

SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico

SiBiFor: Sistema Biométrico Forestal para el manejo de los bosques de México

Benedicto Vargas-Larreta^{1*}; José J. Corral-Rivas²; Oscar A. Aguirre-Calderón³; Jorge O. López-Martínez⁴; Héctor M. De los Santos-Posadas⁵; Francisco J. Zamudio-Sánchez⁶; Eduardo J. Treviño-Garza³; Martín Martínez-Salvador⁷; Cristóbal G. Aguirre-Calderón¹

¹Instituto Tecnológico de El Salto. Mesa del Tecnológico s/n. C. P. 34942. El Salto, Pueblo Nuevo, Durango, México.

²Universidad Juárez del Estado de Durango, Instituto de Silvicultura e Industria de la Madera. Bulevar del Guadiana núm. 501, Ciudad Universitaria, Torre de Investigación. C. P. 34120. Durango, Dgo., México.

³Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Forestales. Carretera Nacional km 145. C. P. 67700. Linares, Nuevo León, México.

⁴CONACYT - El Colegio de la Frontera Sur. Av. Centenario km 5.5. C. P. 77014. Chetumal, Quintana Roo, México.

⁵Colegio de Postgraduados, Campus Montecillo. Carretera México-Texcoco km 36.5. C. P. 56230. Montecillo, Texcoco, Estado de México, México.

⁶Universidad Autónoma Chapingo. Carretera México-Texcoco km 38.5. C. P. 56230. Texcoco, Estado de México, México.

⁷Instituto de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias, Centro de Investigación Regional Norte Centro. Carretera Delicias-Rosales. C. P. 33000. Delicias, Chihuahua, México.

*Corresponding author: bvargas@itelsalto.edu.mx, tel.: +52 (675) 876 5533 ext. 107

Abstract

Introduction: Forest biometric systems are the most widely used analytical tools for analysis of forest growth and yield.

Objective: To present a new biometric system for temperate and tropical Mexican forests.

Materials and methods: The study area included the states of Chihuahua, Guerrero, Jalisco, Oaxaca, Michoacán, Puebla, State of Mexico, Hidalgo, Tlaxcala, Veracruz and Quintana Roo. Field data collection was done by using destructive and non-destructive sampling in each Regional Forest Management Unit (RFMU) in the states. The methodology generated equation systems for the estimation of individual-tree attributes that are additive between components, scalable at total-tree level and consistent throughout the country's different forest conditions.

Results and discussion: The Forest Biometric System (SiBiFor for its initials in Spanish) consists of more than 6 000 new equations for 97 tree species in temperate and tropical forests. SiBiFor contains 2 917 volume, 2 868 volume-taper, 341 site index and 288 diameter growth equations.

Conclusion: The developed equations will improve the management of the country's forest ecosystems, which will contribute to their sustainability.

Keywords: System of additive equations, volumetric system, compatible equations, forest inventory, RFMU.

Resumen

Introducción: Los sistemas biométricos forestales constituyen las herramientas analíticas más utilizadas para el análisis de la producción y el crecimiento de los bosques.

Objetivo: Presentar un nuevo sistema biométrico para los bosques templados y tropicales de México.

Materiales y métodos: El área de estudio comprendió los estados de Chihuahua, Guerrero, Jalisco, Oaxaca, Michoacán, Puebla, Estado de México, Hidalgo, Tlaxcala, Veracruz y Quintana Roo. La toma de datos de campo se realizó mediante muestreo destructivo y no destructivo en cada Unidad de Manejo Forestal Regional (UMAFOR) en los estados. La metodología utilizada permitió generar sistemas de ecuaciones para la estimación de atributos de árboles individuales que son aditivos entre componentes, escalables a nivel de árbol completo y consistentes a lo largo de las diversas condiciones forestales del país.

Resultados y discusión: El Sistema Biométrico Forestal "SiBiFor" está integrado por más de 6 000 nuevas ecuaciones para 97 especies arbóreas de los bosques templados y tropicales. SiBiFor contiene 2 917 ecuaciones de volumen, 2 868 de ahusamiento-volumen, 341 de índice de sitio y 288 de crecimiento en diámetro.

Conclusión: Las ecuaciones desarrolladas mejorarán el manejo de los ecosistemas forestales del país lo que contribuirá a la sustentabilidad de los mismos.

Palabras clave: Sistema de ecuaciones aditivas, sistema volumétrico, ecuaciones compatibles, inventario forestal, UMAFOR.

Please cite this article as follows (APA 6): Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Aguirre-Calderón, O. A., López-Martínez, J. O., Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J.,... Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455.

doi: [10.5154/r.rchscfa.2017.06.040](https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2017.06.040)

Received: June 7, 2017 / Accepted: August 3, 2017.



Introduction

Silviculture and forest management incorporate scientific tools on an ongoing basis to improve precision in the design of management prescriptions, the projection of expected products and the dynamics of forest ecosystems. The importance of biometric systems lies in the integration of statistical-mathematical models, dynamic or static, for rational and sustainable forest management. These models are the analytical tools most commonly used for the generation of knowledge about growth and yield of forest stands. Some of the main uses are: 1) make or update forest inventories; 2) evaluate silvicultural schemes; 3) estimate the current and future yield of forest products; 4) examine the impacts of forest management on other forest values; 5) determine management regimes that maximize the timber volume or production value; and 6) determine the influence of disturbances on forest dynamics (Weiskittel, Hann, Kershaw, & Vanclay, 2011).

A biometric system is a portfolio of equations through which reliable information on the growing stock, product distribution, site quality, yield and growth of trees and stands in a wide variety of management conditions is obtained. The use and refinement of these systems have increased over the last two decades, due in part to the greater capacity of computer systems to analyze large databases, as well as to simulate forest dynamics.

The first forest growth models, called "normal yield tables," were constructed in Germany at the end of the eighteenth century (Assmann, 1970) for fully stocked natural stands (Davis, Johnson, Bettinger, & Howard, 2001). The volume equations, represented in the form of "volume tables," have been used since then. Spurr (1952) notes that their origin dates back more than 150 years and that Henrich Cotta receives the credit for having produced the first modern volume table in 1804. The techniques used by Cotta spread widely in the late nineteenth and early 20th centuries in several European countries; since then they have progressively evolved into the most modern and complex growth simulators based on individual tree models.

The publication of forest growth models in Mexico began in 1970, mainly in theses and scientific journals, where the first production tables and growth systems based on stand models were presented. Subsequently, in the 1990s the development of equation systems to estimate merchantable volume at individual-tree level began.

The evaluation of forest productivity through dominant height growth is one of the most documented topics in the forest literature in Mexico; since the 1980s, a great

Introducción

La silvicultura y el manejo forestal incorporan herramientas científicas permanentemente para mejorar la precisión en el diseño de prescripciones de manejo, la proyección de los productos esperados y la dinámica de los ecosistemas forestales. La importancia de los sistemas biométricos radica en la integración de modelos estadístico-matemáticos, dinámicos o estáticos, para un manejo racional y sustentable de los bosques. Estos modelos constituyen las herramientas analíticas más utilizadas en la actualidad para la generación de conocimiento sobre la producción y crecimiento de las masas forestales. Algunos de los usos principales son: 1) realizar o actualizar inventarios forestales; 2) evaluar esquemas silvícolas; 3) estimar el rendimiento actual y futuro de los productos forestales; 4) examinar los impactos del manejo forestal sobre otros valores del bosque; 5) determinar regímenes de manejo que maximicen el volumen maderable o el valor de la producción; y 6) determinar la influencia de los disturbios en la dinámica forestal (Weiskittel, Hann, Kershaw, & Vanclay, 2011).

Un sistema biométrico es un portafolio de ecuaciones mediante las cuales se obtiene información confiable sobre las existencias volumétricas, clasificación de productos, calidad de estación, rendimiento y crecimiento de árboles y rodales en una variedad amplia de condiciones de manejo. La utilización y perfeccionamiento de estos sistemas han incrementado en las últimas dos décadas, debido, en parte, a la mayor capacidad de los sistemas de cómputo para analizar grandes bases de datos, así como para simular la dinámica forestal.

Los primeros modelos de crecimiento forestal, denominados "tablas de producción normales", se construyeron en Alemania a finales del siglo XVIII (Assmann, 1970) para masas naturales de densidad completa (Davis, Johnson, Bettinger, & Howard, 2001). Las ecuaciones de volumen, representadas en forma de "tablas de volúmenes", se han empleado desde entonces. Spurr (1952) señala que el origen de éstas se remonta a más de 150 años y Henrich Cotta recibe el crédito por haber elaborado la primera tabla de volúmenes moderna en 1804. Las técnicas empleadas por Cotta se difundieron ampliamente a finales del siglo XIX y principios del siglo XX en varios países de Europa; desde entonces éstas han evolucionado progresivamente hasta llegar a los más modernos y complejos simuladores de crecimiento basados en modelos de árbol individual.

La publicación de modelos de crecimiento forestal en México inició a partir de 1970, principalmente en tesis y revistas científicas, donde se presentaron las primeras

deal of work has been published on the subject. The variety of techniques that have emerged has led to the study of site index curves being a topic of interest and debate among the world's forest biometricians in the world (Cieszewski & Strub, 2008).

Another topic extensively researched concerns standing tree volume models. This research area is highlighted by the works of Corral, Návar, and Fernández (1999), Vargas-Larreta (2006), Corral-Rivas, Barrio-Anta, Aguirre-Calderón, and Diéguez-Aranda (2007), and Cruz-Cobos, De los Santos-Posadas, and Valdez-Lazalde (2008) in Durango; Pompa-García, Corral-Rivas, Hernández-Díaz, and Álvarez-González (2009) in Chihuahua; and Hernández-Pérez, De los Santos-Posadas, Ángeles-Pérez, Valdez-Lazalde, and Volke-Haller (2013) in Hidalgo. All systems cited in these studies allow predicting total and merchantable volume. Studies related to the subject have also been carried out in other states, although focused only on total volume (Aguilar & Velarde, 2001; Muñoz-Flores et al., 2012); similarly, during the period 2004-2009, INIFAP (Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias) generated diverse technologies and similar tools for the forestry sector.

Current biometric systems should include volume models developed and validated by species and for regional use. Vargas-Larreta, Cruz-Cobos, and Corral-Rivas (2008) analyzed the precision in the estimation of growing stocks by stand of some forest areas under management in Durango. These authors concluded that in practice a single volume equation (developed more than 40 years ago) was used, regardless of the species, site or forest region, without having verified the precision and validity of use, not only in the forests of Durango, but also in other states.

The objective of this paper is to present the Forest Biometric System (SiBiFor), consisting of a database of more than 6 000 new volume, product distribution, site index and diameter at breast height growth equations of 97 temperate and tropical forest tree species. SiBiFor is the result of research conducted by a consortium of Mexican institutions of higher education and research. The equations that make up the system will allow for better management of the country's forest ecosystems, which will contribute to their sustainability.

Materials and methods

The methodology used generated a system of equations for estimating individual-tree attributes (bole, branch, total and commercial volume) that are additives between components; that is, component-level attributes of individual trees that are scalable at total-tree level and consistent across the country's different

tablas de producción y sistemas de crecimiento basados en modelos de rodal. Posteriormente, en los años 90, inició el desarrollo de los sistemas de ecuaciones para estimar volumen comercial a nivel de árbol individual. La evaluación de la productividad forestal a través del crecimiento en altura dominante es uno de los temas más documentados en la literatura forestal en México; a partir de la década de 1980 se ha publicado una gran cantidad de trabajos sobre el tema. La variedad de técnicas surgidas ha ocasionado que el estudio de las curvas de índice de sitio sea un tópico de interés y debate entre los biómetras forestales del mundo (Cieszewski & Strub, 2008).

Otro tópico investigado ampliamente es el referente a los modelos de cubicación de árboles en pie. En este marco destacan los trabajos de Corral, Návar, y Fernández (1999), Vargas-Larreta (2006), Corral-Rivas, Barrio-Anta, Aguirre-Calderón, y Diéguez-Aranda (2007), y Cruz-Cobos, De los Santos-Posadas, y Valdez-Lazalde (2008) en Durango; Pompa-García, Corral-Rivas, Hernández-Díaz, y Álvarez-González (2009) en Chihuahua; y Hernández-Pérez, De los Santos-Posadas, Ángeles-Pérez, Valdez-Lazalde, y Volke-Haller (2013) en Hidalgo. Todos los sistemas citados en dichos estudios permiten predecir el volumen total y comercial. En otros estados también se han realizado estudios relacionados con el tema, aunque enfocados solo al volumen total (Aguilar & Velarde, 2001; Muñoz-Flores et al., 2012); de igual manera, durante el periodo 2004-2009, el INIFAP (Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias) generó diversas tecnologías y herramientas similares para el sector forestal.

Los sistemas biométricos actuales deben incluir modelos de volumen desarrollados y validados por especie y para uso regional. Vargas-Larreta, Cruz-Cobos, y Corral-Rivas (2008) analizaron la precisión en la estimación de las existencias volumétricas por subrodal de algunos predios bajo manejo en Durango. Dichos autores concluyeron que en la práctica se utilizaba una tarifa de volumen única (desarrollada hace más 40 años), indistintamente de la especie, predio o región forestal sin que se hubiera verificado la precisión y validez de uso, no solo en los bosques de Durango, sino también en otros estados.

El objetivo de este artículo es presentar el Sistema Biométrico Forestal "SiBiFor", integrado por una base de datos de más de 6 000 nuevas ecuaciones de volumen, distribución de productos, índice de sitio y crecimiento en diámetro normal de 97 especies arbóreas de bosques templados y tropicales. SiBiFor es el resultado de la investigación desarrollada por un consorcio de instituciones mexicanas de educación superior e investigación. Las ecuaciones que integran el sistema permitirán un mejor manejo de los

forest conditions. Moreover, the methodology ensures the compatibility and comparison of regional and state-level information, facilitating the temporal and spatial analysis of the variables of interest.

Study area

The study area included the states of Chihuahua, Guerrero, Jalisco, Oaxaca, Michoacán, Puebla, State of Mexico, Hidalgo, Tlaxcala, Veracruz and Quintana Roo (Figure 1). The first nine, in addition to Durango, account for 90 % of the country's timber production (5.94 million m³) (Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales [SEMARNAT], 2015) and they are included in the National Sustainable Forest Management Strategy for Increased Production and Productivity (ENAIPROS for its initials in Spanish) of the National Forestry Commission (CONAFOR for its initials in Spanish).

Data collection

Sampling was conducted by regions, considering as such the Regional Forest Management Units (RFMUs) defined by CONAFOR. Field data were obtained by

ecosistemas forestales del país, lo que contribuirá a la sustentabilidad de los mismos.

Materiales y métodos

La metodología utilizada generó un sistema de ecuaciones para la estimación de atributos de árboles individuales (volumen fustal, de ramas, total y comercial) que son aditivos entre componentes; es decir, atributos a nivel de componente de árboles individuales que son escalables a nivel de árbol completo y consistentes en las diversas condiciones forestales del país. Asimismo, la metodología asegura la compatibilidad y la comparación de información regional y estatal, facilitando el análisis temporal y espacial de las variables de interés.

Área de estudio

El área de estudio comprendió los estados de Chihuahua, Guerrero, Jalisco, Oaxaca, Michoacán, Puebla, Estado de México, Hidalgo, Tlaxcala, Veracruz y Quintana Roo (Figura 1). Los primeros nueve, además de Durango, representan 90 % de la producción maderable del país (5.94 millones de m³) (Secretaría de Medio Ambiente y

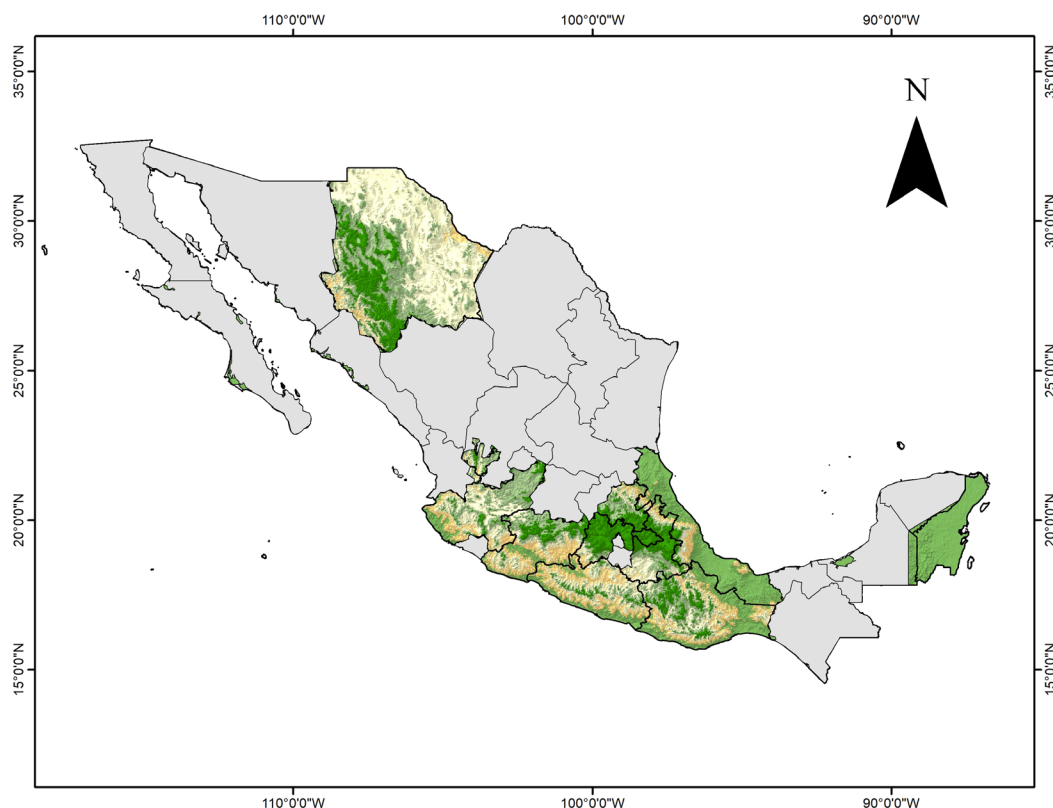


Figure 1. States considered for the generation of the Forest Biometric System.

Figura 1. Entidades consideradas para la generación del Sistema Biométrico Forestal.

destructive sampling by taking advantage of the harvest areas of the forest stands. The following variables were measured: diameter at breast height (dbh) outside and inside bark (d in cm), total height (h in m), diameter outside and inside bark (d_1 in cm) for each section at the height that was found relative to the ground (h_1 in cm), and diameter outside and inside bark of all the branches whose diameter at the base was greater than 5 cm. Two 0.30-m sections above the stump were obtained; the next section corresponded to the dbh (1.30 m) and it was followed by 2.54-m-long (or another commercial size depending on the region or state) sections until reaching the tip of the tree (Figure 2).

The dominant height-age data pairs were obtained following the stem analysis methodology. For this purpose, wood discs were extracted from 20 % of the dominant and codominant pine trees and other

Recursos Naturales [SEMARNAT], 2015) y están incluidos en la Estrategia Nacional de Manejo Forestal Sustentable para el Incremento a la Producción y Productividad (ENAIPROS) de la Comisión Nacional Forestal (CONAFOR).

Toma de datos

El muestreo se realizó por regiones, considerando como tales a las Unidades de Manejo Forestal Regional (UMAFOR) definidas por la CONAFOR. Los datos de campo se obtuvieron mediante un muestreo destructivo aprovechando las áreas de corta de los predios. Se midieron las siguientes variables: diámetro normal con y sin corteza (d en cm), altura total (h en m), diámetro con y sin corteza (d_1 en cm) para cada sección a la altura que se encontraba con respecto al suelo (h_1 en cm), y diámetro con y sin corteza de todas las ramas cuyo diámetro en la base fuera mayor de 5 cm. Se obtuvieron

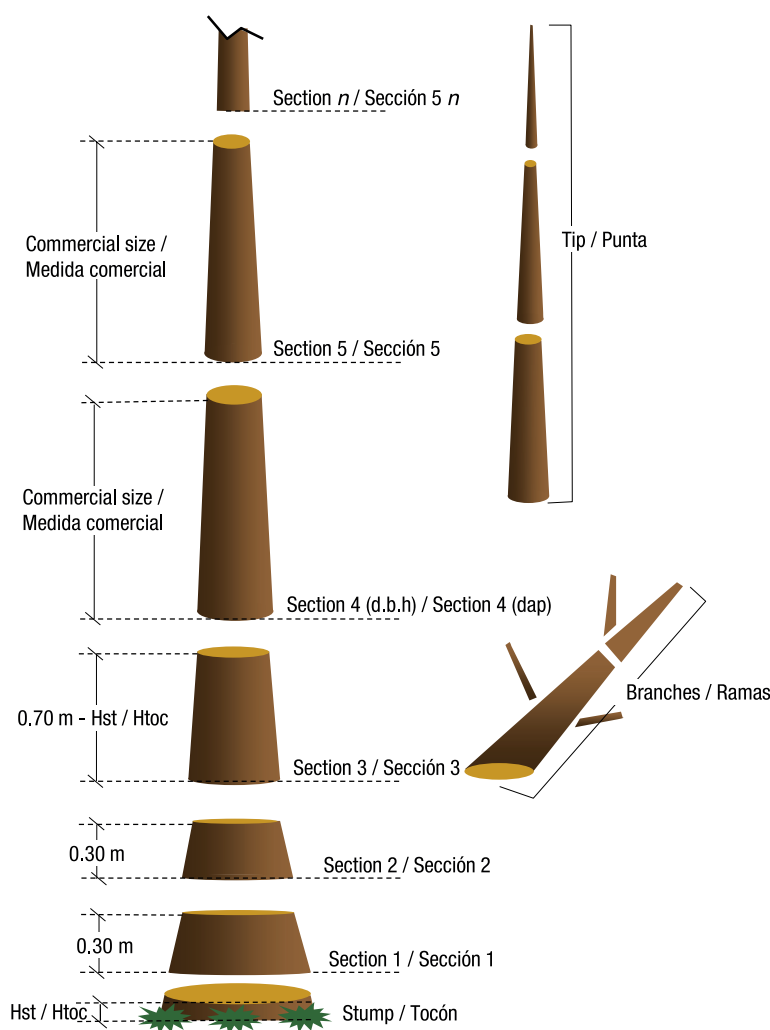


Figure 2. Graphical representation of the data collection in the different sections and branches of a sample tree.
Figura 2. Representación gráfica de la toma de datos en las diferentes secciones y ramas de un árbol muestra.

conifers of the sample used in order to construct volume models.

In the states with species of high conservation value, restricted distribution or little abundance, a combination of the destructive and non-destructive methods was used. The former was exclusively used in species that were within the harvest areas and that had reached the minimum cutting diameter (variable depending on the species). The non-destructive method was used for smaller diameters and consisted of measuring the bole and branches of standing trees using high-precision forestry measurement equipment (Criterion™ RD1000 electronic dendrometer, USA, and Mantax Black caliper with Häflog gator eyes laser pointers, Sweden).

Calculation of volume

The tree volume calculation was done in sections using the Smalian's formula; the volume tip was obtained like a cone. The total stem volume with bark was obtained from the sum of the volumes of the sections and the tip. The volume of the branches was calculated following the same procedure. The total tree volume (ttv in m^3) was estimated by adding the total volume of the stem and branches. The merchantable volume (v_i in m^3) at a given top diameter (d_i), the relative diameter ($rel d = d_i/d$) and the relative height ($rel h = h_i/h$) of the stem were also calculated. Finally, to detect possible outliers, a nonparametric quadratic local fit was made using LOESS local regression (Bi, 2000) with the SAS/STAT 9.2 statistical package (Statistical Analysis System [SAS] Institute, 2008).

Volume models for the development of additive equation systems

The stem volume and total volume (including branches) were estimated by the fit, in a first phase, of six volume functions of one variable and 10 of two variables. In all cases, the volume equations of two predictors were higher, so they were selected for subsequent analyses (Table 1).

Once the best model for stem volume and total volume was selected, a system of additive equations was simultaneously fitted to estimate the volume of branches with bark (vbr_{wb}), stem with bark (tsv_{wb}) and total tree with bark (ttv_{wb}):

$$tsv_{wb} = b_0 d^{b_1} h^{b_2}$$

$$vbr_{wb} = b_3 d^2$$

$$ttv_{wb} = b_0 d^{b_1} h^{b_2} + b_3 d^2$$

In cases where convergence was not achieved in the equation system above, the branch volume equation was changed by:

dos secciones de 0.30 m por arriba del tocón, la siguiente sección correspondió con el diámetro normal (1.30 m) y se continuó con secciones de 2.54 m de longitud (u otra medida comercial dependiendo de la región o estado) hasta llegar a la punta del árbol (Figura 2).

Los pares de datos altura dominante-edad se obtuvieron siguiendo la metodología de análisis troncales. Para ello se extrajeron discos de madera al 20 % de los árboles dominantes y codominantes de pino y otras coníferas de la muestra usada con el fin de construir los modelos de volumen.

En las entidades con especies de alto valor para la conservación, de distribución restringida o con poca abundancia, se utilizó una combinación de los métodos destructivo y no destructivo. El primero se utilizó exclusivamente en las especies que se encontraban dentro de los frentes de corta y que alcanzaban el diámetro mínimo de corta (variable dependiendo de la especie). El método no destructivo se utilizó para los diámetros menores y consistió en medir el fuste y las ramas de árboles en pie, utilizando equipo de medición forestal de alta precisión (dendrómetro electrónico Criterion™ RD1000, USA, y forcípula laser Mantax Black con *gator eyes* de Häflog, Suecia).

Cálculo del volumen

Los árboles se cubicaron por secciones usando la fórmula de Smalian; la punta se cubió como un cono. El volumen total del tronco con corteza se obtuvo de la suma de los volúmenes de las secciones y la punta. El volumen de las ramas se calculó siguiendo el mismo procedimiento. El volumen total del árbol (vta en m^3) se estimó sumando el volumen total del tronco y de las ramas. Se calcularon también el volumen comercial (v_i en m^3) a un determinado diámetro en punta delgada (d_i), el diámetro relativo ($drel = d_i/d$) y la altura relativa ($hrel = h_i/h$) del fuste. Finalmente, para detectar posibles datos atípicos, se hizo un ajuste local cuadrático no paramétrico usando regresión local LOESS (Bi, 2000) con el paquete estadístico SAS/STAT 9.2 (Statistical Analysis System [SAS] Institute, 2008).

Modelos de volumen para el desarrollo de los sistemas de ecuaciones aditivas

El volumen del fuste y volumen total (incluyendo ramas) se estimaron mediante el ajuste, en una primera fase, de seis tarifas volumétricas de una entrada y 10 de dos entradas. En todos los casos, las tarifas de dos entradas fueron superiores por lo que se seleccionaron para los análisis posteriores (Cuadro 1).

Una vez seleccionado el mejor modelo para el volumen de fuste y el volumen total, se ajustó de manera simultánea un sistema de ecuaciones aditivas que

Table 1. Volume models of two predictors fitted and selected for the development of additive equation systems. Cuadro 1. Modelos de volumen de dos entradas ajustados y seleccionados para el desarrollo de los sistemas de ecuaciones aditivas.

Model/ Modelo	Name/Nombre	Expression/Expresión
1	Schumacher-Hall (allometric)/Schumacher-Hall (alométrica)	$v = b_0 d^{b_1} h^{b_2}$
2	Spurr	$v = b_0 d^2 h$
3	Spurr potential/Spurr potencial	$v = b_0 (d h)^{b_1}$
4	Spurr with independent term/Spurr con término independiente	$v = b_0 + d_1 d^2 h$
5	Incomplete generalized combined variable/ Variable combinada generalizada incompleta	$v = b_0 + b_1 h + b^2 d^2 h$
6	Australian formula/Fórmula australiana	$v = b_0 + b_1 d^2 + b_2 d^2 h + b_3 h$
7	Honer	$v = d_2 / b_0 + b_1 / h$
8	Newnham	$v = b_0 + b_1 d^{b_2} h^{b_3}$

v = volume, d = dbh with bark, h = total height, b_i = coefficients.

v = volumen, d = diámetro normal con corteza, h = altura total, b_i = coeficientes.

$$vbr_{wb} = e^{(-b_3 d^{b_4})}$$

$$ttv_{wb} = b_0 d^{b_1} h^{b_2} + e^{(-b_3 d^{b_4})}$$

where,

d = diameter at breast height of the tree i (cm)

h = total height of the tree i (m)

b_i = coefficients to be estimated by regression.

Compatible volume-taper functions

The model of Biging (1984) was fitted: $d_i = \{d b_1 + b_2 \ln[1 - (1 - e^{-b_1/b_2})q^{1/m}]\}$, where m must be a value that allows analytical integration of the equation. The model of Fang, Borders, and Bailey (2000) was also fitted:

$$d_i = c_1 \sqrt{h^{(k-b_1)/b_1} (1-q)^{(k-\beta)/\beta} \alpha_1^{I_1+I_2} \alpha_2^{I_2}}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{a_0 d^{a_1} h^{a_2 - k/b_1}}{b_1(r_0 - r_1) + b_2(r_1 - \alpha_1 r_2) + b_3 \alpha_1 r_2}};$$

$$\beta = b_1^{1-I_1+I_2} b_2^{I_1} b_3^{I_2}; \alpha_1 = (1-p_1)^{\frac{(b_2-b_1)k}{b_1 b_2}}; \alpha_2 = (1-p_2)^{\frac{(b_2-b_2)k}{b_2 b_3}};$$

$$r_0 = (1-h_{st}/h)^{k/b_1}; r_1 = (1-p_1)^{k/b_1}; r_2 = (1-p_2)^{k/b_2}$$

$I_1 = 1$ if $p_1 \leq q \leq p_2$; 0 otherwise

$I_2 = 1$ if $p_2 \leq q \leq 1$; 0 otherwise

permite estimar el volumen de ramas con corteza ($vram_{cc}$), de fuste con corteza ($vrta_{cc}$) y total árbol con corteza (vta_{cc}):

$$vram_{cc} = b_0 d^{b_1} h^{b_2}$$

$$vrta_{cc} = b_3 d^2$$

$$vta_{cc} = b_0 d^{b_1} h^{b_2} + b_3 d^2$$

En los casos en que no se consiguió convergencia en el sistema de ecuaciones anterior, la ecuación de volumen de ramas fue cambiada por:

$$vram_{cc} = e^{(-b_3 d^{b_4})}$$

$$vta_{cc} = b_0 d^{b_1} h^{b_2} + e^{(-b_3 d^{b_4})}$$

donde,

d = diámetro de la sección normal del árbol i (cm)

h = altura total del árbol i (m)

b_i = coeficientes a ser estimados mediante la regresión.

Funciones compatibles de ahusamiento-volumen

Se ajustó el modelo de Biging (1984): $d_i = \{d b_1 + b_2 \ln[1 - (1 - e^{-b_1/b_2})q^{1/m}]\}$, donde m debe ser un valor que permita la integración analítica de la ecuación. También se ajustó el modelo de Fang, Borders, y Bailey (2000):

where,

p_1 and $p_2 = h_1/h$ and h_2/h , respectively, are the relative heights where the two junction points assumed by the model occur.

$$q = h_i/h$$

$$k = \pi/40\ 000.$$

The model of Fang et al. (2000) also includes a merchantable volume equation (v_i) and a total volume equation (V) by directly integrating the profile function. Their expressions are as follows:

$$v_i = c_1^2 h^{k/b_1} b_1 r_0 + (I_1 + I_2)(b_2 - b_1)r_1 + I_2(b_3 - b_2)\alpha_1 r_2 - \beta(1-q)^{k/\beta} \alpha_2^{I_1 + I_2} \alpha_1^{I_2}$$

$$V = a_0 d^{a_1} h^{a_2}$$

Compatible dominant height-site index models

The development of the site quality curves was based on the algebraic difference approach (ADA) and on the generalization of this method known as generalized algebraic difference approach (GADA) (Cieszewski & Bailey, 2000). After a first fit, the equations of the models of Bertalanffy-Richards (Bertalanffy, 1949, 1957; Richards, 1959) and of Korf (Lundqvist, 1957) in GADA form, shown in Table 2, as well as the polymorphic model of Korf in ADA form, were selected for later comparisons. The form of the latter is as follows:

$$d_1 = c_1 \sqrt{h^{(k-b_1)/b_1} (1-q)^{(k-\beta)/\beta} \alpha_1^{I_1 + I_2} \alpha_2^{I_2}}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{a_0 d^{a_1} h^{a_2 - k/b_1}}{b_1(r_0 - r_1) + b_2(r_1 - \alpha_1 r_2) + b_3 \alpha_1 r_2}};$$

$$\beta = b_1^{-(I_1 + I_2)} b_2^{I_1} b_3^{I_2}; \alpha_1 = (1-p_1)^{\frac{(b_2-b_1)k}{b_1 b_2}}; \alpha_2 = (1-p_2)^{\frac{(b_3-b_2)k}{b_2 b_3}};$$

$$r_0 = (1-h_{st}/h)^{k/b_1}; r_1 = (1-p_1)^{k/b_1}; r_2 = (1-p_2)^{k/b_2}$$

$$I_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; 0 \text{ en caso contrario}$$

$$I_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; 0 \text{ en caso contrario}$$

donde,

p_1 y $p_2 = h_1/h$ y h_2/h , respectivamente, son las alturas relativas a las que se producen los dos puntos de unión que supone el modelo.

$$q = h_i/h$$

$$k = \pi/40\ 000.$$

El modelo de Fang et al. (2000) también incluye una ecuación de volumen comercial (v_i) y otra de volumen total (V) mediante la integración directa de la función de perfil. Sus expresiones son las siguientes:

$$v_i = c_1^2 h^{k/b_1} b_1 r_0 + (I_1 + I_2)(b_2 - b_1)r_1 + I_2(b_3 - b_2)\alpha_1 r_2 - \beta(1-q)^{k/\beta} \alpha_2^{I_1 + I_2} \alpha_1^{I_2}$$

$$V = a_0 d^{a_1} h^{a_2}$$

Table 2. Fitted base models and their corresponding GADA formulation (equations in generalized algebraic differences form), for the development of site quality curves.

Cuadro 2. Modelos base ajustados y su correspondiente formulación GADA (ecuaciones en diferencias algebraicas generalizadas), para el desarrollo de curvas de calidad de estación.

Model	Base equation/ Ecuación base	Site-related parameters/ Parámetros relacionados al sitio	Solution for X with initial values (t_0, Y_0)/ Solución para X con valores iniciales (t_0, Y_0)	Dynamic equation/ Ecuación dinámica
G1	Korf: $Y = a_1 e^{-a_2 t^{a_3}}$	$a_1 = e^x$ $a_2 = (b_1 + b_2)/X$	$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-b_3} \left\{ b_1 + t_0^{-b_3} \ln(Y_0) + \sqrt{4b_2 t_0^{-b_3} + [-b_1 t_0^{-b_3} \ln(Y_0)]^2} \right\}$	$Y = e^{X_0} e^{\left[\frac{b_1 + b_2}{X_0} \right] t^{b_3}}$
G2	Bertalanffy-Richards: $Y = a_1 [e^{-a_2 t}]^{a_3}$	$a_1 = e^x$ $a_3 = (b_2 + b_3)/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 - b_2 L_0 + \sqrt{(\ln Y_0 - b_2 L_0)^2 - 4b_3 L_0} \right]$ where/donde $L_0 = \ln(1 - e^{-b_1 t_0})$	$Y = Y_0 \left[\frac{1 - e^{-b_1 t}}{1 - e^{-b_1 t_0}} \right]^{b_2 + b_3/X_0}$

Y: dominant height (m), t_i : reference or base age (years), a_i : parameters in the base equation, b_i : global parameters in the dynamic equation.

Y: altura dominante (m), t_i : edad de referencia o edad base (años), a_i : parámetros en la ecuación base, b_i : parámetros globales en la ecuación dinámica.

$$Y = b_1 \left(\frac{H_0}{b_1} \right)^{\frac{t_0}{t_1} b_2}$$

Diameter growth models

The diameter growth models were fitted using the base model of Bertalanffy-Richards (Bertalanffy, 1949, 1957; Richards, 1959) in ADA form with three variants (Table 3) and following the guide curve methodology.

In the above expressions, d_0 was fitted as a diameter index (IDiam), and the reference or base age t_0 was set from 50 to 90 years, according to the growth pattern of each species; finally, in the fit the values d_0 and the parameter estimators were obtained.

Fitting procedure and selection criteria for the best model

The fitting of compatible volume estimation systems usually involves some statistical assumptions that must be fulfilled, one of the most important being to ensure the additivity. This property is that the sum of the estimates of the volumes of all tree fractions (branches and stem) must be equal to the volume estimated directly from the total volume equation. In order to achieve this, the volume-by-component and total-volume equations were fitted simultaneously using the Iterated Seemingly Unrelated Regression (ITSUR) method by the SAS/ETS[®] MODEL procedure.

The heteroskedasticity problem was corrected using weighted regression, with a weight equal to the inverse of the variance of each observation. The weights considered were $1/d^2$ for the branch volume equation and $1/d^2 h$ for the total stem volume with bark equation. In the case of the diameter growth equations, heteroscedasticity was corrected using a power model

Modelos compatibles altura dominante-índice de sitio

El desarrollo de las curvas de calidad de estación se basó en el método de ecuaciones en diferencias algebraicas (ADA) y en la generalización de dicho método conocido como ecuaciones en diferencias algebraicas generalizadas (GADA) (Cieszewski & Bailey, 2000). Después de un primer ajuste, las ecuaciones de los modelos de Bertalanffy-Richards (Bertalanffy, 1949, 1957; Richards, 1959) y de Korf (Lundqvist, 1957) en forma GADA, mostradas en el Cuadro 2, así como el modelo polimórfico de Korf en forma ADA se seleccionaron para comparaciones posteriores. La forma de este último es la siguiente:

$$Y = b_1 \left(\frac{H_0}{b_1} \right)^{\frac{t_0}{t_1} b_2}$$

Modelos de crecimiento en diámetro

Los modelos de crecimiento en diámetro se ajustaron utilizando el modelo base de Bertalanffy-Richards (Bertalanffy, 1949, 1957; Richards, 1959) en forma ADA con tres variantes (Cuadro 3) y siguiendo la metodología de la curva guía.

En las expresiones anteriores, d_0 se ajustó como un índice de diámetro (IDiam), y la edad de referencia o base t_0 se fijó desde 50 hasta 90 años, de acuerdo con el patrón de crecimiento de cada especie; finalmente, en el ajuste se obtuvieron los valores d_0 y los estimadores de los parámetros.

Procedimiento de ajuste y criterios de selección del mejor modelo

El ajuste de sistemas compatibles de estimación de volumen plantea habitualmente algunos supuestos estadísticos que deben cumplirse, siendo uno de

Table 3. Diameter growth models fitted in algebraic differences form.

Cuadro 3. Modelos de crecimiento en diámetro ajustados en diferencias algebraicas.

Model/Modelo	Name/Nombre	Type/Tipo	Expression/Expresión
D1	Bertalanffy-Richards	Anamorphic/ Anamórfico	$d = d_0 \left(\frac{1 - \exp^{-b_1 t_1}}{1 - \exp^{-b_1 t_0}} \right)^{b_2}$
D2	Bertalanffy-Richards	Polymorphic I/ Polimórfico I	$d = b_0 \{1 - [1 - (d_0/b_0)^{1/b_2}]^{t_1/t_0}\}^{b_2}$
D3	Bertalanffy-Richards	Polymorphic II/ Polimórfico II	$d = b_0 \left(\frac{d_0}{b_0} \right)^{\frac{\ln(1 - \exp^{-b_1 t_1})}{\ln(1 - \exp^{-b_1 t_0})}}$

D: diameter at breast height (cm), t: age (years), b_0 : parameter representing the horizontal asymptote, b_1 : growth rate and b_2 : change rate.
D: diámetro normal (cm), t: edad (años), b_0 : parámetro que representa la asíntota horizontal, b_1 : tasa de crecimiento y b_2 : tasa de cambio.

whose expression is $Resid.d = Resid.d / (Pred.d^{0.1})^{0.5}$ where 0.1 represents the model parameter.

Profile functions are developed with multiple observations along the stem in each tree. Therefore, such observations are expected to be spatially correlated, which violates the principle of independence of errors. The autocorrelation problem, when it existed, was solved by using generalized nonlinear least squares and expanding the error term by an order-2 continuous autoregressive model [CAR(2)]. The expression of the error structure in the autoregressive model is as follows:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=x} l_k \rho_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij}$$

where,

e_{ij} = j -th ordinary residual of the i -th tree

e_{ij-k} = j -th ordinary residual of the i -kth tree

$l_k = 1$ for $j > k$ and 0 for $j \leq k$

ρ_k = k -order autoregressive parameter to be estimated

$h_{ij}-h_{ij-k}$ = distance separating the j th- k th observation within each tree, $h_{ij} > h_{ij-k}$ with ε_{ij} being the error term under the condition of independence.

The error structure expressed in the above equation was fitted simultaneously with the structure of the mean of each of the profile equations using the SAS/ETS® statistical software's MODEL procedure, which allows a dynamic updating of the residuals.

Goodness of fit of the models

The evaluation of the goodness of fit was based on the numerical and graphical analysis of the residuals. For this purpose, the coefficient of determination estimated for nonlinear regression (R^2), the root mean square error (RMSE) and the mean bias (e) were used.

Results and discussion

Developed Equations

A total of 6 414 equations were generated: 2 917 of volume (740 of total stem volume with bark [tsv_{wb}], 700 of total stem volume without bark [tsv_{nb}], 740 of branch volume with bark [vbr_{wb}] and 737 of total tree volume with bark [ttv_{wb}]); 2 868 of taper-volume (737 taper equations outside bark [di_{wb}], 697 taper equations inside bark [di_{nb}], 737 of merchantable volume with bark [vi_{wb}] and 697 of merchantable volume without bark [vi_{nb}]); 341 of site index (SI); and 288 of diameter growth (ΔD) (Table 4).

Of the total number of equations, 5 819 are specific to species level per RFMU, 324 to species level per state and 271 to genus level (eight state level and 263 at RFMU level). Of the 271 equations at genus level (*Pinus*, *Quercus* and *Arbutus*), 164 are of volume, 100 of

los más importantes garantizar la aditividad. Esta propiedad consiste en que la suma de las estimaciones de los volúmenes de todas las fracciones de un árbol (ramas y fuste) debe ser igual al volumen estimado directamente de la ecuación de volumen total. Para conseguir lo anterior, las ecuaciones de volumen por componente y la de volumen total se ajustaron de manera simultánea empleando el método de regresión iterativa aparentemente no relacionada (*Iterated Seemingly Unrelated Regression*, ITSUR), mediante el procedimiento MODEL de SAS/ETS®.

El problema de heterocedasticidad se corrigió utilizando regresión ponderada, con un peso igual a la inversa de la varianza de cada observación. Los pesos considerados fueron $1/d^2$ para la ecuación de volumen de ramas y $1/d^2h$ para la ecuación de volumen rollo total árbol con corteza. En el caso de las ecuaciones de crecimiento en diámetro, la heterocedasticidad se corrigió utilizando un modelo de potencia, cuya expresión es $Resid.d = Resid.d / (Pred.d^{0.1})^{0.5}$ donde 0.1 representa el parámetro del modelo.

Las funciones de perfil se desarrollan con múltiples observaciones a lo largo del fuste en cada uno de los árboles. Por tanto, es de esperar que tales observaciones estén correlacionadas espacialmente, lo cual viola el principio de independencia de los errores. El problema de autocorrelación, cuando existió, se solucionó utilizando mínimos cuadrados generalizados no lineales y expandiendo el término del error mediante un modelo autorregresivo continuo de orden 2 [CAR(2)]. La expresión de la estructura del error en el modelo autorregresivo es la siguiente:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{k=x} l_k \rho_k^{h_{ij}-h_{ij-k}} e_{ij-k} + \varepsilon_{ij}$$

donde,

e_{ij} = j -th residuo ordinario del i -th árbol

e_{ij-k} = j -th residuo ordinario del i -kth árbol

$l_k = 1$ para $j > k$ y 0 para $j \leq k$

ρ_k = parámetro autorregresivo de orden k a ser estimado

$h_{ij}-h_{ij-k}$ = distancia que separa la j th- k th observación dentro de cada árbol, $h_{ij} > h_{ij-k}$ siendo ε_{ij} el término del error bajo la condición de independencia.

La estructura del error expresada en la ecuación anterior se ajustó simultáneamente con la estructura de la media de cada una de las ecuaciones de perfil usando el procedimiento MODEL del programa estadístico SAS/ETS®, el cual permite una actualización dinámica de los residuos.

Bondad de ajuste de los modelos

La evaluación de la bondad de ajuste se basó en el análisis numérico y gráfico de los residuos. Para ello

volume-taper and seven of site index. The distribution of state equations at species level was as follows: 144 volume equations, 152 taper-volume, 26 site index and two diameter growth equations. The entities for which state-level equations were generated, at genus and species level, were Oaxaca (373), Jalisco (208) and Puebla (14).

Equations were developed for 97 species (records per state can be viewed at <http://conafor.gob.mx/sibifor/inicio.php>). *Pinus pseudostrobus* Lindl. was the species with the greatest presence, being found in 34 of the 58 RFMUs considered in the study, located in nine of the 11 states, followed by *P. oocarpa* Schiede and *P. teocote* Schiede ex Schltdl. with records in 31 and 27 RFMUs in seven and nine states, respectively. *Pinus caribaea* var. *hondurensis* Barret & Golfari and *P. greggii* Engelm. were recorded in only one RFMU. Regarding oak species, the most common were *Quercus laurina* Humb. et Bonpl. and *Q. crassifolia* Humb. with records in 30 and 27 RFMUs, respectively, both in eight states, and *Q. rugosa* Née in 26 RFMUs of nine states. *Quercus dysophylla* Benth. and *Q. eduardii* Trel. were the oak species with the least presence (one record).

se utilizaron el coeficiente de determinación estimado para regresión no lineal (R^2), la raíz del cuadrado medio del error (REMC) y el sesgo promedio (e).

Resultados y discusión

Ecuaciones desarrolladas

Se generaron 6 414 ecuaciones: 2 917 de volumen (740 de volumen rollo total árbol con corteza [$vrta_{cc}$], 700 de volumen rollo total árbol sin corteza [$vrta_s$], 740 de volumen de ramas con corteza [$vram_{cc}$] y 737 de volumen total árbol con corteza [vta_{cc}]); 2 868 de ahusamiento-volumen (737 ecuaciones de ahusamiento con corteza [di_{cc}], 697 de ahusamiento sin corteza [di_s], 737 de volumen comercial con corteza [vi_{cc}] y 697 de volumen comercial sin corteza [vi_s]); 341 de índice de sitio (IS); y 288 de crecimiento en diámetro (ΔD) (Cuadro 4).

Del total de ecuaciones, 5 819 son específicas a nivel de especie por UMAFOR, 324 a nivel de especie por estado y 271 a nivel de género (ocho estatales y 263 a nivel de UMAFOR). De las 271 ecuaciones a nivel de género (*Pinus*, *Quercus* y *Arbutus*), 164 son de volumen,

Table 4. Number and type of equations developed by state.

Cuadro 4. Número y tipo de ecuaciones desarrolladas por estado.

State/Estado	Volume equation/ Tarifas volumétricas				Taper-volume/ Ahusamiento-volumen				SI/IS	ΔD	Total
	$tsv_{wb}/$ $vrta_c$	$tsv_{nb}/$ $vrta_s$	$vbr_{wb}/$ $vram_s$	$ttv_{wb}/$ vta_c	$di_{wb}/$ di_{cc}	$di_{nb}/$ di_s	$vi_{wb}/$ vi_{cc}	$vi_{nb}/$ vi_s			
Chihuahua	86	86	86	86	86	86	86	86	43	43	774
State of Mexico	60	60	60	60	60	60	60	60	27	20	527
Guerrero	80	80	80	80	80	80	80	80	39	39	718
Hidalgo	40	40	40	40	40	40	40	40	13	11	344
Jalisco	102	102	102	99	99	99	99	99	29	29	859
Michoacán	63	63	63	63	63	63	63	63	42	42	588
Oaxaca	151	151	151	151	151	151	151	151	83	72	1 363
Puebla	50	50	50	50	50	50	50	50	33	--	433
Quintana Roo	40	--	40	40	40	--	40	--	--	--	200
Tlaxcala	32	32	32	32	32	32	32	32	12	12	280
Veracruz	36	36	36	36	36	36	36	36	20	20	328
	740	700	740	737	737	697	737	697	341	288	6 414

tsv_{wb} : total stem volume with bark, tsv_{nb} : total stem volume without bark, vbr_{wb} : branch volume with bark, ttv_{wb} : total tree volume with bark, di_{wb} : taper with bark, di_{nb} : taper without bark, vi_{wb} : merchantable volume with bark, vi_{nb} : merchantable volume without bark, SI : site index, ΔD : diameter growth.

$vrta_{cc}$: volumen rollo total árbol con corteza, $vrta_s$: volumen rollo total árbol sin corteza, $vram_{cc}$: volumen de ramas con corteza, vta_{cc} : volumen total árbol con corteza, di_{cc} : ahusamiento con corteza, di_s : ahusamiento sin corteza, vi_{cc} : volumen comercial con corteza, vi_s : volumen comercial sin corteza, IS : índice de sitio, ΔD : crecimiento en diámetro.

Types of equations

Volume equations

The volume equations (2 917) were formed by a system of additive equations to estimate tsv_{wb} , vbr_{wb} and ttv_{wb} . The equation to estimate tsv_{wb} corresponded in all cases (all species in all states) to the model of Schumacher and Hall (1933). The tsv_{wb} is the wood volume of the bole plus the bark thereof, for a tree with a dbh not less than 7.5 cm; the vbr_{wb} considers the volume with bark of all branches greater than 5 cm at the base, of a tree with a dbh not less than 7.5 cm and the ttv_{wb} is the sum of the previous volumes. As an example of use, the following is proposed: *P. pseudostrobus*, UMAFOR 1510, State of Mexico ($d = 35$ cm, $h = 23$ m). The graphical representation of the results is illustrated in Figure 3.

$$vrta_{wb} = 0.0000814 \cdot d^{1.82170878} \cdot h^{0.9392944} = 1.006 \text{ m}^3$$

$$vbr_{wb} = 0.0000381 \cdot d^2 = 0.047 \text{ m}^3$$

$$vrta_b = (0.0000814 \cdot d^{1.82170878} \cdot h^{0.9392944} + 0.0000381 \cdot d^2) = 1.053 \text{ m}^3$$

To estimate the tsv_{nb} , the equation is as follows:

$$tsv_{nb} = (b_0 d^b h^{b_2}) \delta_1$$

where δ_1 is the parameter obtained in the fitting of the merchantable volume equation of Fang et al. (2000), which converts the volume of the stem with bark to volume without bark:

$$tsv_{nb} = (0.0000814 \cdot d^{1.82170878} \cdot h^{0.9392944}) \cdot 0.775239 = 0.78 \text{ m}^3$$

Compatible volume-taper volume equations

A total of 2 868 compatible taper-volume equations were developed. The equation selected for all species was based on the model of Fang et al. (2000).

An example of the final expression of a taper-volume equation is given below, whereby the diameter at any height of the stem (d), the merchantable volume (v) and the total volume (V) of *P. durangensis* in RFMU 0801 (Casas Grandes) in Chihuahua are obtained.

$$d_i = c_1 \sqrt{h^{(k-0.000008)/0.000008} (1-q)^{(k-\beta)/\beta} \alpha_1^{1+1/2} \alpha_2^2}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{0.000044 \cdot d^{2.052745} h^{0.897032-k/0.000008}}{0.000008(r_0 - r_1) + 0.000037(r_1 - \alpha_1 r_2) + 0.000029 \alpha_1 r_2}}$$

$$\beta = (0.000008)^{1-(1+1/2)} (0.000037)(0.000029)^{1/2};$$

$$\alpha_1 = (1-p_1)^{\frac{(0.000037-0.000008)k}{0.000008-0.000037}}$$

$$\alpha_2 = (1-p_2)^{\frac{(0.000029-0.000037)k}{0.000037-0.000029}}$$

100 de ahusamiento-volumen y siete de índice de sitio. La distribución de las ecuaciones estatales a nivel de especie fue la siguiente: 144 tarifas volumétricas, 152 ecuaciones de ahusamiento-volumen, 26 de índice de sitio y dos de crecimiento en diámetro normal. Las entidades para las cuales se generaron ecuaciones estatales, a nivel de género y especie, fueron Oaxaca (373), Jalisco (208) y Puebla (14).

Se desarrollaron ecuaciones para 97 especies (los registros por estado se pueden consultar en <http://conafor.gob.mx/sibifor/inicio.php>). *Pinus pseudostrobus* Lindl. fue la especie con mayor presencia al encontrarse en 34 de las 58 UMAFOR consideradas en el estudio, ubicadas en nueve de los 11 estados, seguida de *P. oocarpa* Schiede y *P. teocote* Schiede ex Schldtl. con registros en 31 y 27 UMAFOR en siete y nueve estados, respectivamente. *Pinus caribaea* var. *hondurensis* Barret & Golfari y *P. greggii* Engelm. se registraron solamente en una UMAFOR. Respecto a las especies de encino, las más comunes fueron *Quercus laurina* Humb. et Bonpl. y *Q. crassifolia* Humb. con registros en 30 y 27 UMAFOR, respectivamente, ambas en ocho estados, y *Q. rugosa* Née en 26 UMAFOR de nueve estados. *Quercus dysophylla* Benth. y *Q. eduardii* Trel. fueron las especies de encino con menor presencia (un registro).

Tipos de ecuaciones

Ecuaciones de volumen

Las ecuaciones de volumen (2 917) quedaron conformadas por un sistema de ecuaciones aditivas para estimar $vrta_{cc}$, $vram_{cc}$ y vta_{cc} . La ecuación para estimar $vrta_{cc}$ correspondió en todos los casos (todas las especies en todos los estados) al modelo de Schumacher y Hall (1933). El $vrta_{cc}$ es el volumen de madera del fuste más la corteza del mismo, para un árbol de diámetro normal no menor de 7.5 cm; el $vram_{cc}$ considera el volumen con corteza de todas las ramas mayores de 5 cm en la base de un árbol con diámetro normal no menor de 7.5 cm y el vta_{cc} es la suma de los volúmenes anteriores. Como ejemplo de uso se propone el siguiente: *P. pseudostrobus*, UMAFOR 1510, Estado de México ($d = 35$ cm, $h = 23$ m). La representación gráfica de los resultados se ilustra en la Figura 3.

$$vrta_{cc} = 0.0000814 \cdot d^{1.82170878} \cdot h^{0.9392944} = 1.006 \text{ m}^3$$

$$vram_{cc} = 0.0000381 \cdot d^2 = 0.047 \text{ m}^3$$

$$vta_{cc} = (0.0000814 \cdot d^{1.82170878} \cdot h^{0.9392944} + 0.0000381 \cdot d^2) = 1.053 \text{ m}^3$$

Para estimar el $vrta_{sc}$, la ecuación es la siguiente:

$$vrta_{sc} = (b_0 d^b h^{b_2}) \delta_1$$

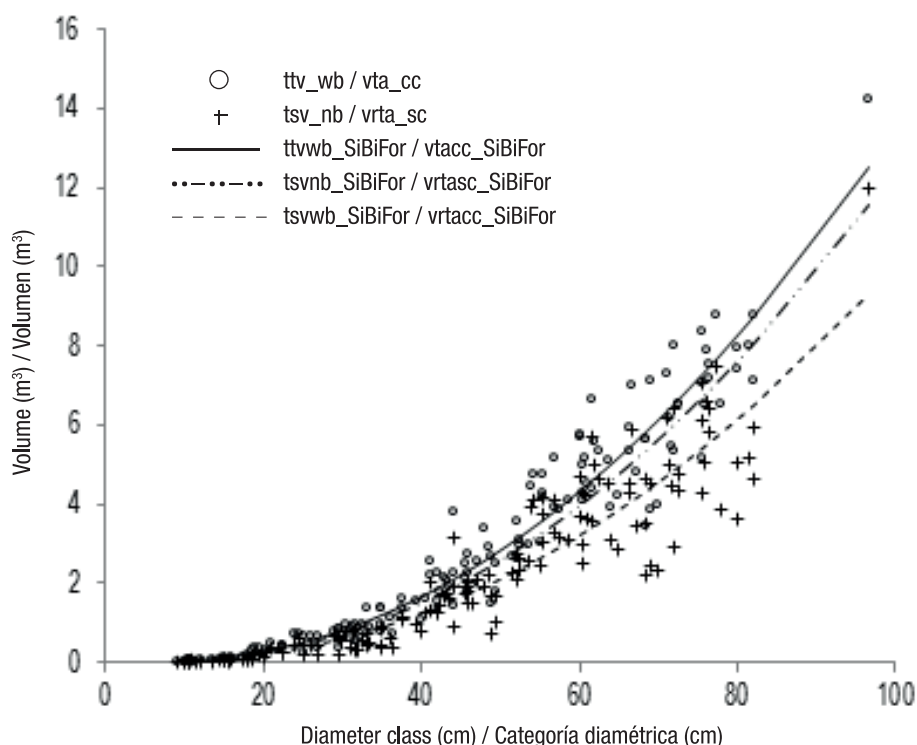


Figure 3. Total stem volume with bark curves (tsv_{wb}), total tree volume with bark (ttv_{wb}) and total stem volume without bark (tsv_{nb}) predicted with the equations developed for *Pinus pseudostrobus* in RFMU 1510 of the State of Mexico, overlapping the observed values of ttv_{wb} and tsv_{nb} .

Figura 3. Curvas de volumen rollo total árbol con corteza ($vrta_{cc}$), volumen total árbol con corteza (vta_{cc}) y volumen rollo total árbol sin corteza ($vrta_{sc}$) predichas con las ecuaciones desarrolladas para *Pinus pseudostrobus* en la UMAFOR 1510 del Estado de México, sobrepuestas a los valores observados de vta_{cc} y $vrta_{sc}$.

$$r_0 = (1-h_s/h)^{k/0.000008}; \quad r_1 = (1-p_1)^{k/0.000008}; \quad r_2 = (1-p_2)^{k/0.000037}$$

$$I_1 = 1 \text{ if } 0.045209 \leq q \leq 0.6399; \text{ 0 otherwise}$$

$$I_2 = 1 \text{ if } 0.6399 \leq q \leq 1; \text{ 0 otherwise}$$

Figure 4 shows the fit of the taper model selected for a tree with a dbh of 45 cm and a height of 20 m.

Compatible dominant height-site index equations

The Bertalanffy-Richards model in GADA form was superior to the rest of the models for most species (301 equations), followed by the GADA form of the Korf model (28 equations) (Lundqvist, 1957) and the Korf polymorphic model (12 equations). The results confirm the flexibility and practicality of the Bertalanffy-Richards base model, as well as the dynamic equation, to fit data from different species or from a single species growing in different ecological regions. The compatible dominant height-site index equation allows calculating:

a) the dominant height H_1 at a given age t_2 from the dominant height H_0 at another age t_1 ($H_0 = 13$ m, $t_1 = 32$ years, $t_2 = 70$ years, $H_1 = ?$) (blue dot in Figure 5).

donde δ_1 es el parámetro obtenido en el ajuste de la ecuación de volumen comercial de Fang et al. (2000), que convierte el volumen del fuste con corteza a volumen sin corteza:

$$vrta_{sc} = (0.0000814 \cdot d^{1.82170878} \cdot h^{0.9392944}) \cdot 0.775239 = 0.78 \text{ m}^3$$

Ecuaciones compatibles ahusamiento-volumen

Se desarrollaron 2 868 ecuaciones compatibles ahusamiento-volumen. La ecuación seleccionada para todas las especies se basó en el modelo de Fang et al. (2000).

A continuación se presenta un ejemplo de la expresión final de una ecuación de ahusamiento-volumen, mediante la cual se obtiene el diámetro a cualquier altura del fuste (d), el volumen comercial (v_i) y el volumen total (V) de *P. durangensis* en la UMAFOR 0801 (Casas Grandes) en Chihuahua.

$$d_i = c_1 \sqrt{h^{(k-0.000008)/0.000008} (1-q)^{(k\beta)/\beta} \alpha_1^{I_1+I_2} \alpha_2^{I_2}}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{0.000044 \cdot d^{2.052745} h^{0.897032-k/0.000008}}{0.000008(r_0 - r_1) + 0.000037(r_1 - \alpha_1 r_2) + 0.000029 \alpha_1 r_2}};$$

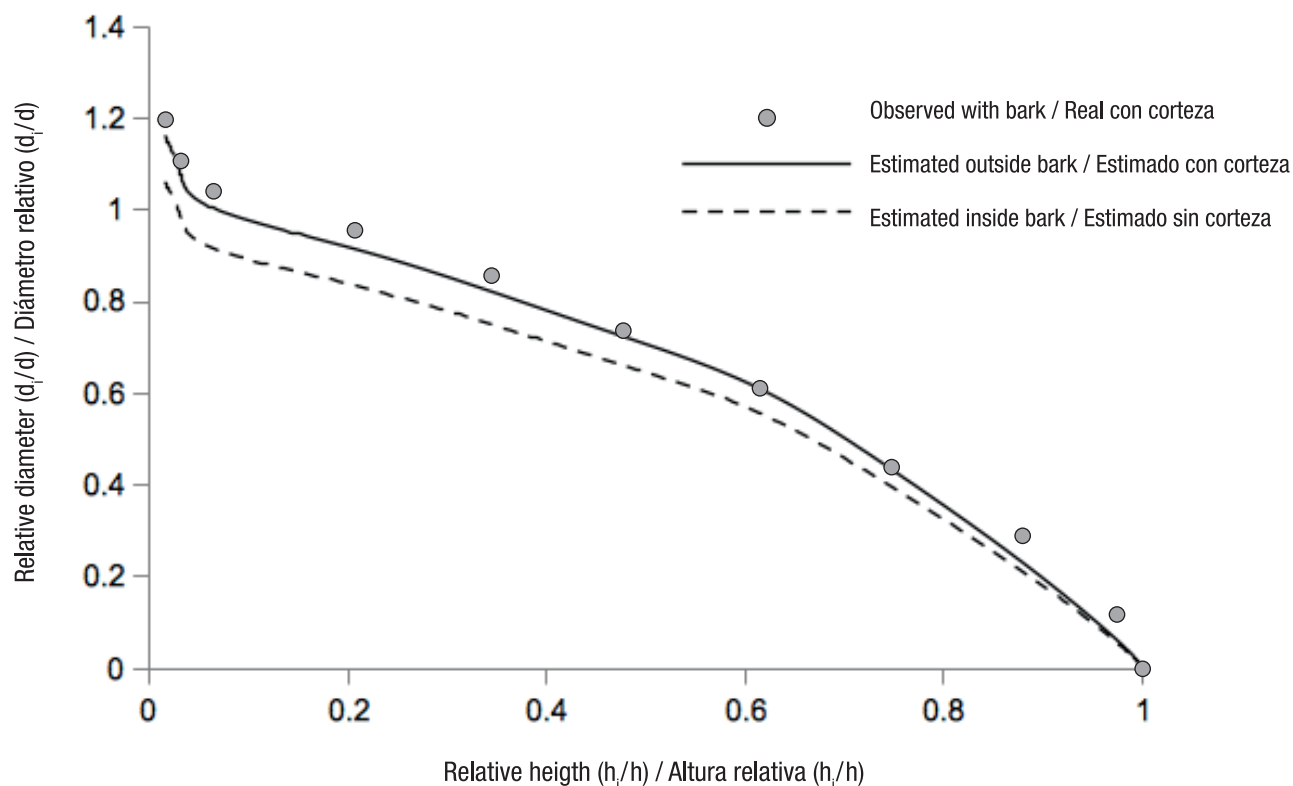


Figure 4. Representation of relative height versus relative diameter for a *P. durangensis* tree of the 45-cm diameter class in RFMU 0801 (Casas Grandes, Chihuahua).

Figura 4. Representación de la altura relativa contra el diámetro relativo para un árbol de *P. durangensis* de la clase diamétrica de 45 cm en la UMAFOR 0801 (Casas Grandes, Chihuahua).

$$H_1 = 13 \cdot \left[\frac{1 - e^{-0.035553 \cdot 70}}{1 - e^{-0.035553 \cdot 32}} \right]^{-6.29842 + 26.35435/X} = 22.3 \text{ m}$$

with

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(13) + 6.29842 \cdot L_0 + \sqrt{[-6.29842 \cdot L_0 - \ln(13)]^2 - 4 \cdot 26.35435 \cdot L_0} \right\};$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{-(0.035553 \cdot 32)}]$$

b) the site index (*SI*) from the dominant height H_0 at given age t_1 ($H_0 = 7$ m, $t_1 = 20$ years, $t_{ref} = 60$ years, $SI = ?$) (red dot Figure 5).

$$H_1 = 7 \cdot \left[\frac{1 - e^{-0.035553 \cdot 60}}{1 - e^{-0.035553 \cdot 20}} \right]^{-6.29842 + 26.35435/X} = 19.7 \text{ m}$$

with

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(7) + 6.29842 \cdot L_0 + \sqrt{[-6.29842 \cdot L_0 - \ln(7)]^2 - 4 \cdot 26.35435 \cdot L_0} \right\};$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{-(0.035553 \cdot 20)}]$$

c) dominant height H_1 at given age t_1 from *SI* ($SI = 14$ m, $t_{ref} = 60$ years, $t_2 = 90$ years, $H_1 = ?$) (yellow dot in Figure 5).

$$H_1 = 14 \cdot \left[\frac{1 - e^{-0.035553 \cdot 90}}{1 - e^{-0.035553 \cdot 60}} \right]^{-6.29842 + 26.35435/X} = 17.4 \text{ m}$$

$$\beta = (0.000008)^{1 - (I_1 + I_2)} (0.000037)^{I_1} (0.000029)^{I_2};$$

$$\alpha_1 = (1 - p_1)^{\frac{(0.000037 - 0.000008)k}{0.000008 - 0.000037}}$$

$$\alpha_2 = (1 - p_2)^{\frac{(0.000029 - 0.000037)k}{0.000037 - 0.000029}}$$

$$r_0 = (1 - h_{st}/h)^{k/0.000008}; \quad r_1 = (1 - p_1)^{k/0.000008}; \quad r_2 = (1 - p_2)^{k/0.000037}$$

$I_1 = 1$ si $0.045209 \leq q \leq 0.6399$; 0 en caso contrario

$I_2 = 1$ si $0.6399 \leq q \leq 1$; 0 en caso contrario

La Figura 4 muestra el ajuste del modelo seleccionado para un árbol de 45 cm de diámetro normal y una altura de 20 m.

Ecuaciones compatibles altura dominante-índice de sitio

El modelo de Bertalanffy-Richards en forma GADA fue superior al resto de los modelos para la mayoría de las especies (301 ecuaciones), seguido por la forma GADA del modelo de Korff (28 ecuaciones) (Lundqvist, 1957) y el modelo polimórfico de Korff (12 ecuaciones). Los resultados confirman la flexibilidad y practicidad del modelo base de Bertalanffy-Richards, así como de la ecuación dinámica, para ajustarse a datos de diferentes

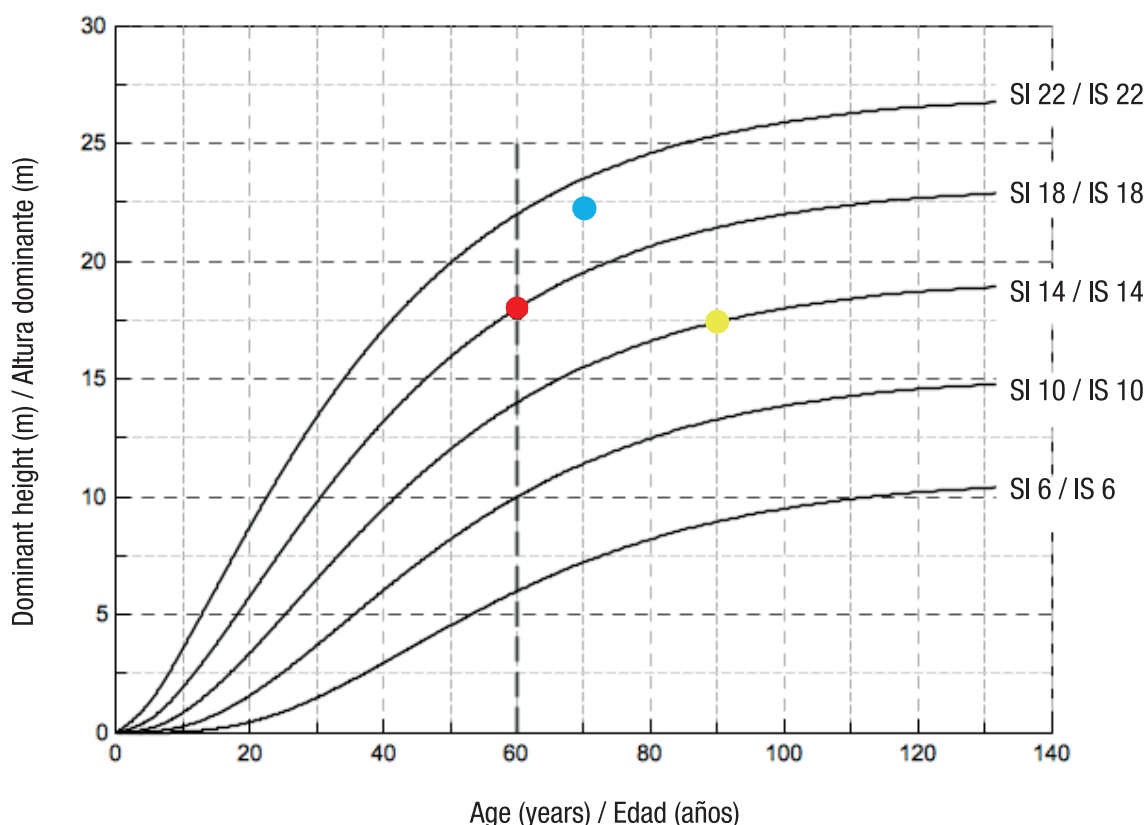


Figure 5. Site index curves for *Pinus durangensis* in RFMU 0801 (Casas Grandes, Chihuahua), generated with the Bertalanffy-Richards equation in GADA form (equations in generalized algebraic differences).

Figura 5. Curvas de índice de sitio para *Pinus durangensis* en la UMAFOR 0801 (Casas Grandes, Chihuahua), generadas con la ecuación de Bertalanffy-Richards en forma GADA (ecuaciones en diferencias algebraicas generalizadas).

with

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(14) + 6.29842 \cdot L_0 + \sqrt{[-6.29842 \cdot L_0 - \ln(14)]^2 - 4 \cdot 26.35435 \cdot L_0} \right\};$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{(-0.035553 \cdot 60)}]$$

Diameter growth equations

The Bertalanffy-Richards anamorphic model was selected as the best in 61 % of cases (176), followed by polymorphic model I with 28 % (80) and polymorphic II with 11 % (32).

SiBiFor

The Forest Biometric System (SiBiFor) is a digital search platform that contains the results of the research carried out and offers: 1) a database made up of all the equations developed for the most important forest species of Mexico's temperate and tropical forests; 2) easy access to equations and their metadata (users can perform queries by state, RFMU, species and type of equation); and 3) access the platform's support manuals and documentation (Figure 6).

especies o de una especie creciendo en regiones ecológicas distintas. La ecuación compatible altura dominante-índice de sitio permite calcular:

a) la altura dominante H_1 a una edad determinada t_2 a partir de la altura dominante H_0 a otra edad t_1 ($H_0 = 13$ m, $t_1 = 32$ años, $t_2 = 70$ años, $H_1 = ?$) (punto azul en la Figura 5).

$$H_1 = 13 \cdot \left[\frac{1 - e^{-0.035553 \cdot 70}}{1 - e^{-0.035553 \cdot 32}} \right]^{-6.29842 + 26.35435/X} = 22.3 \text{ m}$$

con

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(13) + 6.29842 \cdot L_0 + \sqrt{[-6.29842 \cdot L_0 - \ln(13)]^2 - 4 \cdot 26.35435 \cdot L_0} \right\};$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{(-0.035553 \cdot 32)}]$$

b) el índice de sitio (IS) a partir de la altura dominante H_0 a una edad determinada t_1 ($H_0 = 7$ m, $t_1 = 20$ años, $t_{ref} = 60$ años, $IS = ?$) (punto rojo en la Figura 5).

$$H_1 = 7 \cdot \left[\frac{1 - e^{-0.035553 \cdot 60}}{1 - e^{-0.035553 \cdot 20}} \right]^{-6.29842 + 26.35435/X} = 19.7 \text{ m}$$

The digital platform was developed in the PHP programming language (interpreted programming language), a free software with support to connect to a variety of databases such as MySQL, PostgreSQL, mSQL, Oracle, and to design and layout HTML5 and CSS3 web interfaces, as well as different frameworks that make use of these technologies. The platform can be accessed from any Internet browser such as Microsoft Internet Explorer, Google Chrome, Mozilla Firefox or Safari. SiBiFor can be accessed through the link <http://conafor.gob.mx/sibifor>. The platform was designed considering the same central structure of *AloMéxico*, an allometric biomass model database, to allow compatibility with this system and the exchange of information between the two applications.

SiBiFor is a unique web platform for the forest sector in Mexico that offers free, fast access to a national dasometric database with information at species, regional and state level. Forest managers can use it to support their management proposals aimed at achieving the maximum productivity of forest land under use. The platform is also useful in estimating timber stocks and the production capacity of forest raw materials

con

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(7) + 6.29842 \cdot L_0 + \sqrt{[-6.29842 \cdot L_0 - \ln(7)]^2 - 4 \cdot 26.35435 \cdot L_0} \right\};$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{(-0.035553 \cdot 20)}]$$

c) la altura dominante H_1 a una edad determinada t_1 a partir del IS ($IS = 14$ m, $t_{ref} = 60$ años, $t_2 = 90$ años, $H_1 = ?$) (punto amarillo en la Figura 5).

$$H_1 = 14 \cdot \frac{[1 - e^{-0.035553 \cdot 90}]^{-6.29842 + 26.35435/X}}{[1 - e^{-0.035553 \cdot 60}]} = 17.4 \text{ m}$$

con

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(14) + 6.29842 \cdot L_0 + \sqrt{[-6.29842 \cdot L_0 - \ln(14)]^2 - 4 \cdot 26.35435 \cdot L_0} \right\};$$

$$L_0 = \ln[1 - e^{(-0.035553 \cdot 60)}]$$

Ecuaciones de crecimiento en diámetro

El modelo anamórfico de Bertalanffy-Richards fue seleccionado como el mejor en 61 % de los casos (176), seguido del modelo polimórfico I con 28 % (80) y el polimórfico II con 11 % (32).

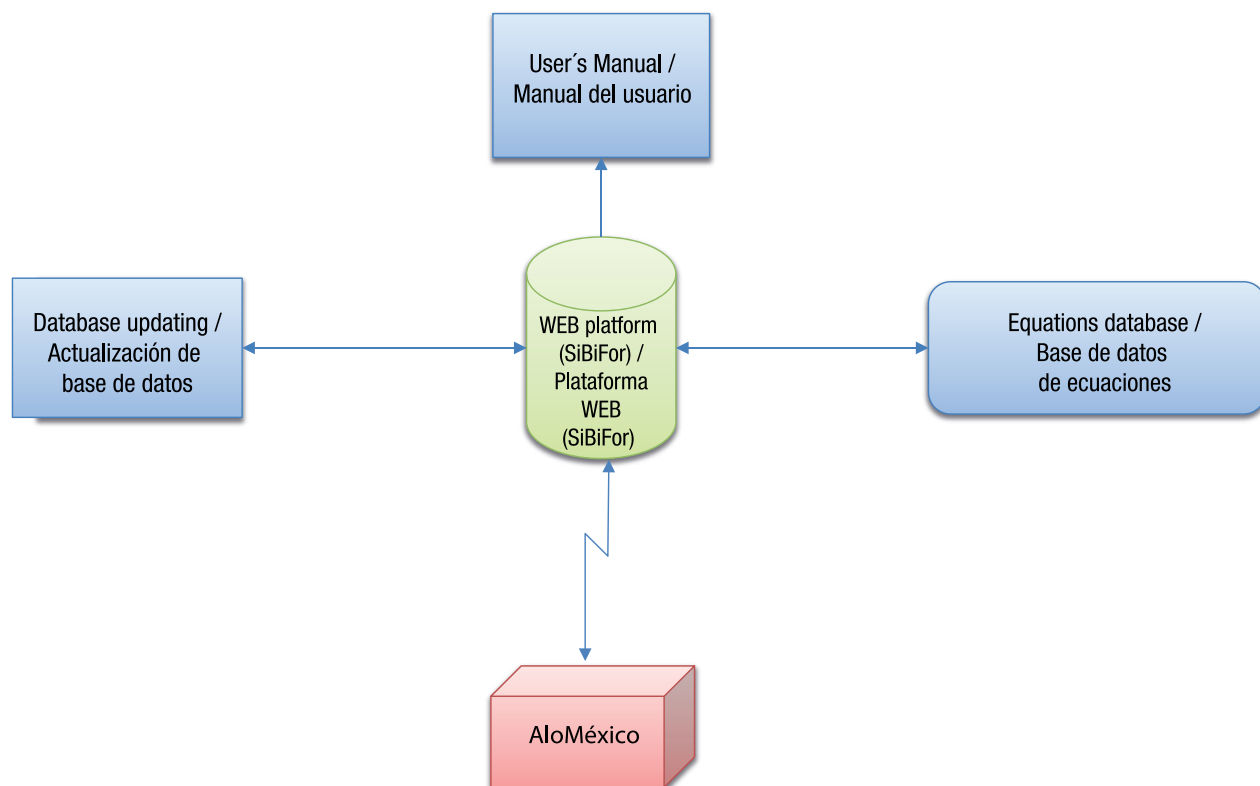


Figure 6. Components of the SiBiFor (Forest Biometric System) online search platform

Figura 6. Componentes de la plataforma de consulta en línea SiBiFor (Sistema Biométrico Forestal).

by species and type of product, for the planning and establishment of their supply organization schemes.

Potential SiBiFor users are mainly those involved in the assessment of forest resources, scientists engaged in the modeling, characterization and dynamics of forest ecosystems, forestry technical service providers, students, consultants and project developers (manifestations of environmental impact and land-use changes) and academic forest research institutions. Federal government departments (SEMARNAT, PROFEPA [Federal Environmental Protection Agency] and CONAFOR), responsible for designing national forest policies that require statistical information on the situation of forest ecosystems, also benefit from the system. Additionally, those who coordinate the formulation of action strategies to address global phenomena such as climate change (e.g. the Monitoring, Reporting and Verification (MRV) Group, which coordinates the National REDD+ Strategy), non-governmental organizations, and forestland owners and holders can make use of the platform.

The fact that SiBiFor has been developed under a standardized methodology, at national level, allows users such as CONAFOR's Forest Monitoring Office to make temporal comparisons between inventories. Users will be able to apply the equations in each state, to make estimates at country level or so that states generate or update their own inventory, in order that the National Forest Inventory is the integration of each one of them.

Conclusions

This paper and the SiBiFor web platform present for the first time a consistent, scientifically-validated database of volume, product distribution, site index and diameter growth equations of the most important species in Mexico's forests. SiBiFor is an update of the equations that have been applied for more than four decades in most of the country's forest regions. Many of them were developed for forests with little or no silvicultural management, so it is recommended to use the equations contained in SiBiFor in studies related to the estimation of volume, taper, site index or diameter growth in the RFMUs and states considered in this research. The methodology used, including field data collection protocols, is suitable for national application and sufficiently robust and consistent to be used in future studies related to the development or calibration of biometric application systems in the forest sector.

End of English version

SiBiFor

El Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor) es una plataforma de consulta digital que contiene los resultados de la investigación realizada y ofrece: 1) una base de datos conformada por la totalidad de ecuaciones desarrolladas para las especies forestales más importantes de los bosques templados y tropicales de México; 2) fácil acceso a las ecuaciones y sus metadatos (los usuarios pueden realizar consultas por estado, UMAFOR, especie y tipo de ecuación); y 3) acceso a manuales y documentación de soporte de la plataforma (Figura 6).

La plataforma digital se desarrolló en el lenguaje de programación PHP (lenguaje de programación interpretado), un software libre con soporte para conectarse a una variedad de base de datos como MySQL, PostgreSQL, mSQL, Oracle, diseño y maquetación de interfaces web HTML5 y CSS3, así como diferentes *frameworks* que hacen uso de estas tecnologías. La plataforma puede consultarse desde cualquier navegador de internet como Microsoft Internet Explorer, Google Chrome, Mozilla Firefox o Safari. Se puede acceder a SiBiFor a través del enlace <http://conafor.gob.mx/sibifor>. La plataforma se diseñó considerando la misma estructura central de modelos alométricos de México (AloMéxico) con el objetivo de permitir la compatibilidad con dicho sistema y el intercambio de información entre ambas aplicaciones.

SiBiFor es una plataforma web única del sector forestal en el país que ofrece acceso libre y rápido a una base dasométrica nacional con información a nivel de especie, regional y estatal. Los manejadores forestales pueden utilizarla para sustentar sus propuestas de manejo encaminadas a alcanzar la máxima productividad de los terrenos bajo aprovechamiento. La plataforma también es útil en la estimación de las existencias maderables y de la capacidad de producción de materias primas por especie y tipo de producto, para la planeación y establecimiento de esquemas de organización de abasto de las mismas.

Los usuarios potenciales de SiBiFor son, principalmente, los involucrados en la evaluación de recursos forestales, científicos de la modelización, caracterización y dinámica de ecosistemas forestales, prestadores de servicios técnicos forestales, estudiantes, consultores y desarrolladores de proyectos (manifestaciones de impacto ambiental y cambios de uso del suelo) y las instituciones académicas de investigación forestal. Las dependencias de la administración pública federal (SEMARNAT, PROFEPA [Procuraduría Federal de Protección al Ambiente] y CONAFOR), responsables de diseñar políticas nacionales en materia forestal que requieren información estadística sobre la situación de

References / Referencias

- Aguilar, R., M., & Velarde, R. J. (2001). Tablas de volúmenes para la estimación del volumen forestal. Retrieved from http://www.academia.edu/10818222/Tablas_de_vol%C3%BAmenes_para_la_estimaci%C3%B3n_del_volumen_forestal
- Assmann, E. (1970). *The principles of forest yield studies: Studies in the organic production, structure, increment and yield of forest stands*. New York, USA: Pergamon Press.
- Bertalanffy, L. v. (1949). Problems of organic growth. *Nature*, 163(4135), 156–158. doi: 10.1038/163156a0
- Bertalanffy, L. v. (1957). Quantitative laws in metabolism and growth. *The Quarterly Review of Biology*, 32(3), 217–231. doi: 10.1086/401873
- Bi, H. (2000). Trigonometric variable-form taper equations for Australian eucalypts. *Forest Science*, 46(3), 397–409. Retrieved from <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/2000/00000046/00000003/art00009>
- Biging, G. S. (1984). Taper equations for second-growth mixed conifers of Northern California. *Forest Science*, 30(4), 1103–1117. Retrieved from <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/1984/00000030/00000004/art00032>
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46, 116–126. Retrieved from <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/2000/00000046/00000001/art00015>
- Cieszewski, C. J., & Strub, M. (2008). Parameter estimation of base age invariant site index models: Which data structure to use? A discussion. *Forest Science*, 53(5), 552–555. Retrieved from <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/2007/00000053/00000005/art00002>
- Corral, R. S., Návar, J. J., & Fernández, S. F. (1999). Ajuste de funciones de ahusamiento a los perfiles fustales de cinco pináceas de la región de El Salto, Durango. *Madera y Bosques*, 5, 53–65. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=61750205>
- Corral-Rivas, J. J., Barrio-Anta, M., Aguirre-Calderón, O. A., & Diéguez-Aranda, U. (2007). Use of stump diameter to estimate diameter at breast height and tree volume for major pine species in El Salto Durango (Mexico). *Forestry*, 80, 29–40. doi: 10.1093/forestry/cpl048
- Cruz-Cobos, F., De los Santos-Posadas, H. M., & Valdez-Lazalde, J. R. (2008). Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia*, 4, 473–485. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=30211241010>
- Davis, L. S., Johnson, K. N., Bettinger, P. S., & Howard, T. E. (2001). *Forest management* (4th ed.). New York, USA: McGraw-Hill Press.
- Fang, Z., Borders, B. E., & Bailey, R. L. (2000). Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Science*, 46, 1–12. Retrieved from
- los ecosistemas forestales, se benefician también con el sistema. Asimismo, quienes coordinan la formulación de estrategias de acción ante fenómenos de alcance mundial como el cambio climático (p. ej. el Grupo Monitoreo, Reporte y Verificación [MRV] que coordina la Estrategia Nacional REDD+), las organizaciones no gubernamentales, y los dueños y poseedores de terrenos forestales pueden hacer uso de la plataforma.
- El hecho de que SiBiFor se haya desarrollado bajo una metodología estandarizada, a nivel nacional, permite a los usuarios como la Gerencia de Monitoreo Forestal de la CONAFOR, realizar comparaciones temporales entre inventarios. Los usuarios podrán aplicar las ecuaciones en cada entidad federativa, para realizar estimaciones a nivel de país o para que los estados generen o actualicen su propio inventario, a fin de que el Inventario Nacional Forestal sea la integración de cada uno de ellos.

Conclusiones

Esta publicación y la plataforma web SiBiFor presentan por primera vez una base de datos, consistente y validada científicamente, de ecuaciones de volumen, distribución de productos, índice de sitio y crecimiento en diámetro de las especies más importantes de los bosques de México. SiBiFor es una actualización de las ecuaciones que se venían aplicando desde hace más de cuatro décadas en gran parte de las regiones forestales del país. Muchas de ellas fueron desarrolladas para bosques con poco o nulo manejo silvícola, por lo que se recomienda el uso de las ecuaciones contenidas en SiBiFor en estudios relacionados con la estimación del volumen, ahusamiento, índice de sitio o crecimiento en diámetro en las UMAFOR y estados considerados en esta investigación. La metodología empleada, incluyendo los protocolos de toma de datos en campo, es de aplicación nacional y lo suficientemente robusta y consistente, para ser utilizada en estudios futuros relacionados con el desarrollo o calibración de sistemas biométricos de aplicación en el sector forestal.

Fin de la versión en español

- <http://www.ingentaconnect.com/contentone/saf/fs/2000/00000046/00000001/art00002>
- Hernández-Pérez, D., De los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Valdez-Lazalde, J. R., & Volke-Haller, V. (2013). Sistema compatible de ahusamiento y volumen para *Pinus patula* Schdt. et Cham. en Zacualtipán, Hidalgo. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 4(16), 34–45. Retrieved from <http://www.scielo.org.mx/pdf/remcf/v4n16/v4n16a4.pdf>
- Lundqvist, B. (1957). On height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden. *Meddelanden Fran Statens Skogsforskningsinstitut*, 47(2), 1–64.
- Muñoz-Flores, H. J., Velarde, R. J. C., García, M. J. J., Sáenz, R. J. T., Olvera, D. E. H., & Hernández, R. J. (2012). Predicción de volúmenes de fuste total para plantaciones de *Pinus greggii* Engelm. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 3(14), 10–22. Retrieved from <http://cienciasforestales.inifap.gob.mx/editorial/index.php/Forestales/article/view/2504>
- Pompa-García, M., Corral-Rivas, J. J., Hernández-Díaz, J. C., & Álvarez-González, J. G. (2009). A system for calculating the merchantable volume of oak trees in the northwest of the state of Chihuahua, Mexico. *Journal of Forest Research*, 20(4), 293–300. doi: 10.1007/s11676-009-0051-x
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10, 290–300. doi: 10.1093/jxb/10.2.290
- Statistical Analysis System (SAS) Institute. (2008). SAS/STAT® 9.2 *User's guide second edition*. SAS Institute Inc. USA: Author.
- Schumacher, F. X. & Hall, F.S. (1933). Logarithmic expression of timber-tree volume. *Journal of Agricultural Research*, 47, 719–734. Retrieved from <https://naldc.nal.usda.gov/naldc/catalog.xhtml?id=IND43968352>
- Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT). (2015). *Anuario estadístico de la producción forestal 2014*. México: Autor.
- Spurr, S. H. (1952). *Forest inventory*. New York, USA: John Wiley & Sons Press.
- Vargas-Larreta, B. (2006). *Analyse und prognose des einzelbaumwachstums in strukturreichen mischbeständen in Durango, Mexiko*. Göttingen, Germany: Sierke Verlag.
- Vargas-Larreta, B., Cruz-Cobos, F., & Corral-Rivas, J. J. (2008). Modelos de evaluación de la información estadística de los programas de manejo forestal del estado de Durango. Informe técnico núm. 1 México: SEMARNAT.
- Weiskittel, A. R., Hann, D. W., Kershaw, J. A., & Vanclay J. K. (2011). *Forest growth & yield modeling*. West Sussex, UK: Wiley-Blackwell Press.

