



## Um novo modelo para o projeto de sapatas associadas retangulares de divisa com dois lados opostos restringidos

A. Luévanos Rojas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura. Universidad Juárez del Estado de Durango, Gómez Palacio, Durango, México.

### Información del artículo

#### DOI:

<http://dx.doi.org/10.21041/ra.v6i2.137>

Artículo recibido el 28 de noviembre de 2015, revisado bajo las políticas de publicación de la Revista ALCONPAT y aceptado el 13 de marzo de 2016. Cualquier discusión, incluyendo la réplica de los autores, se publicará en el primer número del año 2017 siempre y cuando la información se reciba antes del cierre del tercer número del año 2016.

© 2016 ALCONPAT Int.

### Información Legal

Revista ALCONPAT, Año 6, No. 2, Abril - Junio 2016, es una publicación cuatrimestral de la Asociación Latinoamericana de Control de Calidad, Patología y Recuperación de la Construcción, Internacional, A.C., Km. 6, antigua carretera a Progreso, Mérida Yucatán, C.P. 97310, Tel.5219997385893, [alconpat.int@gmail.com](mailto:alconpat.int@gmail.com), Página Web: [www.revistaalconpat.org](http://www.revistaalconpat.org)

Editor responsable: Dr. Pedro Castro Borges. Reserva de derechos al uso exclusivo No.04-2013-011717330300-203, eISSN 2007-6835, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Unidad de Informática ALCONPAT, Ing. Elizabeth Sabido Maldonado, Km. 6, antigua carretera a Progreso, Mérida Yucatán, C.P. 97310, fecha de última modificación: 30 de abril de 2016.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor.

Queda totalmente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la ALCONPAT Internacional A.C.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um novo modelo de projeto de sapatas associadas retangulares de divisa com dois lados opostos restringidos, tendo em conta a pressão real do solo na superfície de contato da sapata para obter: os momentos em torno dos eixos longitudinais paralelos ao eixo “Y-Y”; os momentos em torno eixos transversais paralelos ao eixo “X-X”; A força cortante unidirecional (cortante por flexão); A força cortante bidirecional (puncionamento) para os dois pilares. A pressão real do solo é apresentada em termos de elementos mecânicos que atuam em cada pilar ( $P$ ,  $M_x$ , e  $M_y$ ). A abordagem matemática sugerida neste trabalho produz resultados que têm uma precisão tangível para encontrar a solução mais econômica.

**Palavras-chave:** projeto de sapatas; sapatas associadas retangulares de divisa; momentos; força cortante unidirecional (cortante por flexão); força cortante bidirecional (puncionamento).

## ABSTRACT

This paper presents a new model for design of boundary rectangular combined sapatas with two opposite sides constrained taking into account the real soil pressure acting on the contact surface of the sapata to obtain: Moments around of parallel longitudinal axes to axis “Y-Y”; Moments around of parallel transverse axes to axis “X-X”; Unidirectional shear force (bending shear); Bidirectional shear force (punching shear) to the two columns. The real soil pressure is presented in terms of the mechanical elements acting on each column ( $P$ ,  $M_x$ , and  $M_y$ ). The mathematical approach suggested in this paper produces results that have a tangible accuracy for find the solution more economical.

**Key words:** design of sapatas; boundary rectangular combined sapatas; moments; unidirectional shear force (bending shear); bidirectional shear force (punching shear).

## RESUMEN

Este documento presenta un nuevo modelo para diseño de zapatas combinadas rectangulares de lindero con dos lados opuestos restringidos tomando en cuenta la presión real del suelo sobre la superficie de contacto de la zapata para obtener: Los momentos alrededor de ejes longitudinales paralelos al eje “Y-Y”; Los momentos alrededor de ejes transversales paralelos al eje “X-X”; La fuerza cortante unidireccional (Cortante por flexión); La fuerza cortante bidireccional (Cortante por penetración) para las dos columnas. La presión real del suelo se presenta en función de los elementos mecánicos que actúan en cada columna ( $P$ ,  $M_x$ , y  $M_y$ ). El enfoque matemático sugerido en este trabajo produce resultados que tienen una exactitud tangible para encontrar la solución más económica.

**Palabras clave:** diseño de zapatas; zapatas combinadas rectangulares de lindero; momentos; fuerza cortante unidireccional (cortante por flexión); fuerza cortante bidireccional (cortante por penetración).

Autor a contactar: Arnulfo Luévanos Rojas ([arnulfol\\_2007@hotmail.com](mailto:arnulfol_2007@hotmail.com))

## 1. INTRODUÇÃO

A infraestrutura ou fundação é a parte da estrutura que normalmente se coloca sob a superfície do solo e que transmite as cargas para o solo ou rocha subjacente. Cada edifício possui a necessidade de resolver um problema de fundação. As fundações são classificadas em rasas e profundas, que têm diferenças importantes quanto a sua geometria, ao comportamento do solo, a sua função estrutural e aos seus sistemas construtivos (Bowles, 1996; Nilson, 1999; Das et al., 2006).

As fundações rasas, cujos sistemas construtivos em geral não apresentam grandes dificuldades, podem ser de vários tipos, de acordo com a sua função: sapata isolada, sapata associada, sapata corrida ou radier (Bowles, 1996; Das et al., 2006).

O trabalho usual de análise estrutural é feito normalmente com as hipóteses de que a estrutura dos edifícios está embutida no solo, isto é, apoiada em um material não-deformável (Calavera-Ruiz, 2000; Tomlinson, 2008).

A distribuição de pressão do solo sob uma sapata depende do tipo de solo, da rigidez relativa do solo e da fundação, e a profundidade da fundação ao nível de contato entre a sapata e o solo. Uma sapata de concreto apoiada em solos granulares grossos (solos arenosos) terá uma distribuição de pressões semelhante à da Figura 1(a), quando uma sapata rígida está apoiada sobre solo arenoso, a areia perto das bordas da sapata tende a mover-se lateralmente quando o carregamento é aplicado na sapata, tendendo a reduzir a pressão do solo perto das bordas, enquanto que o solo distante das bordas da sapata está relativamente confinado. Em contrapartida, a distribuição da pressão sob uma sapata apoiada em solos finos (argilosos) é similar à Figura 1(b), quando a sapata é carregada, o terreno sob a sapata desvia em uma depressão em forma de concha, aliviando a pressão por baixo do centro da sapata. Para fins de projeto, é comum assumir que a pressão do solo é distribuída de forma linear. A distribuição da pressão será uniforme se o centróide da sapata coincidir com a resultante das cargas aplicadas, como mostrado na Figura 1(c) (Bowles, 1996; Nilson, 1999).

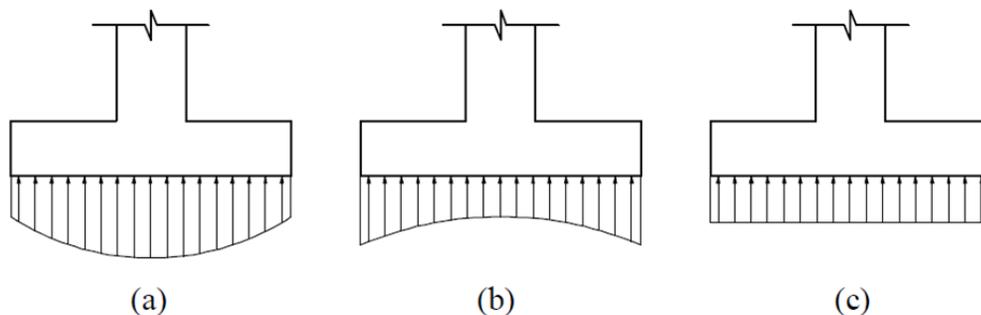


Figura 1. Distribuição de pressão sob a sapata: (a) Sapata em solos granulados grossos; (b) Sapata em solos finos (argilosos); (c) Distribuição uniforme equivalente.

Uma sapata associada é uma larga sapata que suporta dois ou mais pilares (normalmente dois) alinhados (Kurian, 2005; Punmia et al., 2007; Varghese, 2009).

As sapatas associadas são utilizadas quando: 1) A relação entre as cargas, a capacidade admissível do solo da fundação e a distância entre pilares adjacentes impedem a construção de sapatas isoladas. 2) Um pilar de divisa que está tão próximo da divisa da propriedade que não possibilita centralizar uma sapata isolada sob ele (Nilson, 1999; Kurian, 2005, Punmia et al., 2007; Varghese, 2009).

As sapatas associadas são projetadas de modo que o centro de gravidade de área da sapata corresponda com a resultante das cargas dos dois pilares. Isto produz uma pressão de contato uniforme ao longo de toda a área e evita a tendência de inclinar a sapata. Vistas de planta, estas sapatas são retangulares, trapezoidais ou em forma de T, e os detalhes de sua forma se adaptam para coincidir seu centroide e a resultante (Nilson, 1999; Kurian, 2005; Punmia et al., 2007; Varghese, 2009).

Outro recurso que é usado quando uma sapata simples não pode se centrar um pilar de divisa, envolve a locação da sapata para o pilar periférico de forma excêntrica e conectá-lo com a sapata do pilar interno mais próximo por uma viga alavanca. Esta viga alavanca, estando balanceada pela carga do pilar interno, resiste à tendência da inclinação da sapata de divisa excêntrica e iguala as pressões sob esta. Este tipo de fundação é conhecido como sapatas com vigas alavanca, em balanço ou conectadas (Nilson, 1999; Kurian, 2005; Punmia et al., 2007; Varghese, 2009).

Outra solução para projetar sapatas associadas para pilares sob flexão biaxial é considerar a pressão máxima do solo e esta é considerada uniforme em todos os pontos de contato (Calavera-Ruiz, 2000; Tomlinson, 2008).

Alguns documentos publicados recentemente considerando a pressão real do solo são: Projeto de sapatas isoladas de forma retangular usando um novo modelo (Luévanos-Rojas et al., 2013); Projeto de sapatas isoladas circulares usando um novo modelo (Luévanos-Rojas, 2014); Projeto de sapatas associadas retangulares de divisa usando um novo modelo (Luévanos-Rojas, 2014b), esta sapata considera apenas um lado restringido.

Este trabalho apresenta um novo modelo para o projeto de sapatas associadas retangulares de divisa com dois lados opostos restritos para obter: 1) Os momentos em torno de um eixo longitudinal (um eixo  $a-a$  com uma largura " $b_1$ " e um eixo  $b-b$  com uma largura " $b_2$ ", que são paralelas ao eixo "Y-Y"; 2) Os momentos em torno de um eixo transversal (eixo  $c-c$ , eixo  $d-d$  e um eixo  $e-e$  que são paralelos ao eixo "X-X"); 3) A força cortante unidirecional (cortante por flexão) sobre os eixos  $f-f$ ,  $g-g$ ,  $h-h$  e  $i-i$ ; 4) A força cortante bidirecional (punção), sobre uma seção retangular formada pelos pontos 5, 6, 7 e 8 para o pilar 1 (borda esquerda) e a seção retangular formada pelos pontos 9, 10, 11 e 12 para o pilar 2 (borda direita). A pressão real do solo que atua na superfície de contato da sapata é diferente nos quatro vértices, esta pressão se apresenta em termos dos elementos mecânicos que atuam em cada pilar (carga axial, momento em torno do eixo "X", e momento em torno do eixo "Y"). A abordagem matemática sugerida neste trabalho produz resultados que têm uma precisão tangível para todos os problemas, a parte principal desta pesquisa envolve encontrar a solução mais econômica.

## 2. MODELO PROPOSTO

### 2.1 Considerações gerais

De acordo com as exigências do Código de Construção para Concreto Estrutural e Comentários (ACI 318 versão em español), seções críticas são: 1) o momento máximo que se encontra na face do pilar, ou na parede, para sapatas que apoiam um pilar de concreto, ou parede; 2) a força cortante por flexão ocorre a uma distância " $d$ " (distância a partir da fibra extrema comprimida ao centro da armadura longitudinal) é medida a partir da face do pilar, pedestal ou parede para sapatas que apoiam num pilar ou parede, e 3) a punção está localizada de modo que o perímetro " $b_o$ " é mínimo, mas não tem porque estar a menos de " $d/2$ " a: (a) bordas ou vértices dos pilares, cargas concentradas, ou zonas de reação, e (b) mudanças na espessura das lajes, tais como bordas de capitéis (ACI, 2013; McCormac e Brown, 2013).

A equação geral para qualquer tipo de sapata sujeita à flexão bidirecional (González-Cuevas e Robles-Fernandez-Villegas, 2005; Punmia et al., 2007; Gere e Goodo, 2009) é:

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M_x y}{I_x} \pm \frac{M_y x}{I_y} \quad (1)$$

onde:

$\sigma$ : pressão exercida pelo solo sobre a sapata (pressão do terreno),

$A$ : área de contato da sapata,

$P$ : carga axial aplicada no centro de gravidade da sapata,

$M_x$ : momento em torno do eixo "X",

$M_y$ : momento em torno do eixo "Y",

$x$ : distância na direção "X", medida a partir do eixo "Y" para a fibra sob estudo,

$y$ : representa a distância na direção "Y" medida a partir do eixo da fibra "X" para a fibra sob estudo,

$I_y$ : momento de inércia em torno do eixo "Y",

$I_x$ : momento de inércia em torno do eixo "x".

## 2.2. Modelo para dimensionamento

Na Figura 2 é apresentada uma sapata retangular combinada de divisa com dois lados opostos restringidos, apoiando dois pilares retangulares de diferentes dimensões, cada pilar sujeito a uma carga axial e momento em duas direções (flexão bidirecional).

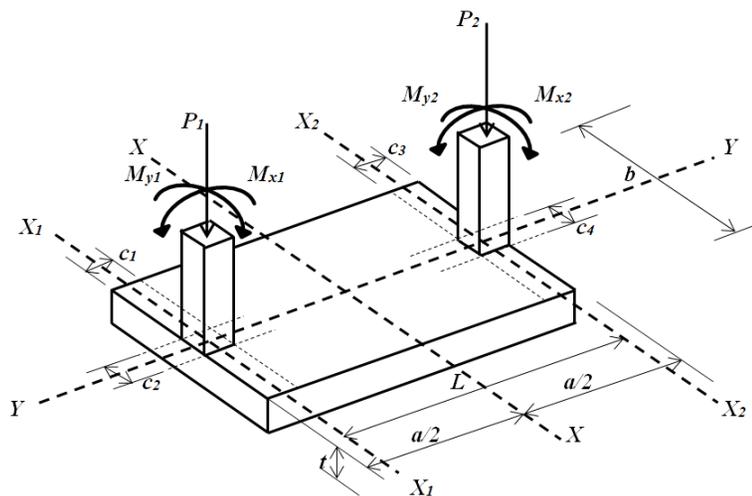


Figura 2. Sapata retangular combinada de divisa com dois lados opostos restringidos

O valor de "a" é fixo e pode ser expresso em termos de "L" como se segue:

$$a = L + \frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{2} \quad (2)$$

onde:

a: dimensão da sapata paralela ao eixo "Y".

Substituindo  $A = ab$ ,  $I_x = ba^3/12$ ,  $I_y = ab^3/12$ ,  $y = a/2$ ,  $x = b/2$  na equação (1) se obtém:

$$\sigma = \frac{R}{ab} \pm \frac{6M_{xT}}{ba^2} \pm \frac{6M_{yT}}{ab^2} \quad (3)$$

onde:

$b$ : dimensão da sapata paralela ao eixo "X",

$R = P_1 + P_2$ ,  $M_{yT} = M_{y1} + M_{y2}$ : momento total em torno do eixo "Y",

$M_{xT} = M_{x1} + M_{x2} + P_1(a/2 - c_1/2) - P_2(a/2 - c_3/2)$ : momento total em torno do eixo "X".

Se for considerado que a pressão sobre o solo deve ser igual a zero, pelo fato do solo não ser capaz de resistir a tração, o valor de "b" é obtido por:

$$b = \frac{6M_{yT}a}{Ra - 6M_{xT}} \quad (4)$$

Se for considerado que a pressão sobre o solo deve ser a capacidade de carga admissível disponível do solo " $\sigma_{adm}$ " o valor de "b" é obtido por:

$$b = \frac{Ra + 6M_{xT} + \sqrt{(Ra + 6M_{xT})^2 + 24\sigma_{adm}M_{yT}a^3}}{2\sigma_{adm}a^2} \quad (5)$$

La capacidad de carga admisible disponible del suelo se obtiene de la siguiente manera:

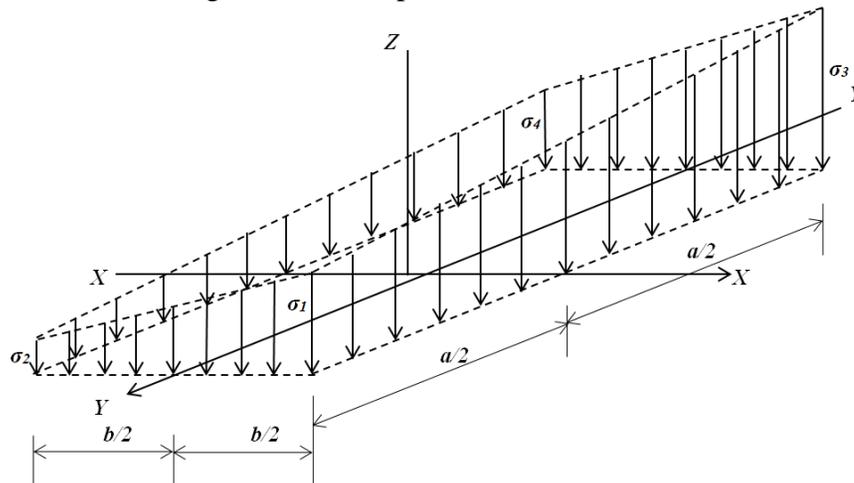
A capacidade de carga admissível disponível do solo é obtida da seguinte forma:

$$\sigma_{adm} = q_a - \gamma_{ppz} - \gamma_{pps} \quad (6)$$

onde:  $q_a$  representa a capacidade de carga admissível do solo,  $\gamma_{ppz}$  é o peso da sapata,  $\gamma_{pps}$  é o peso próprio do enchimento do solo.

### 2.3. Novo modelo para projeto de sapatas

A Figura 3 mostra o diagrama de pressão para sapatas retangulares combinadas de divisa com dois lados opostos restringidos, submetidas a uma carga axial e de momento em duas direções (flexão bidirecional) em cada pilar, onde a pressão é apresentada de forma diferente nos quatro vértices e variando de forma linear ao longo de toda a superfície de contato.



**Fig. 3.** Diagrama de pressão para sapata retangular combinada de divisa com dois lados opostos restringidos

A Figura 4 mostra sapatas retangulares combinadas de divisa com dois lados opostos restringidos para obter a pressão em qualquer lugar sobre a superfície de contato do elemento estrutural, devido à pressão exercida pelo solo.

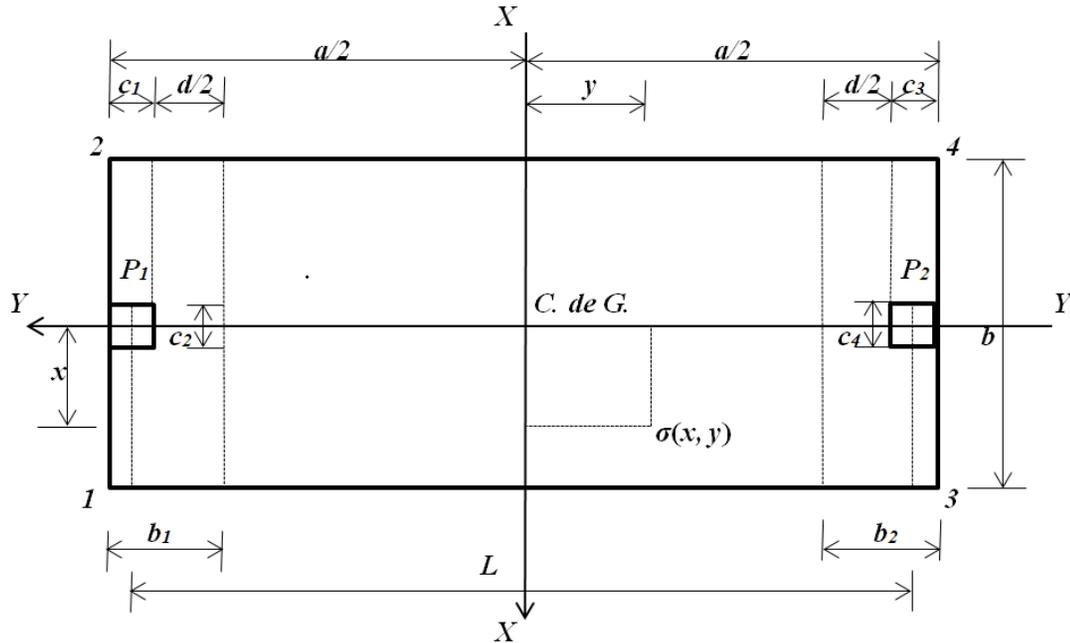


Figura 4. Sapata retangular combinada de divisa com dois lados opostos restringidos

A pressão do solo no sentido transversal é:

Para o pilar 1 é:

$$\sigma_{P_1}(x, y) = \frac{P_1}{b_1 b} + \frac{12M_{y1}x}{b_1 b^3} + \frac{12[M_{x1} + P_1(b_1/2 - c_1/2)]y}{bb_1^3} \quad (7)$$

Para o pilar 2 é:

$$\sigma_{P_2}(x, y) = \frac{P_2}{b_2 b} + \frac{12M_{y2}x}{b_2 b^3} + \frac{12[M_{x2} + P_2(b_2/2 - c_3/2)]y}{bb_2^3} \quad (8)$$

A pressão do solo no sentido longitudinal é:

$$\sigma(x, y) = \frac{R}{ab} + \frac{12M_{yT}x}{ab^3} + \frac{12M_{xT}y}{ba^3} \quad (9)$$

onde:  $b_1 = c_1 + d/2$  é a largura da superfície de ruptura do pilar 1,  $b_2 = c_3 + d/2$  é a largura da superfície de ruptura do pilar 2.

### 2.3.1. Momentos

As secções críticas para os momentos são mostradas na Figura 5. Estas são apresentadas nas secções *a-a*, *b-b*, *c-c*, *d-d* e *e-e*.

#### 2.3.1.1. Momentos em torno do eixo "a-a"

A força resultante " $F_{Ra}$ " se encontra através do volume (bulbo) de pressão da área formado pelo eixo *a-a* com uma largura  $b_1 = c_1 + d/2$  e a extremidade livre da sapata retangular, onde a maior pressão é apresentada:

$$F_{Ra} = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} \int_{c_2/2}^{b/2} \sigma_{P_1}(x, y) dx dy = \frac{[P_1 b^2 + 3M_{y1}(b + c_2)](b - c_2)}{2b^3} \quad (10)$$

O centro de gravidade " $x_{ca}$ " é obtido por:

$$x_{ca} = \frac{\int_{-b_1/2}^{b_1/2} \int_{c_2/2}^{b/2} x \sigma_{P_1}(x, y) dx dy}{\int_{-b_1/2}^{b_1/2} \int_{c_2/2}^{b/2} \sigma_{P_1}(x, y) dx dy} = \frac{P_1 b^2 (b + c_2) + 4M_{y1} (b^2 + b c_2 + c_2^2)}{4[P_1 b^2 + 3M_{y1} (b + c_2)]} \quad (11)$$

O momento em torno do eixo "a-a" se obtém através da seguinte equação:

$$M_{a-a} = F_{Ra} (x_{ca} - c_2/2) \quad (12)$$

Substituindo a equação (10) e (11) na equação (12) se obtém:

$$M_{a-a} = \frac{[P_1 b^2 + 2M_{y1}(2b + c_2)](b - c_2)^2}{8b^3} \quad (13)$$

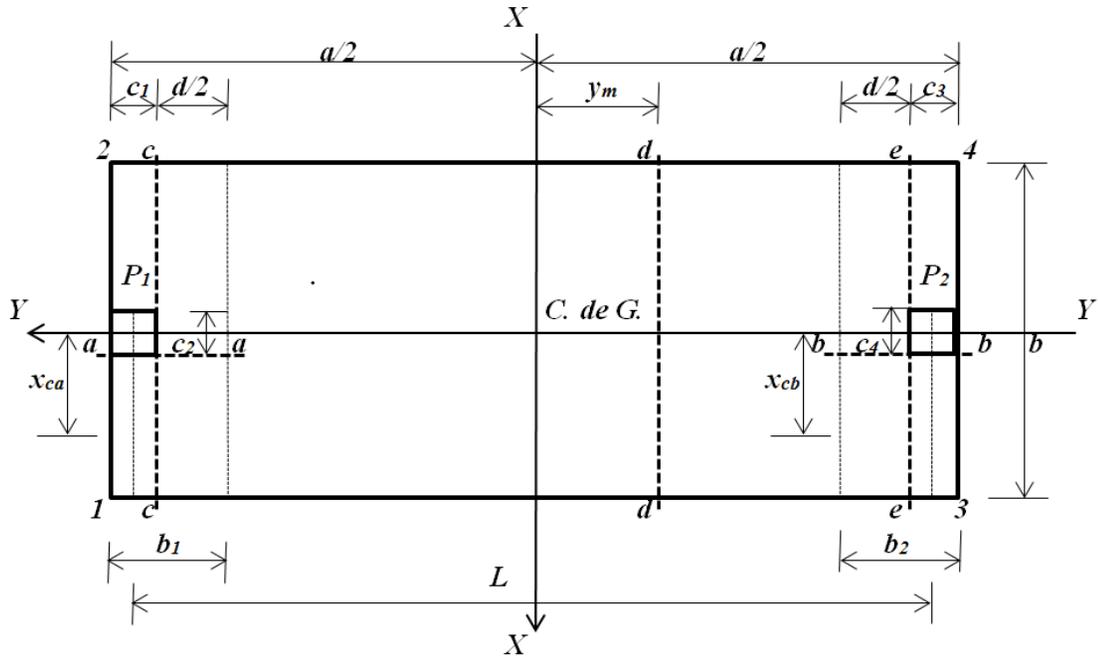


Figura 5. Seções críticas para os momentos

### 2.3.1.2. Momentos em torno do eixo "b-b"

A força resultante " $F_{Rb}$ " é obtida através do volume (bulbo) de pressão da área formada pelo eixo b-b com uma largura  $b_2 = c_3 + d/2$  e a extremidade livre da sapata retangular, onde a maior pressão é apresentada por:

$$F_{Rb} = \int_{-b_2/2}^{b_2/2} \int_{c_4/2}^{b/2} \sigma_{P_2}(x, y) dx dy = \frac{[P_2 b^2 + 3M_{y2}(b + c_4)](b - c_4)}{2b^3} \quad (14)$$

Agora, o centro de gravidade " $x_{cb}$ " é obtido por:

$$x_{cb} = \frac{\int_{-b_2/2}^{b_2/2} \int_{c_4/2}^{b/2} x \sigma_{P_2}(x, y) dx dy}{\int_{-b_2/2}^{b_2/2} \int_{c_4/2}^{b/2} \sigma_{P_2}(x, y) dx dy} = \frac{P_2 b^2 (b + c_4) + 4M_{y2}(b^2 + bc_4 + c_4^2)}{4[P_2 b^2 + 3M_{y2}(b + c_4)]} \quad (15)$$

O momento em torno do eixo de "b-b" é obtido por meio da seguinte equação:

$$M_{b-b} = F_{Rb}(x_{cb} - c_4/2) \quad (16)$$

Substituindo a equação (14) e (15) na equação (16) se obtém:

$$M_{b-b} = \frac{[P_2 b^2 + 2M_{y2}(2b + c_4)](b - c_4)^2}{8b^3} \quad (17)$$

### 2.3.1.3. Momentos em torno do eixo "c-c"

A força resultante " $F_{Rc}$ " é o volume (bulbo) de pressão da área formada pelo eixo c-c e os vértices 1 e 2, e esta se apresenta como se segue:

$$F_{Rc} = \int_{a/2-c_1}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x, y) dx dy = \frac{[Ra^2 + 6M_{xT}(a - c_1)]c_1}{a^3} \quad (18)$$

O centro de gravidade " $y_{cc}$ " do bulbo de pressão da área formada pelo eixo c-c e os vértices 1 e 2 é obtido por:

$$y_{cc} = \frac{\int_{a/2-c_1}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y\sigma(x, y) dx dy}{\int_{a/2-c_1}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x, y) dx dy} = \frac{Ra^2(a - c_1) + 2M_{xT}(3a^2 - 6ac_1 + 4c_1^2)}{2Ra^2 + 12M_{xT}(a - c_1)} \quad (19)$$

O momento em torno do eixo "c-c" é obtido por meio da seguinte equação:

$$M_{c-c} = F_{Rc} \left[ y_{cc} - \left( \frac{a}{2} - c_1 \right) \right] - P_1 \left( \frac{c_1}{2} + \frac{M_{x1}}{P_1} \right) \quad (20)$$

Substituindo a equação (18) e (19) na equação (20) se obtém:

$$M_{c-c} = - \frac{(P_1 c_1 + 2M_{x1})a^3 - [Ra^2 + 2M_{xT}(3a - 2c_1)]c_1^2}{2a^3} \quad (21)$$

### 2.3.1.4. Momentos em torno do eixo "d-d"

Em primeiro lugar, deve-se localizar a posição do eixo d-d, que é onde o momento máximo está localizado. Quando a força cortante é zero, o momento é máximo, então a força cortante " $V_y = F_{Rd} - P_1$ " à uma distância " $y_m$ " é apresentada como segue:

$$V_y = \int_{y_m}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x, y) dx dy - P_1 = \frac{(R - 2P_1)a^3 + 3M_{xT}a^2 - 2Ra^2y_m - 12M_{xT}y_m^2}{2a^3} \quad (22)$$

A força cortante " $V_y$ " é igual a zero e o valor de " $y_m$ " é obtido por:

$$y_m = \frac{a \left[ \sqrt{R^2 a^2 + 12M_{xT} a (R - 2P_1) + 36M_{xT}^2} - Ra \right]}{12M_{xT}} \quad (23)$$

O centro de gravidade " $y_{cd}$ " do volume de pressão da área formada pelo eixo  $d-d$  e os vértices 1 e 2 é obtido por:

$$y_{cd} = \frac{\int_{y_m}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y\sigma(x, y) dx dy}{\int_{y_m}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x, y) dx dy} = \frac{(Ra + 4M_{xT})a^3 - 4(Ra^2 + 8M_{xT}y_m)y_m^2}{4(Ra + 3M_{xT})a^2 - 8(Ra^2 + 6M_{xT}y_m)y_m} \quad (24)$$

O momento em torno do eixo " $d-d$ " é obtido por meio da seguinte equação:

$$M_{d-d} = F_{Rd}(y_{cd} - y_m) - P_1 \left( \frac{a}{2} - \frac{c_1}{2} + \frac{M_{x1}}{P_1} - y_m \right) \quad (25)$$

Substituindo a equação (22) e (24) na equação (25) se obtém:

$$M_{d-d} = - \frac{4[P_1(a - c_1 - 2y_m) + 2M_{x1}]a^3 - [Ra^2 + 4M_{xT}(a + y_m)](a - 2y_m)^2}{8a^3} \quad (26)$$

### 2.3.1.5. Momentos em torno do eixo " $e-e$ "

A força resultante " $F_{Re}$ " é o volume (bulbo) de pressão da área formada pelo eixo  $d-d$  os vértices 1 e 2, se apresenta como segue:

$$F_{Re} = \int_{-a/2+c_3}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x, y) dx dy = \frac{[Ra^2 + 6M_{xT}c_3](a - c_3)}{a^3} \quad (27)$$

O centro de gravidade " $y_{ce}$ " do bulbo de pressão da área formada pelo eixo  $e-e$  e vértices 1 e 2 é obtido por:

$$y_{ce} = \frac{\int_{-a/2+c_3}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y\sigma(x, y) dx dy}{\int_{-a/2+c_3}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x, y) dx dy} = \frac{Ra^2c_3 + 2M_{xT}(a^2 - 2ac_3 + 4c_3^2)}{2Ra^2 + 12M_{xT}c_3} \quad (28)$$

O momento em torno do eixo " $e-e$ " se encontra por meio da seguinte equação:

$$M_{e-e} = F_{Re} \left[ \left( \frac{a}{2} - c_3 \right) + y_{ce} \right] - P_1 \left( a - \frac{c_1}{2} - c_3 + \frac{M_{x1}}{P_1} \right) \quad (29)$$

Substituindo a equação (27) e (28) na equação (29) se obtém:

$$M_{e-e} = -\frac{[P_1(2a - c_1 - 2c_3) + 2M_{x1}]a^3 - [Ra^2 + 2M_{xT}(a + 2c_3)](a - c_3)^2}{2a^3} \quad (30)$$

### 2.3.1.6. Equação de momentos entre os dois pilares

Para se obter a equação de momentos entre os dois pilares é conhecido que a derivada do momento é a força cortante, portanto, apresenta-se como se segue:

$$V_y = \frac{dM_y}{dy} \quad (31)$$

onde:  $M_y$  é o momento a uma distância "y",  $V_y$  é a força cortante a uma distância "y".

A equação da força cortante é:

$$V_y = \frac{6M_{xT}y^2}{a^3} + \frac{Ry}{a} + \frac{(2P_1 - R)a - 3M_{xT}}{2a} \quad (32)$$

Substituindo a equação (32) na equação (31) e desenvolvendo a integral se obtém:

$$M_y = \frac{2M_{xT}y^3}{a^3} + \frac{Ry^2}{2a} + \frac{[(2P_1 - R)a - 3M_{xT}]y}{2a} + C \quad (33)$$

Agora, para avaliar a constante de integração "C" se substitui  $y = a/2 - c_1$  e  $M_{c-c}$  que é mostrado na equação (21), o valor da constante é mostrado como se segue:

$$C = \frac{Ra - 4P_1(a - c_1) - 8M_{x1} + 4M_{xT}}{8} \quad (34)$$

Substituindo a equação (34) na equação (33), a equação momento é obtida por:

$$M_y = \frac{2M_{xT}y^3}{a^3} + \frac{Ry^2}{2a} + \frac{[(2P_1 - R)a - 3M_{xT}]y}{2a} + \frac{Ra - 4P_1(a - c_1) - 8M_{x1} + 4M_{xT}}{8} \quad (35)$$

### 2.3.2. Força cortante unidirecional (cortante por flexão)

A seção crítica para a força cortante unidirecional é obtida a uma distância "d" a partir da face do pilar, como se mostra na Figura 6, onde são apresentadas nas seções f-f, g-g, h-h e i-i.

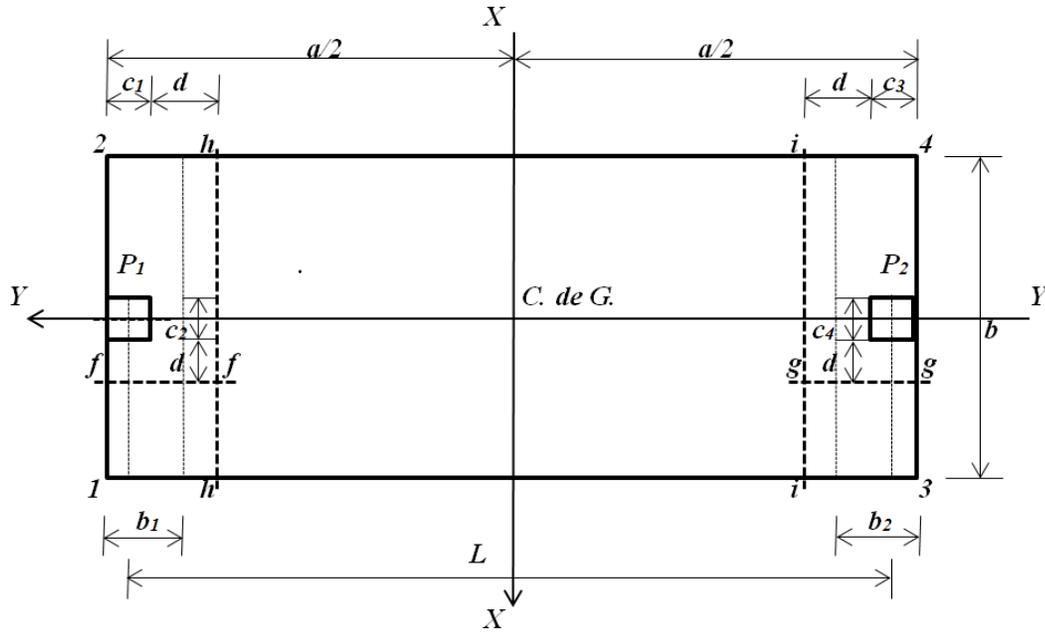


Figura 6. As seções críticas para as forças cortantes unidirecionais

**2.3.2.1. Força cortante no eixo "f-f"**

A força cortante por flexão " $V_{ff-f}$ " atuando no eixo  $f-f$  da sapata é obtida através do volume de pressão da área formada pelo eixo  $f-f$  com uma largura " $b_1 = c_1 + d/2$ " e a extremidade livre da sapata retangular, onde a maior pressão é apresentada por:

$$V_{ff-f} = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} \int_{c_2/2+d}^{b/2} \sigma_{P_1}(x, y) dx dy = \frac{[P_1 b^2 + 3M_{y1}(b + c_2 + 2d)](b - c_2 - 2d)}{2b^3} \quad (36)$$

**2.3.2.2. Força cortante no eixo "g-g"**

A força cortante por flexão " $V_{fg-g}$ " que atua no eixo  $g-g$  da sapata se encontra através do volume de pressão da área formada pelo eixo  $g-g$  com uma largura " $b_2 = c_3 + d/2$ " e a extremidade livre da sapata retangular, onde a maior pressão é apresentada por:

$$V_{fg-g} = \int_{-b_2/2}^{b_2/2} \int_{c_4/2+d}^{b/2} \sigma_{P_2}(x, y) dx dy = \frac{[P_2 b^2 + 3M_{y2}(b + c_4 + 2d)](b - c_4 - 2d)}{2b^3} \quad (37)$$

**2.3.2.3. Força cortante no eixo "h-h"**

A força cortante por flexão " $V_{fh-h}$ " que atua sobre o eixo  $h-h$  da sapata é a força " $P_1$ " que atua no pilar 1 menos o volume (bulbo) de pressão da área formada pelo eixo  $h-h$  e vértices 1 e 2 da sapata e se apresenta como se segue:

$$V_{fh-h} = P_1 - \int_{a/2-c_1-d}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x, y) dx dy = \frac{P_1 a^3 - [Ra^2 + 6M_{xT}(a - c_1 - d)](c_1 + d)}{a^3} \quad (38)$$

**2.3.2.4. Força cortante no eixo "i-i"**

A força cortante por flexão " $V_{fi-i}$ " que atua no eixo  $i-i$  da sapata é a força " $P_1$ " que atua no pilar 1 menos o volume de pressão da área formada pelo eixo  $i-i$  e os vértices 1 e 2 da sapata e se apresenta como se segue:

$$V_{fi-i} = P_1 - \int_{-a/2+c_3+d}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma(x,y) dx dy = \frac{P_1 a^3 - [Ra^2 + 6M_{xT}(c_3 + d)](a - c_3 - d)}{a^3} \quad (39)$$

**2.3.3. Força cortante bidirecional (punção)**

A seção crítica para a força cortante bidirecional aparece a uma distância " $d/2$ " a partir da face do pilar em ambas as direções, como se mostra na Figura 7.

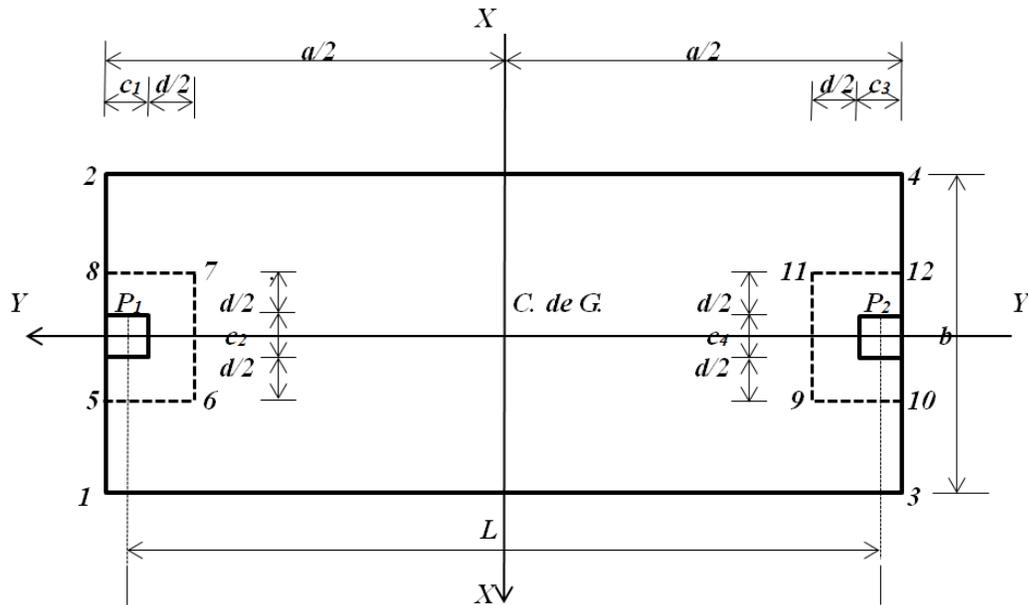


Figura 7. Seções críticas para as forças cortantes bidirecionais

**2.3.3.1. Punção para o pilar 1**

A punção da coluna 1 " $V_{p1}$ " que atua sobre a sapata é a força " $P_1$ " a menos a área retangular formada pelos pontos 5, 6, 7 e 8, mostrado como se segue:

$$V_{p1} = P_1 - \int_{\frac{a}{2}-c_1-\frac{d}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c_2-d}{2}}^{\frac{c_2+d}{2}} \sigma(x,y) dx dy = \frac{P_1 a^3 b - [Ra^2 + 6M_{xT}(a - c_1 - d/2)](c_2 + d)(c_1 + d/2)}{a^3 b} \quad (40)$$

**2.3.3.2. Punção para o pilar 2**

A punção do pilar 2 " $V_{p2}$ " que atua na sapata é a força " $P_2$ ", a menos a área retangular formada pelos pontos 9, 10, 11 e 12, conforme é mostrado a seguir:

$$V_{p2} = P_2 - \int_{-a/2}^{-a/2+c_3+d/2} \int_{-c_4/2-d/2}^{c_4/2+d/2} \sigma(x,y) dx dy$$

$$= \frac{P_2 a^3 b - [Ra^2 - 6M_{xT}(a - c_3 - d/2)](c_4 + d)(c_3 + d/2)}{a^3 b} \quad (41)$$

### 3. EXEMPLO NUMÉRICO

O projeto de uma sapata combinada retangular de divisa, com dois lados opostos restringidos, que apoia dois pilares quadrados é apresentado na Figura 2, com as seguintes informações básicas: Pilar 1 = 40x40 cm; Pilar 2 = 40x40 cm; L = 5.60 m; H = 2.0 m;  $P_{D1} = 600$  kN;  $P_{L1} = 400$  kN;  $M_{Dx1} = 140$  kN-m;  $M_{Lx1} = 100$  kN-m;  $M_{Dy1} = 120$  kN-m;  $M_{Ly1} = 80$  kN-m;  $P_{D2} = 500$  kN;  $P_{L2} = 300$  kN;  $M_{Dx2} = 120$  kN-m;  $M_{Lx2} = 100$  kN-m;  $M_{Dy2} = 110$  kN-m;  $M_{Ly2} = 90$  kN-m;  $f'_c = 21$  MPa;  $f_y = 420$  MPa;  $q_a = 220$  kN/m<sup>2</sup>;  $\gamma_{ppz} = 24$  kN/m<sup>3</sup>;  $\gamma_{pps} = 15$  kN/m<sup>3</sup>.

Onde: H é a altura da sapata,  $P_D$  é o peso próprio,  $P_L$  é a sobrecarga,  $M_{Dx}$  é o momento em torno do eixo "X-X" do peso próprio,  $M_{Lx}$  é o momento em torno do eixo "X-X" da sobrecarga,  $M_{Dy}$  é o momento em torno do eixo "Y-Y" do peso próprio,  $M_{Ly}$  é o momento em torno do eixo "Y-Y" da sobrecarga.

O projeto é realizado usando o critério da resistência última, e obtido pelo procedimento empregado por Luévanos-Rojas (2014b).

**Passo 1:** As cargas e momentos que atuam no solo são:  $P_1 = 1000$  kN;  $M_{x1} = 240$  kN-m;  $M_{y1} = 200$  kN-m;  $P_2 = 800$  kN;  $M_{x2} = 220$  kN-m;  $M_{y2} = 200$  kN-m;  $R = 1,800$  kN;  $M_{yT} = 400$  kN-m;  $M_{xT} = 1,020$  kN-m.

**Passo 2:** A capacidade de carga disponível no solo: é proposta a espessura "t" da sapata, a primeira proposta é a espessura mínima de 25 cm, de acordo com as normas do ACI, posteriormente, a espessura é revisada para atender as condições: momentos, cortante por flexão punção. Se estas condições não forem atendidas, uma maior espessura é proposta, até que as três condições acima sejam atendidas. A espessura da sapata que satisfaz as três condições acima referidas é de 85 cm. Utilizando a equação (6) se obtém a capacidade disponível do solo " $\sigma_{adm}$ ", que é 182,35 kN/m<sup>2</sup>.

**Passo 3:** O valor de "a" da equação (2) se obtém:  $a = 6,00$  m. O valor de "b" com a equação (4) é:  $b = 3,08$  m, e pela equação (5) se obtém:  $b = 3,25$  m. Por conseguinte, as dimensões da sapata são:  $a = 6,00$  e  $b = 3,30$  m.

**Passo 4:** Os elementos mecânicos (P, Mx, My) que atuam sobre a sapata são:  $P_{u1} = 1360$  kN;  $M_{ux1} = 328$  kN-m;  $M_{uy1} = 272$  kN-m;  $P_{u2} = 1,080$  kN;  $M_{ux2} = 304$  kN-m;  $M_{uy2} = 276$  kN-m;  $R = 2440$  kN;  $M_{uyT} = 548$  kN-m;  $M_{uxT} = 1416$  kN-m.

**Passo 5:** Os momentos que atuam na sapata. Os momentos em torno dos eixos paralelos ao eixo Y-Y são:  $M_{a-a} = 544,64$  kN-m;  $M_{b-b} = 457,08$  kN-m. Os momentos em torno do eixo paralelo ao eixo X-X são:  $M_{c-c} = -549,43$  kN-m;  $M_{d-d} = -1652,53$  kN-m;  $M_{e-e} = +102,49$  kN-m.

**Passo 6:** A profundidade efetiva (curvatura efetiva). A curvatura efetiva para o momento máximo dos eixos paralelos ao eixo Y-Y é:  $d = 37,61$  cm. A curvatura efetiva para o momento máximo dos eixos paralelos ao eixo X-X é:  $d = 31,95$  cm. A profundidade efetiva após a realização de diferentes propostas é:  $d = 77,00$  cm,  $r = 8,00$  cm,  $t = 85,00$  cm.

**Passo 7:** A força cortante por flexão (força cortante unidirecional). As forças cortantes sobre eixos paralelos ao eixo Y-Y, a força cortante por flexão permitida é:  $\phi_v V_{cf} = 400,26$  kN; as forças cortantes por flexão atuantes são:  $V_{ff-f} = 361,15$  kN;  $V_{fg-g} = 304,64$  kN. Portanto, atendidas. As forças cortantes nos eixos paralelos ao eixo X-X, a força cortante por flexão permitida é:  $\phi_v V_{cf} =$

1682,60 kN; as forças cortantes por flexão atuantes são:  $V_{fh-h} = 1176,23 \text{ kN}$ ;  $V_{fg-g} = - 826,48 \text{ kN}$ . Portanto, atendidas.

**Passo 8:** A punção (força cortante bidirecional). A punção permitida é:  $\phi_v V_{cp} = 4191,22 \text{ kN}$ ;  $\phi_v V_{cp} = 7114,75 \text{ kN}$ ;  $\phi_v V_{cp} = 2711,96 \text{ kN}$ . A punção atuante: para o pilar 1 é:  $V_{cp1} = 1189,73 \text{ kN}$ . Para o pilar 2 é:  $V_{cp2} = 1023,91 \text{ kN}$ . Portanto, atendidas.

**Passo 9:** A armadura..  $w = 0,0425$ .

a) A armadura longitudinal (armadura na direção do eixo "Y").

❖ A armadura superior:  $A_{sp} = 58,35 \text{ cm}^2$ .  $A_{smin} = 8462 \text{ cm}^2$ . Portanto, propõe-se armadura mínima para flexão " $A_{smin}$ ". Utilizar 17 barras de 1"(2,54cm) de diâmetro.

❖ A armadura inferior:  $A_{sp} = 3,53 \text{ cm}^2$ .  $A_{smin} = 8462 \text{ cm}^2$ . Portanto propõe-se armadura mínima para flexão " $A_{smin}$ ". Utilização 17 barras de 1"(2,54cm) de diâmetro.

b) A armadura transversal (armadura no sentido do eixo "X"):

❖ Armadura inferior: Sob o pilar 1:  $A_{sp} = 19,45 \text{ cm}^2$ .  $A_{smin} = 20,13 \text{ cm}^2$ . Portanto, propõe-se armadura mínima para flexão " $A_{smin}$ ". Utilizar 8 barras de 3/4"(1,91cm) de diâmetro. Sob o pilar 2:  $A_{sp} = 16,22 \text{ cm}^2$ .  $A_{smin} = 20,13 \text{ cm}^2$ . Portanto, propõe-se armadura mínima para flexão " $A_{smin}$ ". Utilizar 8 barras de 3/4"(1,91 cm) de diâmetro.

❖ Armadura na parte excedente dos pilares: é proposta armadura para temperatura:  $A_{st} = 0.0018 b_{wt} = 67,78 \text{ cm}^2$ . Utilizar 24 barras de 3/4"(1,91 cm) de diâmetro.

❖ Armadura superior: é proposta armadura para temperatura:  $A_{st} = 0.0018 b_{wt} = 91,80 \text{ cm}^2$ . Utilizar 33 barras de 3/4"(1,91 cm) de diâmetro.

**Passo 10.** O comprimento das barras corrugadas:

a) Armadura superior

onde:  $\psi_t = 1,3$ , uma vez que tem mais de 30 cm de concreto fresco sob a armadura,  $\psi_e = \lambda = 1$ .

$$l_d = \frac{f_y \psi_t \psi_e}{1.7 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b = \frac{(420)(1.3)(1)}{1.7(1)\sqrt{21}} (2.54) = 178.02 \text{ cm}$$

$$y_m = 0.5019 \text{ m}$$

O comprimento disponível na direção longitudinal da sapata é:  $300-50,19-8 = 241,81 \text{ cm}$ .

Em seguida, o comprimento de desenvolvimento é menor que o comprimento disponível. Por isso, não demanda nenhum gancho.

b) Armadura inferior

onde:  $\psi_t = 1$ ,  $\psi_e = \lambda = 1$ .

$$l_d = \frac{f_y \psi_t \psi_e}{2.1 \lambda \sqrt{f'_c}} d_b = \frac{(420)(1)(1)}{2.1(1)\sqrt{21}} (1.91) = 83.36 \text{ cm}$$

O comprimento disponível na direção longitudinal da sapata é:  $330/2 - 40/2 - 8 = 137 \text{ cm}$ .

Então, o comprimento de desenvolvimento é menor que o comprimento disponível. Por isso, não demanda nenhum gancho.

As dimensões e a armadura da sapata retangular combinada de divisa com dois lados opostos restringidos são apresentadas na Figura 8.

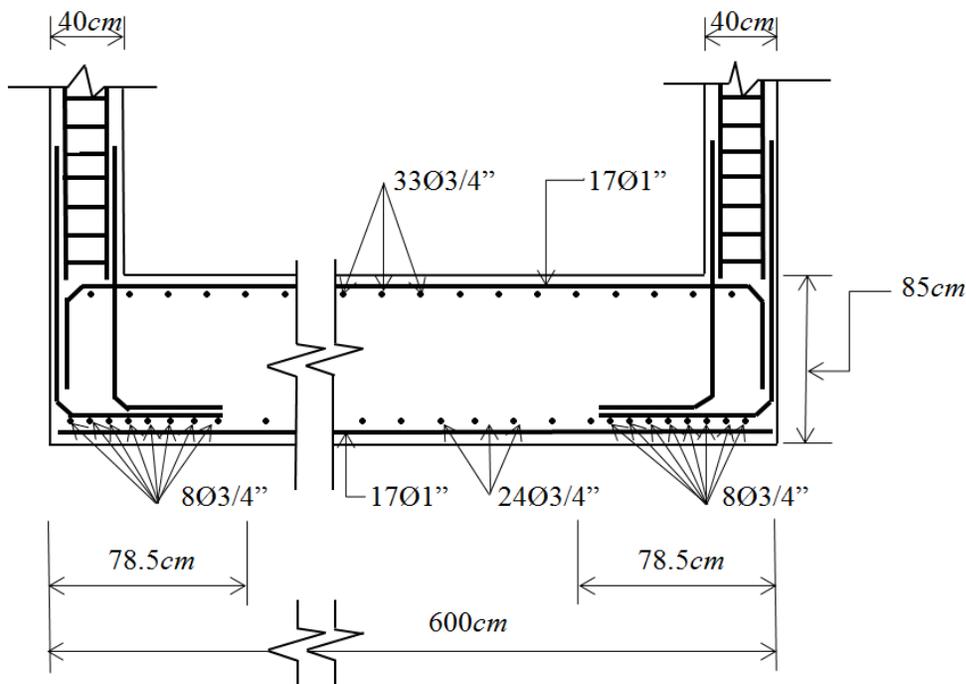


Figura 8. Desenho final da sapata, de divisa, combinada retangular

#### 4. CONCLUSÕES

O modelo apresentado neste documento aplica-se apenas para o projeto de sapatas retangulares combinadas de divisa com dois lados opostos restringidos apoiando dois pilares. Supõe-se que o solo debaixo da sapata é um material elástico e homogêneo, e a sapata é rígida, que cumpre com a expressão da flexão bidirecional, isto é, a variação de pressão é linear.

As equações propostas oferecem diretamente as dimensões em planta da fundação, garantindo que a pressão admissível no terreno não seja excedida. Por outro lado, os elementos mecânicos de momentos, força cortante por flexão (força cortante unidirecional) e punção (força cortante bidirecional), também podem ser diferentes dos obtidos com uma pressão do solo constante. Neste trabalho, foram propostas também expressões para se obter estes elementos de projeto sistematicamente.

O modelo proposto apresentado neste artigo pode ser aplicado para os três tipos de sapatas associadas retangulares de divisa com dois lados opostos restringidos em termos das cargas aplicadas a cada pilar: 1) carga axial concêntrica, 2) carga axial e momento em uma direção (flexão unidirecional), 3) carga axial e momento em duas direções (flexão bidirecional).

Sugestões para pesquisas futuras: 1) Quando as sapatas associadas retangulares de divisa com dois lados opostos restringidos apoiam mais de dois pilares; 2) Quando um outro tipo de solo é apresentado, por exemplo, em solos totalmente coesivos (solos argilosos) e os solos granulares (solos arenosos), o diagrama de pressão não é linear e tem de ser tratado de modo diferente (Figura 1); 3) Quando o caso em que nem toda a base da fundação gerar compressões no solo, apenas trabalhando parcialmente sua superfície de contato, o que é permitido em algumas hipóteses de cargas pouco frequentes, especialmente em bases de equipamentos industriais, cuja solução é iterativa (Bowles, 1970).

## 5. REFERÊNCIAS

- ACI (2013), “*Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*”, (New York, USA: American Concrete Institute, Committee 318).
- Bowles, J. E. (1970), “*Engineering properties of soils and their measurement*”, (New York, USA: McGraw-Hill).
- Bowles, J. E. (1996), “*Foundation analysis and design*”, (New York, USA: McGraw-Hill).
- Calavera-Ruiz, J. (2000), “*Cálculo de estructuras de cimentación*”, (Distrito Federal, México: Intemac ediciones).
- Das, B. M., Sordo-Zabay, E., Arrijoja-Juárez, R. (2006), “*Principios de Ingeniería de Cimentaciones*”, (Distrito Federal, México: Cengage Learning Latín América).
- Gere, J. M., Goodo, B. J. (2009), “*Mecánica de materiales*”, (Distrito Federal, México: Cengage Learning).
- González-Cuevas, O. M., Robles-Fernández-Villegas, F. (2005), “*Aspectos fundamentales del concreto reforzado*”, (Distrito Federal, México: Limusa).
- Kurian, N. P. (2005), “*Design of foundation systems*”, (New Delhi, India: Alpha Science Int'l Ltd.).
- Luévanos-Rojas, A., Faudoa-Herrera, J. G., Andrade-Vallejo, R. A., Cano-Alvarez, M. A. (2013), “*Design of isolated footing of rectangular form using a new model*”, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 9, No. 10, pp. 4001-4022.
- Luévanos-Rojas, A. (2014a), “*Design of isolated footing of circular form using a new model*”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 52, No. 4, pp. 767-786.
- Luévanos-Rojas, A. (2014b), “*Design of boundary combined footing of rectangular shape using a new model*”, *Dyna-Colombia*, Vol. 81, No. 188, pp. 199-208.
- McCormac, J. C. Brown, R. H. (2013), “*Design of reinforced concrete*”, (New York, USA: John Wiley & Sons).
- Nilson A. H. (1999), “*Diseño de estructuras de concreto*”, (Distrito Federal, México: McGraw-Hill).
- Punmia, B. C., Kumar-Jain, A., Kumar-Jain, A. (2007), “*Limit state design of reinforced concrete*”, (New Delhi, India: Laxmi Publications (P) Limited).
- Tomlinson, M. J. (2008), “*Cimentaciones, diseño y construcción*”, (Distrito Federal, México: Trillas).
- Varghese, P. C. (2009), “*Design of reinforced concrete foundations*”, (New Delhi, India: PHI Learning Pvt. Ltd.).