

# Taper model by type of soil for *Pinus radiata* in the regions of Biobío and the Araucanía, Chile

Modelo de ahusamiento por tipo de suelo para *Pinus radiata* en las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile

Andrés Rodríguez-Toro<sup>1\*</sup>; Rafael Rubilar-Pons<sup>1,2</sup>; Fernando Muñoz-Sáez<sup>1</sup>; Eduardo Cartes-Rodríguez<sup>1</sup>; Eduardo Acuña-Carmona<sup>1</sup>; Jorge Cancino-Cancino<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Universidad de Concepción, Facultad de Ciencias Forestales. Victoria núm. 631 – Concepción, Chile. Email: jrodriguez@udec.cl, Tel: 57 (4) 578 3976 (\*Corresponding author).

<sup>2</sup>Universidad de Concepción, Cooperativa de Productividad Forestal. Concepción, Chile.

## Abstract

A new generalized taper model for *Pinus radiata* is presented in some types of soils. This is a non-linear model fitted with data from 264 trees aged between 15 and 31 years, harvested in 27 stands located in 11 communes from the Biobío and the Araucanía, Chile, in three different types of soils, i.e. volcanic sand, volcanic ash and marine sediments. The generalization of the model was achieved by incorporating stand state variables, and the subsequent simplification of it incorporating site variability in its parameters. The volume function obtained from the numerical integration of the taper model predicts over 97% of the variation in stem volume without bark estimated by the formula of Smalian in the three types of soils.

**Keywords:** Generalized model, volume, biomass, forest management, wood optimization

## Resumen

Se presenta un nuevo modelo de ahusamiento generalizado en *Pinus radiata* en algunos tipos de suelo. Este es un modelo no lineal ajustado con datos de 264 árboles con edades entre 15 y 31 años, cosechados en 27 rodales localizados en 11 comunas de las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile, en tres diferentes tipos de suelos (arenas volcánicas, cenizas volcánicas y sedimentos de origen marino). La generalización del modelo se logró incorporando variables de estado del rodal, y la posterior simplificación del mismo, incorporando la variabilidad del sitio de manera implícita en sus parámetros. La función de volumen obtenida de la integración numérica del modelo de ahusamiento predice más de 97 % de la variación del volumen del fuste sin corteza estimado mediante la fórmula de Smalian, en los tres tipos de suelo.

**Palabras clave:** Modelo generalizado, volumen, biomasa, gestión forestal, optimización de la madera

## Introduction

Nowadays, intensive forest management practices and greater diversity of use of wood require functions for estimating trade and residual volumes of the stem with high consistency and versatility (Quiñonez, de los Santos, Álvarez, & Velázquez, 2014), supporting forest-management decision making (Rachid, Mason, Woollons, & Resquin, 2014). In this scenario, taper models continue to be an indispensable and useful tool, not only for volume point estimate, but also in the processes of simulation to optimize sawlog (Honorato, 2011; Santiago et al., 2014).

The rate of decrease in the diameter of the stem varies as we move into the height of the tree (Hjelm, 2013). The stem throughout its longitudinal extension takes different shapes depending on the species, from an neiloide in the basal region, cylindrical shapes or truncated paraboloids in the area of greatest commercial exploitation and ending in conical or parabolic shapes at the upper end of the tree (Newnham, 1992; Tamarit et al., 2014). Therefore, the greatest difficulty arises in obtaining reliable estimates of the diameter at the basal area of the stem and the apical region. In addition to the species, the profile of the stem could be determined by site productivity (Mead, 2013), sociological position of the tree in the stand and by silvicultural management activities (Matovic, Koprivica, & Radonja, 2007).

Many authors have tried to represent the profile of the stem using different mathematical models, based either on biological facts or empirical basis. The current literature includes linear taper models (Allen, 1991; Bruce et al., 1968; Kozak, Munro & Smith, 1969; Lowell, 1986; Real & Moore, 1986; Renteria & Ramirez, 1998), no linear models (Demaerschalk, 1972, 1973; Sharma & Oderwald, 2001; Sharma & Zhang, 2004), segmented models (Cao, Burkhart, & Max, 1980; Max & Burkhart, 1976; Parresol, Hotvedt, & Cao, 1987; Valenti & Cao, 1986) and trigonometric models (Thomas & Parresol, 1991). This range includes everything from differential and integral models to models that require numerical integration for obtaining stem volume.

The variety of models available today is evidence of deficiencies in the proposed models and shows stem profile model as a challenge that is still current (Gomat et al., 2011). The most common deficiencies in models relate to incorrect estimates, especially at the ends of the stem. An additional deficiency of existing models, except for a few models, is not to incorporate stand state variables that allow their widespread use, so they are valid only for the subject area of sampling and validation.

According to the above, a taper model should have the following attributes: i) be discernible along the entire

## Introducción

En la actualidad, las prácticas intensivas de manejo silvícola y una mayor diversidad del uso de la madera requieren de funciones para la estimación de los volúmenes comerciales y residuales del fuste con alta consistencia y versatilidad (Quiñonez, de los Santos, Álvarez, & Velázquez, 2014), que apoyen la toma de decisiones en la gestión forestal (Rachid, Mason, Woollons, & Resquin, 2014). En este escenario, los modelos de ahusamiento continúan siendo una herramienta indispensable y de gran utilidad, no solo para la estimación puntual del volumen, sino también en los procesos de simulación para la optimización de la madera en aserrío (Honorato, 2011; Santiago et al., 2014).

La tasa de disminución del diámetro del fuste varía a medida que se avanza en la altura del árbol (Hjelm, 2013). El fuste en toda su extensión longitudinal adquiere diferentes formas según la especie, pasando de un neiloide en la región basal, formas cilíndricas o paraboloides truncados en la zona de mayor aprovechamiento comercial y terminando en formas cónicas o parabólicas en el extremo superior del árbol (Newnham, 1992; Tamarit et al., 2014). Por lo anterior, la mayor dificultad se presenta en la obtención de estimadores confiables del diámetro en la zona basal del fuste y en la zona apical del mismo. Además de la especie, el perfil del fuste podría ser determinado por la productividad del sitio (Mead, 2013), la posición sociológica del individuo dentro del rodal y por actividades de manejo silvicultural (Matovic, Koprivica, & Radonja, 2007).

Numerosos autores han tratado de representar el perfil del fuste mediante diversos modelos matemáticos, basados ya sea en fundamentos biológicos o de origen netamente empírico. La literatura actual incluye modelos de ahusamiento lineales (Allen, 1991; Bruce et al., 1968; Kozak, Munro, & Smith, 1969; Lowell, 1986; Real & Moore, 1986; Renteria & Ramirez, 1998), no lineales (Demaerschalk, 1972, 1973; Sharma & Oderwald, 2001; Sharma & Zhang, 2004), segmentados (Cao, Burkhart, & Max, 1980; Max & Burkhart, 1976; Parresol, Hotvedt, & Cao, 1987; Valenti & Cao, 1986) y trigonométricos (Thomas & Parresol, 1991). Esa gama incluye desde modelos diferenciables e integrables, hasta modelos que requieren de la integración numérica para la obtención del volumen del fuste.

La gran variedad de modelos existente en la actualidad es evidencia de las deficiencias en los modelos propuestos y presenta la modelación del perfil del fuste como un desafío que aún está vigente (Gomat et al., 2011). Las deficiencias más frecuentes en los modelos se relacionan con estimaciones incorrectas, en especial en los extremos del fuste. Una deficiencia adicional de los modelos existentes, a excepción de unos pocos,

length of the stem, ii) should not generate oscillations around the line of central tendency, iii) it should properly estimate not only the commercial section the stem, but also the diameter of the stump to predict the diameter at breast height and volume of the tree to rebuild the stand state variables in a post-harvest stage (Diéguez, Barrio, Castedo, & Balboa, 2003; Martínez & Acosta, 2014; Parresol, 1998) and stem volume above the limit of commercial use for sawlog and, iv) it should incorporate stand state variables to allow widespread use of the taper function arising from the model fit. Thus, the aim of this article is to fit a general nonlinear model, which requires numerical integration to obtain the respective volume function, satisfying the above criteria.

## Materials and methods

### Study area

The study was conducted in the central macro climatic region of Chile, which has an annual rainfall ranging between 654 and 1,949 mm (Centro de Ciencia del Clima y la Resiliencia [CR2], 2015), with a summer period of three to seven months depending on the location (Schlatter & Gerding, 1995). The tree sample was collected in stands of *Pinus radiata* D. Don, located in 11 municipalities in the regions of Biobío and Araucanía, in three types of soils, i.e., volcanic sand, volcanic ash and marine sediments.

Volcanic sand (VS) soils have alluvial origin and come from andesitic and basaltic volcanic sand. This type of soil is locally known as *Serie Arenales*. These are newly formed, poorly developed soils; with thick texture in the profile and moderately thick on the surface. They form what is called the alluvial fan of the Laja, whose topography is flat with excessive drainage and rapid to very rapid permeability, although the surface runoff is slow. From late autumn to mid-spring these soils have a temporary groundwater level at depths ranging from 70 to 120 cm, which disappears in the dry season. These soils have mild to moderate wind erosion. The stands sampled in this type of soils are located in the communes of Yumbel and Cabrero.

Volcanic ash (VA) soils were formed from recent volcanic ash deposited on glaciofluvial substrates or fluvial materials, hardly detectable by the depth in which they find themselves. Poorly developed soils, deep to very deep, well-drained, with medium loam texture or silt loam superficially and silt loam in the profile, good structure, with porosity without gravels the first 160 cm, moderate permeability and moderate runoff on slopes up to 3 %. They belong to the soils known locally as Santa Bárbara with topography of low ridges and hills, with less frequent occurrence of slightly undulating soils with 2-5 % slope. The stands sampled in this type of soils are located in the communes of

es que no incorporan variables de estado de rodal que permitan su uso generalizado, por lo que son válidos solo para el área sujeta del muestreo y validación.

De acuerdo con lo expuesto, un modelo de ahusamiento debiera tener los atributos siguientes: i) ser diferenciable en toda la longitud del fuste, ii) no generar oscilaciones alrededor de la línea de tendencia central, iii) que estime adecuadamente no solo la sección comercial del fuste, sino también el diámetro del tocón para predecir el diámetro normal y el volumen del árbol para reconstrucción de las variables de estado del rodal en un escenario postcosecha (Diéguez, Barrio, Castedo, & Balboa, 2003; Martínez & Acosta, 2014; Parresol, 1998) y el volumen del fuste por encima del límite de utilización comercial para aserrío y, iv) debe incorporar variables de estado del rodal que permitan un uso generalizado de la función de ahusamiento resultante del ajuste del modelo. De esta manera, el objetivo de este artículo es ajustar un modelo no lineal generalizado, que requiere de integración numérica para obtener la función de volumen respectiva, satisfaciendo los criterios antes mencionados.

## Materiales y métodos

### Área de estudio

El estudio se realizó en la región macroclimática central de Chile, que posee una precipitación media anual que varía entre 654 y 1,949 mm (Centro de Ciencia del Clima y la Resiliencia [CR2], 2015), con un periodo estival de tres a siete meses dependiendo de la localidad (Schlatter y Gerding, 1995). La muestra de árboles se recopiló en rodales de pino radiata (*Pinus radiata* D. Don), localizados en 11 comunas de las regiones del Biobío y la Araucanía, en tres tipos de suelos, i.e. arenas volcánicas, cenizas volcánicas y sedimentos de origen marino.

Los suelos de arenas volcánicas (AV) tienen procedencia aluvial y se originaron de arenas volcánicas andesíticas y basálticas, localmente son conocidos como Serie Arenales. Son suelos de formación reciente, profundos y poco desarrollados; su textura es gruesa en el perfil y moderadamente gruesa en la superficie, configuran lo que se denomina el abanico aluvial del Laja, cuya topografía es plana, con drenaje excesivo y permeabilidad rápida a muy rápida, aunque el escurrimiento superficial es lento. Desde fines de otoño y hasta mediados de la primavera, los suelos presentan un nivel freático temporal, a una profundidad entre 70 a 120 cm, que desaparece en la temporada de sequía así como erosión eólica de ligera a moderada. Los rodales muestreados en este tipo de suelo están localizados en las comunas de Cabrero y Yumbel.

Los suelos de cenizas volcánicas (CV) se formaron a partir de cenizas volcánicas recientes, depositadas

Coihueco, Collipulli, El Carmen, Mulchén and Quilleco. Marine sediment (MS) soils are characterized by clay loam and clay texture in the profile. They are deep reddish brown soils on the surface, well-structured soils that facilitate root development and storage of rainwater. Locally they belong to the Asociación Merilupo, which has high marine terraces topography (dissected and undulated), with moderate to strong slopes. The stands sampled in these type of soils are located in the communes of Arauco, Curanilahue, Lebu and Los Álamos.

### Sample selection of stands

The study considered a total of 27 properties: nine in volcanic sand, eight in volcanic ash and 10 in marine sediments. From each property, a pine stand at harvest age was selected from cluster analysis generated based on the number of trees per hectare (N) in contrast to the basal area (G), stand state variables obtained from historical data of post-harvest inventories provided by companies participating in the study (Forestal MININCO S.A., MASISA S.A. and Forestal ARAUCO S.A.). Conglomerates were generated by the hierarchical method of Ward (Hennig, 2003, Lozada, 2010), which represent different site productivities and management intensities. A stand intended for harvest was selected from each of the most representative cluster. A sample of 10 trees in each stand was collected, covering the entire diametric spectrum recorded in the pre-harvest inventories. Overall, eliminating some trees that had errors in their records (Table 1), the sample was composed of 264 trees.

### Destructive sampling of trees

At 1.30 m of each standing tree the diameter at breast height (DBH) was measured and marked. Once the tree was felled, we measured the total height and the stem was marked every 2 m from the dbh up to reaching the limit diameter of utilization (ldu) of 8 cm. From there on, the stem was marked every 1 m. Then a slice from the base of the tree (stump) was extracted, another at dbh and then every 2.44 m until reaching the height of ldu to facilitate the commercial use of the resulting logs. Slices were extracted every 1 m, from the ldu, up to a diameter not less than 2.54 cm. In the laboratory, the average diameter without bark was determined for each slice and, from this we estimate the volume without bark of each stem section between each pair of successive slices, using the formula of Smalian:

$$V = L \cdot \frac{A_u + A_l}{2}$$

where:

V = volume without bark of each stem section (m<sup>3</sup>)

L = length of the section (m)

sobre sustratos fluvio-glaciales o materiales fluviales, difícilmente detectables por la profundidad en la que se encuentran. Son suelos poco evolucionados, profundos a muy profundos, de buen drenaje, textura media franca o franca limosa superficialmente y franco limosa en el perfil, de buena estructura, con porosidad y sin gravas los primeros 160 cm, permeabilidad moderada y escurrimiento superficial moderado en pendientes de hasta 3 %. Los suelos de CV pertenecen a la serie de suelos denominada localmente como Santa Bárbara, con topografía de lomas y cerros, con ocurrencia menos frecuente de suelos ligeramente ondulados con 2 a 5 % de pendiente. Los rodales muestreados en este tipo de suelo están localizados en las comunas de Coihueco, Collipulli, El Carmen, Mulchén, y Quilleco.

Los suelos de sedimentos marinos (SM) se caracterizan por la textura franco arcillosa y arcillosa en el perfil. Son suelos profundos de color pardo rojizo en superficie, bien estructurados que facilitan el desarrollo radicular y el almacenamiento de agua de lluvia. Localmente, los suelos de SM pertenecen a la Asociación Merilupo, que presenta topografía de terrazas marinas altas, disectadas y onduladas, con pendientes de moderada a fuerte. Los rodales muestreados en este tipo de suelos se ubican en las comunas de Arauco, Curanilahue, Lebu y Los Álamos.

### Selección de la muestra de rodales

En el estudio se consideró un total de 27 predios: nueve en arenas volcánicas, ocho en cenizas volcánicas y 10 en sedimentos marinos. De cada predio se seleccionó un rodal de pino en edad de cosecha a partir de un análisis de conglomerados generado con base en el número de árboles por hectárea (N) en contraste con el área basal (G), variables de estado de rodal obtenidas de datos históricos de inventarios precosecha proporcionados por las empresas participantes en el estudio (Forestal MININCO S.A., MASISA S.A. y Forestal ARAUCO S.A.). Los conglomerados se generaron mediante el método jerárquico de Ward (Hennig, 2003; Lozada, 2010), los cuales representan diferentes productividades de sitio e intensidades de manejo. De cada uno de los conglomerados más representativos se seleccionó un rodal destinado a cosecha. Se obtuvo una muestra de 10 árboles en cada rodal, abarcando todo el espectro diamétrico registrado en los inventarios precosecha. En total, eliminando algunos individuos que presentaron errores en sus registros (Cuadro 1), la muestra quedó constituida por 264 árboles.

### Muestreo destructivo de árboles

A cada árbol en pie, se midió y marcó el diámetro normal a 1.30 m (dap). Una vez derribado, se midió la altura total (ht) y se marcó el fuste cada 2 m a partir de la altura del dap hasta alcanzar el diámetro límite

**Table 1. Statistics of forest stands and trees sampled by type of soil.****Cuadro 1. Estadísticas de los rodales y de los árboles muestreados por tipo de suelo.**

Soil/Property/ Suelo/Predio	N (tree·ha <sup>-1</sup> )/ (arb·ha <sup>-1</sup> )	G (m <sup>2</sup> ·ha <sup>-1</sup> )	Diameter at breast height (cm)/ Diámetro normal (cm)				Total height (m)/ Altura total (m)				Number of samples/ Núm. muestras	
			Average/ Media	S	Min.	Max.	Average/ Media	S	Min.	Max.	Fitting/ Ajuste	Validate/ Validar
Volcanic sand/Arenas volcánicas												
La Aguada	285	32	32.56	9.80	14.06	45.46	25.19	3.72	16.74	29.30	103	26
Colicheu 8802	351	35	35.16	6.50	25.28	42.71	31.03	1.78	27.93	33.54	123	30
Cerro Verde 8618	1,288	43	23.53	10.99	9.56	39.32	21.58	5.42	11.72	28.08	94	24
Colicheu 9132	1,190	35	21.09	7.09	10.05	31.47	20.13	4.73	12.00	26.72	87	21
Tapihue	491	32	26.62	8.60	14.69	39.15	27.63	4.54	19.62	34.44	106	28
Cerro Verde 8605	1,022	48	27.40	9.45	11.00	41.74	27.43	4.44	17.94	31.60	109	28
El Membrillo	1,201	25	18.52	6.25	10.69	28.00	17.38	3.08	12.76	21.58	77	19
San Cristóbal 9403	1,620	51	25.67	11.11	8.04	40.00	23.74	5.00	13.65	29.07	100	27
San Cristóbal 9801	751	59	30.65	8.71	18.10	43.30	28.44	3.12	22.57	32.60	114	31
Subtotal											913	234
Volcanic ash/Cenizas volcánicas												
El Mogoto Hijuela 2	369	47	37.97	14.77	13.59	58.64	31.60	7.27	17.42	39.10	104	36
Las Malvinas	590	53	33.12	9.86	19.02	46.87	30.43	6.08	21.03	38.31	116	33
Santa Julia	512	46	33.09	7.76	21.51	44.78	29.13	4.15	18.94	32.60	110	31
Santa Edelmira	352	43	36.69	7.68	24.34	49.49	34.86	3.51	29.20	39.72	137	30
Coleal	500	43	33.55	11.28	14.65	48.37	30.74	4.88	20.94	37.33	125	35
Parc Collipulli	396	43	36.97	11.26	22.29	54.44	32.41	3.60	25.90	37.41	121	32
Nahueltoro	410	49	35.04	10.92	17.17	49.23	30.21	4.74	20.20	34.00	71	13
Los Molinos	295	42	35.63	14.77	15.72	57.70	30.54	5.77	22.14	37.05	119	32
Subtotal											903	242
Marine sediments/Sedimentos marinos												
Quemas II	346	51	42.71	8.24	29.98	55.00	39.19	2.78	33.78	44.83	150	38
La Colcha	338	46	36.56	12.57	15.65	56.68	32.20	5.04	21.37	37.92	127	31
Ranquil La Loma	364	63	42.62	9.79	27.56	59.93	32.83	3.06	26.63	35.60	85	29
El Rosal 2	740	74	30.31	13.41	9.64	49.50	30.12	9.27	16.65	41.80	111	22
La Araucana	1,467	82	34.60	11.03	14.10	48.99	31.96	5.03	20.82	36.47	122	32
La Araucana	642	58	31.61	10.08	13.44	44.96	34.14	8.29	18.04	46.00	123	26
El Blanco	960	74	35.20	11.51	12.03	50.58	31.68	6.35	15.84	36.10	118	28
Chupalla	435	49	37.69	9.41	26.86	58.72	32.48	2.36	26.93	36.17	118	30
Peumo Sur	352	47	39.24	8.50	25.20	49.98	34.50	3.64	27.26	39.00	124	31
Chicaucura	475	55	42.56	14.75	16.68	63.94	33.94	6.93	19.13	40.00	112	30
Subtotal											1190	297

N: planting density; G: basal area; S: standard deviation; Min.: minimum; Max.: maximum.

N: densidad de plantación, G: área basal, S: desviación estándar; Mín.: mínimo, Máx.: máximo.

$A_u$  = upper area of each section ( $m^2$ )

$A_l$  = lower area of each section ( $m^2$ )

The total volume of each tree was determined from the sum of the volumes of their respective sections. Measuring the diameters of the upper area of the stem above the dlu is very important for proper determination of the total volume (de Miguel, Mehtätalo, Shater, Kraid, & Pukkala, 2012).

### Stem Profile Model

A series of preliminary tests of trial and error allowed to determine the empirical model to represent adequately the dimensions in its entirety and that would have continuity along the stem, including the basal section and the upper end, depending on measures concerning the tree and stand state variables. Tests were performed to each of the taper model parameters obtained (including modeling of multiple linear regressions using stand state variables as predictors) and the model with the smallest index of the Akaike information criterion (AIC) (Akaike, 1974) was chosen between different alternative forms, which gave form to the following generalized model:

$$Y = \frac{X}{b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + \left(c_0 + c_1 \cdot N + c_2 \cdot G + c_3 \cdot \frac{G}{N}\right) \cdot X^3} \quad [1]$$

$$\text{with } Y = \frac{d^2}{dbh^2}; X = \frac{h_t - h}{h_t - 1.3};$$

where:

$d$  = diameter without bark (cm), from the slice obtained at the height  $h$  (m)

$dbh$  = diameter at breast height (cm) at 1.30 m

$h_t$  = total height of the tree (m)

$N$  = density of the stand (trees·ha<sup>-1</sup>);

$G$  = basal area of the stand (m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>)

$b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, c_3$ , are model parameters

However, some additional tests allow greater stability of the model in the basal region by replacing in the previous model the function that represents the stand state variables by a new parameter.

$$b_3 = c_0 + c_1 \cdot N + c_2 \cdot G + c_3 \cdot \frac{G}{N} \quad [2]$$

where:

$N$  = Stand density (trees·ha<sup>-1</sup>)

$G$  = Basal area of the stand (m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>)

$b_3, c_0, c_1, c_2$  and  $c_3$ , are model parameters

By implementing this parameter, the initial model proposed is not only simplified, but in turn the parameters  $b_0, b_1$  and  $b_2$  are considered as constant

de utilización (dlu) de 8 cm. De allí en adelante se marcó el fuste cada 1 m. Luego se extrajo una rodaja de la base del árbol (tocón), otra a la altura del *dap* y posteriormente cada 2.44 m hasta alcanzar la altura del dlu, para facilitar el aprovechamiento comercial de las trozas resultantes. A partir del dlu se continuó extrayendo rodajas cada 1 m, hasta un diámetro no menor de 2.54 cm. En laboratorio, se determinó el diámetro promedio sin corteza de cada rodaja y, a partir de este se calculó el volumen sin corteza de cada sección fustal definida entre cada par de rodajas sucesivas, utilizando la fórmula de Smalian:

$$V = L \cdot \frac{A_s + A_l}{2}$$

donde:

$V$  = volumen sin corteza de cada sección fustal (m<sup>3</sup>)

$L$  = longitud de la sección (m)

$A_s$  = área superior de cada sección (m<sup>2</sup>)

$A_l$  = área inferior de cada sección (m<sup>2</sup>)

El volumen total de cada árbol se determinó a partir de la sumatoria de los volúmenes de sus secciones respectivas. La medición de los diámetros de la parte superior del fuste por encima del dlu es de suma importancia para una correcta determinación del volumen total (de Miguel, Mehtätalo, Shater, Kraid, & Pukkala, 2012).

### Modelación del perfil del fuste

Una serie de pruebas preliminares de ensayo y error permitieron determinar el modelo empírico que representase de manera adecuada las dimensiones en toda su extensión y que tuviera continuidad a lo largo del fuste, incluida la sección basal y el extremo superior, en función de medidas referentes al árbol y a variables de estado del rodal. Se realizaron pruebas a cada uno de los parámetros del modelo de abusamiento obtenido (incluidas modelaciones de regresiones lineales múltiples, utilizando variables de estado de rodal como predictores), y se eligió, entre diferentes formas alternativas, el modelo que presentase el menor índice del criterio de información de Akaike (AIC) (Akaike, 1974), lo que dio forma al siguiente modelo generalizado:

$$Y = \frac{X}{b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + \left(c_0 + c_1 \cdot N + c_2 \cdot G + c_3 \cdot \frac{G}{N}\right) \cdot X^3} \quad [1]$$

$$\text{con } Y = \frac{d^2}{dap^2}; X = \frac{h_t - h}{h_t - 1.3};$$

donde:

$d$  = diámetro sin corteza (cm) de la rodaja obtenida a la altura  $h$  (m)

values; based on such parameters that were adjusted in the generalized model [1], which considered in its adjustment the presence of the stand state variables. Thus, the following generalized and simplified model is obtained:

$$Y = \frac{X}{b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + b_3 \cdot X^3} \quad [3]$$

$$\text{with } Y = \frac{d^2}{dbh^2}; X = \frac{h_t - h}{h_t - 1.3};$$

where:

d = diameter without bark (cm) from the slice obtained at height h (m)

dbh = diameter at breast height (cm) a 1.30 m

$h_t$  = Total height of the tree (m)

$b_3$  = parameter to be fitted

$b_0$ ,  $b_1$  and  $b_2$ , are constant values obtained from the model fit [1]

From the linear expression of the generalized and simplified model [3] and then represented algebraically in the same way that the equation of Tartaglia-Cardano (Kichenassamy, 2015), we can get any height according to their respective diameter through the following transformation of variables:

$$P = -\frac{1}{3} \cdot b_2^2 + \left( b_1 \cdot \frac{dbh^2}{d^2} \right) \cdot b_3 \quad [4]$$

$$Q = b_0 \cdot b_3^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{dbh^2}{d^2} \cdot b_1 \right) \cdot b_2 \cdot b_3 + \frac{2}{27} b_3^3 \quad [5]$$

$$h = h_t \cdot \left( \frac{1}{b_3} \cdot \left[ \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} \right] - \frac{b_2}{3 \cdot b_3} \right) \cdot (ht - 1.3) \quad [6]$$

where:

h = height (m) in the stem of the slice of diameter d (cm) without bark

dbh = diameter at breast height (cm) at 1.30 m

$h_t$  = total height of the tree (m)

$b_0$ ,  $b_1$  and  $b_2$ , are the parameters obtained from fitting the model [1]

$b_3$  = parameter obtained from fitting the model [3]

P and Q, are transformations of the linear representation of the model [3], to make use of the formula of Tartaglia-Cardano.

The comparison of the variability of the parameters of the generalized model [1] according to the type of soil was performed using the F-test, of Fisher and Snedecor,

dap = diámetro normal (cm) a 1.30 m

ht = altura total del árbol (m)

N = densidad del rodal (árboles·ha<sup>-1</sup>)

G = área basal del rodal (m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>)

$b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , son parámetros del modelo

Sin embargo, algunas pruebas adicionales permitieron obtener una mayor estabilidad del modelo en la región basal, a través de reemplazar en el modelo anterior la función que representa las variables de estado del rodal por un nuevo parámetro.

$$b_3 = c_0 + c_1 \cdot N + c_2 \cdot G + c_3 \cdot \frac{G}{N} \quad [2]$$

donde:

N = densidad del rodal (árboles·ha<sup>-1</sup>)

G = área basal del rodal (m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>)

$b_3$ ,  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$ , son parámetros del modelo

Al implementar dicho parámetro, no solo se simplifica el modelo inicial propuesto, sino que a su vez se consideran los parámetros  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  como valores constantes; con base en dichos parámetros que se ajustaron en el modelo generalizado [1], el cual consideró en su ajuste la presencia de las variables de estado del rodal. De ahí que se obtiene el siguiente modelo generalizado y simplificado:

$$Y = \frac{X}{b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + b_3 \cdot X^3} \quad [3]$$

$$\text{con } Y = \frac{d^2}{dap^2}; X = \frac{h_t - h}{h_t - 1.3}$$

donde:

d = diámetro sin corteza (cm) de la rodaja obtenida a la altura h (m)

dap = diámetro normal (cm) a 1.30 m

$h_t$  = altura total del árbol (m)

$b_3$  = parámetro a ajustar del modelo

$b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ , son valores constantes obtenidos a partir del ajuste del modelo [1]

A partir de la expresión lineal del modelo generalizado y simplificado [3] y, representado luego de manera algebraica de la misma forma que la ecuación de Tartaglia-Cardano (Kichenassamy, 2015), se puede obtener cualquier altura en función de su respectivo diámetro a través de la siguiente transformación de variables:

$$P = -\frac{1}{3} \cdot b_2^2 + \left( b_1 \cdot \frac{dap^2}{d^2} \right) \cdot b_3 \quad [4]$$

$$Q = b_0 \cdot b_3^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{dap^2}{d^2} \cdot b_1 \right) \cdot b_2 \cdot b_3 + \frac{2}{27} b_3^3 \quad [5]$$

where the variation of the sum of the squared error was evaluated under the following hypothesis:

$H_0$ : The taper model does not differ among different types of soils.

$H_1$ : The taper model differs among different types of soils, in at least some of its parameters.

$$F = \frac{\left( \frac{SSE_{Total} - SSE_{VS} - SSE_{VA} - SSE_{MS}}{(n_{TOTAL} - p_{TOTAL}) - (n_{VS} - n_{VA} - n_{MS} + p_{VS} + p_{VA} + p_{MS})} \right)}{\left( \frac{SSE_{VS} + SSE_{VA} + SSE_{MS}}{n_{VS} + n_{VA} + n_{MS} - p_{VS} - p_{VA} - p_{MS}} \right)}$$

where:

SSE = sum of squares error

n = number of samples

p = number of parameters of the model

VS: Volcanic sand; VA: Volcanic ash; MS: Marine sediments.

Fitting nonlinear models was performed by the method NLIN (SAS, 2009). In the case of the assessment of the accuracy of fitting the taper model, we use the root mean square error (RMSE) and an indicator of predictive model efficiency

$$RMSE = \sqrt{\frac{SSE}{n - p}} \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}$$

where:

SSE = sum of squares error

n = number of observations

p = number of parameters in the model

$y_i$  = value observed

$\hat{y}_i$  = value estimated by the taper model

$\bar{y}$  = average of the values observed

### Quantifying the volume from the taper model

The taper model was integrated numerically using the IML procedure (SAS, 2009). To quantify the volume only the generalized and simplified model [3] developed in this paper was considered. The procedure was used to estimate the volume of each tree from the database for validation from the parameters obtained in the fitting of the taper model, and was compared with the volume determined by the formula of Smalian through cross-validation between the estimated value and the observed value by a simple linear regression. Previously, 75 % of the samples were selected for fitting and, 25 % of the samples for validation. None of the samples selected for validation of model was used for model fitting, in order to assure the independence of the samples (de Miguel et al., 2012).

$$h = h_t \cdot \left( \frac{1}{b_3} \cdot \left[ \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} \right] \cdot \frac{b_2}{3 \cdot b_3} \right) \cdot (ht - 1.3) \quad [6]$$

donde:

h = altura (m) en el fuste de la rodaja de diámetro d (cm) sin corteza

dap = diámetro normal (cm) a 1.30 m

$h_t$  = es la altura total del árbol (m)

$b_3$  = parámetro obtenido del ajuste del modelo [3]

$b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son parámetros obtenidos del ajuste del modelo [1]

P y Q son transformaciones de la representación lineal del modelo [3], para hacer uso de la fórmula de Tartaglia-Cardano.

La comparación de la variabilidad de los parámetros del modelo generalizado [1] en función del tipo de suelo se realizó a través de la prueba F de Fisher y Snedecor, donde se evaluó la variación de la suma de los cuadrados del error bajo las siguientes hipótesis:

$H_0$ : El modelo de ahusamiento no difiere entre los diferentes tipos de suelos.

$H_1$ : El modelo de ahusamiento difiere entre los diferentes tipos de suelos, en por lo menos alguno de sus parámetros.

$$F = \frac{\left( \frac{SSE_{Total} - SSE_{CV} - SSE_{AV} - SSE_{SM}}{(n_{TOTAL} - p_{TOTAL}) - n_{CV} - n_{AV} - n_{SM} + p_{CV} + p_{AV} + p_{SM}} \right)}{\left( \frac{SSE_{CV} + SSE_{AV} + SSE_{SM}}{n_{CV} + n_{AV} + n_{SM} - p_{CV} - p_{AV} - p_{SM}} \right)}$$

donde:

SSE = suma de los cuadrados del error

n = número de muestras

p = número de parámetros del modelo

AV = arenas volcánicas CV = cenizas volcánicas: SM = sedimentos marinos.

El ajuste de los modelos no lineales se realizó por medio del procedimiento NLIN (Statistical Analysis System [SAS], 2009). En la evaluación de la precisión del ajuste del modelo de ahusamiento se utilizó la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y un indicador de la eficiencia predictiva del modelo.

$$RMSE = \sqrt{\frac{SSE}{n - p}} \quad \text{Eficiencia} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}$$



**Table 2. Linear, nonlinear, segmented and trigonometric taper models.****Cuadro 2. Modelos de ahusamiento para *Pinus radiata*: lineales, no lineales, segmentados, y trigonométricos.**

Model/Modelo	Authors/Autores
$Y = b_1 \cdot X^{1.5} + b_2 \cdot X^3 + b_3 \cdot X^{32}$	Bruce, Curtis, & Vancoevering (1968) [7]
$Y = b_1 \cdot (T - 1) + b_2 \cdot (T^2 - 1)$	Kozak, Munro, & Smith (1969) [8]
$Y = b_1 \cdot Z^{(b_2)}$	Demaerschalk (1972) [9]
$Y = \frac{b_1}{dbh^2 \cdot h_t} \cdot Z^{(b_2)} + b_3 \cdot Z^{(b_4)} / Y = \frac{b_1}{dap^2 \cdot h_t} \cdot Z^{(b_2)} + b_3 \cdot Z^{(b_4)}$	Demaerschalk (1973) [10]
$Y = b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + b_3 \cdot X^3$	Coffre (Rojo et al. (2005) [11]
$Y = b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + b_3 \cdot X^3 + b_4 \cdot X^4 + b_5 \cdot X^5$	Lowell (1986) [12]
$Y = X^2 + b_1 \cdot (X^3 - X^2) + b_2 \cdot (X^8 - X^2) + b_3 \cdot (X^{40} - X^2)$	Real & Moore (1986) [13]
$Y = b_1 \cdot Z + b_2 \cdot Z^2 + b_3 \cdot Z^3$	Renteria & Ramirez (1998) [14]
$Y = b_0 \cdot \left(\frac{h}{1.3}\right)^{2 \cdot (b_1 + b_2 \cdot T + b_3 \cdot T_2)} \cdot X$	Sharma & Zhang (2004) [15]
$Y = b_1 \cdot (T - 1) + b_2 \cdot (T^2 - 1) + (b_3 - b_2) \cdot (\alpha - T)^2 \cdot I$ $T \leq \alpha \rightarrow I = 1; T > \alpha \rightarrow I = 0$	Max & Burkhart (1976) [16]
$Y = b_1 \cdot (T - 1) + b_2 \cdot (T^2 - 1) + b_3 \cdot (\alpha_1 - T)^2 \cdot I_1 - b_2 \cdot (\alpha_2 - T)^2 \cdot I_2$ $T \leq \alpha_1 \rightarrow I_1 = 1; T > \alpha_1 \rightarrow I_1 = 0; T \leq \alpha_2 \rightarrow I_2 = 1; T > \alpha_2 \rightarrow I_2 = 0$	Max & Burkhart (1976) [17]
$Y = \frac{b_4}{\pi / 40,000} \cdot (2 \cdot Z + b_1 \cdot (3 \cdot Z^2 - 2 \cdot Z) + b_2 \cdot (Z - \alpha_1)^2 \cdot I_1 + b_3 \cdot (Z - \alpha_2)^2 \cdot I_2)$ $Z < \alpha_1 \rightarrow I_1 = 0; Z \geq \alpha_1 \rightarrow I_1 = 1; Z < \alpha_2 \rightarrow I_2 = 0; Z \geq \alpha_2 \rightarrow I_2 = 1$	Cao, Burkhart, & Max (1980) [18] Modified
$Y = b_1 \cdot Z + b_2 \cdot Z^2 + b_3 \cdot (Z - \alpha_1) \cdot I_1 + b_4 \cdot (Z - \alpha_2) \cdot I_2$ $Z < \alpha_1 \rightarrow I_1 = 0; Z \geq \alpha_1 \rightarrow I_1 = 1; Z < \alpha_2 \rightarrow I_2 = 0; Z \geq \alpha_2 \rightarrow I_2 = 1$	Valenti & Cao (1986) [19]
$Y = Z \cdot (b_1 \cdot Z + b_2 \cdot Z^2) + (Z - \alpha)^2 \cdot (b_3 + b_4 \cdot (Z - \alpha_2)) \cdot I$ $Z \leq \alpha \rightarrow I = 0; Z > \alpha \rightarrow I = 1$	Parresol, Hotvedt, & Cao (1987) [20]
$Y = b_1 \cdot (T - 1) + b_2 \cdot \sin(2\pi \cdot T) + b_3 \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot T\right)$	Thomas & Parresol (1991) [21]

With  $Y = \frac{d^2}{dbh^2}$ ;  $T = \frac{h}{h_t}$ ;  $X = \frac{h_t - h}{h_t - 1.3}$ ;  $Z = \frac{h_t - h}{h_t}$ ; d: diameter (cm) without bark, from the slice obtained at h (m); dbh: diameter at breast height (cm) at 1.30 m;  $h_t$ : total height of the tree (m); ln: natural logarithm; e: Euler's number (2.71828);  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, a, a_1, a_2$ : model parameters.

Con  $Y = \frac{d^2}{dap^2}$ ;  $T = \frac{h}{h_t}$ ;  $X = \frac{ht - h}{h_t - 1.3}$ ;  $Z = \frac{h_t - h}{h_t}$ ; d: diámetro (cm) sin corteza, de la rodaja obtenida a la altura h (m); dap: diámetro normal (cm) a 1.30 m; ht: altura total del árbol (m); ln: logaritmo natural; e: número de Euler (2.71828);  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, a, a_1, a_2$ : parámetros del modelo.

### Comparison of taper model

donde:

To compare the fitting of the generalized and simplified model [3], in contrast to the taper model with the same response variable published in the scientific literature by other authors (Table 2), the Akaike information criterion (AIC) (Akaike, 1974), the root mean square error (RMSE) were used and the significant differences

SSE = suma de los cuadrados del error  
n = número de observaciones  
p = número de parámetros en el modelo  
 $y_i$  = valor observado  
 $\hat{y}$  = valor estimado por el modelo de ahusamiento  
 $\bar{y}$  = media de los valores observados

among the various models were compared through a Turkey's multiple range test LSD (95 % confidence level) from the individual values observed when obtaining the mean absolute error (MAE).

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|^2}{n}$$

where:

$y_i$  = value observed

$\hat{y}$  = value estimated by the taper model

This study does not consider the model proposed by Munro, quoted by Rojo, Perales, Sánchez, Álvarez and Von Gadow (2005), since when considering the stem profile as a straight line, underestimates the diameter both in the basal area as in the apical area. Likewise, the models of Allen (1991) and Sharma and Oderwald (2001) were excluded for analysis and comparison purposes due to its slow adjustment in the three different types of soil. Only those taper models with the highest accuracy, lowest bias, best graphic performance of the trendline, and proper random distribution of residuals versus predicted values were selected for comparative analysis.

## Results and discussion

The generalized model [1] shows consistency in all the parameters ( $P < 0.05$ ) in sand and volcanic ash

## Cuantificación del volumen a partir del modelo de ahusamiento

El modelo de ahusamiento se integró numéricamente utilizando el procedimiento IML (SAS, 2009). El volumen se cuantificó solo considerando el modelo generalizado y simplificado [3] desarrollado en el presente escrito. El procedimiento se utilizó para estimar el volumen de cada árbol de la base de datos para validación a partir de los parámetros obtenidos en el ajuste del modelo de ahusamiento, y se contrastó con el volumen determinado por la fórmula de Smalian a través de una validación cruzada entre el valor estimado y el valor observado por medio de una regresión lineal simple. Previamente se había seleccionado 75 % de las muestras para el ajuste y, 25 % de las muestras para la validación. Ninguna de las muestras de los árboles seleccionados para la validación del modelo se utilizó para el ajuste del modelo, con el fin de garantizar la independencia de los mismos (de Miguel et al., 2012).

## Comparación de los modelos de ahusamiento

Para comparar el ajuste del modelo generalizado y simplificado [3], en contraste con modelos de ahusamiento que presentasen la misma variable respuesta publicados en la literatura científica por otros autores (Cuadro 2), se empleó el criterio de información de Akaike (AIC) (Akaike, 1974), la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y, se compararon las diferencias significativas entre

**Table 3. Model parameters for predicting the stem profile of *Pinus radiata* for each type of soil in the Biobío and Araucanía regions of Chile.**

**Cuadro 3. Parámetros del modelo para la predicción del perfil del fuste de *Pinus radiata* para cada tipo del suelo en las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile.**

Soil/Suelo	n	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	RMSE
VS	913	4.5355*	-12.7521*	17.5378*	-8.2431*	0.000086*	-0.00130*	1.3839*	0.04919
VA	903	4.3156*	-12.9686*	18.6764*	-8.4626*	-0.000950*	0.01010*	-4.1966*	0.05109
MS	1190	4.0928*	-12.5876*	18.8387*	-9.0158*	0.000094*	-0.00401*	n.s.	0.05206

VS: Volcanic sand, VA: Volcanic ash, MS: Marine sediments. n: number of samples;  $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, c_3$ : model parameters; RMSE: root mean square error; \*: Significant at  $P < 0.05$ ; n.s.: non-significant.

VS: arenas volcánicas, VA: cenizas volcánicas, MS: sedimentos marinos. n: número de muestras;  $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, c_3$ : parámetros del modelo; RMSE: raíz del error cuadrático medio; \* Significativo a una  $P < 0.05$ ; n.s.: no significativo.

**Table 4. Generalized model parameters for predicting the stem profile of *Pinus radiata* for each type of soil in the Biobío and Araucanía regions of Chile.**

**Cuadro 4. Parámetros del modelo generalizado para la predicción del perfil de fuste de *Pinus radiata* para cada tipo del suelo en las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile.**

Soil/Suelo	n	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	RMSE	Efficiency (%)/ Eficiencia (%)	F-test/ Prueba - F
VS	913	4.5355*	-12.7521*	17.5378*	-8.1364*	0.04930	97.24	
VA	903	4.3156*	-12.9686*	18.6764*	-8.8734*	0.05263	97.19	
MS	1190	4.0928*	-12.5876*	18.8387*	-9.1970*	0.05128	96.91	
Total	3006	4.2923*	-12.7645*	18.4243*	-8.7917*	0.05244	93.93	18.15

VS: Volcanic sand, VA: Volcanic ash, MS: Marine sediments. n: number of samples;  $b_0, b_1, b_2, b_3$ : model parameters; RMSE: root mean square error; \*: Significant at  $P < 0.05$ ; n.s.: non-significant.

VS: arenas volcánicas, VA: cenizas volcánicas, MS: sedimentos marinos. n: número de muestras;  $b_0, b_1, b_2, b_3$ : parámetros del modelo; RMSE: raíz del error cuadrático medio; \* Significativo a una  $P < 0.05$ ; n.s.: no significativo.

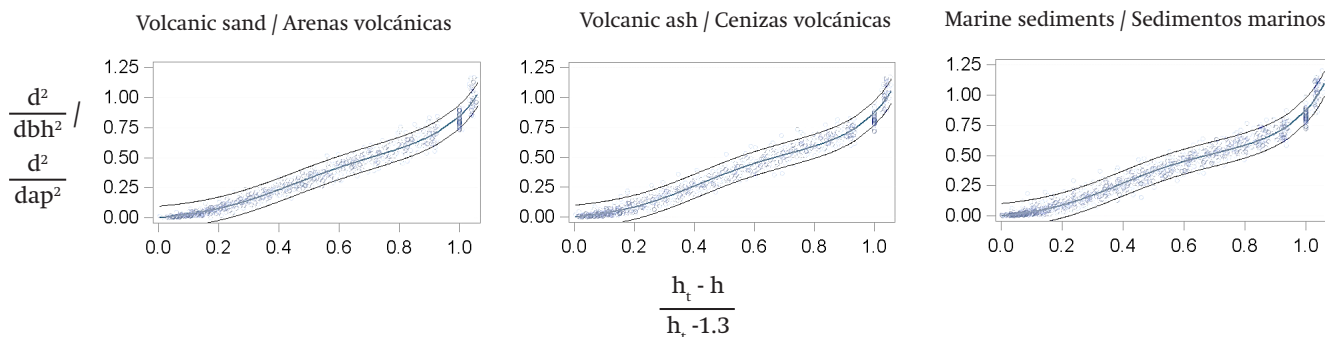


Figure 1. Taper model for *Pinus radiata* according to the distance to the apex regarding the diameter at breast height, with the limits of upper and lower confidence at 95 %.

Figura 1. Modelo de *Pinus radiata* en función de la distancia al ápice relativa a la altura sobre el diámetro normal, con los límites de confianza superior e inferior al 95 %.

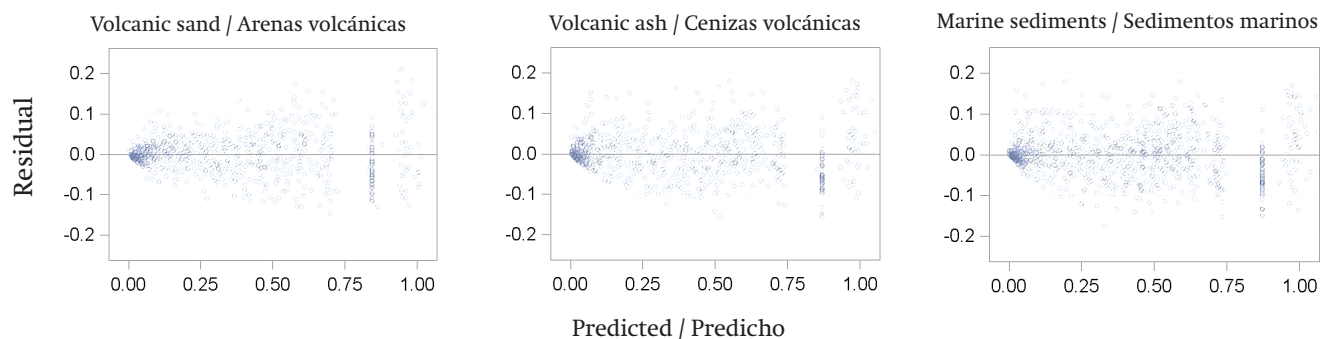


Figure 2. Residuals of the generalized and simplified model [3] in the representation of the stem profile of *Pinus radiata*.

Figura 2. Residuales del modelo generalizado y simplificado [3] en la representación del perfil de *Pinus radiata*.

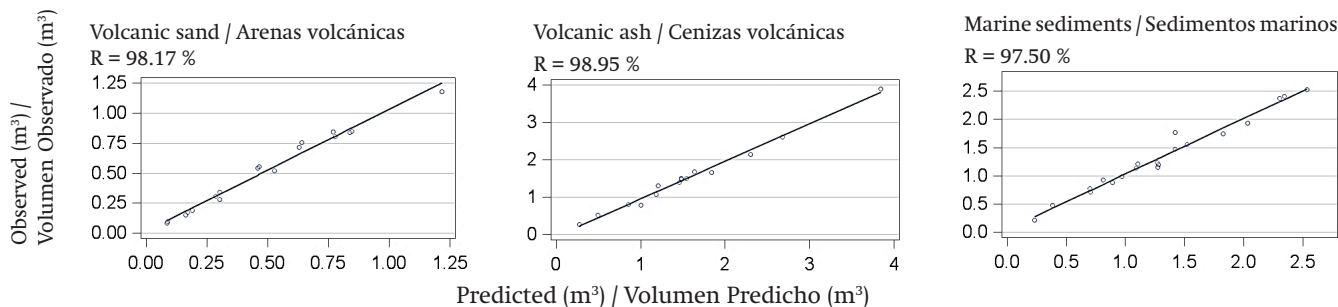


Figure 3. Validation of the volume of *Pinus radiata* the stem without bark, for each type of soil in the regions of Biobío and the Araucanía, Chile.

Figura 3. Validación del volumen de *Pinus radiata* sin corteza, para cada tipo de suelo en las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile.

(Table 3), except parameter  $c_3$ , which is not statistically significant for marine sediments.

In the case of the generalized and simplified model [3], we obtained high efficiency in predicting the stem profile (Table 4), whose parameters differ significantly among the different types of soil (F-test).

Generalized and simplified [3] model presents high flexibility in the representation of the stem profile, which allows to estimate both the basal diameters and the diameters of the upper part of the stem

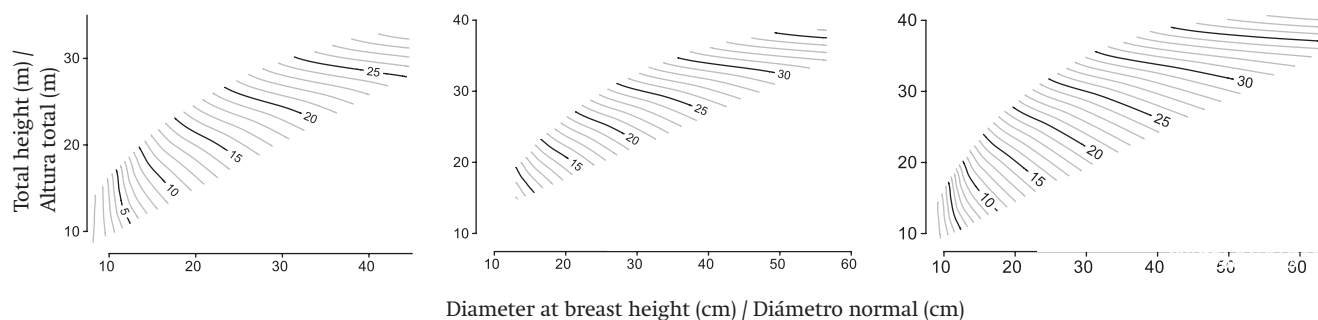
los diversos modelos a través de una prueba de rangos múltiples Tukey LSD (95 % nivel de confianza) a partir de los valores individuales observados en la obtención del error absoluto medio (MAE).

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|^2}{n}$$

donde:

$y_i$  = valor observado

$\hat{y}$  = valor estimado por el modelo de ahusamiento



**Figure 4. Commercial height diagram of *Pinus radiata* for an ldu of 8 cm, according to the diameter at breast height and total height for each type of soil in the Biobío and Araucanía regions of Chile.**

**Figura 4. Diagrama de altura comercial de *Pinus radiata* para un ldu de 8 cm, en función del diámetro normal y la altura total, para cada tipo de suelo en las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile.**

(Figure 1). Normally these stem sectors do not represent a commercial use for sawlog purposes. However, the flexibility of the model is important to quantify the crown biomass for energy purposes. Figure 1 shows that the curves adequately describe the behavior of the data, the entire profile of the stem.

For that reason parameterization adequately represent the different types of soil according to the stand state variables, whose residuals were randomly distributed around the line 0 (Figure 2) in each type of soil.

The volume obtained via integration by numerical methods of the generalized and simplified taper model [3], being validated crosswise based on the sum of the volumes obtained in each log by the formula of Smalian, has a prediction efficiency above 97 % (Figure 3).

For graphical representation of the height model [6] obtained from generalized and simplified model [3], a diameter without bark of 8 cm (Figure 4) was considered, based on commercial requirements of thin tip for sawlog purposes.

#### Comparison of some taper models published by other authors

Most models converged in all parameters (Table 5), except the models of Coffre cited by Rojo et al. (2005) [11] and Renteria and Ramirez (1998) [14], which showed some parameter nonsignificant in each of the different types of soils, and the model of Lowell (1986) [12] in the case of volcanic sand soils. The root mean square error (RMSE) ranged between 0.04827 and 0.12124, and the mean absolute error (MAE) between 0.03485 and 0.07482 (Table 6).

Graphical analysis of the residuals were determined to select models with greater stability and better performance to describe the tendency of the taper model. For example, the models of Kozak et al. (1969) [8], Demaerschalk (1972) [9], Coffre (Rojo et al., 2005)

En el presente estudio no se consideró el modelo propuesto por Munro, citado por Rojo, Perales, Sánchez, Álvarez y Von Gadow (2005), dado que al considerar el perfil del fuste como una recta, subestima el diámetro tanto en la zona basal como en la zona apical. De igual manera, se excluyeron para efecto de análisis y comparación los modelos de Allen (1991) y Sharma y Oderwald (2001) por su baja capacidad de ajuste en los tres diferentes tipos de suelo. Sólo se seleccionaron para el análisis comparativo aquellos modelos de ahusamiento que presento la mayor precisión, menor sesgo, mejor comportamiento gráfico de la línea de tendencia y una correcta distribución aleatoria de los residuales frente a los valores predichos.

#### Resultados y discusión

El modelo generalizado [1] presenta consistencia en la totalidad de los parámetros ( $P < 0.05$ ) en tipos de suelos de arenas y cenizas volcánicas (Cuadro 3), a excepción del parámetro  $c_3$ , el cual no es estadísticamente significativo para el caso de suelos en sedimentos de origen marino.

En el caso del modelo generalizado y simplificado [3] se obtuvo una alta eficiencia en la predicción del perfil del fuste de *P. radiata* (Cuadro 4), cuyos parámetros se diferencian de manera significativa entre los diferentes tipos de suelo (Prueba F).

El modelo generalizado y simplificado [3] presenta una alta flexibilidad en la representación del perfil del fuste, lo cual permite que se estimen adecuadamente tanto los diámetros de la zona basal, como los diámetros de la parte superior del mismo (Figura 1). Normalmente dichos sectores del fuste no representan un uso comercial para fines de aserrío, sin embargo es de suma importancia la flexibilidad del modelo para cuantificar la biomasa de la copa para fines energéticos. En la Figura 1 se observa que las curvas describen adecuadamente el comportamiento de los datos en la totalidad del perfil del fuste. De ahí que la parametrización representa de manera adecuada los

**Table 5. Parameters of the *Pinus radiata* taper models for each type of soil in the Biobío and Araucanía regions of Chile.**  
**Cuadro 5. Parámetros de los modelos de ahusamiento de *Pinus radiata*, por tipo de suelo en las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile.**

Model/ Modelo	Method/ Método	b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>5</sub>	a	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>
<b>Volcanic sand / Arena volcánica</b>										
7	N		0.9585*	-0.1827*	0.0424*					
8	N		-1.4635*	0.5385*						
9	N		0.9124*	1.4520*						
10	N		2088.2*	32.6328*	0.8741*	1.3796*				
11	N		0.3584*	0.4921*	n.s.					
12	N		0.2437*	n.s.	5.0080*	-9.0396*	4.6342*			
13	N		-2.0653*	0.7759*	-0.0497*					
14	N		0.3866*	0.5385*	n.s.					
15	N	0.8103*	-0.0798*	0.2273*	-0.5307*					
16	N		-1.3379*	0.4502*	62.3298*			0.0490*		
17	M		-2.3653*	1.0777*	24.7515*				0.0889*	0.6538*
18	M		-1.1064*	2.8525*	-98.4159*				0.2018*	0.9407*
19	M		n.s.	2.0666*	-0.8441*	-1.2086*			0.2954*	0.5736*
20	N		2.1247*	-1.4430*	-56.1255*	24.4860*		0.7640*		
21	N		-0.7370*	0.0544*	0.0023*					
<b>Volcanic ash / Ceniza volcánica</b>										
7	N		1.0996*	-0.3389*	0.6960*					
8	N		-1.3967*	0.4694*						
9	N		0.9150*	1.3774*						
10	N		9087.5*	172.70*	0.8791*	1.3073*				
11	N		0.4369*	0.4329*	n.s.					
12	N		0.5098*	-2.0307*	11.3241*	-16.8735*	7.9383*			
13	N		-2.3690*	0.8031*	-0.4340*					
14	N		0.4580*	0.4694*	n.s.					
15	N	0.8267*	-0.0840*	0.3023*	-0.5372*					
16	N		-1.2161*	0.3418*	106.30*			0.0438*		
17	M		-2.6557*	1.2067*	72.6528*				0.0574*	0.7146*
18	M		-1.3929*	4.0970*	-249.50*				0.2718*	0.9437*
19	M		0.0996*	1.9546*	-0.7954*	-1.2158*			0.2857*	0.5648*
20	N		2.2283*	-1.5149*	-385.0*	148.00*		0.8672*		
21	N		-0.7737*	0.0446*	0.0013*					
<b>Marine sediments / Sedimentos marinos</b>										
7	N		1.1271*	-0.3817*	0.0819*					
8	N		-1.3406*	0.4273*						
9	N		0.9011*	1.3426*						
10	N		11170*	256.70*	0.8708*	1.2815*				
11	N		0.0075*	n.s.	0.2789*					
12	N		0.5231*	-1.8834*	11.0539*	-17.0375*	8.2149*			
13	N		-2.6282*	0.8991*	-0.4420*					
14	N		0.3120*	n.s.	0.3120*					
15	N	0.8257*	-0.0785*	0.2410*	-0.4129*					
16	N		-1.1276*	0.2761*	99.9986*			0.0476*		
17	M		-3.0469*	1.4020*	64.6872*				0.0632*	0.7705*
18	M		-1.4286*	4.3943*	-205.30*				0.2505*	0.9350*
19	M		0.0706*	2.1677*	-1.0112*	-1.3212*			0.2963*	0.5656*
20	N		2.3376*	-1.6851*	-213.8*	85.5204*		0.8333*		
21	N		-0.7990*	0.0285*	0.0002*					

M and N: Marquardt and Newton convergence method, respectively; b<sub>0</sub>, b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>, b<sub>4</sub>, b<sub>5</sub>, a, a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>: model parameters; \*: Significant at P < 0.05; n.s.: non-significant.

M y N: métodos de convergencia de Marquardt y Newton, respectivamente; b<sub>0</sub>, b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>, b<sub>4</sub>, b<sub>5</sub>, a, a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>: parámetros del modelo; \*: Significativo a una P < 0.05; n.s.: no significativo.

**Table 6. Statistics of the *Pinus radiata* taper models for each type of soil in the Biobío and Araucanía regions of Chile. Cuadro 6. Estadísticas de los modelos de ahusamiento de *Pinus radiata*, por tipo de suelo en las regiones del Biobío y la Araucanía, Chile.**

Model/ Modelo	Number of data/ Núm. Datos	AIC	RMSE	MAE	LSD Turkey test/ Prueba Tukey LSD			
<b>Volcanic Sand / Arena volcánica</b>								
3	913	-5488.46	0.04930	0.03563	a	b		
7	913	-5513.26	0.04879	0.03525	a	b		
8	913	-5306.10	0.05468	0.03929	a	b		
9	913	-5302.05	0.05477	0.03790	a	b		
10	913	-5439.41	0.05070	0.03617	a	b		
11	913	-5309.70	0.05450	0.03902	a	b		
12	913	-5480.88	0.04960	0.03565	a	b		
13	913	-4773.25	0.07314	0.04746			c	d
14	913	-5306.10	0.05468	0.03929	a	b		
15	913	-5479.25	0.04960	0.03592	a	b		
16	913	-5436.45	0.05079	0.03819	a	b		
17	913	-5483.09	0.04950	0.03526	a	b		
18	913	-5492.61	0.04919	0.03485	a			
19	913	-5390.46	0.05206	0.03670	a	b		
20	913	-5445.88	0.05050	0.03627	a	b		
21	913	-5127.93	0.06025	0.04183		b	c	
<b>Volcanic Ash / Cenizas volcánicas</b>								
3	903	-5358.45	0.05128	0.03753	a	b	c	
7	903	-5469.17	0.04827	0.03574	a			
8	903	-5096.02	0.05941	0.04354			c	d
9	903	-5089.38	0.05967	0.04241	a	b	c	d
10	903	-5316.28	0.05254	0.03840	a	b	c	
11	903	-5129.08	0.05840	0.04276		b	c	d
12	903	-5356.64	0.05138	0.03804	a	b	c	
13	903	-4786.27	0.07050	0.04768				d e f
14	903	-5096.02	0.05941	0.04354			c	d
15	903	-5462.62	0.04848	0.03571	a			
16	903	-5329.69	0.05215	0.03993	a	b	c	
17	903	-5404.38	0.05000	0.03672	a	b		
18	903	-5402.54	0.05000	0.03670	a	b		
19	903	-5195.76	0.05612	0.04040	a	b	c	
20	903	-5327.62	0.05215	0.03831	a	b	c	
21	903	-4994.01	0.06285	0.04417			c	d e
<b>Marine Sediments / Sedimentos marinos</b>								
3	1190	-7000.99	0.05263	0.03853	a			
7	1190	-7097.18	0.05060	0.03714	a			
8	1190	-6582.55	0.06285	0.04610			c	d e f
9	1190	-6558.22	0.06348	0.04486		b	c	d e
10	1190	-6822.06	0.05683	0.04150	a	b	c	d
11	1190	-6646.60	0.06124	0.04657				d e f g
12	1190	-6998.74	0.05273	0.03918	a	b		
13	1190	-6302.84	0.07071	0.04835				e f g h
14	1190	-6601.24	0.06237	0.04739			d	e f g h
15	1190	-7076.32	0.05109	0.03797	a			
16	1190	-6961.96	0.05357	0.04185	a	b	c	d
17	1190	-7040.06	0.05177	0.03825	a			
18	1190	-7038.36	0.05187	0.03823	a			
19	1190	-6749.97	0.05848	0.04217	a	b	c	d
20	1190	-6911.61	0.05468	0.04022	a	b	c	
21	1190	-6190.99	0.07409	0.05286				h

AIC: Akaike information criterion; RMSE: root mean square error; MAE: mean absolute error

Note: LSD Tukey test was performed independently for each type of soil

AIC: Criterio de información de Akaike; RMSE: raíz del error cuadrático medio; MAE: error absoluto medio

Nota: La prueba Tukey LSD se realizó de manera independiente para cada tipo de suelo

[11], Renteria and Ramirez (1998) [14], Valenti & Cao (1986) [19] and Thomas and Parresol (1991) [21], even when considering curved the stem profile, underestimating the diameter of the basal area of the stem. Additionally, the model of Thomas and Parresol (1991) [21] underestimates the stem profile at diameter at breast height.

Other models showed overestimates of the stem profile, such as the models of Demaerschalk (1972) [9] Real and Moore (1986) [13], Renteria and Ramirez (1998) [14] and Valenti and Cao (1986) [19] showing estimates of the diameter at breast height above the observed value, which overestimates the supply of timber for sawlog purposes. The models of Kozak et al. (1969) [8], Coffre (Rojo et al., 2005) [11], Renteria and Ramirez (1998) [14], Sharma and Zhang (2004) [15], Max and Burkhart (1976) [16], Cao et al. (1980) [18] y Thomas and Parresol (1991) [21] overestimated the diameter of the apical part of the stem, which leads to overestimated estimates of the biomass supply above dlu, such as biomass for energy purposes.

Similarly, models having high sensitivity, which is manifested in oscillations around the line of estimation were observed, this is common in polynomials of high degree, as presented in the graphical representation of models of Demaerschalk (1973) [10] and Sharma and Zhang (2004) [15]. Meanwhile, the model [19] of Valenti and Cao (1986) is continuous but not differentiable at the junction points, which increases the variability in prediction of the diameter of the stem profile, at heights near these points.

Some models showed abrupt changes below the diameter at breast height, with trend lines that have little natural breaks in the case of *Pinus radiata*, models of Bruce et al. (1968) [7], Demaerschalk (1973) [10], Real and Moore (1986) [13], Max and Burkhart (1976) [16] y [17], Cao et al. (1980) [18], Parresol et al. (1987) [20] and Thomas and Parresol (1991) [21].

The generalized and simplified taper model [3] did not differ significantly (LSD Tukey Test, 95 % confidence level) from those models that had the best fittings for the three types of soil (Table 6): models of Bruce et al. (1968) [7], Demaerschalk (1973) [10], Lowell (1986) [12], Sharma and Zhang (2004) [15], Max and Burkhart (1976) [16] and [17] Cao et al. (1980) [18], Valenti and Cao (1986) [19] and Parresol et al. (1987) [20]. The generalized and simplified model [3] proposed in this study does not show any of the inconsistencies observed in other models.

On the other hand, the model [11] of Coffre, cited by Rojo et al. (2005), with which the Forestry Institute of Chile (INFOR) developed the compendium of auxiliary tables for managing *Pinus radiata* (Peters, Jobet, &

diferentes tipos de suelos en función de las variables de estado del rodal, cuyos residuales se distribuyen de manera aleatoria alrededor de la línea 0 (Figura 2) en cada tipo de suelo.

El volumen que se obtiene a través de la integración por métodos numéricos del modelo de ahusamiento generalizado y simplificado [3], al ser validado de manera cruzada con base en la sumatoria de los volúmenes obtenidos en cada troza a través de la fórmula de Smalian, tiene una eficacia de predicción por encima del 97 % (Figura 3).

Para la representación gráfica del modelo de altura [6] obtenido a partir del modelo generalizado y simplificado [3], se consideró un diámetro sin corteza de 8 cm (Figura 4), con base en los requerimientos comerciales de punta delgada para fines de aserrío.

### Comparación con algunos modelos de ahusamiento publicados por otros autores

La mayoría de los modelos convergieron en la totalidad de sus parámetros (Cuadro 5), a excepción de los modelos de Coffre citado por Rojo et al. (2005) [11] y Renteria y Ramirez (1998) [14], los cuales presentaron algún parámetro no significativo en cada uno de los diferentes tipos de suelos, y el modelo de Lowell (1986) [12] en el caso de suelos de arenas volcánicas. La raíz del error cuadrático medio (RMSE) fluctuó entre 0.04827 y 0.12124, y el error absoluto medio (MAE) entre 0.03485 y 0.07482 (Cuadro 6).

El análisis gráfico de los residuales fue determinante para seleccionar los modelos con mayor estabilidad y de mejor comportamiento para describir la tendencia del modelo de ahusamiento. Por ejemplo, los modelos de Kozak et al. (1969) [8], Demaerschalk (1972) [9], Coffre (Rojo et al., 2005) [11], Renteria y Ramirez (1998) [14], Valenti y Cao (1986) [19] y Thomas y Parresol (1991) [21], aun cuando consideran el perfil fustal de manera curva, subestiman el diámetro de la zona basal del fuste. Adicionalmente, el modelo de Thomas y Parresol (1991) [21] subestima el perfil fustal a la altura del diámetro normal.

Otros modelos como de Demaerschalk (1972) [9], Real y Moore (1986) [13], Renteria y Ramirez (1998) [14] y Valenti y Cao (1986) [19] presentaron estimaciones del diámetro normal por encima del valor observado, lo cual sobrestima la oferta de madera para fines comerciales de aserrío. Los modelos de Kozak et al. (1969) [8], Coffre (Rojo et al., 2005) [11], Renteria y Ramirez (1998) [14], Sharma y Zhang (2004) [15], Max y Burkhart (1976) [16], Cao et al. (1980) [18] y Thomas y Parresol (1991) [21] sobrestimaron el diámetro de la zona apical del fuste, lo cual lleva a estimaciones sobrevaloradas de la oferta de biomasa por encima del dlu, como es el caso de la biomasa para fines energéticos.

Aguirre, 1985), expresses its parameters depending on the age of the plantation. However, Table 6 shows that the generalized and simplified taper model [3] has a better fit in volcanic ash soils and marine sediments, and differs significantly by the LSD Tukey Test (95 %, confidence level), with the aggravation that the model of Coffre had some non-significant parameter in all types of soils.

## Conclusions

The proposed generalized and simplified taper model showed differentiation of parameters for each type of soil, i.e. volcanic sand and ash and marine sediments, according to the planting density and basal area expressed intrinsically. The variable age is not significant in obtaining the generalized model.

The statistical goodness of fit and predictive statistics of the model proposed showed its efficiency to estimate the profile and volume of the stem without bark of *Pinus radiata* (from base to apex) on each of the different types of soil.

By contrasting the model proposed with different taper models having the same response variable, no significant difference was observed from those models that had the best fittings under the three types of soil.

The model shows a better performance in the basal area for the correct estimation of the trade volume, compared to the simplified model of Bruce et al. (1968), Max and Burkhart (1976) and Cao et al. (1980) and greater stability compared to the model of Sharma and Zhang (2004); based on that its application is recommended.

## Acknowledgements

The authors thank the Consorcio Tecnológico BioEnercel S.A, Forestal MININCO, MASISA S.A. y Forestal ARAUCO S.A., for participating and funding the research project “Aprovechamiento Sustentable de Residuos de Cosecha Forestal e Industrial para Producción de Biocombustibles de Segunda Generación” and funding provided by the Agencia de Cooperación Internacional de Chile (AGCI) and the Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT-PCHA/ Doctorado nacional/2013-63130284).

De igual manera, se encontrarán modelos que presentan gran sensibilidad, la que se manifiesta en oscilaciones alrededor de la línea de estimación, algo común en los polinomios de alto grado, como se reportó en la representación gráfica de los modelos de Demaerschalk (1973) [10] y Sharma y Zhang (2004) [15]. Por su parte, el modelo [19] de Valenti y Cao (1986) es continuo pero no diferenciable en los puntos de unión, lo que aumenta la variabilidad en la predicción del diámetro del perfil del fuste, en las alturas cercanas a esos puntos.

Algunos modelos presentaron cambios abruptos por debajo del diámetro normal, con líneas de tendencia que presentan quiebres poco naturales para el caso de *P. radiata*, tal es el caso de los modelos de Bruce et al. (1968) [7], Demaerschalk (1973) [10], Real y Moore (1986) [13], Max y Burkhart (1976) [16] y [17], Cao et al. (1980) [18], Parresol et al. (1987) [20] y Thomas y Parresol (1991) [21].

El modelo de ahusamiento generalizado y simplificado [3] no se diferenció de manera significativa (Tukey LSD, 95 % nivel de confianza), de aquellos modelos que presentaban los mejores ajustes para los tres tipos de suelo (Cuadro 6): modelos de Bruce et al. (1968) [7], Demaerschalk (1973) [10], Lowell (1986) [12], Sharma y Zhang (2004) [15], Max y Burkhart (1976) [16] y [17], Cao et al. (1980) [18], Valenti y Cao (1986) [19] y Parresol et al. (1987) [20]. El modelo generalizado y simplificado [3] propuesto en el presente estudio no muestra ninguna de las inconsistencias presentes en los demás modelos.

Por otro lado, el modelo [11] de Coffre, citado por Rojo et al. (2005), con el cual el Instituto Forestal de Chile (INFOR) desarrolló el compendio de tablas auxiliares para el manejo de *P. radiata* (Peters, Jobet, & Aguirre, 1985), expresa sus parámetros en función de la edad de la plantación. No obstante, en el Cuadro 6 se observa que el modelo de ahusamiento generalizado y simplificado [3] presenta un mejor ajuste en suelos de cenizas volcánicas y sedimentos marinos, y se diferencia de manera significativa a través de la prueba de Tukey LSD (95 %, nivel de confianza), con el agravante de que el modelo de Coffre presentó algún parámetro no significativo en todos los tipos de suelos.

## Conclusiones

El modelo de ahusamiento generalizado y simplificado propuesto presenta diferenciación de los parámetros para cada tipo de suelo, i.e. arenas y cenizas de origen volcánico y sedimentos de origen marino, en función de la densidad de plantación y área basal expresados de manera intrínseca. La variable edad no es significativa en la obtención del modelo generalizado. Los estadísticos de bondad de ajuste y predictivos del modelo propuesto mostraron eficiencia para estimar el

End of English version



## References / Referencias

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 19(6), 716-723. doi: 10.1109/TAC.1974.1100705
- Allen, P. (1991). Polynomial taper equation for *Pinus caribaea*. *New Zealand Journal of Forestry Science*, 21(2/3), 194-205. [http://www.scionresearch.com/\\_\\_\\_data/assets/pdf\\_file/0020/17651/NZJFS212\\_31991ALLEN194\\_205.pdf](http://www.scionresearch.com/___data/assets/pdf_file/0020/17651/NZJFS212_31991ALLEN194_205.pdf)
- Bruce, D. , Curtis, R. , & Vancovering, C. (1968). Development of a system of taper and volume tables for red alder. *Forest Science*, 14(3), 339-350. Obtenido de <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/1968/00000014/00000003/art00021>
- Centro de Ciencia del Clima y la Resiliencia (CR2). (2015). Datos de Precipitación 1940-2013. Consultado en <http://www.cr2.cl/recursos-y-publicaciones/bases-de-datos/datos-de-precipitacion/>
- Cao, Q., Burkhart, H., & Max, T. (1980). Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *Forest Science*, 26(1), 71-80. Obtenido de <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/1980/00000026/00000001/art00012>
- De Miguel, S., Mehtatalo, L., Shater, Z., Kraid, B., & Pukkala, T. (2012). Evaluating marginal and conditional predictions of taper models in the absence of calibration data. *Canadian Journal of Forest Research*, 42(7), 1383-1394. doi: 10.1139/x2012-090
- Demaerschalk, J. (1972). Converting volume equations to compatible taper equations. *Forest Science*, 18(3), 241-245. Obtenido de <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/1972/00000018/00000003/art00018>
- Demaerschalk, J. (1973). Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. *Canadian Journal of Forest Research*, 3(1), 90-94. doi: 10.1139/x73-013
- Diéguez, U., Barrio, M., Castedo, F., & Balboa, M. (2003). Estimación del diámetro normal y del volumen del tronco a partir de las dimensiones del tocón para seis especies forestales comerciales de Galicia. *Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales*, 12(2), 131-139. [http://www.inia.es/gcontrec/pub/131-139-\(127S2\)-Estimacion\\_1059570355562.pdf](http://www.inia.es/gcontrec/pub/131-139-(127S2)-Estimacion_1059570355562.pdf)
- Gomat, H., Deleporte, P., Moukini, R., Mialounguila, G., Ognouabi, N., Saya, A., . . . Saint, L. (2011). What factors influence the stem taper of *Eucalyptus*: growth, environmental conditions, or genetics? *Annals of Forest Science*, 68(1), 109-120. doi: 10.1007/s13595-011-0012-3
- Hennig, C. (2003). Clusters, outliers, and regression: fixed point clusters. *Journal of Multivariate Analysis*, 86(1), 183-212. doi:10.1016/s0047-259x(02)00020-9
- Hjelm, B. (2013). Stem taper equations for poplars growing on farmland in Sweden. *Journal of Forestry Research*, 24(1), 15-22. doi: 10.1007/s11676-012-0270-4
- Honorato, J. (2011). Modelos volumétricos fustales para *Acrocarpus fraxinifolius* Wight & Arn. en plantaciones agroforestales de la Sierra Norte de Puebla. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 2(6), 55-71. Obtenido de <http://www.scielo.org.mx/pdf/remcf/v2n6/v2n6a6.pdf>
- perfil y el volumen fustal sin corteza de *Pinus radiata* (desde la base hasta el ápice), sobre cada uno de los diferentes tipos de suelo. Al contrastar el modelo propuesto con diversos modelos de ahusamiento que poseen la misma variable respuesta, no se diferencia de manera significativa de aquellos modelos que presentan los mejores ajustes bajo los tres tipos de suelo. El modelo presenta un mejor comportamiento en la zona basal para la estimación correcta del volumen comercial, que el modelo simplificado de Bruce et al. (1968), Max y Burkhart (1976) y Cao et al. (1980) y, una mayor estabilidad que el modelo de Sharma y Zhang (2004), con base en lo cual se recomienda su aplicación.

## Agradecimientos

Los autores agradecen al Consorcio Tecnológico BioEnercel S.A, Forestal MININCO, MASISA S.A. y Forestal ARAUCO S.A., por la participación y financiamiento de la investigación “Aprovechamiento Sustentable de Residuos de Cosecha Forestal e Industrial para Producción de Biocombustibles de Segunda Generación” y el apoyo de la beca de la Agencia de Cooperación Internacional de Chile (AGCI) y de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT-PCHA/Doctorado nacional/2013-63130284)

## Fin de la versión en español

- Kichenassamy, S. (2015). Continued proportions and Tartaglia's solution of cubic equations. *Historia Mathematica*. doi: 10.1016/j.hm.2015.03.004
- Kozak, A., Munro, D., & Smith, J. (1969). Taper functions and their application in forest inventory. *The Forestry Chronicle*, 45(4), 278-283. doi: 10.5558/tfc45278-4
- Lowell, K. (1986). A flexible polynomial taper equation and its suitability for estimating stem profiles and volumes of fertilized and unfertilized radiata pine trees. *Australian Forest Research*, 16(2), 165-174.
- Lozada, J. (2010). Consideraciones metodológicas sobre los estudios de comunidades forestales. *Revista Forestal Venezolana*, 1(054). Obtenido de <http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/31647/1/ensayo2.pdf>
- Martínez, J., & Acosta, A. (2014). Estimación del diámetro, altura y volumen a partir del diámetro del tocón para *Quercus laurina*, en Ixtlán, Oaxaca, México. *Madera y bosques*, 20(1), 59-70. Obtenido de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=61730576006>
- Matovic, B., Koprivica, M., & Radonja, P. (2007). Generalized taper models for Norway spruce (*Picea abies* L. Karst.) in Bosnia and west Serbia. *Allgemeine Forst und Jagdzeitung*, 178(7/8), 150. Obtenido de <http://rheinischemuseumfuerphilologie.com/index.php?id=168>
- Max, T., & Burkhart, H. (1976). Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*,

- 22(3), 283-289. Obtenido de <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/1976/00000022/00000003/art00011>
- Mead, D. (2013). *Sustainable management of Pinus radiata plantations* FAO (Ed.) *Forestry paper 170* Retrieved from [www.fao.org/3/a-i3274e.pdf](http://www.fao.org/3/a-i3274e.pdf)
- Newnham, R. (1992). Variable-form taper functions for four Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 22(2), 210-223. doi: 10.1139/x92-028
- Parresol, B. (1998). Prediction and error of bald cypress stem volume from stump diameter. *Southern Journal of Applied Forestry*, 22(2), 69-73. Obtenido de <http://www.ingentaconnect.com/content/saf/sjaf/1998/00000022/00000002/art00003>
- Parresol, B., Hotvedt, J., & Cao, Q. (1987). A volume and taper prediction system for bald cypress. *Canadian Journal of Forest Research*, 17(3), 250-259. doi:10.1139/x87-042
- Peters, R., Jobet, M., & Aguirre, S. (1985). *Compendio de tablas auxiliares para el manejo de plantaciones de pino insignie* INFOR (Ed.) *Manual N° 14* (pp. 133). Retrieved from <http://biblioteca1.infor.cl:81/DATAFILES/14345-2.pdf>
- Quiñonez, G., De los Santos, H., Álvarez, J., & Velázquez, A. (2014). Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial para las principales especies de *Pinus* en Durango, México. *Agrociencia*, 48(5), 553-567. Obtenido de <http://www.scielo.org.mx/pdf/agro/v48n5/v48n5a8.pdf>
- Rachid, C., Mason, E., Woollons, R., & Resquin, F. (2014). Volume and taper equations for *P. taeda* (L.) and *E. grandis* (Hill ex. Maiden). *Agrociencia Uruguay*, 18(2), 47-60. Obtenido de <http://www.scielo.edu.uy/pdf/agro/v18n2/v18n2a06.pdf>
- Real, P., & Moore, J. (1986). An individual tree system for douglas-fir in the inland north-west. *USDA Forestry Service General Technical Report NC-120*, 1037-1044.
- Renteria, J., & Ramirez, H. (1998). Sistema de cubicación para *Pinus cooperi* blanco mediante ecuaciones de ahusamiento en Durango. *Revista Chapingo: Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 4(2), 315-321. Obtenido de <http://www.chapingo.mx/revistas/phpscript/download.php?file=completo&id=MzI3NQ==>
- Rojo, A., Perales, X., Sánchez, F., Álvarez, J. G., & Von Gadow, K. (2005). Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). *European Journal of Forest Research*, 124(3), 177-186. doi: 10.1007/s10342-005-0066-6
- Santiago, W., De los Santos, H., Ángeles, G., Corral, J., Valdez, J., & Del Valle, D. (2014). Predicción del rendimiento maderable de *Pinus patula* Schl. et Cham. a través de modelos de distribución diamétrica. *Agrociencia*, 48(1), 87-101. Obtenido de <http://www.scielo.org.mx/pdf/agro/v48n1/v48n1a6.pdf>
- SAS, Institute. (2009). *Statistical Analysis System, Versión 9.2*. Cary, North Carolina. Retrieved from <http://support.sas.com/documentation/92/>
- Schlatter, J., & Gerding, V. (1995). Método de clasificación de sitios para la producción forestal, ejemplo en Chile. *Bosque*, 16(2), 13-20. Obtenido de <http://mingaonline.uach.cl/pdf/bosque/v16n2/art02.pdf>
- Sharma, M., & Oderwald, R. (2001). Dimensionally compatible volume and taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(5), 797-803. doi:10.1139/x01-005
- Sharma, M., & Zhang, S. (2004). Variable-exponent taper equations for jack pine, black spruce, and balsam fir in eastern Canada. *Forest Ecology and Management*, 198(1), 39-53. doi:10.1016/j.foreco.2004.03.035
- Tamarit, J., De los Santos, H., Alfrete, A., Valdez, J., Ramírez, H., & Guerra, V. (2014). Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* Lf mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 5(21), 57-75. Obtenido de <http://revistas.inifap.gob.mx/index.php/Forestales/article/view/3212/2637>
- Thomas, C., & Parresol, B. (1991). Simple, flexible, trigonometric taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 21(7), 1132-1137. doi: 10.1139/x91-157
- Valenti, M., & Cao, Q. (1986). Use of crown ratio to improve loblolly pine taper equations. *Canadian Journal of Forest Research*, 16(5), 1141-1145. doi:10.1139/x86-201