Crecimiento económico óptimo y crecimiento poblacional: una versión mejorada del modelo de Ramsey*

Elvio Accinelli y Juan Gabriel Brida

Universidad Autónoma Metropolitana/Universidad Libre de Bolzano

Resumen

Es usual en teoría del crecimiento económico asumir que la población crece exponencialmente. Esta hipótesis sólo es plausible en un periodo inicial, pero no puede mantenerse indefinidamente, pues implicaría que la población del planeta puede ser arbitrariamente grande. Este trabajo analiza el modelo de crecimiento económico óptimo de Ramsey sustituyendo la ley de crecimiento poblacional exponencial por la ecuación logística. Se demuestra que en este caso los valores de equilibrio de largo periodo coinciden con los del modelo clásico de Ramsey con tasa de crecimiento poblacional nula y se analiza la estabilidad del equilibrio

Palabras clave: crecimiento poblacional, modelo de Ramsey.

Abstract

Optimum economic growth and population growth: a better Ramsey model version

Usually standard economic growth theory assumes that population grows exponentially. This hypothesis is realistic only for an initial period, but it can not be valid indefinitely because, population growing exponentially can be arbitrarily large. In this paper we reformulate the Ramsey model of optimal economic growth by substituting the exponential population growth law by the logistic equation. We show that in this case the long run steady states values coincide with those of the original Ramsey model with zero population growth rate and we analyze the stability of the equilibrium.

Key words: population growth, Ramsey model.

Introducción

En el modelo de crecimiento óptimo de Ramsey (Ramsey, 1928; Cass, 1965, y Koopmans, 1965) la población L crece a una tasa constante $n > 0$. Esto implica que L crece exponencialmente y para cada condición inicial $L(0) = Lo$, el nivel de la población al tiempo t es $L(t) = Lo\, e^{nt}$. Este sencillo modelo exponencial representa fielmente el crecimiento poblacional solamente en el periodo inicial, pues creciendo exponencialmente la fuerza de trabajo crecería al infinito cuando el tiempo tiende al infinito, lo que claramente

* Los autores desean agradecer la ayuda financiera para la investigación otorgada por la Universidad de Bolzano proyecto *Multiregime Dynamics in Economics* y por el Conacyt proyecto número 42609; título *Modelado matemático del cambio en economía*.

es insostenible. El modelo exponencial no se ajusta a las reducciones en el crecimiento de la población debidas a la competencia por los recursos ambientales como comida y territorio. Ya en 1838, Verhulst sostuvo que una población estable debe llegar a un nivel de saturación característico, usualmente llamado capacidad de carga del ambiente, que define una cota superior del crecimiento. En los trabajos de Daily *et al.* (1992) y Arrow *et al.* (1995), el lector puede encontrar información detallada acerca del concepto de capacidad de carga de algunos métodos para calcular la capacidad de carga de la Tierra y aplicaciones en teoría del crecimiento económico. Con una población mundial de más de seis mil millones de personas, los expertos en crecimiento poblacional indican que hemos entrado en una zona donde se pueden ver claramente límites en la capacidad de carga del planeta (Day, 1996; Brown, 1984). Esto nos define el primer hecho estilizado del crecimiento de la población: la capacidad de carga del planeta define una cota superior del tamaño de la población que no puede ser superada.

Otra regularidad empírica en el crecimiento poblacional es que las tasas de crecimiento de la población han comenzado a disminuir notoriamente en las últimas décadas y sus valores son cercanos a cero. Incluso se han observado regiones del planeta con tasas de crecimiento de la población negativas durante largos periodos de tiempo.

Entre los años 2000 y 2005, la población mundial creció actualmente a razón de 1.31 por ciento, por año, cifra considerablemente más baja que 1.71 por ciento en los dos decenios previos. Las proyecciones de la variante media en materia de fecundidad efectuadas por las Naciones Unidas indican que la tasa de crecimiento de la población seguirá decreciendo hasta 0.3%, pronosticado para el quinqueño 2045-2050 (World Population Prospects, 2002). Esto nos define el segundo hecho estilizado del crecimiento de la población: la tasa de crecimiento de la población es decreciente y tiende a ser nula.

Estas observaciones determinan que una ley $L(t)$ de crecimiento de la población que sea acorde a las observaciones empíricas debe verificar las siguientes propiedades (Maynard, 1974):

1. La población es estrictamente creciente y acotada por la capacidad de carga del planeta L_∞:

$$L(0) = L_0 > 0;\ \dot{L}(t) > 0 \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty} L(t) = L_\infty$$

2. La tasa de crecimiento de la población $n(t)=\dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ decrece a 0:

$\dot{n}(t)<0$ para todo $t \geq 0$ y $\lim_{t\to+\infty} n(t) = 0$

Existen en la literatura muchos ejemplos de modelos de crecimiento poblacional que verifican estas propiedades básicas. El más conocido es la ley logística, introducida por Verhulst (1838) como una extensión del modelo exponencial (Schtickzelle, 1981). La ecuación logística también se conoce como ley de Verhulst-Pearl, toda vez que fue Pearl (1920) quien la popularizó, usándola para describir los datos del crecimiento de la población de Estados Unidos desde 1790 a 1920. En los trabajos de Leach (1981) y Coke (1986), el lector puede encontrar una revisión detallada acerca del modelo logístico y de su uso para describir la dinámica de poblaciones humanas.

La curva logística es la solución del problema:

$$\begin{cases} \dot{L}=aL-bL^2, a,b>0 \\ L(0)=L_0>0 \end{cases}$$

y entonces tenemos que:

$$L(t)=\frac{aL_0e^{at}}{a+bL_0\left(e^{at}-1\right)}$$

De aquí se observa que esta función verifica que $L(t)>0, \forall t \geq 0$ y $\lim_{t\to+\infty}$ $L(t) =$ L_∞. La tasa de crecimiento de la ecuación logística es:

$$n(t)=\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=\frac{a\left(a-bL_0\right)}{a-bL_0\left(e^{at}-1\right)}$$

que es una función de t decreciente a 0.

Más adelante introducimos el modelo clásico de Ramsey y posteriormente lo modificaremos, cambiando la función exponencial de crecimiento de la población por la ley logística. En ambos casos hacemos un análisis de los estados estacionarios del modelo. Finalmente, en la última sección presentamos algunas conclusiones y posibles extensiones del trabajo. Este trabajo se entiende como una continuación de los ejercicios precedentes: Mingari y Ritelli (2003), Brida y Limas (2005), Accinelli y Brida (2005), Brida *et al.* (2006) y Brida (2006), donde se hace un análisis del clásico modelo de crecimiento económico de Solow, que en el caso particular de la ley de crecimiento de la población es de tipo logístico y está representada por la ley de Bertalanffy o sigue la ecuación de Richards.

El modelo de Ramsey

Consideremos primeramente el modelo clásico de Ramsey en tiempo continuo, que es la base de gran parte de la literatura en crecimiento económico óptimo. Empezamos definiendo las variables que intervienen en el modelo. Denotamos mediante $Y = Y(t)$ el ingreso, $K(t)$ es el *stock* de capital, $C = C(t)$ es el consumo e $I = I(t)$ es la inversión, y suponemos que el ingreso se divide en consumo e inversión:

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

Y que la variación del *stock* de capital $\dot{K}(t)$ iguala la inversión menos la depreciación $\delta K(t)$:

$$\dot{K}(t) = I(t)-\delta K(t).$$

Si $L = L(t)$ es la fuerza de trabajo (identificada con la población), asumimos que crece a una tasa constante $n > 0$. En tiempo t continuo es natural definir esta tasa de crecimiento como:

$$n(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\partial L / \partial t}{L}$$

lo que implica que la fuerza de trabajo L crece exponencialmente y para cada condición inicial $L(0) = L$o , el nivel de la fuerza de trabajo al tiempo t es:

$$L(t) = L_0 e^{nt}$$

Si $y = (Y/L)$, $k = (K/L)$ y $c = (C/L)$ son el ingreso, capital y consumo per cápita, tenemos que:

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{C(t)}{L(t)} + \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \frac{\delta K(t)}{L(t)}$$

o sea:

$$y(t) = c(t) + \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta k(t)$$

Pero

$$\dot{k} = \frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - kn$$

y entonces:

$$y = c + \dot{k} + (n+\delta)k \qquad (1)$$

Supongamos que tenemos una función de producción en forma intensiva f que expresa el ingreso, y como función del capital k ($y = f(k)$), que verifica las propiedades usuales:

- $f(0) = 0$;
- $f'(k) > 0$, para todo $k > 0$
- $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$
- $\lim_{k\to 0^+} f'(k) = + \lim_{k\to\infty}$
- $f''(k) < 0$, para todo $k > 0$

Entonces, sustituyendo en (1), obtenemos:

$$\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c \qquad (2)$$

Supongamos que $u(c)$ denota la utilidad del consumo per cápita c y, como es usual, suponemos que $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$. Si denotamos mediante $k(0) = k$o y mediante $L(0) = L$o los valores iniciales en $t = 0$ del capital per cápita y la población, el problema a resolver es el de maximizar la utilidad (descontada por un factor ρ) sujeto a la ecuación (2); esto es:

$$\begin{cases} \max\limits_{c} \int_0^{+\infty} u(c)e^{-\rho t} \\ \dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c \\ k(0) = k_0 \\ 0 \leq c \leq f(k) \end{cases} \quad (3)$$

La solución óptima del problema

El principio de maximización de Pontriaguin permite la resolución del programa de optimización definido por (3). El hamiltoniano de este problema es:

$$H = u(c) + \lambda(f(k) - (n+\delta)k - c)$$

que tiene las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial c} = u'(c) - \lambda = 0 \\ \dot{\lambda} = -\lambda f'(k) + \lambda(n+\delta) + \rho\lambda \\ \dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c \end{cases}$$

Estas pueden ser expresadas como:

$$\begin{cases} u'(c) = \lambda \\ \dot{\lambda} = -\lambda f'(k) + \lambda(n+\delta+\rho) \\ \dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c \end{cases}$$

Los supuestos considerados en el modelo hacen que una solución del programa (3) lo sea si y sólo si es solución del sistema de ecuaciones definido por las condiciones de primer orden. Así como están expresadas, estas ecuaciones no son fáciles de interpretar y resolver. Es por esto que haremos algunas modificaciones para obtener un sistema de dos ecuaciones diferenciales en términos de la variable de estado *k* y de la variable de control *c*. Derivando la condición $u'(c) = \lambda$ respecto a *t*, tenemos que:

$$u''(c)\dot{c} = \dot{\lambda}$$

y por lo tanto es:

$$u''(c)\dot{c} = -\lambda\left[f'(k) - (n + \delta + \rho)\right]$$

y como $u'(c) = \lambda$ podemos expresarla como:

$$-\frac{u''(c)}{u'(c)}\dot{c} = f'(k) - (n + \delta + \rho)$$

Pero como $\sigma(c) = -(cu''(c)/u'(c))$ es la medida de adversión al riesgo relativo de Arrow-Pratt (ver Pratt, 1964), entonces es:

$$\dot{c} = \frac{[f'(k) - (n + \delta + \rho)]c}{\sigma(c)}$$

Entonces el modelo está representado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{c} = \dfrac{[f'(k) - (n + \delta + \rho)]c}{\sigma(c)} \\ \dot{k} = f(k) - (n + \delta)k - c \end{cases}$$

Los equilibrios (o estado estacionario) del sistema son las soluciones de:

$$\begin{cases} \dot{c} = 0 \\ \dot{k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [f'(k) - (n + \delta + \rho)]c = 0 \\ f(k) - (n + \delta)k - c = 0 \end{cases}$$

Los valores de *c* y *k* que se obtengan como solución de las ecuaciones anteriores representan el estado estacionario, es decir, un estado en el que el consumo percápita y el capital percápita se mantendrán constantes. Excluyendo las soluciones triviales que se obtienen de considerar $c = 0$ o $k = 0$, se deduce que el modelo tiene como equilibrio la pareja $(\hat{c}, \hat{k})$ que verifica

$$\begin{cases} f'(\hat{k}) = n + \delta + \rho \\ \hat{c} = f(\hat{k}) - (n+\delta)\hat{k} \end{cases}$$

Sabemos que *f* ’ (*k*) > 0 y *f* ’’ (*k*) < 0, para todo *k* > 0 y esto implica que *c* y *k* son funciones decrecientes de *n*; esto es, cuanto más grande es la tasa de crecimiento de la población, menor es el consumo y el capital per cápita de equilibrio y los máximos valores se obtienen para *n* = 0.

Estabilidad de la solución

Para estudiar la estabilidad del modelo, podemos utilizar la linearización de la función:

$$F(c,k) = \left(\frac{[f'(k) - (n+\delta+\rho)]c}{\sigma(c)},\ f(k) - (n+\delta)k - c \right)$$

en el punto de equilibrio . La matriz Jacobiana de la aproximación lineal es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{f''(\hat{k})\hat{c}}{\sigma(\hat{c})} \\ -1 & \rho \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico de esta matriz es:

$$X^2 - \rho X + \frac{f''(\hat{k})\hat{c}}{\sigma(\hat{c})}$$

que, siendo ρ > 0 y $\frac{f''(\hat{k})\hat{c}}{\sigma(\hat{c})} < 0$, tiene dos raíces reales: una positiva y la otra negativa. Esto implica que el estado estacionario $(\hat{c}, \hat{k})$ es un punto de silla y, por lo tanto, un equilibrio inestable. Por lo tanto, sólo para determinado tipo de condiciones iniciales en el capital y en el consumo (las que se ubiquen sobre el camino de ensilladura) podrán las trayectorias óptimas alcanzar el estado estacionario.

El modelo de Ramsey con ley logística de crecimiento de la población

En lo que sigue vamos a modificar el modelo de la sección anterior cambiando la ley de crecimiento exponencial de la población:

$$\begin{cases} \dot{L} = nL; n > 0 \\ L(0) = L_0 > 0 \end{cases}$$

mediante la ley logística:

$$\begin{cases} \dot{L} = aL - bL^2, a, b > 0 \\ L(0) = L_0 > 0 \end{cases} \tag{4}$$

y manteniendo inalteradas las demás componentes del modelo. En este caso es:

$$n(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\partial L / \partial t}{L} = a - bL$$

y entonces ahora el problema a resolver es el de maximizar la utilidad (descontada por un factor ρ) sujeto a las ecuaciónes (2) y (4); i.e.:

$$\begin{cases} \max\limits_{c} \int_0^{+\infty} u(c) e^{-\rho t} \\ \dot{k} = f(k) - (a - bL + \delta) k - c \\ \dot{L} = aL - bL^2 \\ k(0) = k_0; L(0) = L_0 \\ 0 \leq c \leq f(k) \end{cases} \tag{5}$$

El hamiltoniano de este problema se puede expresar como:

$$H = u(c) + \lambda(f(k) - (a - bL + \delta)k - c) + \mu(aL - bL^2)$$

que tiene las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial c} = u'(c) - \lambda = 0 \\ \dot{\lambda} = -\lambda f'(k) + \lambda(a - bL + \delta) + \rho\lambda \\ \dot{k} = f(k) - (a - bL + \delta)k - c \\ \dot{L} = aL - bL^2 \end{cases}$$

Usando como en la sección anterior que $u'(c) = \lambda$ y que $u''(c) = \lambda$ tenemos que:

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}\left[f'(k) - (a - bL + \delta + \rho)\right]$$

Sustituyendo ó(c) = -($cu''(c)/u'(c)$) en la ecuación anterior obtenemos:

$$\dot{c} = \frac{c}{\sigma(c)}\left[f'(k) - (a - bL + \delta + \rho)\right]$$

Entonces el modelo está representado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{c} = \dfrac{[f'(k) - (a - bL + \delta + \rho)]c}{\sigma(c)} \\ \dot{k} = f(k) - (a - bL + \delta)k - c \\ \dot{L} = aL - bL^2 \end{cases} \qquad (6)$$

Los equilibrios del modelo son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \dot{c} = 0 \\ \dot{k} = 0 \\ \dot{L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{[f'(k) - \left(a - bL + \delta + \rho\right)]c}{\sigma(c)} = 0 \\ f(k) - (a - bL + \delta)k - c = 0 \\ aL - bL^2 = 0 \end{cases}$$

Excluyendo las soluciones triviales que se obtienen de considerar $c = 0$, $k = 0$ o $L = 0$, tenemos que el modelo tiene como equilibrio la terna que verifica:

$$\begin{cases} \hat{c} = f(\hat{k}) - \delta\hat{k} \\ f'(\hat{k}) = \delta + \rho \\ \hat{L} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Obsérvese que los valores de equilibrio de capital y consumo $(\hat{k}, \hat{c})$ para el estado estacionario de este modelo no dependen ni de la tasa de crecimiento de la población ni de los coeficientes de la ley logística, y coinciden con los valores de equilibrios del modelo de Ramsey clásico con tasa de crecimiento $n = 0$. De esto se deduce que los valores de equilibrio del modelo con ley logística son mayores que los valores del modelo clásico. Podemos entonces inferir que en un cierto sentido el modelo de Ramsey con crecimiento logístico de la población mejora el modelo clásico.

Para estudiar la estabilidad del equilibrio aproximamos linealmente la función:

$$G(c,k,L) = \left(\frac{[f'(k) - \left(a - bL + \delta + \rho\right)]c}{\sigma(c)},\ f(k) - (a - bL + \delta)k - c, aL - bL^2 \right)$$

alrededor de este punto. La matriz jacobiana de la aproximación lineal es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{f''(\hat{k})\hat{c}}{\sigma(\hat{c})} & \dfrac{b\hat{L}\hat{c}}{\sigma(\hat{c})} \\ -1 & \rho & b\hat{k} \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico de esta matriz es:

$$-\left(X^2 - \rho X + \frac{f''(\hat{k})\hat{c}}{\sigma(\hat{c})} \right)(X + a)$$

que, siendo $\rho > 0$ y $\dfrac{f''(\hat{k})\hat{c}}{\sigma(\hat{c})} < 0$, tiene tres raíces reales: una positiva y la dos negativas. Esto implica que el estado estacionario $(\hat{c}, \hat{k}, \hat{L})$ es un punto de silla y por lo tanto un equilibrio inestable.

Conclusiones

En teoría del crecimiento económico se asume normalmente que el crecimiento de la población es exponencial, lo que es claramente poco real. Una hipótesis más real es suponer que la población sigue la ley de crecimiento logístico y en este trabajo hemos asumido esto. Luego, hemos demostrado que el modelo con ley logística tiene un único equilibrio (no trivial) que es inestable, como en el caso del modelo con ley exponencial. Además, el equilibrio del modelo modificado no depende de la tasa de crecimiento de la población ni de ninguno de los parámetros de la ley logística, y sus valores de consumo y capital per cápita son mayores que los del modelo clásico, cualquiera sea la tasa constante $n > 0$ de crecimiento de la población. En este sentido, podemo decir que el modelo que presentamos en este trabajo mejora los resultados del modelo original.

En el equilibrio del modelo clásico, el consumo y la producción agregados (C y K) tienden a infinito cuando t crece, pues c y k son positivos y la población crece exponencialmente al infinito. Esta situación irreal tambien se mejora en el modelo con población logística, ya que en su equilibrio $(\hat{c}, \hat{k})$, el consumo y la producción agregados tienden a los valores finitos $\hat{L}\hat{c}$ y $\hat{L}\hat{k}$. En ambos modelos el equilibrio es inestable, por lo que en definitiva será un planificador central el responsable de ubicar a la economía en el camino de ensilladura, el único que lleva al estado estacionario.

En las demostraciones presentadas en este trabajo podemos sustituir la ecuación logística con cualquier ecuación diferencial autónoma en la variable L que tenga soluciones que verifican las condiciones pedidas. Por lo tanto, el resultado vale, por ejemplo, cuando se toman como ley de crecimiento poblacional las ecuaciones de Richards (1959), Bertalanffy (1938) o Gompertz (1825). Una posible extensión de este trabajo podría ser la demostración de que el resultado obtenido es genérico; esto es, modificar el modelo de Ramsey sustituyendo la ley exponencial de crecimiento de la población con una ley cualquiera L(t) que verifique las siguientes propiedades:

- la población es estrictamente creciente y acotada por la capacidad de carga del planeta L_∞: $L(0) = L_o > 0$; $L(t) > 0$, para todo $t \geq 0$ *y* $\lim_{t\to+\infty} L(t) = L_o$
- la tasa de crecimiento de la población $n(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ decrece a 0: $\dot{n}(t) < 0$ para todo $t \geq 0$ y $\lim_{t\to+\infty} n(t) = 0$

La conjetura es que se podría obtener un resultado similar al obtenido para el modelo de Solow en Brida (2006). Otra posible extensión del presente trabajo sería la búsqueda de la solución del sistema de ecuaciones (5) en forma cerrada. Para esto habría que hacer algunas hipótesis acerca de la forma de las funciones $f(k)$ y $\sigma(c)$.

Bibliografía

ACCINELLI, E. and J.G. Brida, 2005, "Reformulation of the Solow economic growth model whit the Richards population growth law", presentado en la Conferencia de Comercio, Desarrollo y Ambiente, noviembre, Universidad de Skövde, Suecia. En prensa.

ARROW, K., B. Bolin, R. Costanza, P. Dasgupta, C. Folke, C. S. Holling, B.O. Jansson, S. Levin, K.G. MŠler, C. Perrings and D. Pimentel, 1995, "Economic growth, carrying capacity and the environment", en *Science*, 268.

BERTALANFFY, L. von, A, 1938, "Quantitative theory of organic growth, Inquiries on growth laws" II, en *Human Biology* 10.

BRIDA, J.G., 2006, "Población y crecimiento económico: una versión mejorada del modelo de Solow", trabajo presentado en las *VI Jornadas Latinoamericanas de Teoría Económica*, San Luis Potosí, aceptado para su publicación en *El Trimestre Económico*, México.

BRIDA, J.G., E.J. Limas Maldonado, 2005, "Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model", en *Avances*, 77, UACJ.

BRIDA, J.G., G. Mingari Scarpello y D. Ritelli, 2006, "The Solow model with logistic manpower: a stability analysis, to appear", en *Journal of World Economics Review*.

BROWN, L.R., 1984, "Stabilizing population", en *State of the world 1984*, Nueva York.

CASS, D., 1965, "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation", en *Review of Economic Studies* 32.

COKE, K.L. and M. Witten, 1986, "One dimensional linear and logistic harvesting models", en *Mathematical Modelling*, 7.

DAILY, G.C. and P.R. Ehrlich, 1992, "Population, sustainability, and earth's carrying capacity: a framework for estimating population sizes and lifestyles that could be sustained without undermining future generations", en *BioScience*, 42.

DAY, J.C., 1996, *Population projections of the United States by age, sex, race, and hispanic origin: 1995 to 2050*, U. S. Bureau of the Census, Current Population Reports, U.S. Government Printing Office, Washington D.C.

GOMPERTZ, B., 1825, "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies", *Philosophical Transactions* of the Royal Society of London, vol. 115.

KOOPMANS, T.C., 1965, *On the concept of optimal economic growth*, The Econometric Approach to Development Planning, North-Holland, Amsterdam.

LEACH, D., 1981, "Revaluation of the logistic curve for human populations", en *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, General, vol. 144, núm. 1.

MAYNARD Smith, J., 1974, *Models in Ecology*, Cambridge University Press, Cambridge.

MINGARI Scarpello, G. and D. Ritelli, 2003, "The Solow model improved through the logistic manpower growth law", en *Annali Università di Ferrara*, Sez VII -Sc. Mat. 73.

PEARL, R. and Reed. L. J., 1920, "On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation", en *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 6.

PRATT, J.W., 1964, "Risk aversion in the small and in the large", en *Econometrica*, 32.

RAMSEY, F.P., 1928, "A mathematical theory of saving", en *Economic Journal*, vol. 38.

RICHARDS, F.J., 1959, "A flexible growth function for empirical use", en *J. Exp. Botany*, 10.

SCHTICKZELLE, M., Pierre-François Verhulst 1804-1849, 1981, "La première découverte de la function logistique", en *Population*, vol. 3.

VERHULST, P. F., 1838, "Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement", en *Corresp. Math. Phys.*, 10.

WORLD POPULATION PROSPECTS, 2002, *Nations publication*, vol. I, II and III United Sales núm. E.03.XIII.6, 7 and 8.