ecuaciones potencial, lineal y exponencial. Los valores del R^2 con la ecuación potencial fueron 0.9804 y 0.9664 para *Pa* y *Pd*, respectivamente. La ecuación lineal fue similar a la potencial, pero el parámetro del intercepto fue significativamente igual a cero ($\alpha = 0.05$)

Table 2. Estimated parameters and fitting statistics of the equations to model the outside-bark diameter at breast height (DBHob) for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).

Cuadro 2. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de las ecuaciones para modelar el diámetro normal con corteza (DBHob) de *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).

Equation/ Ecuación	Species/ Especie	Parameter/ Parámetro	Estimator/ Estimador	EE	<i>t</i>	<i>P-t</i>	R ²	RMSE (cm)	AIC	E (cm)
Power/ Potencial	Pa	δ_0	1.2050	0.0896	13.45	<0.0001	0.9804	1.4263	38.67	-0.0045
		δ_1	0.9774	0.0216	45.26	<0.0001				
	Pd	δ_0	1.3913	0.1068	13.03	<0.0001	0.9664	1.6172	69.46	-0.0203
		δ_1	0.9297	0.0223	41.73	<0.0001				
Linear/ Lineal	Pa	δ_0	0.5511	0.6261	0.89	0.3801	0.9804	1.4608	29.26	8.07×10 ⁻¹⁶
		δ_1	1.0962	0.0228	48.07	<0.0001				
	Pd	δ_0	1.6404	0.5936	2.76	0.0075	0.9653	1.6697	71.63	-2.28×10 ⁻¹⁵
		δ_1	1.0390	0.0208	49.86	<0.0001				
Exponential/ Exponencial	Pa	δ_0	10.4381	0.3670	28.45	<0.0001	0.9589	2.1186	78.34	-0.0509
		δ_1	0.0370	0.0012	32.10	<0.0001				
	Pd	δ_0	10.8086	0.3952	27.35	<0.0001	0.9226	2.4949	124.65	-0.0804
		δ_1	0.0352	0.0011	33.30	<0.0001				

EE = asymptotic standard error; *t* = Student's *t*-distribution value; *P-t* = probability associate with Student's *t*-distribution value; R² = adjusted coefficient of determination; RMSE = root mean square error; AIC = Akaike's information criterion; E = mean bias.

EE = error estándar asintótico; *t* = valor de *t* de Student; *P-t* = valor de la probabilidad asociada a *t* de Student; R² = coeficiente de determinación ajustado; RMSE = raíz del cuadrado medio del error; AIC = criterio de información de Akaike; E = sesgo promedio.

can be predicted and projected as functions of the *A* of the *DBH* cross section and used in the characterization of stand productivity (Duan et al., 2018; Fu et al., 2018). The estimated parameters in the three relationships studied are listed in Table 3. All parameters, both common and specific, were significantly different from zero at a significance level of 5 %.

Fitting statistics such as R², RMSE, AIC and *E* are shown in Table 4. The variance-covariance matrices for the prediction and projection equations, for each relationship and species, and the descriptive statistics for the specific adjusted parameters are found in [Appendix B1](#). For the *H-DBH* relationship, the prediction model had R² values of 0.8210 and 0.8521 and RMSE values of 2.7238 m and 2.1717 m, for *Pa* and *Pd*, respectively. The projection equation showed better results than the prediction equation. The R² values were 0.9611 and 0.9595, while the RMSE values were 1.2212 m and 1.0865 m, for *Pa* and *Pd*, respectively. In the *H-A* equations, the results were similar among species; the R² values were 0.7710 and 0.7086 with the prediction equation and 0.9505 and 0.9435 with the projection equation for *Pa* and *Pd*, respectively. In the *DBH-A* relationship, the prediction equation showed R² values of 0.7338 and 0.7200, while the projection equation had values of 0.9669 and 0.9560 for *Pa* and *Pd*, respectively.

para *Pa*, mientras que la ecuación exponencial mostró el ajuste más pobre.

La aplicación de las ecuaciones *H-DBH* o *DBH-A* debería utilizar mediciones del *DBHob*, debido a que este se mide usualmente en los inventarios forestales y se utiliza para predecir *H*, lo que reduce los problemas asociados con el error de mediciones (MacPhee et al., 2018; Misik et al., 2016). Si las mediciones del *DBH* provienen de datos de análisis troncales, cada medición de *DBHib* debería ser transformada a *DBHob*. Después, la relación *H-DBH* puede ser establecida para predecir la *H*, que es una de las características más importantes en la estructura de bosques (Mehtätalo et al., 2015; Wang et al., 2017). Las variables *H* y *DBH* pueden ser predichas y proyectadas como funciones de la *A* de la sección transversal del *DBH* y usadas en la caracterización de la productividad de rodales (Duan et al., 2018; Fu et al., 2018). Los parámetros estimados en las tres relaciones estudiadas son listados en el Cuadro 3. Todos los parámetros, tanto comunes como específicos, fueron significativamente diferentes de cero a un nivel de significancia de 5 %.

Los estadísticos de ajuste, tales como R², RMSE, AIC y *E* se muestran en el Cuadro 4. Las matrices de varianzas-covarianzas para las ecuaciones de predicción y proyección, para cada relación y especie, y las estadísticas descriptivas de los parámetros específicos

Table 3. Estimated parameters and asymptotic standard errors (in brackets) of the prediction and projection equations for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).**Cuadro 3. Parámetros estimados y errores estándar asintóticos (entre paréntesis) de las ecuaciones de predicción y proyección de *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).**

Species/ Especies	Estimated Parameters/Parámetros estimados								
	β_1	β_2	α_0	α_1	α_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4
	H-DBH								
Pa	6.0109 (1.0712)	-1.4374 (0.5944)	24.2726 (0.7958)	0.0550 (0.0037)	1.4969 (0.0635)	0.9005 (0.0238)	0.7853 (0.0207)	1.1178 (0.0173)	0.9204 (0.0132)
Pd	4.9970 (0.6662)	-0.9132 (0.3592)	24.3283 (0.7731)	0.0577 (0.0034)	1.7079 (0.0638)	0.8263 (0.0247)	0.7371 (0.0231)	1.1023 (0.0161)	0.9059 (0.0128)
	H-A								
Pa	6.5262 (1.1825)	-3.0063 (1.1358)	25.5167 (0.8633)	0.0168 (0.0014)	0.8620 (0.0365)	0.7201 (0.0246)	0.8214 (0.0116)	1.0095 (0.0199)	0.8357 (0.0178)
Pd	9.2037 (2.4757)	-5.7387 (2.5125)	25.7530 (1.1230)	0.0111 (0.0011)	0.7635 (0.0269)	0.7090 (0.0234)	0.8112 (0.0109)	1.0530 (0.0171)	0.8718 (0.0141)
	DBH-A								
Pa	7.8807 (1.5484)	-4.1804 (1.6879)	49.9506 (2.7101)	0.0110 (0.0012)	0.9388 (0.0364)	0.9640 (0.0149)	0.8556 (0.0155)	1.0589 (0.0096)	0.9479 (0.0085)
Pd	7.9283 (0.1416)	-3.9876 (0.1487)	70.3490 (10.9112)	0.0033 (0.0009)	0.7142 (0.0194)	0.9313 (0.0164)	0.8572 (0.0147)	1.1172 (0.0079)	0.9534 (0.0069)

H = height, DBH = diameter at breast height, A = age, ρ_1 and ρ_2 are the parameters of the corCAR2 model for the projection equation, while ρ_3 and ρ_4 correspond to the prediction equation.

H = altura, DBH = diámetro normal, A = edad, ρ_1 y ρ_2 son los parámetros del modelo corCAR2 para la ecuación de proyección, mientras que ρ_3 y ρ_4 corresponden a la ecuación de predicción.

Table 4. Fitting statistics of the prediction and projection equations for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).**Cuadro 4. Estadísticos de ajuste de las ecuaciones de predicción y proyección para *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).**

Species/ Especies	Model/Modelo	Fitting Statistics/Estadísticos de ajuste				
		k	R ²	RMSE	AIC	E
	H-DBH					
Pa	Prediction/Predicción	5	0.8210	2.7238	1216	0.1969
	Projection/Proyección	50	0.9611	1.2212	342	0.0365
Pd	Prediction/Predicción	5	0.8521	2.1717	1190	0.2346
	Projection/Proyección	70	0.9595	1.0865	268	0.1668
	H-A					
Pa	Prediction/Predicción	5	0.7710	3.0961	1362	0.3411
	Projection/Proyección	50	0.9505	1.3776	487	0.2631
Pd	Prediction/Predicción	5	0.7086	3.0527	1704	0.4403
	Projection/Proyección	70	0.9435	1.2835	521	0.2531
	DBH-A					
Pa	Prediction/Predicción	5	0.7338	5.4510	2058	0.8642
	Projection/Proyección	50	0.9669	1.8731	849	0.2017
Pd	Prediction/Predicción	5	0.7200	4.7917	2389	0.7969
	Projection/Proyección	70	0.9560	1.8142	1047	0.2378

H = height, DBH = diameter at breast height, A = age, k = number of parameters in the equation, R² = adjusted coefficient of determination, RMSE = root mean square error (H, m; DBH, cm), AIC = Akaike's information criterion, E = mean bias (H, m; DBH, cm).

H = altura, DBH = diámetro normal, A = edad, k = número de parámetros en la ecuación, R² = coeficiente de determinación ajustado, RMSE = raíz del cuadrado medio del error (H, m; DBH, cm), AIC = criterio de información de Akaike, E = sesgo promedio (H, m; DBH, cm).

The DVA guarantee common and tree-specific parameters in the projection equations. This procedure is similar to the non-linear mixed effect modeling (NLMEM) approach for the H - A relationship. The DVA also considers a specific or random parameter for each tree (Diéguez-Aranda et al., 2006; Wang et al., 2008). The H - DBH , H - A and DBH - A relationships were fitted as equation systems of prediction and projection with the compatible growth rate parameter (α_i). The projection equations presented specific parameters for each tree (summary information is found in [Appendix B2](#)). The GADA equation used (Quiñonez-Barraza et al., 2015) allowed the projection of exogenous variables with common and tree-specific parameters for the established relationships.

The values of SEE and E and the relative ones ($RSEE$ and RE) for the prediction and projection equations by relative H classes, in the relations H - DBH and H - A , are showed in Table 5, and by relative DBH classes for DBH - A relationship are shown in Table 6. Pa had higher values of SEE and E than Pd for all data and by relative classes of H or DBH . The largest values of SEE and E were observed in the first relative classes of H and DBH for both species.

In the H - DBH relationship, percentages of gain in R^2 values between the projection and prediction equations were 14.6 % and 11.2 % and the percentages of reduction in $RMSE$ of 123.0 % and 99.9 % for Pa and Pd , respectively. In contrast, Vargas-Larreta et al. (2009) reported gains in R^2 of 1.2 % and 2.4 % and reductions in $RMSE$ of 3.72 % and 6.09 % for *Pinus cooperi* C. E. Blanco between the NLMEM and OLS procedures, respectively, with the generalized equation based on the Chapman-Richards equation and the inclusion of the quadratic mean diameter. Corral-Rivas et al. (2014) determined R^2 gains of 14 % and 2 % and $RMSE$ reductions of 33 % and 5.2 % with NLMEM and OLS between generalized and local models based on the Chapman-Richards equation, respectively, for the genus *Pinus*. Similarly, Crecente-Campo et al. (2014) indicated an $RMSE$ reduction of 14.9 % between general and local equations fitted by OLS for all species combined, as well as a 7.5 % reduction between a general and local model fitted by NLMEM. Therefore, the local equations developed in this study perform better than the equations reported for the mixed and uneven-aged forests of Durango, Mexico. The H - DBH relationship fitted by NLMEM usually considers the variability between stand-stand, plot-plot, or ecoregion-ecoregion (Calama & Montero, 2004; Crecente-Campo et al., 2014; Mehtätalo et al., 2015; Paulo, Tomé, & Tomé, 2011; Rijal, Weiskittel, & Kershaw, 2012); however, in this study, the variability was assumed between tree-tree

The residual and predicted values for the prediction and projection equations in the H - DBH , H - A , and DBH - A relationships are shown in Figures 4 and 5. In all cases,

ajustados se encuentran en el [Apéndice B1](#). En la relación H - DBH , el modelo de predicción tuvo valores del R^2 de 0.8210 y 0.8521 y $RMSE$ de 2.7238 m y 2.1717 m, para Pa y Pd , respectivamente. La ecuación de proyección mostró resultados mejores que la de predicción. Los valores del R^2 fueron 0.9611 y 0.9595, mientras que los de la $RMSE$ fueron 1.2212 m y 1.0865 m, para Pa y Pd , respectivamente. En las ecuaciones de H - A , los resultados fueron similares entre especies; los valores del R^2 fueron 0.7710 y 0.7086 con la ecuación de predicción y de 0.9505 y 0.9435 con la ecuación de proyección para Pa y Pd , respectivamente. En la relación DBH - A , la ecuación de predicción mostró valores del R^2 de 0.7338 y 0.7200, mientras que la de proyección tuvo valores de 0.9669 y 0.9560 para Pa y Pd , respectivamente.

El enfoque DVA garantizó parámetros comunes y específicos para cada árbol en las ecuaciones de proyección. Este procedimiento es similar al enfoque de modelos no lineales con efectos mixtos (NLMEM) para la relación H - A . El DVA también considera un parámetro específico o aleatorio para cada árbol (Diéguez-Aranda et al., 2006; Wang et al., 2008). Las relaciones H - DBH , H - A y DBH - A se ajustaron como sistemas de ecuaciones de predicción y proyección con el parámetro de la tasa de crecimiento (α_i) compatible. Las ecuaciones de proyección presentaron parámetros específicos para cada árbol (la información resumida se encuentra en el [Apéndice B2](#)). La ecuación GADA utilizada (Quiñonez-Barraza et al., 2015) permitió la proyección de las variables exógenas con parámetros comunes y específicos de cada árbol para las relaciones establecidas.

Los valores de SEE y E y los relativos ($RSEE$ y RE) para las ecuaciones de predicción y proyección por clases de H relativa, en las relaciones H - DBH y H - A , se indican en el Cuadro 5, y por clases de DBH relativa para DBH - A se muestran en el Cuadro 6. Pa tuvo valores más altos de SEE y E que Pd para todos los datos y por clases relativas de H o DBH . Los valores más grandes de SEE y E se observaron en las primeras clases relativas de H y DBH para ambas especies.

En la relación H - DBH , los porcentajes de ganancia en los valores del R^2 entre las ecuaciones de proyección y predicción fueron 14.6 % y 11.2 % y los de reducción de la $RMSE$ de 123.0 % y 99.9 % para Pa y Pd , respectivamente. En contraste, Vargas-Larreta et al. (2009) reportaron ganancias en R^2 de 1.2 % y 2.4 % y reducción de $RMSE$ de 3.72 % y 6.09 % para *Pinus cooperi* C. E. Blanco entre los procedimientos NLMEM y OLS, respectivamente, con la ecuación generalizada basada en la ecuación de Chapman-Richards y la inclusión del diámetro cuadrático promedio. Corral-Rivas et al. (2014) determinaron ganancias del R^2 del 14 % y 2 % y reducción de la $RMSE$ de 33 % y 5.2 % con NLMEM y OLS

Table 5. Fitting statistics for H-DBH (Height-Diameter at breast height) and H-A (Height-Age) relationships by H class for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).**Cuadro 5. Estadísticos de ajuste en las relaciones H-DBH (altura-diámetro normal) y H-A (altura-edad) por clase de H para *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).**

Relative H (%)	n	Prediction/Predicción				Projection/Proyección			
		SEE (m)	RSEE (%)	E (m)	RE (%)	SEE (m)	RSEE (%)	E (m)	RE (%)
H-DBH (Pa)									
0-30	126	1.247	40.41	-0.531	-17.21	0.850	27.53	-0.042	-1.37
30-40	40	2.396	35.20	-0.948	-13.93	1.330	19.53	-0.105	-1.54
40-50	44	2.613	30.64	-0.817	-9.58	1.586	18.60	-0.033	-0.39
50-60	49	2.681	26.68	-0.595	-5.92	1.367	13.60	0.164	1.63
60-70	67	2.786	23.01	-0.041	-0.34	1.353	11.17	0.427	3.52
70-80	85	3.028	22.06	0.069	0.50	1.352	9.85	0.416	3.04
80-90	116	3.381	20.30	0.728	4.37	1.260	7.56	0.307	1.84
90-100	74	3.814	19.80	1.409	7.32	1.378	7.15	0.294	1.53
Total	601	2.735	23.95	0.036	0.32	1.275	11.17	0.197	1.72
H-DBH (Pd)									
0-30	159	0.982	34.49	-0.187	-6.59	0.739	25.98	-0.029	-1.01
30-40	50	1.693	27.98	0.091	1.51	1.317	21.75	0.306	5.05
40-50	64	1.933	25.82	0.007	0.09	1.331	17.77	0.347	4.63
50-60	69	2.239	24.15	0.002	0.02	1.203	12.98	0.366	3.95
60-70	91	2.257	21.31	0.326	3.07	1.247	11.77	0.555	5.24
70-80	111	2.472	20.06	0.217	1.76	1.073	8.71	0.365	2.96
80-90	129	2.790	18.95	0.351	2.38	1.060	7.20	0.184	1.25
90-100	87	2.953	17.44	0.603	3.56	1.320	7.80	0.062	0.37
Total	760	2.179	21.85	0.167	1.67	1.140	11.44	0.235	2.35
H-A (Pa)									
0-30	126	2.064	66.87	-0.101	-3.26	1.473	47.70	0.368	11.94
30-40	40	2.462	36.17	-0.645	-9.48	1.514	22.24	0.113	1.66
40-50	44	2.582	30.27	-0.199	-2.34	1.655	19.40	0.410	4.81
50-60	49	3.086	30.71	-0.270	-2.68	1.548	15.41	0.363	3.61
60-70	67	3.117	25.75	0.197	1.63	1.440	11.89	0.437	3.61
70-80	85	3.179	23.17	0.540	3.94	1.406	10.25	0.519	3.78
80-90	116	3.686	22.12	0.971	5.83	1.163	6.98	0.170	1.02
90-100	74	4.243	22.03	1.268	6.58	1.469	7.62	-0.295	-1.53
Total	601	3.094	27.09	0.341	2.99	1.439	12.60	0.263	2.30
H-A (Pd)									
0-30	159	1.670	58.68	0.185	6.49	1.381	48.53	0.640	22.48
30-40	50	1.940	32.05	-0.268	-4.42	1.401	23.14	0.332	5.49
40-50	64	2.488	33.23	-0.401	-5.36	1.475	19.70	0.297	3.97
50-60	69	2.777	29.95	0.014	0.16	1.501	16.20	0.436	4.71
60-70	91	3.153	29.75	0.108	1.02	1.326	12.51	0.345	3.26
70-80	111	3.478	28.24	0.408	3.31	1.227	9.96	0.201	1.63
80-90	129	3.875	26.32	1.085	7.37	1.116	7.58	0.060	0.41
90-100	87	4.241	25.05	1.705	10.07	1.270	7.50	-0.420	-2.48
Total	760	3.059	30.68	0.440	4.42	1.347	13.51	0.253	2.54

n = number of observations, SEE = standard error of the estimate, E = mean bias, RSEE = relative standar error of the estimate, RE = relative mean bias.

n = número de observaciones, SEE = error estándar de la estimación, E = sesgo promedio, RSEE = error estándar de la estimación relativo, RE = sesgo promedio relativo.

Table 6. Fitting statistics for DBH-A (Diameter at breast height-Age) relationships by DBH class for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).

Cuadro 6. Estadísticos de ajuste en las relaciones DBH-A (diámetro normal-edad) por clase de DBH para *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).

Relative DBH (%)	n	Prediction / Predicción				Projection / Proyección			
		SEE (cm)	RSEE (%)	E (cm)	RE (%)	SEE (cm)	RSEE (%)	E (cm)	RE (%)
DBH-A (Pa)									
0-20	88	1.932	89.42	-0.233	-10.79	1.914	88.55	-0.488	-22.58
20-30	45	2.365	34.12	0.086	1.24	1.956	28.22	-0.043	-0.61
30-40	47	3.944	36.35	0.104	0.96	2.411	22.23	-0.174	-1.61
40-50	49	4.664	35.54	0.418	3.18	2.184	16.64	0.214	1.63
50-60	72	5.288	33.96	0.203	1.30	1.999	12.84	0.207	1.33
60-70	74	5.866	31.65	0.416	2.25	1.590	8.58	0.232	1.25
70-80	85	6.377	29.45	1.634	7.55	1.491	6.89	0.495	2.29
80-90	72	7.449	28.38	2.621	9.98	1.466	5.59	0.624	2.38
90-100	69	8.201	29.22	1.996	7.11	2.528	9.01	0.647	2.30
Total	601	5.518	33.79	0.864	5.29	1.945	11.91	0.202	1.23
DBH-A (Pd)									
0-20	118	1.526	79.45	-0.291	-15.17	1.088	56.67	-0.173	-9.01
20-30	57	3.071	45.12	-0.645	-9.48	1.934	28.42	-0.514	-7.55
30-40	65	3.783	38.59	-0.248	-2.53	2.130	21.73	-0.218	-2.22
40-50	72	3.959	32.02	0.178	1.44	1.616	13.07	-0.078	-0.63
50-60	82	4.744	32.12	0.318	2.15	1.893	12.81	-0.099	-0.67
60-70	92	5.164	30.16	1.431	8.36	1.644	9.60	0.347	2.03
70-80	99	6.309	33.07	0.960	5.03	1.788	9.37	0.480	2.52
80-90	93	5.718	27.01	2.173	10.26	2.022	9.55	1.045	4.94
90-100	82	7.311	30.28	2.747	11.38	2.684	11.12	0.996	4.13
Total	760	4.801	33.89	0.797	5.63	1.904	13.44	0.238	1.68

n = number of observations, SEE = standard error of the estimate, E = mean bias, RSEE = relative standar error of estimate, RE = relative mean bias.

n = número de observaciones, SEE = error estándar de la estimación, E = sesgo, RSEE = error estándar de la estimación relativo, RE = sesgo promedio relativo.

the charts showed the residual trajectories for the growth series of each tree.

The three relations of prediction and projection performed well for Pa and Pd and the inverted equations ([Appendix B3](#)) formed a global system of equations. Those inverted equations hold the four criteria cited by Bi, Fox, Li, Lei, and Pang (2012), for the H-DBH relationship and the extended H-A and DBH-A relationships. These criteria are: (1) the H-DBH, H-A, and DBH-A functions are reversible; (2) the inverted functions are continuous and monotonically increasing over a specific range of H and DBH; (3) the DBH is equal to zero when H is equal to DBH in the inverted function, and A in the cross section of the DBH is equal to zero when H or DBH are equal to A in the inverted function; (4) the inverted functions have an inflection point that is consistent with biological expectations.

entre modelos generalizados y locales basados en la ecuación de Chapman-Richards, respectivamente, para el género *Pinus*. De manera similar, Crecente-Campo et al. (2014) indicaron reducción de la RMSE de 14.9 % entre ecuaciones generales y locales ajustadas por OLS para todas las especies combinadas, así como reducción de 7.5 % entre un modelo general y local ajustados por NLMEM. Por tanto, las ecuaciones locales desarrolladas en este estudio tienen un desempeño mejor que las ecuaciones reportadas para bosques incoetáneos y mezclados de Durango, México. La relación H-DBH ajustada por NLMEM, usualmente, considera la variabilidad entre rodal-rodal, parcela-parcela o ecorregión-ecorregión (Calama & Montero, 2004; Crecente-Campo et al., 2014; Mehtatalo et al., 2015; Paulo, Tomé, & Tomé, 2011; Rijal, Weiskittel, & Kershaw, 2012); sin embargo, en este estudio, la variabilidad fue asumida entre árbol-árbol.

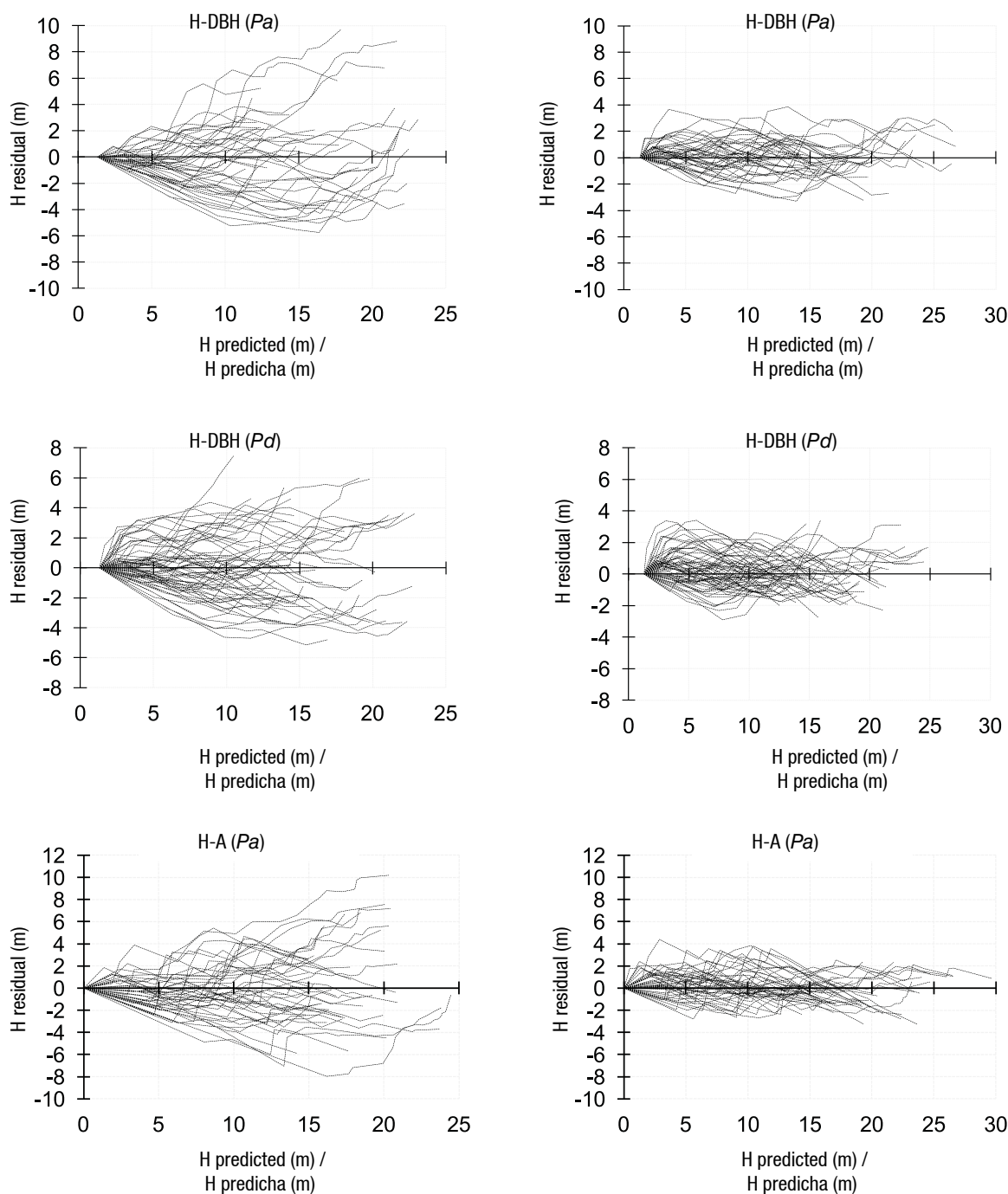


Figure 4. Residual versus predicted values for the H -DBH (Height-Diameter at breast height) and H -A (Height-Age) relationship of the prediction (left) and projection (right) equations for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).

Figura 4. Valores residuales contra predichos para la relación H -DBH (altura-diámetro normal) y H -A (altura-edad) de las ecuaciones de predicción (izquierda) y proyección (derecha) para *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).

The DVA approach is similar to NLMEM; common parameters can be compared with fixed parameters and specific parameters with random parameters (Duan et al., 2018; Wang et al., 2008). The H -A, DBH -A and H -DBH relationships may be interpreted as a site productivity index (SPI) for even-age or uneven-age forests (Duan et al., 2018; Fu et al., 2018; Wang et al., 2017). However, the usefulness of this SPI as a measure of site quality

Los valores residuales y predichos para las ecuaciones de predicción y proyección en las relaciones H -DBH, H -A y DBH -A se representan en las Figuras 4 y 5. En todos los casos, las gráficas mostraron las trayectorias de los residuales para las series de crecimiento de cada árbol.

Las tres relaciones de predicción y proyección tuvieron desempeño adecuado para Pa y Pd y las ecuaciones

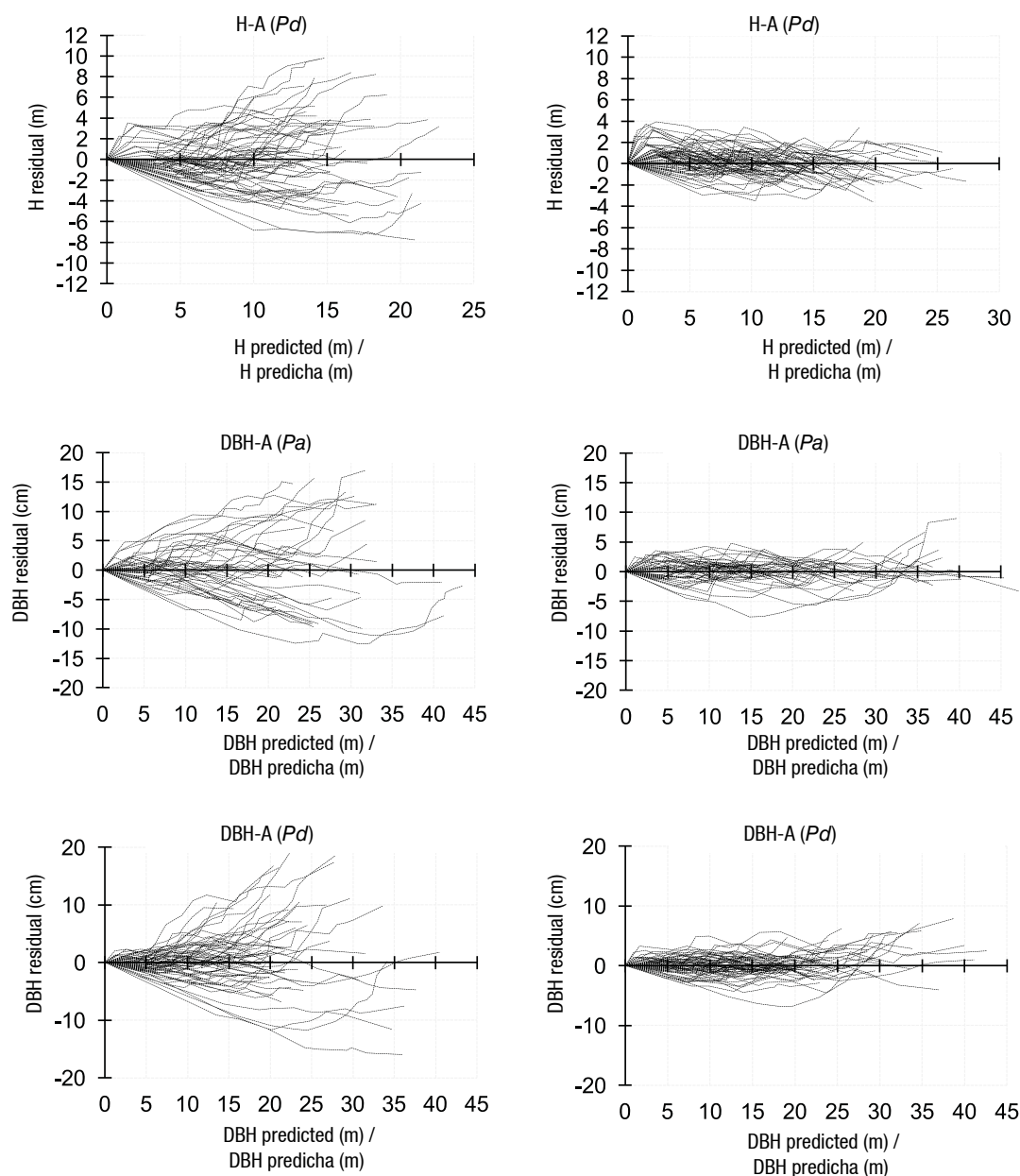


Figure 5. Residual versus predicted values for the H - A (height-age) and DBH - A (Diameter at breast height-Age) relationships of the prediction (left) and projection (right) equations for *Pinus arizonica* (Pa) and *Pinus durangensis* (Pd).

Figura 5. Valores residuales contra predichos para la relación H - A (altura-edad) y DBH - A (diámetro normal-edad) de las ecuaciones de predicción (izquierda) y proyección (derecha) para *Pinus arizonica* (Pa) y *Pinus durangensis* (Pd).

for uneven-age and mixed-species stands should be questioned and perhaps rejected, since age classes are diverse within and between mixed stands (Duan et al., 2018; Wang, 1998). Consequently, the objectives of this study were to develop and illustrate prediction and projection equation systems for Pa and Pd for H - DBH - A relationships growing in natural and mixed stands. Therefore, in the H - DBH relationship, the theoretical assumption described by Fang and Bailey (1998) was guaranteed in the prediction and projection equations, in which the DBH of a tree should be equal to zero, when

invertidas (Apéndice B3) formaron un sistema global de ecuaciones. Las ecuaciones invertidas mantienen los cuatro criterios citados por Bi, Fox, Li, Lei, y Pang (2012), para la relación H - DBH y las relaciones extendidas de H - A y DBH - A . Tales criterios son: (1) las funciones H - DBH , H - A , y DBH - A son reversibles; (2) las funciones invertidas son continuas y monoatómicamente crecientes sobre un rango específico de H y DBH ; (3) el DBH es igual a cero cuando la H es igual al DBH en la función invertida, y la A en la sección transversal del DBH es igual a cero cuando la H o el DBH son iguales a la A en la función

the H is equal to 1.3 m. This theoretical assumption was followed for the H - A relationship; the A of a tree in the DBH cross section was zero when the H was equal to 1.3 m. On the other hand, for the DBH - A relationship; the A of the tree was zero when the DBH was zero as well. In all cases, the A of the trees was taken as the number of rings in the cross section corresponding to the DBH . Thus, individual tree local equations can be applied to predict the variables of interest in a wide range of DBH s and H s measurements, and in a variety of ecological conditions and silvicultural treatments (Gonzalez-Benecke et al., 2018). Additionally, a generalized equation may improve these applications with several stand-specific characteristics (Gonzalez-Benecke et al., 2014).

The least-squares procedure proposed by Wang et al. (2008) could be used to predict the specific parameter for an H or DBH from a new growth series in the projection equation, similar to the search for random parameters in the NLMEM procedure (Crecente-Campo et al., 2014). The stem analysis data guaranteed criterion 3 noted by Bi et al. (2012) for the Al parameter in both the prediction and projection equations and the corresponding inverted equations. In cases where the dataset does not cover this property; the lower asymptote should be guaranteed with the addition of the minimum measurement of DBH or A on the right side of the equation.

Conclusions

In this study, the H - DBH - A (Height-Diameter at breast height-Age) relationships were introduced as systems of independent prediction and projection equations for the species *Pinus arizonica* and *Pinus durangensis*. The developed equations allowed the prediction and projection of H s and DBH s as a function of endogenous variables. With the inverted equations, a global system of equations was integrated when the measured variables were the DBH_{ob} (outside-bark diameter at breast height) and A (Age). The seemingly unrelated regression allowed the fitted of the H - DBH , H - A and DBH - A relationships as prediction and projection equations with the Dummy Variables Approach and common and specific parameters. In such a context, equation systems can be used as a powerful biometric tool in forest management or as input variables in growth and yield models; furthermore, they can maximize the cost effectiveness of timber volumes in the mixed-species forests of Durango, Mexico.

Acknowledgements

This work was supported by The Mexican Council of Science and Technology (CONACYT), as a postdoctoral fellowship (247171). The main author would like to thank Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

invertida; (4) las funciones invertidas tienen un punto de inflexión biológicamente realista.

El enfoque DVA es similar a NLMEM; los parámetros comunes pueden ser comparados con los parámetros fijos y los parámetros específicos con los parámetros aleatorios (Duan et al., 2018; Wang et al., 2008). Las relaciones H - A , DBH - A y H - DBH podrían ser interpretadas como un índice de productividad de sitio (IPS) para bosques coetáneos o incoetáneos (Duan et al., 2018; Fu et al., 2018; Wang et al., 2017). No obstante, la utilidad de este IPS como una medida de la calidad de sitio para rodales incoetáneos y mezclados debería ser cuestionada y tal vez rechazada, ya que las clases de edad son diversas en un mismo rodal y entre rodales mezclados (Duan et al., 2018; Wang, 1998). Consecuentemente, los objetivos de este estudio fueron desarrollar e ilustrar sistemas de ecuaciones de predicción y proyección para las relaciones H - DBH - A de Pa y Pd creciendo en rodales naturales y mezclados. Por consiguiente, en la relación H - DBH , el supuesto teórico descrito por Fang y Bailey (1998) fue garantizado en las ecuaciones de predicción y proyección, en el cual el DBH de un árbol debería ser igual a cero, cuando la H es igual a 1.3 m. Este supuesto teórico fue seguido para la relación H - A ; la A de un árbol en la sección transversal del DBH fue cero cuando la H fue igual a 1.3 m. Por otro lado, para la relación DBH - A ; la A del árbol fue cero cuando el DBH fue cero también. En todos los casos, la A de los árboles se tomó como el número de anillos en la sección transversal correspondiente al DBH . Por ende, las ecuaciones locales de árbol individual pueden ser aplicadas para predecir las variables de interés en un rango amplio de mediciones de DBH y A , y en una variedad de condiciones ecológicas y tratamientos silvícolas (Gonzalez-Benecke et al., 2018). Adicionalmente, una ecuación generalizada podría mejorar estas aplicaciones en características diversas de rodales específicos (Gonzalez-Benecke et al., 2014).

El procedimiento de mínimos cuadrados propuesto por Wang et al. (2008) podría ser utilizado para predecir el parámetro específico para una H o DBH de una serie nueva de crecimiento en la ecuación de proyección, similar a la búsqueda de parámetros aleatorios en el procedimiento NLMEM (Crecente-Campo et al., 2014). Los datos de análisis troncales garantizaron el criterio 3 señalado por Bi et al. (2012) para el parámetro Al , tanto en las ecuaciones de predicción y proyección como en las ecuaciones invertidas correspondientes. En casos en los que la base de datos no cubra esta propiedad, la asíntota inferior debería ser garantizada con la adición de la medición mínima del DBH o A en el lado derecho de la ecuación.

Conclusiones

En este estudio, las relaciones H - DBH - A (altura -diámetro normal-edad) fueron introducidas como sistemas de ecuaciones independientes de predicción y proyección

(CONACYT) for Postdoctoral Fellowship 247171, Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), and especially the Daniel B. Warnell School of Forestry and Natural Resources of University of Georgia (UGA) for hosting me as a postdoctoral fellow. Also, I am grateful to Ejido San Diego de Tezains for providing the stem analysis data.

End of English version

References / Referencias

- Adame, P., del Río, M., & Cañellas, I. (2008). A mixed nonlinear height-diameter model for pyrenean oak (*Quercus pyrenaica* Willd.). *Forest Ecology and Management*, 256(1), 88–98. doi: 10.1016/j.foreco.2008.04.006
- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155–159. doi: 10.1093/forests/20.2.155
- Bi, H., Fox, J. C., Li, Y., Lei, Y., & Pang, Y. (2012). Evaluation of nonlinear equations for predicting diameter from tree height. *Canadian Journal of Forest Research*, 42(4), 789–806. doi: 10.1139/x2012-019
- Calama, R., & Montero, G. (2004). Interregional nonlinear height-diameter model with random coefficients for stone pine in Spain. *Canadian Journal of Forest Research*, 34(1), 150–163. doi: 10.1139/x03-199
- Carmean, W. H. (1972). Site index curves for upland oaks in the central states. *Forest Science*, 18(2), 109–120. doi: 10.1093/forests/18.2.109
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1), 116–126. doi: 10.1093/forests/46.1.116
- Cieszewski, C. J., Harrison, M., & Martin, S. W. (2000). Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models. Retrieved from https://www.researchgate.net/profile/Stacey_Martin/publication/237633129_Practical_methods_for_estimating_non-biased_parameters_in_self-referencing_growth_and_yield_models/links/0046352cdb6b9c21df000000.pdf
- Corral-Rivas, S., Álvarez-González, J. G., Crecente-Campo, F., & Corral-Rivas, J. J. (2014). Local and generalized height-diameter models with random parameters for mixed, uneven-aged forests in northwestern Durango, Mexico. *Forest Ecosystems*, 1(1), 2–9. doi: 10.1186/2197-5620-1-6
- Crecente-Campo, F., Corral-Rivas, J. J., Vargas-Larreta, B., & Wehenkel, C. (2014). Can random components explain differences in the height-diameter relationship in mixed uneven-aged stands? *Annals of Forest Science*, 71(1), 51–70. doi: 10.1007/s13595-013-0332-6
- para las especies *Pinus arizonica* y *Pinus durangensis*. Las ecuaciones desarrolladas permitieron la predicción y proyección de las *H* y *DBH* en función de las variables endógenas. Con las ecuaciones invertidas, un sistema global de ecuaciones fue integrado cuando las variables medidas fueron el *DBHob* (diámetro normal con corteza) y edad (*A*). El método de regresión aparentemente no relacionada permitió ajustar las relaciones *H-DBH*, *H-A* y *DBH-A* como ecuaciones de predicción y proyección con el enfoque de variables Dummy y parámetros comunes y específicos. En tal contexto, los sistemas de ecuaciones pueden usarse como una herramienta biométrica potente en el manejo forestal o como variables de entrada en modelos de crecimiento y rendimiento; además, pueden maximizar la rentabilidad de los volúmenes maderables en los bosques mezclados de Durango, México.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), como una estancia posdoctoral (247171). El autor principal agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca posdoctoral 247171, al Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias (INIFAP), y especialmente a Daniel B. Warnell School of Forestry and Natural Resources of University of Georgia (UGA) por recibirme como becario posdoctoral. Asimismo, el autor principal está agradecido con el Ejido San Diego de Tezains por permitir el uso de los datos de análisis troncales.

Fin de la versión en español

- Crecente-Campo, F., Tomé, M., Soares, P., & Diéguez-Aranda, U. (2010). A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management*, 259(5), 943–952. doi: 10.1016/j.foreco.2009.11.036
- Diéguez-Aranda, U., Burkhart, H. E., & Amateis, R. L. (2006). Dynamic site model for loblolly pine (*Pinus taeda* L.) plantations in the United States. *Forest Science*, 52(3), 262–272. doi: 10.1093/forests/52.3.262
- Duan, G., Gao, Z., Wang, Q., & Fu, L. (2018). Comparison of different height-diameter modelling techniques for prediction of site productivity in natural uneven-aged pure stands. *Forests*, 9(2), 1–18. doi: 10.3390/f9020063
- Dyer, M. E., & Bailey, R. L. (1987). A test of six methods for estimating true heights from stem analysis data. *Forest Science*, 33(1), 3–13. doi: 10.1093/forests/33.1.3
- Fang, Z., & Bailey, R. L. (1998). Height-diameter models for tropical forests on Hainan Island in southern China. *Forest Ecology and Management*, 110(1), 315–327. doi: 10.1016/S0378-1127(98)00297-7

- Fu, L., Lei, X., Sharma, R. P., Li, H., Zhu, G., Hong, L., . . . Tang, S. (2018). Comparing height-age and height-diameter modelling approaches for estimating site productivity of natural uneven-aged forests. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 91(4), 419–433. doi: 10.1093/forestry/cpx049
- García-Espinoza, G. G., Aguirre-Calderón, O. A., Quiñonez-Barraza, G., Alanís-Rodríguez, E., González-Tagle, M. A., & García-Magaña, J. J. (2019). Local-global and fixed-random parameters to model dominant height growth of *Pinus pseudostrubus* Lindley. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 25(1), 141–156. doi: 10.5154/r.rchscfa.2018.06.047
- García, E. (2004). *Modificaciones al sistema de clasificación climática de Köppen* (5.^a ed.). México: Universidad Autónoma Nacional de México, Instituto de Geografía.
- Gómez-García, E., Diéguez-Aranda, U., Castedo-Dorado, F., & Crecente-Campo, F. (2014). A comparison of model forms for the development of height-diameter relationships in even-aged stands. *Forest Science*, 60(3), 560–568. doi: 10.5849/forsci.12-099
- Gonzalez-Benecke, C., Zhao, D., Samuelson, L., Martin, T., Leduc, D., & Jack, S. (2018). Local and general above-ground biomass functions for *Pinus palustris* trees. *Forests*, 9(6), 2–17. doi: doi.org/10.3390/f9060310
- Gonzalez-Benecke, C. A., Gezan, S. A., Martin, T. A., Cropper, J. W. P., Samuelson, L. J., & Leduc, D. J. (2014). Individual tree diameter, height, and volume functions for Longleaf pine. *Forest Science*, 60(1), 43–56. doi: 10.5849/forsci.12-074
- Kearsley, E., Moonen, P. C., Hufkens, K., Doetterl, S., Lisingo, J., Boyemba, B. F., . . . Verbeeck, H. (2017). Model performance of tree height-diameter relationships in the central Congo Basin. *Annals of Forest Science*, 74(1), 2–13. doi: 10.1007/s13595-016-0611-0
- Lu, J., & Zhang, L. (2012). Geographically local linear mixed models for tree height-diameter relationship. *Forest Science*, 58(1), 75–84. doi: 10.5849/forsci.09-123
- MacPhee, C., Kershaw, J. A., Weiskittel, A. R., Golding, J., & Lavigne, M. B. (2018). Comparison of approaches for estimating individual tree height-diameter relationships in the Acadian forest region. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 91(1), 132–146. doi: 10.1093/forestry/cpx039
- Mehtätalo, L., de-Miguel, S., & Gregoire, T. G. (2015). Modeling height-diameter curves for prediction. *Canadian Journal of Forest Research*, 45(7), 826–837. doi: 10.1139/cjfr-2015-0054
- Misik, T., Antal, K., Kárász, I., & Tóthmérész, B. (2016). Nonlinear height-diameter models for three woody, understory species in a temperate oak forest in Hungary. *Canadian Journal of Forest Research*, 46(11), 1337–1342. doi:https://doi.org/10.1139/cjfr-2015-0511
- Ni, C., & Zhang, L. (2007). An analysis and comparison of estimation methods for self-referencing equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 37(8), 1472–1484. doi: 10.1139/X06-285
- Paulo, J. A., Tomé, J., & Tomé, M. (2011). Nonlinear fixed and random generalized height-diameter models for Portuguese cork oak stands. *Annals of Forest Science*, 68(2), 295–309. doi: 10.1007/s13595-011-0041-y
- Pukkala, T., & Gadow, K. (2011). *Managing forest ecosystems: Continuous cover forestry* (2nd ed.). New York, USA: Springer Science & Business Media.
- Quiñonez-Barraza, G., De los Santos-Posadas, H., M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Site index with complex polymorphism of forest stands in Durango, Mexico. *Agrociencia*, 49(4), 439–454. Retrieved from https://www.colpos.mx/agrociencia/Bimestral/2015/may-jun/art-7.pdf
- Quiñonez-Barraza, G., Tamarit-Urias, J. C., Martínez-Salvador, M., García-Cuevas, X., Héctor, M., & Santiago-García, W. (2018). Maximum density and density management diagram for mixed-species forests in Durango, Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 24(1), 73–90. doi: 10.5154/r.rchscfa.2017.09.05
- Quiñonez-Barraza, G., Zhao, D., de los Santos-Posadas, H. M., Santiago-García, W., Tamarit-Urias, J. C., & Nájera-Luna, J. A. (2019). Compatible taper, volume, green weight, biomass and carbon concentrations system for *Quercus sideroxyla* Bonpl. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 25(1), 49–69. doi: 10.5154/r.rchscfa.2018.06.050
- Quiñonez-Barraza, G., Zhao, D., De los Santos Posadas, H. M., & Corral-Rivas, J. J. (2018). Considering neighborhood effects improves individual DBH growth models for natural mixed-species forests in Mexico. *Annals of Forest Science*, 75(3), 1–11. doi: 10.1007/s13595-018-0762-2
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10(2), 290–301. doi: 10.1093/jxb/10.2.290
- Rijal, B., Weiskittel, A. R., & Kershaw, J. A. (2012). Development of regional height to diameter equations for 15 tree species in the North American Acadian Region. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 85(3), 379–390. doi: 10.1093/forestry/cps036
- Santos, F. M., Terra, G., Chaer, G. M., & Monte, M. A. (2018). Modeling the height-diameter relationship and volume of young African mahoganies established in successional agroforestry systems in northeastern Brazil. *New Forests*, 50, 389–407. doi: 10.1007/s11056-018-9665-1
- SAS Institute Inc. (2015). *Base SAS 9.4[®] Procedures Guide: Statistical Procedure* (3rd ed.). Cary, NC, USA: Author.
- Saunders, M. R., & Wagner, R. G. (2008). Height-diameter models with random coefficients and site variables for tree species of Central Maine. *Annals of Forest Science*, 65(2), 203. doi: 10.1051/forest:2007086
- Sharma, M. (2016). Comparing height-diameter relationships of boreal tree species grown in plantations and natural stands. *Forest Science*, 62(1), 70–77. doi: 10.5849/forsci.14-232
- Vargas-Larreta, B., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., Barrio-Anta, M., & Cruz-Cobos, F. (2009). A generalized height-diameter model with random coefficients for uneven-aged stands in El Salto, Durango (Mexico). *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 82(4), 445–462. doi: 10.1093/forestry/cpp016
- Wang, G. G. (1998). Is height of dominant trees at a reference diameter an adequate measure of site quality? *Forest Ecology and Management*, 112(1), 49–54. doi: 10.1016/S0378-1127(98)00315-6

- Wang, M., Borders, B. E., & Zhao, D. (2008). An empirical comparison of two subject-specific approaches to dominant heights modeling: The dummy variable method and the mixed model method. *Forest Ecology and Management*, 255(7), 2659–2669. doi: 10.1016/j.foreco.2008.01.030
- Wang, M., Kane, M. B., & Zhao, D. (2017). Correlation-regression analysis for understanding dominant height projection accuracy. *Forest Science*, 63(6), 549–558. doi: 10.5849/FS-2016-092
- Wang, X., Yu, D., Wang, S., Lewis, B. J., Zhou, W., Zhou, L., . . . Li, M.-H. (2017). Tree height-diameter relationships in the alpine treeline ecotone compared with those in closed forests on Changbai Mountain, northeastern China. *Forests*, 8(4), 1–13. doi: 10.3390/f8040132
- Zang, H., Lei, X., & Zeng, W. (2016). Height-diameter equations for larch plantations in northern and northeastern China: a comparison of the mixed-effects, quantile regression and generalized additive models. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 89(4), 434–445. doi: 10.1093/forestry/cpw022
- Zellner, A. (1962). An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. *Journal of the American Statistical Association*, 57(298), 348–368. doi: 10.1080/01621459.1962.10480664
- Zimmerman, D. L., Núñez-Antón, V., Gregoire, T. G., Schabenberger, O., Hart, J. D., Kenward, M. G., . . . Vieu, P. (2001). Parametric modelling of growth curve data: an overview. *Test*, 10(1), 1–73. doi: 10.1007/BF02595823