Las matemáticas limpian el agua

*Ana Elena Narro Ramírez**
*Alfonso García Gutiérrez***

Resumen

En la ciudad de León es preocupante el problema del agua que es contaminada, principalmente, por curtidores de piel, fabricantes de calzado y agroindustriales. Por ley, las autoridades ambientales han presionado a cada infractor para que disminuya su contaminación, pero el esfuerzo ha resultado inútil. El objetivo de este trabajo es demostrar que este problema tiene solución. Para encontrarla se construye un programa no lineal dinámico que a partir de los procesos tradicionalmente utilizados en la limpieza proporciona como solución una estrategia innovadora de costo moderado que se prorratea entre los infractores usando jerarquización analítica.

Palabras clave: limpieza agua contaminada, programación no lineal-dinámica, jerarquización analítica, matemáticas aplicadas, optimización de recursos.

Abstract

Leon city has a growing concern about the problem of water, which is polluted mainly by the tannery industries, shoe manufacturers and agroindustries. By law, environmental authorities have asked each polluter to abate pollution, but the task has gone to no avail. The purpose of this paper is to prove that the problem has a solution. To find it, it was built a non-linear-dynamic program starting from the traditionally used treatment processes to clean the waste currents as a solution for a new strategy for a lower cost which shares among the emitters using analytical ranking.

Key words: water pollution abatement, non-linear-dynamic program, analytical ranking, applied mathematics, resourse optimization.

Artículo recibido el 05-01-09

Artículo aceptado el 12-05-09

* Profesora-investigadora adscrita al Departamento de Política y Cultura, Universidad Autónoma Metropolitana-Xochimilco. Correo electrónico: anarro@correo.xoc.uam.mx.

** Profesor adscrito a Ingeniería Ambiental en la División de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. Correo electrónico: alfonsogarcia48@yahoo.com.mx.

INTRODUCCIÓN

En la ciudad de León, Guanajuato, la principal actividad industrial está en manos de 15 mil curtidores de piel, 3 mil fabricantes de calzado y 2 mil agroindustriales, todos ellos contribuyen en la contaminación del agua. Esta situación, aunque es añeja, no ha dejado de ser preocupante. Recientemente el director local de Conagua planteó el panorama de la problemática en los acuíferos, subrayando la peligrosidad de esta circunstancia.[1] Asimismo lo hizo el presidente de la Asociación de Grupos Ecologistas de León, Carlos Chacón Calderón, quien externó su preocupación sobre el tema: "El problema de León es que no hay agua, se han abatido los mantos freáticos y los arroyos están gravemente contaminados por las descargas de químicos de la industria del cuero y el calzado, así que en León no hay agua, y la que hay está contaminada y no sirve para nada".[2]

Los contaminantes más perniciosos son:[3]

- Sólidos en suspensión, que propician inundaciones.
- Grasas y aceites, que conducen a la muerte de plantas y animales por agotamiento del oxígeno disuelto indispensable para la vida en el agua.
- Sustancias activas y tóxicas, que contaminan alimentos y con ello favorecen enfermedades y la muerte de los habitantes que los consumen.

"En los últimos años se han duplicado las concentraciones de estos contaminantes".[4]

[1] Rosa Balderas, "Contaminado el 60% de las aguas superficiales", *La Jornada*, México, febrero de 2008.

[2] Diego Rodríguez Martín, "Sin agua León, Guanajuato", *La Jornada*, México, febrero de 2008.

[3] R. Balderas, *idem.*

[4] *Idem.*

La industria de la curtiduría contamina con 42.75 toneladas/día de las cuales 86.5% son sólidos en suspensión, 12% son grasas y aceites y 1.5% son sustancias activas y tóxicas. Los fabricantes de calzado contribuyen con 3.65 toneladas/día de desechos compuestos por 55% de sólidos suspendidos, 4% de grasas y aceites y 41% de sustancias activas y tóxicos, y los agroindustriales arrojan 21.25 toneladas/día de basura con 94% de sólidos, 1% de grasas y aceites y 5% de tóxicos y sustancias activas.[5]

La norma ambiental mexicana exige que no se rebasen los siguientes límites:[6]

- Sólidos en suspensión: 100 gramos/día.
- Grasas y aceites: 100 gramos/día.
- Sustancias activas y tóxicas: 50 gramos/día.

Es trascendental respetar esta norma ambiental. Se ha presionado a cada infractor personalmente para que disminuya su contaminación o trate sus residuos antes de incorporarlos al agua: "La Ley Nacional de Aguas establece en su artículo séptimo que las personas físicas o morales, incluyendo dependencias de gobierno, que exploten, usen o aprovechen aguas nacionales, serán responsables de realizar las medidas necesarias para prevenir su contaminación o reintegrarlas para su nuevo uso", "quién ensucie el agua la debe tratar".[7] Sin embargo, han aparecido grandes obstáculos para avanzar en esta acción: la inversión se considera inaccesible, la tecnología insuficiente, además, la situación económica es difícil, por estas razones se requiere disminuir la contaminación con el menor gasto posible.

El objetivo de este trabajo es demostrar que este problema tiene solución con la tecnología existente y a costo accesible. Para lograrlo se construye un programa no lineal que a partir de los procesos tradicionalmente utilizados para limpiar el agua arroja una solución que sugiere una estrategia de costo moderado y de fácil implementación.

[5] Los datos mencionados no son exactos, ni completos, debido a que proceden de un estudio realizado para una empresa particular que no autorizó su publicación. Fueron proporcionados por uno de los consultores involucrados: Alfonso García Gutiérrez, doctor en ingeniería ambiental de la UNAM.

[6] La norma no existía en el momento en que se realizó el estudio, el mismo consultor la propuso; no coincide con la aprobada actualmente, que incluye más elementos, pero con ella también funciona esta propuesta de solución. Los límites en la norma convierten el agua contaminada en agua tratada, útil para muchos usos y le disminuyen la peligrosidad, cada vez más evidente, mientras el problema no se resuelva.

[7] Angélica Casillas, "Agua tratada, inversión en fuga", *CORREO*, México, marzo de 2009.

Propuestas para resolver el problema:

- Organizar a los infractores en una especie de cooperativa.[8] Desde luego no se descarta la posibilidad de conseguir financiamiento de manera individual, pero posiblemente dicho financiamiento se otorgaría en mejores condiciones si se procurara colectivamente.
- Construir una planta con una o varias instalaciones para limpiar el agua.
- Diseñar un modelo matemático que auxilie en la decisión de seleccionar la mejor forma de operación.

Se parte de la utilización de tres alternativas tecnológicas recomendadas por los consultores:[9]

- Tanque sedimentador, para remover sólidos en suspensión.
- Tanque de lodos biológicos, para degradar los compuestos orgánicos.
- Filtro de carbón activado, para absorber compuestos orgánicos tóxicos disueltos.

Cada uno de estos procesos es insuficiente para remover, por sí solo, los contaminantes para cumplir con la legislación ambiental obligatoria, como se demuestra analíticamente más adelante, por esta razón se propone una combinación de las instalaciones.

El modelo matemático que se utiliza, dada la estructura del problema, es un programa no lineal. Para resolver este programa y obtener una solución inicial, al principio se suponen los costos fijos; en una segunda etapa, se calculan los costos, los cuales se modifican en función de los residuos presentes en el líquido cada vez que es tratado, usando para este cálculo un modelo dinámico. A continuación se altera el orden en el que se usan las distintas instalaciones para limpiar el agua, utilizando el orden "natural", y se comprueba que el orden sugerido por el modelo dinámico es el más barato.

Para repartir los gastos en forma equitativa, tomando en cuenta: cada tren de tratamiento, el tipo de contaminante tratado, su peligrosidad, la proporción de la contaminación causada; se utiliza la jerarquización analítica, que permite establecer el monto correspondiente a cada uno de los contribuyentes considerando no sólo los factores cuantitativos.

[8] J.D. Domínguez*, Dirección de operaciones*, México, McGraw-Hill, 1995, pp. 105-107.

[9] Howard Peavy S., Donald Rowe R. y George Tchobanoglous, *Enviromental Engineering*, Nueva York, McGraw-Hill International, 1985, pp. 63-204.

PROGRAMA NO LINEAL

Como se mencionó, las alternativas tecnológicas recomendadas para disminuir la contaminación en el agua, sus costos y su eficiencia son:

1. Establecimiento de un tanque sedimentador con una inversión inicial de $1.5 millones y costo de operación de 300 $/tonelada que logra remover 95% de los sólidos suspendidos, 85% de las grasas y aceites y 15% de las sustancias activas y tóxicas.
2. Un tanque de lodos biológicos que tiene un costo inicial de $7 millones y un costo de operación de 550 $/tonelada y con una eficiencia de remover 60% de los sólidos suspendidos, 90% de las grasas y aceites y 70% de las sustancias activas y tóxicas.
3. Un filtro de carbón activado con una inversión inicial de $5 millones y un costo de operación de 890 $/tonelada, que remueve 3% de los sólidos en suspensión, 30% de las grasas y aceites y 90% de las sustancias tóxicas y activas.

Las características descritas anteriormente se expresan en una forma matricial que permite leer los datos con mayor facilidad (cuadros 1 y 2).

CUADRO 1
Contribución de contaminación por área

Contaminantes	Curtiduría	Calzado	Agroindustria	Límites
Sólidos	37 ton	2 ton	20 ton	100 g/día
Grasas y aceites	5 ton	.15 ton	.25 ton	100 g/día
Tóxicos	.75 ton	1.5 ton	1 ton	50 g/día
Total	42.75 ton	3.65 ton	21.25 ton	

Cuadro 2
Opciones de reducción de contaminantes y costos correspondientes[10]

Contaminantes	Tanque sedimentador (rt)	Tanque de lodo (rl)	Filtro de carbón (rc)[11]
Sólidos[12]	95%	60%	3%
Grasas y aceites	85 %[13]	90%	30%
Tóxico[14]	15 %	70%	90%
Costo	300 $/ton	550 $/ton	890 $/ton

Un programa no lineal[15] es un modelo que consta de una función objetivo por minimizar (o maximizar) y las condiciones que es necesario satisfacer, al menos algunas de ellas expresadas mediante funciones no lineales; en este caso, el objetivo es minimizar el costo, y las restricciones son las concentraciones de los contaminantes cuyos límites establece el gobierno:

Minimizar el costo
Sujeto a

- Restricción gubernamental correspondiente a sólidos en suspensión.
- Restricción gubernamental correspondiente a grasa y aceite.
- Restricción gubernamental correspondiente a tóxicos.

Una región factible[16] es el conjunto de puntos que satisfacen las restricciones del modelo. Cualquier punto (a, b, c) en la región factible que satisfaga que $f(a, b, c) \leq f(x, y, z)$ para cualquier otro punto (x, y, z), en la misma región, es una solución óptima del problema correspondiente.

[10] Nelson Nemerow L., *Industrial Water Pollution. Origins, Characteristics, and Treatment,* Londres, Addison Wsley, 1997, pp. 305-309, 434-438.

[11] Las variables r_t, r_l y r_c representan la reducción de contaminantes lograda en cada una de las instalaciones respectivamente.

[12] Clair Sawyer N. y Perry Mc.Carty L., *Chemistry for Enviromental Engineering*, México, McGraw-Hill, 1987, pp. 271-330, 454-463.

[13] *Ibid.*, pp. 488-493.

[14] *Ibid.*, pp. 470-481.

[15] Mokhtar Bazara S., Hanif Sherai D. y M.C. Shettyu, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, Canadá, John Wiley & Sons, Inc., 1993, pp. 78-183.

[16] Wayne Winston L., *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos*, México, Thomson, 2007, pp. 610-679.

Si la función objetivo y las restricciones de un programa no lineal son funciones convexas, cualquier punto que satisface las condiciones de Kuhn-Tucker es una solución óptima.[17]

Una función es convexa en un conjunto si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en el conjunto se satisface que el valor de la función en cualquier punto intermedio $cx_1 + (1 - c)x_2$, (con c tal que está entre cero y uno, $0 \leq c \leq 1$), es menor que el valor intermedio correspondiente a los valores de la función:

$$f(cx_1 + (1 - c)x_2) \leq cf(x_1) + (1 - c)\, f(x_2)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker establecen que si un punto x* es solución óptima de un problema de minimización con restricciones de la forma:

$$Min\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
&g_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1\\
&g_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2\\
&\vdots\\
&g_m (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m\\
&x_i \geq 0 \; para \; i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

entonces existen tantos números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ como restricciones y tantos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ como variables, llamados multiplicadores, que satisfacen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} - \mu_j = 0 && para \quad j = 1, \ldots, n\\
&\lambda_i (b_i - g_i(x^*)) = 0 && para \quad i = 1, \ldots, m\\
&\left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\right] x_j^* = 0 && para \quad j = 1, \ldots, n\\
&\lambda_j \geq 0 && para \quad j = 1, \ldots, m\\
&\mu_j \geq 0 && para \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

[17] *Op. cit.*, Teorema 10, p. 673.

CONFIGURACIÓN DEL PROGRAMA NO LINEAL DE LIMPIEZA DEL AGUA

Si entran 67.65 toneladas de residuos al tanque sedimentador = 59 sol. + 5.4 grasas + 3.25 tóxicos, salen, de acuerdo con los datos sobre su eficiencia (Cuadro 2 segunda columna): 59(.05) + 5.4(.15) + 3.25(.85). Si se repite el proceso, el nuevo resultado es: [59(.05)](.05) + [5.4(.15)](.15) + [3.25(.85)](.85), es decir: $59(.05)^2 + 5.4(.15)^2 + 3.25(.85)^2$. Cuando se procesa *n* veces entonces se obtiene: $59(.05)^n + 5.4\,(.15)^n + 3.25(.85)^n$.

Para averiguar cuántas veces conviene repetir el proceso en el tanque sedimentador, separando por contaminante y usando las restricciones gubernamentales queda:

$$\begin{array}{lll} 59\ (.05)^{x} \leq .0001 & \text{(sólidos)} \\ 5.4\ (.15)^{x} \leq .0001 & \text{(grasas)} \\ 3.25\ (.85)^{x} \leq .00005 & \text{(tóxicos)} \end{array}$$

Si x_1 representa el número de veces que es necesario someter el agua contaminada al tratamiento en el tanque sedimentador, x_2 representa las veces que el agua contaminada se debe pasar por el tanque de lodo y x_3 son las veces que el agua se requiere filtrar a través del carbón, entonces la función de costo se estima igual a

$$300\ x_1 + 550\ x_2 + 890\ x_3 \text{ por cada tonelada,}$$

pero la cantidad inicial de contaminantes (que además se supone invariable) es de 68 toneladas, por lo que la función objetivo queda expresada como:

$$\text{Min } (300x_1 + 550x_2 + 890x_3)(68) = \text{Min } 20400x_1 + 37400x_2 + 60520x_3$$

Las restricciones son:

Para sólidos suspendidos se tiene que la cantidad que entra es 59 Ton; cuando pasa por el tanque sedimentador, como su eficiencia es de 95%, la cantidad que sale es sólo (.05)59 si se realiza la operación una vez, pero cuando ésta se repite x_1 veces, los sólidos que salen son entonces $(.05^{x1})\ 59$. Análogamente, al pasar por el tanque de lodo, cuya eficiencia es de 60%, sale el 40% de lo que entra cada vez, cuando entra x_2 veces sale $(.4^{x2})$ de lo que entró, esto es, $(.4^{x2})\ [(.05^{x1})\ 59]$. Si lo que queda se pasa ahora por el filtro de carbón, cuya eficiencia es de 3%, entonces lo que sale es (.97) de lo que entró por cada operación, cuando la operación se repite x_3 veces, lo que sale es entonces $(.97^{x3})$ de lo que entra, esto es, $(.97^{x3})$ $[(.4^{x2})$ $(.05^{x1})$ $59]$. Se pretende que el resultado final de estas operaciones satisfaga el límite gubernamental, es decir, sea $\leq .0001$ Ton., lo que se expresa como:

$$59(.05^{x1})\ (.4^{x2})\ (.97^{x3}) \leq .0001$$

Para grasas y aceites, con el mismo razonamiento se tiene que la cantidad inicial es de 5.75 toneladas, que se convierten en $(.15^{x1})$ 5.75 al pasar x_1 veces por el tanque sedimentador, si esto pasa al tanque de lodo x_2 veces, se reduce a $(.1^{x2})[(.15^{x1})\ 5.75]$ y si lo que queda se trata en el filtro de carbón x_3 veces, se disminuye a $(.7^{x3})[(.1^{x2})(\ (.15^{x1})\ 5.75\ )]$ lo que se pretende que satisfaga el límite gubernamental en toneladas, lo que queda:

$$5.75(.15^{x1})\ (.1^{x2})\ (.7^{x3}) \leq .0001$$

Análogamente, para tóxicos, la cantidad inicial de 3.25 Ton. se reduce $(.85^{x1})$ 3.25 después de ser tratada en el tanque sedimentador x_1 veces, y queda $(.3^{x2})[(.85^{x1})\ 3.25]$, si se somete al tanque de lodo x_2 veces, se convierte en $(.1^{x3})[(.3^{x2})\ ((.85^{x1})\ 3.25)]$, cuando pasa x_3 veces por el filtro de carbón, lo que para satisfacer el límite gubernamental en toneladas debe ser $\leq .00005$, es decir:

$$3.25(.85^{x1})\ (.3^{x2})\ (.1^{x3}) \leq .00005$$

Añadiendo la no negatividad $\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Entonces el programa queda:

$$\text{Min } 20400x_1 + 37400x_2 + 60520x_3$$

Sujeto a

$$59(.05^{x1})\ (.4^{x2})\ (.97^{x3}) \leq .0001$$
$$5.75(.15^{x1})\ (.1^{x2})\ (.7^{x3}) \leq .0001$$
$$3.25(.85^{x1})\ (.3^{x2})\ (.1^{x3}) \leq .00005$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La función objetivo es una función lineal por lo que obviamente es convexa, las funciones de restricción son producto de funciones potencia con base menor que la unidad, por lo que también resultan convexas, esto puede probarse directamente acudiendo a la definición. Entonces para encontrar una solución del programa no lineal basta con resolver el sistema generado por las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$20400–176.748\ .05^{X1}.4^{X2}\ .97^{X3}\ \lambda_1–10.9084\ .15^{x1}.1^{x2}\ .7^{x3}\lambda_2 – .528187\ .85^{x1}\ .3^{x2}\ .1^{x3}\ \lambda_3 – \mu_1= 0$$

$$37400–54.0612\ .05^{X1}.4^{X2}\ .97^{X3}\ \lambda_1–13.2399\ .15^{x1}.1^{x2}\ .7^{x3}\lambda_2 –2.1291\ .85^{x1}\ .3^{x2}\ .1^{x3}\ \lambda_3–\mu_2=0$$

$$60520–1.79709\ .05^{X1}.4^{X2}\ .97^{X3}\ \lambda_1–2.05088\ .15^{x1}.1^{x2}\ .7^{x3}\lambda_2 –7.4834\ .85^{x1}\ .3^{x2}\ .1^{x3}\ \lambda_3 – \mu_3 = 0$$

$$\lambda_1[.0001 – 59(.05^{x1})\ (.4^{x2})\ (.97^{x3})] = 0$$

$$\lambda_2[.0001 – 5.75(.15^{x1})\ (.1^{x2})\ (.7^{x3})] = 0$$

$$\lambda_3[.00005– 3.25(.85^{x1})\ (.3^{x2})\ (.1^{x3})] = 0$$

$$[20400–176.748\ .05^{X1}.4^{X2}\ .97^{X3}\ \lambda_1–10.9084\ .15^{X1}.1^{X2}\ .7^{X3}\lambda_2 – .528187\ .85^{x1}\ .3^{x2}\ .1^{x3}\ \lambda_3]\ x_1= 0$$

$$[37400–54.0612\ .05^{X1}.4^{X2}\ .97^{X3}\ \lambda_1–13.2399\ .15^{X1}.1^{X2}\ .7^{X3}\lambda_2 –2.1291\ .85^{x1}\ .3^{x2}\ .1^{x3}\ \lambda_3]x_2 = 0$$

$$[60520–1.79709\ .05^{X1}.4^{X2}\ .97^{X3}\ \lambda_1–2.05088\ .15^{X1}.1^{X2}\ .7^{X3}\lambda_2 –7.4834\ .85^{x1}\ .3^{x2}\ .1^{x3}\ \lambda_3]\ x_3 = 0$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \geq 0$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se recurre al apoyo de un paquete computacional, hay paquetes que resuelven tanto este sistema como que directamente encuentran la solución del programa no lineal, uno de ellos, que es que se utiliza en este trabajo, es el paquete MATHEMATICA y basta con teclear la instrucción “Solve” y el sistema por solucionar, o bien “Minimize” seguida del programa no lineal para tener la repuesta correspondiente.

Pero antes de abocarse a resolver el programa que incluye los tres procesos en la misma planta se prueba si basta con usar solamente uno de ellos, se intenta con cada uno por separado resolviendo el programa correspondiente.

Tanque de lodos biológicos

Cuando se usa sólo el tanque de lodos el programa correspondiente queda:

$$\text{Min } 550(68)x_2 = \text{Min } 37\ 400\ x_2$$

Sujeto a

$$59\ (.4^{x2}) \leq .0001$$

$$5.75(.1^{x2}) \leq .0001$$

$$3.25\ (.3^{x2}) \leq .00005$$

$$x_2 \geq 0$$

El resultado es $x_2 = 15$, se requieren 15 iteraciones. No es demasiado pero es mejor comparar este resultado con los correspondientes a otras opciones.

Filtro de carbón activado

Cuando se usa solamente el filtro de carbón el programa no lineal queda:

$$\text{Min } (890x_3)(68) = \text{Min } 60\,520\ x_3$$

Sujeto a

$$59\ (.97^{x3}) \leq .0001$$
$$5.75\ (.7^{x3}) \leq .0001$$
$$3.25\ (.1^{x3}) \leq .00$$
$$x_3 \geq 0$$

La solución es $x_3 = 437$, lo que significa que para lograr la concentración de contaminantes deseada se requiere repetir el proceso 437 veces, el tiempo requerido hace poco viable este proceso.

Tanque sedimentador

Cuando sólo se recurre al tanque sedimentador el programa no lineal queda:

$$\text{Min } (300x_1)(68) = \text{Min } 20\,400\ x_1$$

Sujeto a

$$59(.05^{x1}) \leq .0001$$
$$5.75(.15^{x1}) \leq .0001$$
$$3.25(.85^{x1}) \leq .00005$$
$$x_1 \geq 0$$

cuya solución es $x_1 = 69$, lo que significa que para lograr la concentración de contaminantes buscada es necesario repetir el proceso 69 veces; también en este caso es importante tomar en cuenta que el tiempo que se requiere para repetir 69 veces el proceso hace que la solución propuesta se considere poco factible.

A continuación, se analiza el caso de combinar los tres procesos, para el que se resuelve el programa no lineal construido previamente:

$$\text{Min } 20\,400x_1 + 37\,400x_2 + 60\,520x_3$$

Sujeto a

$$59(.05^{x1})\,(.4^{x2})\,(.97^{x3}) \leq .0001$$
$$5.75(.15^{x1})\,(.1^{x2})\,(.7^{x3}) \leq .0001$$
$$3.25(.85^{x1})\,(.3^{x2})\,(.1^{x3}) \leq .00005$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

cuya solución, obtenida con el paquete MATHEMATICA, es $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, logrando reducir la contaminación a:

sólidos suspendidos	.00000652903	< .0001ton.,
aceites y grasas	.0000098456	< .0001ton.
tóxicos	.0000432613	< .00005 ton.,

después de sólo 10 tratamientos.

PROGRAMA LINEAL EQUIVALENTE

Como es sabido, la solución de un programa no lineal no es exacta, es aproximada y se llega a ella mediante el empleo de métodos de búsqueda. En cambio, cuando lo que se trata de resolver es un programa lineal existen métodos exactos, como el algoritmo SIMPLEX que conduce a la solución óptima, cuando ésta existe. Buscando mejorar la solución ya encontrada y que el método usado sea más comprensible, en vista de que el uso de la programación lineal está más difundido, se procede a transformar el programa no lineal en un programa lineal para encontrar la solución que éste arroja y compararla con la ya encontrada. El problema planteado como un programa no lineal puede convertirse en un programa lineal a través del uso de la función Algoritmo Natural, por las propiedades emanadas de su definición. La función objetivo ya es por sí misma lineal, entonces se mantiene igual. Las restricciones se transforman de la siguiente manera:

$$\text{Min } (300x_1 + 550x_2 + 890x_3)(68)$$

Sujeto a

$$\text{Ln}(59(.05^{x1})\ (.4^{x2})\ (.97^{x3})) \leq \text{Ln}(\ .0001) = -9.2103404$$

Que equivale a

$$\text{Ln}(59) + \text{Ln}(.05^{x1}) + \text{Ln}(.4^{x2}) + \text{Ln}(.97^{x3})) \leq\ -9.2103404$$

Que se convierte en

$$4.0775374 + x_1\ \text{Ln}(.05) + x_2\,\text{Ln}(.4) + x_3\,\text{Ln}(.97) \leq\ -9.2103404$$

Esto es :

$$-2.9957323\ x_1\ -\ .9162907\ x_2\ -\ .0304592\ x_3 \leq\ -13.287878$$

Que corresponde a :

$$2.9957323\ x_1\ +\ .9162907\ x_2\ +\ .0304592\ x_3\ \geq\ 13.287877$$

En forma análoga

$$5.75(.15^{x1})\ (.1^{x2})\ (.7^{x3}) \leq .0001$$

$$\text{Ln}(\ 5.75(.15^{x1})\ (.1^{x2})\ (.7^{x3}))) \leq \text{Ln}(\ .0001) = -9.2103404$$

Que equivale a

$$\text{Ln}(5.75) + \text{Ln}(.15^{x1}) + \text{Ln}(.1^{x2}) + \text{Ln}(.7^{x3})) \leq\ -9.2103404$$

Que se convierte en

$$1.7491999 + x_1\ \text{Ln}(.15) + x_2\,\text{Ln}(.1) + x_3\,\text{Ln}(.7) \leq\ -9.2103404$$

Esto es:

$$-1.89712\ x_1\ - 2.3025851\ x_2\ -\ .3566749\ x_3 \leq\ -10.95954$$

Que corresponde a:

$$1.89712\ x_1 + 2.3025851\ x_2 + .3566749\ x_3 \geq 10.95954$$

La última restricción se convierte en

$$Ln(\ 3.25(.85^{x1})\ (.3^{x2})\ (.1^{x3}))) \leq Ln(\ .00005) = -9.9034876$$

Que equivale a

$$Ln(\ 3.25) + Ln(.85^{x1}) + Ln(.3^{x2}) + Ln(.1^{x3}) \leq -9.9034876$$

Que evaluando la función logaritmo natural queda

$$1.178655 - .1625189\ x_1 - 1.2039728\ x_2 - 2.3025851x_3 \leq -9.9034876$$

Esto es,

$$- .1625189\ x_1 - 1.2039728\ x_2 - 2.3025851x_3 \leq -11.0821426$$

O bién :

$$.1625189\ x_1 + 1.2039728\ x_2 + 2.3025851x_3 \geq 11.0821426$$

Con lo que el problema lineal queda:

$$\text{Min } (300x_1 + 550x_2+890x_3)(68)$$

Sujeto a

$$\begin{array}{ll} 2.9957323\ x_1 + .9162907\ x_2 + .0304592\ x_3 & \geq 13.287877 \\ 1.89712\ x_1 + 2.3025851\ x_2 + .3566749\ x_3 & \geq 10.95954 \\ .1625189\ x_1 + 1.2039728\ x_2 + 2.3025851x_3 & \geq 11.082147 \\ x_1 , x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

cuya solución, obtenida de la misma manera en la que se resuelve el programa no lineal, esto es, con apoyo del paquete computacional MATHEMATICA, es: $x_1 = 4.59124$, $x_2 = 0.660237$, $x_3 = 4.17187$, pero las características del problema no permiten manejar valores fraccionarios, lo que se requiere es un programa entero, pero éste utiliza, de la misma manera que el programa no lineal, métodos de búsqueda. Si la solución del programa lineal se redondea, se obtiene

$x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, la misma solución que arroja el programa no lineal, es decir, no se logró ningún avance.

Como ya se mencionó, la ecuación de costo que se manejó, tanto en el programa no lineal como en el lineal, no toma en cuenta la variación en el volumen de contaminantes después de cada tratamiento, esta variación impacta directamente al costo correspondiente, por lo que es indispensable considerarla; a continuación se procede a hacer dicho cálculo usando un modelo dinámico.

MODELO DINÁMICO

La programación dinámica[18] es una técnica matemática útil en la toma de una serie de decisiones interrelacionadas. Proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación óptima de decisiones, y se basa en la partición de un problema grande en varios pequeños que requieren una sola decisión cada uno, donde lo importante es que la decisión en cada problema pequeño no sólo lo considera a él, sino al conjunto de problemas pequeños ya resueltos antes de llegar a él.

Las características de los problemas que pueden resolverse con esta técnica son:

- El problema se puede dividir en etapas que requieren una política de decisión en cada una de ellas.
- Cada etapa tiene cierto número de estados asociados con su inicio, son las condiciones posibles en las que se puede encontrar el sistema en cada etapa.
- En cada etapa se toma una decisión que optimiza no sólo la etapa, sino la parte ya analizada del problema.
- El efecto de la política de decisión en cada etapa es transformar el estado actual en un estado asociado en la siguiente etapa. Existe una función de transición que establece las reglas para esta transformación.
- El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una política óptima para el problema completo, los resultados se van guardando en los valores de una función recursiva.

[18] Frederick Hillier S. y Gerald Lieberman J., *Introducción a la investigación de operaciones*, México, McGraw-Hill, 2004, pp. 424-452.

Estos elementos en el problema por resolver corresponden a:[19]

- Las etapas son los tratamientos a los que es necesario someter el agua, tanque sedimentador (d), tanque de lodos (l), filtro de carbón (c), en 10 ocasiones.
- Los estados son la cantidad de contaminantes en el agua, obtenidos a partir de la tabla de reducción de contaminantes: $c_i = (s_i, a_i, t_i)$,[20] uno en cada etapa una vez tomada la decisión.
- Decisión p, en cada etapa se elige uno de los procesos: d = tanque sedimentador, l = tanque lodo o c = filtro carbón.
- La ecuación de transición:

Estado en etapa i, con decisión p es $c_i = (s_i, a_i, t_i) = (s_{i-1}, a_{i-1}, t_{i-1}) - (r_p(s), r_p(a)\ , r_p(t)\ )$[21]

- Función recursiva, costo $J_i(c_i) = \text{Min}_p\ \{300, 550, 890\}\ (c_i) + J_{i-1}(c_{i-1})$[22]}

SOLUCIÓN

Etapa 1

$$c_0 = (59, 5.4, 3.25) \text{ cantidad inicial de contaminantes} \sim 59 + 5.4 + 3.25 = 67.65$$

$$J_1(c_0) = \text{Min}_p\ \{300, 550, 890\}\ (c_0)\ \}= 300\ (67.65) = 20295$$

Etapa 2

$$c_1 = (59(.05), 5.4(\ .15), 3.25(.85)) = (2.95, .81, 2.7625) \sim 2.95 + .81 + 2.7625 = 6.5265$$

$$J_2(c_1) = \text{Min}_p\ \{300,550, 890\}(6.5265) + 20295 = 22251.80$$

[19] H.A Taha, *Investigación de operaciones. Una introducción*, México, Prentice Hall, 1998, pp. 409-413.

[20] (Sólidos, grasas y aceites, tóxicos) que corresponde a la cantidad de contaminantes = Sólidos,+ grasas y aceites,+ tóxicos.

[21] $r_p(s)$ es la reducción de sólidos lograda al pasar por p; $r_p(a)$ es la reducción de aceites lograda al pasar por p; $r_p(t)$ es la reducción de tóxicos lograda al pasar por p.

[22] $J_{i-1}(c_{i-1})$ es el costo acumulado desde la etapa 1 hasta la etapa i-1.

Etapa 3

$$c_2 = (2.95(.05),\ .81(.15),\ 3.25(.85)) = (.1475,\ .1215,\ 2.34813) \sim 2.71613$$

$$J_3(c_2) = \text{Min}_p\ \{300{,}550,\ 890\}(2.71613) + 22151.80 = 23036.90$$

Etapa 4

$$c_3 = (.1425\ (.05),\ .1215(.15),\ 2.34813(.85)) = (.007375,\ .018225, 1.99591) \sim 2.02151$$

$$J_4(c_3) = \text{Min}_p\ \{300{,}550,\ 890\}(2.02151) + 23036.90 = 23643.30$$

Etapa 5

$$c_4 = (.007375(.05),\ .018225(.15),\ 1.99591(.85)) = (.00036875,\ .00273375,\ 1.69652) \sim 1.69962$$

$$J_5(c_4) = \text{Min}_p\ \{300{,}550,\ 890\}(1.69962) + 23643.30 = 24153.2$$

Etapa 6

$$c_5 = (.00036875(.05),\ .00273375(.15),\ 1.69652(.85)) = (.0000184375,\ .000410063,\ 1.44204) \sim 1.44247$$

$$J_6(c_5) = \text{Min}_p\ \{--{,}550,\ 890\}(1.44247) + 2415.2 = 24946.6$$[23]

Etapa 7

$$c_6 = (.0000184375(.40),\ .000410063(.10),\ 1.44204(.30)) = (.000007375,\ .0000410063,\ .432612) \sim .43266$$

$$J_7(c_6) = \text{Min}_p\ \{--,--,\ 890\}(.43266) + 24946.6 = 25332.4$$[24]

Etapa 8

$$c_7 = (.000007375(.97),\ .0000410063(.7),\ .432612(.10)) = (.0000715375,\ .0000287044,\ .0432612) \sim .0433614$$

$$J_8(c_7) = \text{Min}_p\ \{--,--,\ 890\}(.0433614) + 25332.4 = 25371.10$$

[23] No se incluye el primer proceso correspondiente al tanque sedimentador dado que ya se ha repetido tantas veces como recomienda el programa no lineal.

[24] No aparecen los procesos correspondientes al tanque sedimentador y al tanque de lodo dado que ya se han aplicado tantas veces como el programa no lineal sugiere.

Etapa 9

$$c_8 = (0000715375(.97),\ .0000287044(.7),\ .0432612(.10)) = (.0000693914,\ .0000200931,\ .00432612)$$

$$J_9(c_8) = \mathrm{Min}_p\ \{\{--,--,\ 890\}(.0000693914,\ .0000200931,\ .00432612) + 25371.10 = 25375$$

Etapa 10

$$c_9 = (.0000693914(.97),\ .0000200931(.7),\ .00432612(.1)) = (.0000673097,\ .0000140652,\ .000432612)$$

$$J_{10}(c_9) = \mathrm{Min}_p\ \{\{--,--,\ 890\}(.0000673097,\ .0000140652,\ .000432612) + 25375 = 25375.4$$

$$c_{10} = (.0000673097(.97),\ .0000140652(.7),\ .000432612(.1)) = (.0000652904,\ .00000984564,\ .0000432612)$$

EXPRESIÓN TABULAR

CUADROS 3, 3' Y 3''
Cálculo de costos por reducción de contaminantes usando la combinación de tratamientos sugerida

Tratamiento	Sedimentador		Sedimentador		Sedimentador		Sedimentador	
	Entra	Sale	Entra	Sale	Entra	Sale	Entra	Sale[25]
Sólidos	59	2.95	2.95	.1475		.007375		3.6875 -4
Grasas	5.4	0.81	0.81	.1215		.018225		2.73375 -3
Tóxicos	3.25	2.7625	2.7625	2.34813		1.99591		1.69652
Total	67.65	6.5225	6.5225	2.61713		2.02151		1.69963
Costo	20295		1956.75		785.138		606.453	

Tratamiento	Sedimentador		Tanque lodo		Sedimentador	
	Entra	Sale	Entra	Sale	Entra	Sale
Sólidos		1.84375 -5		7.375 -5		7.1537 -5
Grasas		4.10063 -4		4.1006 -5		2.8704 -5
Tóxicos		1.442204		.433407		.0432612
Total		1.44247		.433522		.0433614
Costo	509.889		793.36		385.83	

[25] El número negativo frente a otro número representa la utilización de la notación científica, 3.9875 -4 significa 3.9875 (10^{-4}).

Tratamiento	Filtro carbón		Filtro carbón		Filtro carbón		
	Entra	Sale	Entra	Sale	Entra	Sale	
Sólidos		6.93914 -5		6.73097 -5		6.52904 -5	
Grasas		2.00931 -5		1.40652 -5		9.84564 -6	
Tóxicos		.00432612		.000432612		4.32612 -5	
Total		.0044156		5.13983 -4		1.18397 -4	
Costo	38.591		3.92989		.457445	Total	25375.40

Es importante resaltar que la logística dicta como el orden "natural"[26] del proceso pasar el agua de un tratamiento al siguiente y regresar: sedimentador, tanque de lodo, filtro de carbón y volver al sedimentador hasta alcanzar el nivel deseado de contaminación, pasando sólo una vez por el tanque de lodo como lo sugiere el programa no lineal, pero el proceso llevado a cabo de esta manera produce mayores costos; resulta más barato tratar el agua con más contaminantes con el proceso más barato y aplicar el proceso más caro cuando los contaminantes se hayan disminuido notoriamente. Los resultados de la aplicación en el orden "natural" son:

Cuadros 4, 4' y 4"

Cálculo de costos por reducción de contaminantes usando la combinación de tratamientos en orden natural

Tratamiento	Sedimentador		Tanque lodo		Filtro carbón		Sedimentador	
	Entra	Sale	Entra	Sale	Entra	Sale	Entra	Sale
Sólidos	59	2.95	2.95	1.18		1.1446		.05723
Grasas	5.4	0.81	0.81	.081		.0567		0.0124313
Tóxicos	3.25	2.7625	2.7625	.82875		.082875		1.09155
Total	67.65	6.5225		2.08975		1.28417		1.16121
Costo	20295		3587.38		1859.88		385.252	

Tratamiento	Filtro carbón		Sedimentador		Filtro carbón	
	Entra	Sale	Entra	Sale	Entra	Sale
Sólidos	.05723	.0555131		.00277576		.00269239
Grasas	0.0124313	.00124313		.00018647		.000130529
Tóxicos	1.09155	.327465		.278345		.0278345
Total	1.16121	.384221		.281307		.0306574
Costo	1033.48		115.266		250.364	

[26] Clair Sawyer y Perry McCarty, *Chemistry of Enviromental...*, *op. cit.*

Tratamiento	Sedimentador		Filtro carbón		Filtro carbón
	Entra	Sale	Entra	Sale	Sale
Sólidos		1.34619 -4	1.34619 -4	1.30581 -4	1.266663 -4
Grasas		1.95793 -5	1.95793 -5	1.37055 -5	9.59386 -6
Tóxicos		.0236593		.00236593	2.36593 -4
Total		.0238135	.0238135	.00251022	3.72851 -4
Costo	9.19723		21.1941	2.2341	27 559.20

Lo que da como resultado un costo mayor; así que se selecciona el proceso sugerido por el cálculo dinámico anterior, es decir, repetir el tratamiento en el tanque sedimentador hasta la etapa 5, luego pasar al tanque de lodo y después pasar al filtro de carbón, hasta alcanzar el nivel deseado de tóxicos, con costo de $25 375.40.

PRORRATEO DE LOS COSTOS

Para determinar la cantidad que debe aportar cada uno de los empresarios inmiscuidos en este problema se recurre a la jerarquización analítica.[27]

Los gastos por repartirse son:

CUADRO 5
Costos por reducción de contaminantes usando la combinación de tratamientos sugerida

	Planta tratamiento	Tanque de lodo	Filtro de Carbón
Inversión inicial	$ 1 500 000	$ 7 000 000	$5 000 000
Costo operación	$24 153.20/día	$793.358/día	$428.813

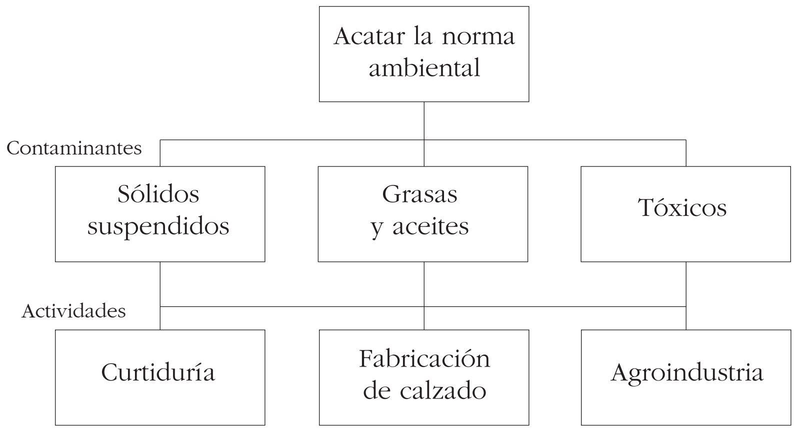
Jerarquización analítica de Saaty

La jerarquización analítica es un método que permite ordenar las alternativas disponibles para la solución de un problema de acuerdo con los criterios establecidos por el mismo decisor. Una de las innovaciones de este método es utilizar las calificaciones relativas, esto es lo que permite establecer la im-

[27] R.E. Mercado, *Técnicas para la toma de decisiones*, México, Limusa, 1998, pp. 25-97.

portancia gradual de cada factor y cada alternativa. Proporciona una escala numérica para comparar sentimientos, emociones, ideas o cualquier tipo de variable considerada en la situación problemática. Por estas características resulta conveniente utilizarlo para distribuir los costos de limpiar el agua contaminada tomando en cuenta no sólo la cantidad de basura que se arroja sino también la importancia de cada contaminante en cuanto al daño que causa en el medio ambiente y en la salud de la población.

El esquema que aparece a continuación muestra la estructura del problema de decisión que se desea resolver.



SOLUCIÓN

La priorización de las diversas alternativas con respecto al objetivo central se obtiene a partir de la multiplicación de la "matriz de relevancia" de las diferentes alternativas tocante a cada uno de los factores por el "vector de relevancia" de los factores concerniente al objetivo general. A continuación se presenta un algoritmo que describe el proceso de Jerarquización.

ALGORITMO DE JERARQUIZACIÓN

- Paso 1. Recabar información.

- Paso 2. Construir una matriz de calificaciones relativas de las alternativas para cada criterio y de los criterios con respecto al objetivo general. Las matrices de calificaciones relativas se construyen colocando las alternativas como entradas en los renglones y en las columnas. Cada renglón se llena con la calificación relativa asignada a al alternativa que encabeza el renglón, en relación con la alternativa que encabeza la columna con respecto al criterio con el que se trabaja. Las calificaciones son números de 0 a 10. Las calificaciones menores que 1 indican mayor importancia para la alternativa de la columna, el 1 corresponde a igual importancia (los elementos de la diagonal siempre son 1), y las calificaciones mayores que 1 conceden mayor importancia a la entrada del renglón.

- Paso 3. Calcular los vectores propios dominantes para cada matriz.El vector propio dominante normalizado guarda en una sola columna la información concentrada en la matriz. Un *vector propio*[28] v correspondiente a una matriz G es aquel que satisface la ecuación Ga = λa,[29] esto es, $[\lambda I - G]a = 0$.[30] Uno de los resultados más importantes de la Teoría de Ecuaciones indica que esta ecuación tiene solución no trivial para a si y sólo si el determinante de sus coeficientes[31] se anula, esto es, $\mathrm{Det}[\lambda I - G] = 0$. Esta igualdad conduce a una ecuación en λ conocida como *ecuación característica de G*, cuyas raíces se conocen como *valores propios* de G y para cada *valor propio* se encuentra el *vector propio* respectivo resolviendo la ecuación $[\lambda_0 I - G]\ a = 0$, en la que sustituye el valor de λ_0 encontrado.[32] Al valor propio de G con mayor valor absoluto se le conoce como *valor propio dominante*, el *vector propio* que resuelve la ecuación característica correspondiente es el *vector propio dominante.* Este vector es fácil encontrarlo usando el paquete MATHEMATICA. Por otro lado, se llama *norma* a la magnitud de un vector y *normalizar* un vector consiste en convertirlo en otro equivalente con norma 1, así

$$a_k = \frac{a_{k_{ij}}}{\left\| a_{k_j} \right\|}$$ [33]

[28] A los *vectores y valores propios* también se les conoce como *vectores y valores característicos,* o *eigenvalores y eigenvectores*, estos últimos términos se derivan de su nombre original en alemán.

[29] Con λ un escalar no nulo.

[30] Donde I es la matriz idéntica de la dimensión correspondiente.

[31] H.A. Taha, *Investigación de operaciones, op. cit.*, pp. 815-828.

[32] Ben Noble y James W. Daniel, *Álgebra lineal aplicada,* México, Prentice-Hall, 2003, pp. 240-245 y 310-320.

[33] Se maneja como magnitud del vector la suma simple de sus componentes, podría haberse utilizado la norma euclideana, $\sqrt{\sum a_i^2}$

- Paso 4. Construir la matriz y el vector de relevancia. La matriz de relevancia se forma teniendo como entradas en las columnas los criterios y en los renglones las alternativas. Cada columna es el vector propio dominante normalizado correspondiente a cada criterio, calculado en el paso anterior. El vector de relevancia es el vector propio dominante correspondiente a la matriz de calificaciones relativas de los criterios con respecto al objetivo general.
- Paso 5. Multiplicar matriz y vector de relevancia.

Aplicación al caso estudiado

Objetivo: acatar la norma ambiental.

Criterios o factores: contaminantes = sólidos suspendidos, grasas y aceites y tóxicos.

Alternativas: actividades = curtiduría, fabricación de calzado y agroindustria.

Matrices de calificación

- Matriz de calificaciones relativas de las actividades respecto de la concentración de sólidos suspendidos, construida a partir de las aportaciones de cada rama:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Curtido} \\ \text{Calzado} \\ \text{Agro} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Curtido} & \text{Calzado} & \text{Agro} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{37}{2} & \frac{37}{20} \\ \frac{2}{37} & 1 & 10 \\ \frac{20}{37} & \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Vector propio dominante} \\ \begin{bmatrix} .73134 \\ .183491 \\ .0851689 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Matriz de calificaciones relativas de las actividades con respecto a la concentración de grasas y aceites, construida a partir de las aportaciones de cada rama:

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{Curtido} \\
\text{Calzado} \\
\text{Agro}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Curtido} & \text{Calzado} & \text{Agro} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{100}{3} & 20 \\ \frac{3}{100} & 1 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
\text{Vector propio dominante} \\
\begin{bmatrix} .925926 \\ .0277778 \\ .0462963 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Matriz de calificaciones relativas de las actividades con respecto a la concentración de materias activas y tóxicos, construida a partir de las aportaciones de cada rama:

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{Curtido} \\
\text{Calzado} \\
\text{Agro}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Curtido} & \text{Calzado} & \text{Agro} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
\text{Vector propio dominante} \\
\begin{bmatrix} .925926 \\ .0277778 \\ .0462963 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Matriz de relevancia :

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{Curtido} \\
\text{Calzado} \\
\text{Agro}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Sólidos} & \text{Grasas} & \text{Tóxicos} \end{array} \\
\begin{bmatrix} .73134 & .925926 & .23076 \\ .18349 & .027778 & .46153 \\ .08516 & .0462963 & .30769 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Matriz de calificaciones relativas de los contaminantes construida a partir de la importancia de las consecuencias de la presencia de dichos contaminantes en el agua:

$$\begin{array}{l} \text{Sólidos} \\ \text{Grasas} \\ \text{Tóxicos} \end{array} \begin{bmatrix} .25 \\ .25 \\ .5 \end{bmatrix}$$

- Relevancia de las diferentes actividades respecto de la contaminación del agua:

$$\begin{array}{l} \text{Curtido} \\ \text{Calzado} \\ \text{Agro} \end{array} \begin{bmatrix} .73134 & .925926 & .230769 \\ .183491 & .0277778 & .461538 \\ .0851689 & .0462963 & .307692 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .25 \\ .25 \\ .5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .529701 \\ .283586 \\ .186713 \end{bmatrix}$$

El mayor responsable de la contaminación es la curtiduría, con un peso de 52.97%; el segundo responsable es la fabricación de calzado, con una responsabilidad de 28.35%; por último, la agroindustria, con el 18.67% restante.

En cuanto a la participación en los gastos, apoyándonos en los vectores propios dominantes respecto de cada contaminante, queda:

Costos iniciales	Planta de tratamiento	Tanque de lodo	Filtro de carbon	Contribución	Participantes
	\$1 500 000	\$7 000 000	\$5 000 000	\$13 500 000	
Curtiduría	.73134 [34] 1097020	.925926 6481480	.230769 1153800	\$8 732 300	15 000
Calzado	.183491 275265	.0277778 194445	.461538 2307690	\$2 777 400	3 000
Agroindustria	.851689 127760	.0462963 324080	.307692 1538460	\$1 999 300	2 000

[34] El primer número en cada espacio corresponde al resultado de la jerarquización y el número escrito en la parte inferior es la contribución asignada a la sección obtenida a partir de dicho resultado.

Costos de operación:

	Sedimentador	Tanque de lodo	Filtro de carbon	Contribución
	$24 153.20/día	$793.358/día	$428.813/día	$25 375.40
Curtiduría	.73134 17664.30	.925926 734.591	.230769 98.9529	$18 497.80
Calzado	.183491 4431.89	.0277778 22.0377	.461538 197.918	$4 651.85
Agroindustria	.851689 2057.10	.0462963 36.7295	.307692 131.942	$2 225.77

	Contribución individual	
	Pago inicial	Pago diario
Curtiduría	$582.20	$1.25
Calzado	$925.80	$1.55
Agroindustria	$995.15	$1.15

IMPORTANCIA RELATIVA DE LOS DISTINTOS PROCESOS

Con este mismo instrumento[35] se analizan los diferentes procesos de tratamiento del agua para determinar la importancia de cada uno. Información útil en caso de que fuera necesario seleccionar sólo un proceso, aunque sería insuficiente o resultaría costoso, en tiempo y dinero, por la cantidad de veces que sería necesario repetir el proceso para lograr el nivel deseado de contaminación.

[35] R.E. Mercado, *Técnicas para la toma de decisiones*, México, Limusa, 1998, pp. 25-97.

Matriz de relevancia de las alternativas:

- Matriz de calificaciones relativas de los procesos con respecto a la concentración de sólidos suspendidos, construida a partir de la eficiencia de cada instrumento:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \text{Sedimen} \\ \text{Lodo} \\ \text{Filtro}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Sedimen} & \text{Lodo} & \text{Filtro} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{19}{12} & \frac{95}{3} \\ \frac{12}{19} & 1 & 20 \\ \frac{3}{95} & \frac{1}{20} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
\text{Vector propio dominante} \\
\begin{bmatrix} .601266 \\ .379747 \\ .0189873 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Matriz de calificaciones relativas de los procesos con respecto a la concentración de grasas y aceites, construida a partir de la eficiencia de cada instrumento:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \text{Sedimen} \\ \text{Lodo} \\ \text{Filtro}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Sedimen} & \text{Lodo} & \text{Filtro} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{17}{18} & \frac{17}{6} \\ \frac{18}{17} & 1 & 3 \\ \frac{6}{17} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
\text{Vector propio dominante} \\
\begin{bmatrix} .414634 \\ .459024 \\ .146341 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Matriz de calificaciones relativas de los procesos respecto de la concentración de de materias activas y tóxicos, construida a partir de la eficiencia de cada instrumento:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \text{Sedimen} \\ \text{Lodo} \\ \text{Filtro}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Sedimen} & \text{Lodo} & \text{Filtro} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{14} & \frac{1}{6} \\ \frac{14}{3} & 1 & \frac{7}{9} \\ 6 & \frac{9}{7} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c}
\text{Vector propio dominante} \\
\begin{bmatrix} .0857143 \\ .4 \\ .514286 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

- Matriz de relevancia:

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & \text{Sólidos} & \text{Grasas} & \text{Tóxicos} \\
\text{Sedim} & .601266 & .414634 & .0857143 \\
\text{Lodo} & .379747 & .439024 & .4 \\
\text{Filtro} & .018987 & .146341 & .514286
\end{array}
$$

- Matriz de calificaciones relativas de los contaminantes construida a partir de la importancia de las consecuencias de la presencia de dichos contaminantes en el agua:

$$
\begin{array}{c|c|}
\text{Sólidos} & .25 \\
\text{Grasas} & .25 \\
\text{Tóxicos} & .5
\end{array}
$$

Relevancia de los diferentes procesos respecto de la limpieza del agua:

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & \text{Sólidos} & \text{Grasas} & \text{Tóxicos} \\
\text{Sedim} & .601266 & .414634 & .0857143 \\
\text{Lodo} & .379747 & .439024 & .4 \\
\text{Filtro} & .0189873 & .146341 & .514286
\end{array}
\begin{bmatrix} .25 \\ .25 \\ .5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} .296832 \\ .404693 \\ .298475 \end{bmatrix}
$$

De acuerdo con estos cálculos, el proceso más importante es el correspondiente al tanque de lodo, el que le sigue en trascendencia es el filtro de carbón y por último el tanque sedimentador. Coincidentemente éste es el orden que se siguió al analizar los casos de usar sólo un proceso.

CONCLUSIONES

Una idea poco convencional es la de utilizar repetidamente cada uno de los tres métodos propuestos, hasta lograr la reducción necesaria de cada contaminante por separado. Así, la corriente se trata tantas veces como es necesario para remover los sólidos suspendidos hasta casi lograr la concentración por debajo de su norma obligatoria, la aproximación se debe a que los tratamientos continúan y todos tienen efecto sobre todos los contaminantes, aunque cada proceso se concentra especialmente en uno de ellos, para el que resulta más eficaz. La corriente, casi libre de sólidos en suspensión, pasa al proceso biológico para remover los contaminantes que demandan oxígeno disuelto, generando luego una corriente casi libre de contaminantes degradables. Y, finalmente, la corriente de agua, casi libre de sólidos y material degradable, pasará al tren de tratamiento con carbono activado para remover por adsorción los contaminantes orgánicos tóxicos y cumplir con la norma ambiental respectiva. Dicha operación no se ha podido realizar ante la falta de recursos y tiempo demandado por el proceso de decisión administrativa para efectuar pruebas piloto y demostrar sus resultados, ya avalados por el desarrollo matemático. El consultor aún trata de convencer a las autoridades y los empresarios de las posibilidades de este método innovador, pero todavía no se ha construido la planta tratadora.

La utilización repetida de los procesos significa costos que no fueron incluidos, pues no estaban disponibles en el momento de hacer esta disertación.

Se destaca el hecho de que el modelo que se construyó para resolver el problema es un modelo no lineal dinámico en el que intervienen variables cualitativas y que propicia la aparición de la innovación mencionada en la metodología para limpiar el agua, puesto que el proceso combinado no ha sido utilizado con anterioridad aunque se basa en los mismos principios y usa las instalaciones manejadas tradicionalmente.

Las características de modelo no lineal dinámico con variables cuantitativas y cualitativas se deben a lo siguiente:

- Programa no lineal. La estructura del problema construida a partir del comportamiento de los procesos seleccionados para limpiar el agua, conduce directamente, como se explicitó en el trabajo, a un modelo no lineal; desde luego puede evitarse su manejo, si así se considera adecuado, y convertirlo en un problema lineal, pero si su naturaleza es no lineal y se cuenta con los instrumentos que permiten resolverlo con facilidad, no es evidente la necesidad de convertirlo en otro tipo de modelo, cuando además se comprobó que, al menos en este caso, el uso del modelo lineal no tiene grandes ventajas, ni conduce a una mejor y más rápida solución.

- Modelo dinámico. Los costos que se manejan dependen de la cantidad de contaminantes que contiene el agua y esta concentración cambia después de cada tratamiento. Tal variación impide el manejo del sistema de costos como estático, que es la característica tradicional que presentan las funciones de costo incluidas en la mayoría de los modelos matemáticos más utilizados, es entonces el modelo dinámico la alternativa idónea.
- Jerarquización analítica (manejo de variables cuantitativas y cualitativas). Se considera importante distribuir los costos tomando en cuenta la magnitud de la participación de cada sector en la contaminación y la importancia de cada tipo de contaminante en el deterioro de la salud pública y el medio ambiente, por esta razón no se hace simplemente una división sino se recurre a un instrumento que permite tomar en cuenta también factores cualitativos al realizar el prorrateo.

Se considera conveniente impulsar la aplicación de los poderosos instrumentos que proporciona la matemática y apoya la computación en la solución de muchos de los problemas que nos agobian y que se presume nada tienen que ver con la matemática; asimismo, se juzga adecuado trabajar en equipos multidisciplinarios, cada especialista tiene una estructura mental diferente y los resultados de complementarlas suelen ser halagadores.

Se subraya que el modelo matemático propuesto resulta útil para cualquier problema de contaminación similar, basta usar los datos correspondientes y el modelo proporcionará la mejor solución para el caso en estudio.