

Representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales y su relación con el desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas (6-8 años)

IVONNE SANDOVAL* | ANDREA ORTIZ-ROCHA**

Relacionar un objeto y su representación en el espacio tridimensional involucra tanto acciones físicas para actuar, transformar y construir, así como procesos cognitivos de reorganización dimensional, por ejemplo, relacionar y diferenciar características propias de objetos 3D. Presentamos resultados de una trayectoria de aprendizaje en la cual, a través de la manipulación de diferentes materiales y representaciones de objetos 3D, niños de 6-8 años muestran evolución al reconocerlos, representarlos y reconstruirlos a través de diferentes vistas. En esta investigación se usó un experimento de enseñanza con 34 alumnos de una escuela pública de la Ciudad de México. Los resultados muestran evolución del razonamiento espacial respecto de: a) la integración de procesos como reconocer, representar y reconstruir; y b) cómo el movimiento influye en la percepción de relaciones espaciales. Parece factible desarrollar estrategias para transitar entre lo concreto y lo abstracto, esto es, de acciones sobre objetos a transformaciones entre representaciones.

Relating an object and its representation in three-dimensional space involves both physical actions such as acting, transforming, and building, as well as cognitive processes for reorganizing dimensions, such as relating and differentiating the 3D object's characteristics. We present the results of an educational path through the manipulation of different materials and 3D object representations. Children ages 6 to 8 show development when they recognize, represent, and reconstruct these during various visits. This study applied a learning experiment on 34 students from a public school in Mexico City. Our results show development in spatial reasoning related to: a) the integration of processes such as recognizing, representing and rebuilding; and b) how movement influences the perception of spatial relations. It seems feasible to develop strategies for transitioning from the concrete to the abstract, that is to say, from actions taken upon objects to transformations in representations.

Palabras clave

Educación matemática
Experiencias de aprendizaje
Geometría
Razonamiento espacial
Representaciones 2D y 3D
Experimento de enseñanza

Keywords

Math education
Educational experiences
Geometry
Spatial reasoning
2D and 3D representation
Teaching experiment

Recepción: 31 de agosto de 2021 | Aceptación: 26 de septiembre de 2022

DOI: <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2023.180.60709>

* Profesora-investigadora de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN)-unidad Ajusco (México). Doctora en Ciencias. Líneas de investigación: enseñanza y aprendizaje de la geometría; educación primaria; formación de maestros; uso de la tecnología en educación básica. Publicación reciente: (2022, en coautoría con M. García-Campos y L. Sosa), "Providing Support and Examples for Teaching Linear Equations in Secondary School. The role of knowledge of mathematics teaching", *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10283-5>. DOI: <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3254>. CE: isandoval@upn.mx. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7269-8546>

** Estudiante de Doctorado en Ciencias en el Departamento de Investigaciones Educativas (DIE) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN-CINVESTAV) (México). Líneas de investigación: enseñanza y aprendizaje de la geometría; uso de la tecnología en educación básica. Publicación reciente: (2020, en coautoría con I. Sandoval y A. Sacristán), "Diseño de actividades para el desarrollo de razonamiento espacial en edades tempranas a través de manipulativos", en A.I. Sacristán, J.C. Cortés Z. y P.M. Ruiz A. (eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, México, CINVESTAV/AMIUTEM/PME-NA, pp. 637-645. DOI: <https://doi.org/10.51272/pmna.42.2020>. CE: yudi.ortiz@cinvestav.mx. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1831-1037>

INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DE LA LITERATURA¹

Las habilidades de razonamiento espacial son necesarias en el actuar y el pensar del ser humano, pues impactan en cómo cada sujeto describe y representa el mundo físico a su alrededor. Estas habilidades se ponen en juego en situaciones cotidianas, como tareas de ubicación, orientación, desplazamiento, lectura de mapas, planificación de rutas, diseño y elaboración de planos; y, además, en el establecimiento de relaciones espaciales entre sujetos, objetos y sus representaciones (Gonzato *et al.*, 2011).

Las investigaciones relacionadas con el razonamiento espacial presentan diferentes énfasis. Algunos investigadores están interesados en mostrar la necesidad de formar ciudadanos competentes en áreas de conocimiento científico y tecnológico para responder a las actuales demandas laborales o académicas donde el razonamiento espacial resulta relevante (Khine, 2017). Diversos autores enfatizan que, por ejemplo, este tipo de razonamiento potencia habilidades visuales, comunicativas y lógicas necesarias en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (por sus siglas en inglés, STEM), ciencias sociales, humanidades y en artes (Hoffer, cit. en Dindyal, 2015); y puede moldearse o desarrollarse en la escuela con propuestas curriculares y materiales educativos adecuados (Uttal *et al.*, 2013; Davis y el SRSRG, 2015). Además, otros autores como Palmér y Van Bommel (2020) informan que las actividades espaciales y de comunicación donde se comparan, rotan y transforman objetos influye en el aprendizaje de diferentes disciplinas.

Otro aspecto estudiado es la complejidad al interpretar representaciones de objetos tridimensionales, dada su relación con diferentes procesos cognitivos. Para la enseñanza de la geometría en primaria, Del Grande (1990)

señala a la intuición como punto de partida, y enfatiza en la necesidad de actividades experimentales que involucren el movimiento de objetos y el desarrollo de habilidades espaciales que implican deslizar, rotar o voltear objetos mentalmente. Además, nociones como ángulo, relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre líneas pueden ser difíciles para los estudiantes en primaria (Samara y Clements, 2009), más aún entre objetos bi o tridimensionales. Gutiérrez (1992) analizó la complejidad en las acciones realizadas por estudiantes con objetos 3D y la interpretación de sus representaciones; e identificó cuatro niveles cognitivos que muestran cómo se transita de una percepción global de la forma de un objeto tridimensional, a la comparación e identificación de sus elementos (caras, aristas, vértices -nivel 1) hasta analizar —mentalmente, antes de cualquier manipulación— y razonar sobre su estructura matemática o sus elementos, incluidas propiedades no percibidas directamente, pero que se deducen de definiciones u otras propiedades (nivel 4). Por su parte, Pittalis y Christou (2013) amplían estos resultados y proponen dos procesos cuando se estudian objetos 3D: decodificación (capacidad para visualizar representaciones e interpretar propiedades geométricas en esas representaciones); y codificación (habilidades para construir representaciones 2D y objetos 3D, así como para realizar cambios entre representaciones). Relacionado con la decodificación, estudios con profesores en formación reconocen dificultades para visualizar figuras planas en objetos 3D, lo cual genera ideas erróneas tales como que a estos objetos sólo se les calcula el volumen, pero no es factible calcularles el área o el perímetro de sus caras (González y Sánchez, 2020).

Otros autores abordan el uso de materiales para evaluar o desarrollar habilidades como visualización, rotación mental y construcción

¹ Esta investigación se realizó dentro del proyecto académico y de investigación (SAC-ST-CPS/083/2021) y en el marco del programa de vinculación “Aprendizaje de las matemáticas en contextos diversos” entre la escuela primaria Alfredo V. Bonfil y la Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco, México. Las autoras agradecen a Fredy Peña por colaborar en la recolección de datos; a María Trigueros y Luz Orozco por la lectura cuidadosa a este artículo y sus valiosas sugerencias; así como a los revisores anónimos, por sus comentarios y observaciones.

de objetos 3D. Uno de los materiales de mayor uso es el libro de texto (Serrano *et al.*, 2018), otros son papiroflexia (Taylor y Hutton, 2013), rompecabezas (Ortiz y Sandoval, 2019), bloques de construcción (Reinhold *et al.*, 2013), así como Logo, Lego Designer y geometría dinámica (Ortiz, 2018; Sack y Vazquez, 2011). Respecto a los libros de texto, al parecer, se conserva un orden de exposición euclidiano y, en su mayoría, las representaciones usadas en ellos son prototípicas (Teixidor, 2016; Hallowell *et al.*, 2015), e involucran misma posición y forma, lo que podría derivar en confusiones conceptuales (por ejemplo, rombo y cuadrado; cuadrado con cubo). Los resultados de estas investigaciones confirman que cuando las experiencias de aprendizaje en primaria son limitadas, impactan en el desarrollo de habilidades para reconocer figuras geométricas en diferentes posiciones, visualizar objetos 3D y sus representaciones (Teixidor, 2016). Así pues, en concordancia con lo afirmado por Gal y Linchevski (2010), es necesario generar experiencias donde los estudiantes visualicen, realicen rotaciones mentales y manipulen objetos 3D para reconocer sus elementos.

Aunque diversos investigadores señalan la importancia de desarrollar habilidades espaciales, durante décadas se han considerado secundarias en la enseñanza. Autores como Fastame (2017) demandan la urgencia de promover estas habilidades con actividades específicas desde los primeros años de escolaridad. De hacerlo, según este autor, los niños tendrán capacidad para construir y manipular mentalmente representaciones 2D.

Como hemos ilustrado en párrafos anteriores, hay acuerdo en la necesidad de desarrollar este tipo de habilidades en contextos escolares, pero son pocos los estudios centrados en construir trayectorias de aprendizaje que promuevan su desarrollo e investiguen su impacto. Por consiguiente, con base en las sugerencias de Clement *et al.*, (2014), podemos afirmar que el desarrollo de estas habilidades debería iniciarse en edades tempranas sin subestimar

la capacidad de los niños para aprender matemáticas y construir una comprensión sólida en estos primeros años escolares.

El desarrollo del razonamiento espacial es gradual y requiere continuidad en la escuela (Samara y Clements, 2009). Como se mostró previamente, se requiere de mayor investigación centrada en tareas escolares, por lo que la problemática que abordamos se relaciona con cuáles son las características del diseño de tareas y su secuenciación para favorecer el aprendizaje de habilidades de razonamiento espacial. En particular, las preguntas de investigación son:

- ¿qué acciones de razonamiento espacial aprenden niños de 6-8 años cuando trabajan con representaciones bidimensionales (ortogonales e isométricas) en tareas de re-construcción de objetos 3D con materiales manipulables?; y
- ¿cómo las tareas de des/re/composición y cambios de dimensión (2D ↔ 3D) con material manipulable de la trayectoria de aprendizaje propuesta inciden en los procesos de codificación y decodificación?

En consecuencia, el principal objetivo de este estudio es analizar la evolución de habilidades de razonamiento espacial, en particular lo relacionado con el cambio de dimensión (procesos de codificación y decodificación) en niños de 6-8 años, cuando construyen formas 3D usando materiales manipulables. En este artículo presentamos resultados de una trayectoria de aprendizaje en la cual, a través de la manipulación de diferentes materiales y representaciones de objetos tridimensionales, niños en edades tempranas muestran, con sus acciones, evolución al reconocer, representar y reconstruir objetos 3D a través de diferentes vistas. Estas acciones se enmarcan en dos procesos bidireccionales, *codificación* y *decodificación*, en los que los cambios de dimensión, así como la composición y descomposición de los elementos constitutivos resultan determinantes.

Hay diversos nombres y definiciones de razonamiento espacial, por ejemplo, visualización, sentido o habilidad espacial. Para Hallowell *et al.* (2015) es la capacidad de visualizar transformaciones de coordenadas espaciales de un objeto en relación con un sistema de referencia. Mientras que para Davis y SRSG (2015) es un sistema en el que interactúan diferentes elementos que le permiten al sujeto comprender (a nivel mental) y transformar (a nivel físico) el espacio donde vive o desarrolla una tarea (Fig. 2). Un punto de coincidencia entre diversas definiciones es que el razonamiento espacial desarrolla procesos, habilidades y capacidades cognitivas como la manipulación mental de representaciones bi y tridimensionales. Algunas de estas habilidades son representar, interpretar y construir representaciones (Pittalis y Christou, 2013) y en ellas nos centraremos en este artículo.

Cambios de dimensión (2D ↔ 3D) y representaciones

La construcción de representaciones de relaciones espaciales es un proceso lento (Piaget e Inhelder, 1956). La interacción con el espacio empieza desde los primeros años de vida, y es en la escuela donde se posibilita la construcción de herramientas matemáticas para conocer, explorar y apropiarse el espacio con aspectos como, por ejemplo, rectilinealidad, paralelismo, perpendicularidad, simetría y congruencia, que son percibidas de manera informal (Freudenthal, 1983). En su aprendizaje, los sujetos requieren de experiencias con el propósito de apreciar y comprender estructuras espaciales a su alrededor. La finalidad no es, únicamente, la abstracción de las propiedades, sino enriquecer los contextos y referentes para reconocer esas estructuras y ejemplificarlas, lo que implica el reconocimiento de relaciones entre el objeto representado (espacio representativo, 3D) y su representación (espacio geométrico, 2D).

Las representaciones 2D que reflejan la tridimensionalidad de un objeto se realizan con técnicas de dibujo como sombras, opacidad/transparencia o tonos de grises. Por ejemplo, las de perspectiva, oblicuas y axonométricas, cada una con reglas explícitas para su trazo. En consecuencia, construir estas representaciones no sólo es copiar lo que se ve, sino usar sistemas simbólicos propios de las matemáticas (convenciones) o de las propias representaciones gráficas usadas (Lawrie, 2012). Dado que en la representación plana (2D) se pierde información, en el proceso de interpretación el sujeto deberá reconstruirla para identificar el objeto representado a partir de sus propias experiencias y representaciones interiorizadas. Un buen ejemplo de ello es identificar cubos ocultos.

Pittalis y Christou (2013) identifican esta dualidad proceso-producto de las representaciones de formas tridimensionales como bidireccional, *codificación* (proceso de producción de representaciones planas) y *decodificación* (lectura/interpretación de la representación plana de formas 3D, producto). Según estos autores, al representar una forma 3D a través de una representación 2D entra en tensión lo que se sabe de la forma y lo que se ve de ella; así, se generan dificultades para visualizar caras ocultas o propiedades entre algunos de sus elementos, como es el caso de identificar un cuadrado, aunque se “ve” como rombo, o una altura que no se “ve” como perpendicular a la base. A continuación detallamos más sobre esta dualidad.

En la *decodificación* se requiere reconocer diferentes tipos de representaciones (Pittalis y Christou, 2013). Unas de ellas son las de perspectiva, opacas y transparentes, en las cuales las transparentes son más complejas, pues “parece” que los bordes se cruzan; mientras que las ortogonales (vista frontal, superior y lateral) son más usadas en la vida cotidiana, concretamente en los planos de las casas. Por eso los alumnos necesitan aprender sus significados.

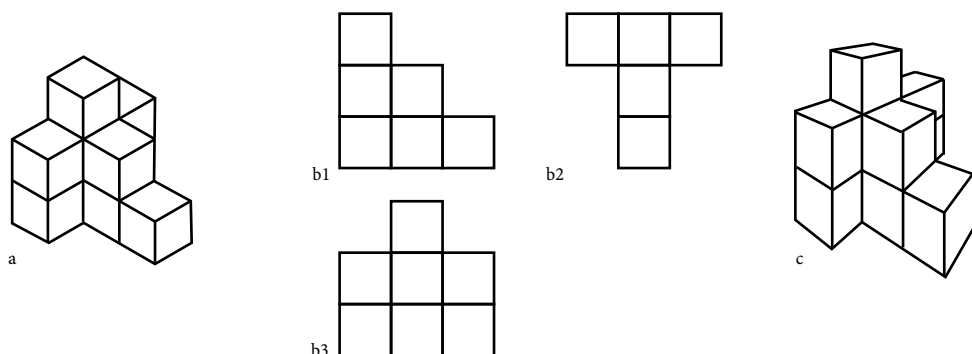
Por lo que se refiere a la *codificación*, ésta implica usar convenciones para dibujar formas 3D y transformar una representación en otra.

Además, conlleva descomponer la representación en sus elementos (vértices, caras y aristas) y visualizar a la forma 3D como un todo. Mitchelmore (1980) identifica cuatro etapas de desarrollo representacional: plano esquemático (una sola cara o contorno global), espacio esquemático (más de una cara), prerrealista (usan un sólo punto de vista y profundidad) y realista (se representan relaciones de paralelismo).

En el aprendizaje de lo tridimensional es necesario, entonces, interrelacionar diferentes representaciones para reconstruir la forma 3D, es decir, operar con ellas para transformar unas en otras, por ejemplo, isométrica a ortogonales, ortogonales a perspectiva y viceversa. Cabe precisar que la vista isométrica es la

representación 2D de un objeto 3D en la que los tres ejes ortogonales principales, al proyectarse, forman ángulos de 120° (Fig. 1a). En cambio, las vistas ortogonales (Figs. b1, b2, b3) son aquéllas que refieren a las vistas superior, inferior, lateral derecha y lateral izquierda que se forman a partir del trazado de la totalidad de las rectas proyectantes perpendiculares a un cierto plano. Ahora bien, en la representación en perspectiva se genera una visión que converge a un punto, conocido en las técnicas de dibujo como punto de fuga, el cual permite crear una sensación de profundidad en la representación (Fig. 1c). En seguida mostramos como ejemplo diferentes representaciones de un mismo módulo multicubo.

Figura 1. Diferentes representaciones de un mismo objeto tridimensional



Nota: a) isométrica; b) ortogonal con sus tres vistas (b1- lateral izquierda y derecha; b2- ortogonal superior e inferior; y b3- ortogonal frontal); c) perspectiva.

Fuente: elaboración propia.

Sistemas de referencia

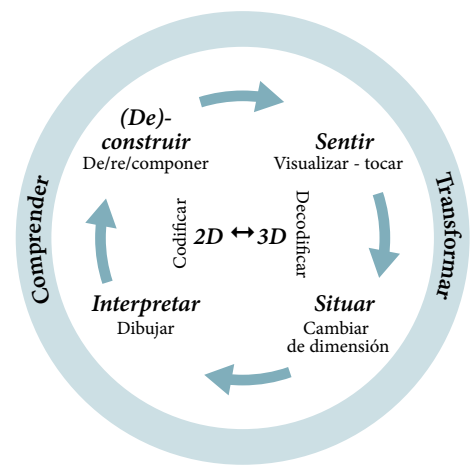
La percepción de formas y la rotación son indispensables en la estructuración del espacio y, por consiguiente, están estrechamente ligadas a un sistema de referencia (Pani y Dupree, 1994). Sin embargo, dado un movimiento, algunas estructuras son más fáciles de percibir que otras, esto es, son más notorias las organizaciones verticales, seguidas de las horizontales y menos las oblicuas. Los resultados de Pani y Dupree (1994) sostienen que los sistemas de referencia son centrales en la percepción y la imaginación de movimientos rotacionales y las formas involucradas en dichos movimientos.

El punto de vista del observador, uno de los componentes del sistema de referencia, se hace evidente cuando una persona camina alrededor de un objeto, o lo mueve para ver mejor ciertas partes. Entonces, es necesario promover acciones que le permitan al sujeto analizar el espacio donde se encuentra y reconocer las convenciones que como observador tiene del objeto de análisis (acciones que implican situar y sentir, Fig. 2).

En este estudio integramos ideas de dos modelos, el propuesto por Pittalis y Christou (2013) y el de Davis y SRSG (2015), que nos permiten explicar el papel de la

composición y descomposición de objetos (3D) en el aprendizaje de diferentes representaciones (isométricas y ortogonales) en experiencias sensorio-motrices.

Figura 2. Elementos de razonamiento implicados en los procesos de codificación y decodificación



Fuente: elaboración propia.

METODOLOGÍA

Para el desarrollo de esta investigación se utilizó una metodología cualitativa, específicamente un experimento de enseñanza enmar-

cado en el paradigma investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). Un experimento de enseñanza implica diseño, implementación y análisis cíclico de una secuenciación de actividades (Steffe y Thompson, 2000), esto es, una trayectoria de aprendizaje (Samara y Clements, 2009). En particular se realizaron dos ciclos que permitieron mejorar y refinar la trayectoria propuesta (Cobb y Gravemeijer, 2008; Samara y Clements, 2009).

En el experimento de enseñanza participaron 34 alumnos de entre seis y ocho años, con desventajas socioeconómicas, de una escuela pública en la periferia de la Ciudad de México. Para la recolección de datos se utilizaron dos videocámaras y notas de campo. Estos registros sirvieron para la toma de decisiones al finalizar cada sesión, así como para un análisis retrospectivo del experimento en curso.

Trayectoria de aprendizaje y su implementación

En el diseño de las actividades se pretendió generar experiencias a los estudiantes que promovieran cambios de dimensión (2D ↔ 3D) con el uso de material concreto (de-construir, situar, sentir e interpretar). En la Tabla 1, se presentan los objetivos y las seis actividades propuestas de esta trayectoria, así como el procedimiento que se favorece en cada actividad.

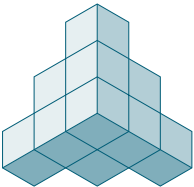
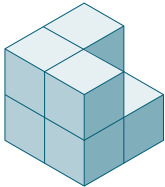
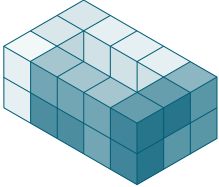
Tabla 1. Propuesta de actividades

Objetivo general	Objetivos particulares	Ejemplo
Reconocer vistas isométricas y ortogonales	1. Relacionar representaciones 2D (en escala de grises) con sus respectivos objetos 3D (módulos multicubo). (Comparar, decodificar)	<p><i>Material:</i> módulos multicubo (MM) de un solo color. (Un módulo multicubo es un sólido formado por varios cubos iguales, pegados entre sí)</p> <p><i>Instrucción:</i> relaciona los distintos MM con las distintas vistas lateral derecha. En cada recuadro pequeño coloca A, B, C o D según como lo consideres. (A, B, C y D denotan diferentes módulos)</p>

También se solicitó relación de la vista inferior

Tabla 1. Propuesta de actividades

(continuación)

Objetivo general	Objetivos particulares	Ejemplo
Reconocer vistas isométricas y ortogonales	2. Dibujar vistas ortogonales de objetos 3D. (Des/componer, codificar)	<i>Material:</i> módulos multicubo en los que se diferencian por colores cada una de sus vistas, a saber, laterales, superior e inferior <i>Instrucción:</i> dibujar la vista inferior y lateral izquierda del MM proporcionado Ejemplo: 
	3. Reconstruir módulos multicubo a partir de las indicaciones dadas. (Localizar, mover, codificar-decodificar)	<i>Material:</i> módulos multicubo. <i>Instrucción:</i> en equipos, dar indicaciones para la construcción del MM (3 estudiantes) y construir los módulos según las indicaciones dadas (los otros 3 estudiantes)
Construir objetos 3D a partir de la interpretación de representaciones isométricas.	4. Construir módulos multicubo a partir de representaciones 2D (en escala de grises). (Visualizar, mover, decodificar)	<i>Material:</i> policubos de un solo color. <i>Instrucción:</i> usar algunos policubos para realizar las siguientes construcciones. (Cada estudiante tenía cuatro representaciones 2D de un cuerpo a construir)  (Policubos son 7 módulos multicubos cada uno formado por 3 o 4 cubos iguales pegados entre sí. Al unir todos los módulos se compone un cubo de 3u x 3u x 3u, conocido como Cubo Soma)
	5. Dibujar los policubos utilizados en la actividad 4. (Des/componer, mover, codificar)	<i>Material:</i> policubos de un solo color. <i>Instrucción:</i> dibujar al frente de cada construcción las piezas utilizadas
	6. Construir módulos multicubo a partir de representaciones 2D. (Visualizar, des/componer, mover, decodificar)	<i>Material:</i> policubos de colores <i>Instrucción:</i> construir los objetos representados en una hoja usando todos los policubos. (Los colores de la representación se correspondían con los de los policubos) Ejemplo: 

Fuente: elaboración propia.

Esta trayectoria de aprendizaje, en ambos ciclos, se implementó en cinco sesiones, cada una de una hora y media. Cada sesión inició con indicaciones generales y entrega de materiales, organización en equipos (si era el caso) y después trabajo independiente con intervenciones de una de las investigadoras y una plenaria para compartir resultados y estrategias. La intervención de la investigadora se centró en hacer preguntas que generaran reflexión, profundizar en las estrategias de los niños, favorecer la verbalización de acciones y retomar ideas centrales para la plenaria.

Análisis de datos, categorías y códigos

El análisis de los datos se realizó mediante un proceso deductivo de las acciones de los estudiantes al interpretar representaciones bidimensionales; éstas son: organizar, localizar, mover y construir objetos tridimensionales. En este proceso, desde una perspectiva interpretativa, cada investigadora revisó los videos de manera independiente, hizo sus codificaciones respecto a las habilidades espaciales movilizadas e identificó episodios que dieran cuenta de dos focos: 1) cómo se manifestaban interacciones entre los procesos de reconocer, representar y reconstruir; y 2) respecto a cómo cambiaban los sistemas de referencia al interpretar dónde ubicarse o cómo ubicar un objeto para completar las construcciones propuestas. Con estas primeras interpretaciones individuales se hicieron reuniones para compartir y discutir estos episodios y sus correspondientes interpretaciones hasta lograr acuerdos y precisar las categorías de análisis y sus descriptores, en términos de acciones que dan cuenta de ello. Las categorías son:

Comparación y visualización (código CV): reconocimiento de las formas de cada policubo, comparación entre éstos para ensamblarlos e identificación de cómo unirlos para formar secciones o las construcciones completas solicitadas.

Localización (código L): unión y ubicación de las piezas; acciones o uso de lenguaje utilizado para describir la posición relativa de los policubos y multicubos.

Movimiento (código M): identificación de movimientos corporales y de las piezas para completar una configuración determinada.

Descomposición/composición (código DesC): estrategias para el ensamble de piezas que conforman una sección o la construcción completa, así como para la interpretación de representación 2D y de formas 3D a partir de representaciones ortogonales (vistas superiores, inferiores y laterales).

Cambio de dimensión (código CD): reconocimiento de formas 3D con sus correspondientes representaciones 2D (a escala y a partir de diferentes vistas); interpretación del significado de distintas convenciones en las representaciones 2D de formas 3D (tonos de color gris) y su uso; reconstrucción de formas 3D a partir de las vistas.

Para describir los resultados usaremos seudónimos y en las fotografías dejaremos visibles solamente aquellas expresiones en los niños que ilustren las acciones a las que nos referimos.

RESULTADOS

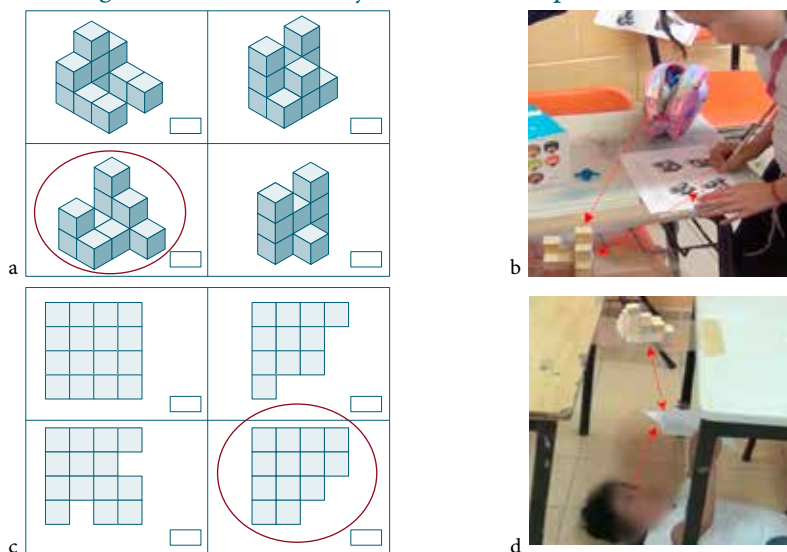
Este apartado está organizado en dos subsecciones: en la primera, describimos y analizamos las acciones de reconocer, representar y reconstruir que los niños aprenden en esta trayectoria y ejemplificamos con diferentes niños las acciones observadas en cada una de las actividades; en la segunda subsección damos cuenta de cómo el movimiento (objeto/sujeto; físico/mental) se relaciona con la percepción del espacio y la construcción de sistemas de referencia, y lo mostramos con el caso de Luis.

Diferentes vistas de una forma tridimensional. Reconocer, representar y reconstruir

La primera actividad (Fig. 3) se centró en reconocer la forma de cuatro diferentes objetos 3D (Figs. 3b y 3d) para relacionarlos con sus vistas isométrica y ortogonales (Figs. 3a y 3c).

En el desarrollo de la tarea, los niños experimentaron ver el objeto (sólido, fijo, sin tocarlo), ubicando su cuerpo de manera que les permitiera identificar cada una de estas vistas. Ejemplificamos estas acciones con Ana y Bruno, quienes exploran diferentes vistas con cubos de madera y representaciones con escala de grises.

Figura 3. Relación de objeto 3D con su representación 2D



Fuente: elaboración propia.

Ana ubicó su cuerpo de manera que en su campo de visión contempló tres vistas del objeto 3D —superior, lateral izquierda, lateral derecha— como lo indican las flechas en la Fig. 3b (evidencia de categorías CV, M, CD). Previamente, ella había rodeado el objeto para elegir el punto de referencia más adecuado. Bruno, por su parte, exploró la vista inferior del objeto 3D (Fig. 2d); para ello se acostó en el piso y movió la hoja hasta encontrar la correspondencia entre alguna de las representaciones disponibles (acción reconocer) con el objeto observado. Para ver el objeto desde arriba (vista superior) los niños se subieron en una silla (evidencia de categorías CV, M, CD).

La segunda actividad implicó identificar una vista de un objeto 3D de entre cuatro dadas. El objeto se caracteriza por ser un sólido de madera con colores que diferencian cada

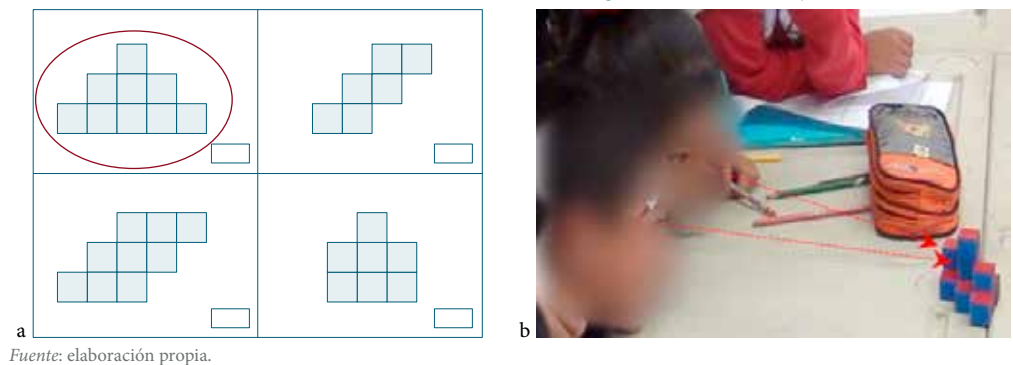
vista ortogonal: superior (rojo), lateral derecha (azul oscuro), lateral izquierda (azul claro), frontal (verde), inferior (amarillo) y vista posterior (negro). El objeto no puede moverse, por lo que las acciones de movimiento son del observador. En la Fig. 4b, Carlos y Daniela inclinan su cuerpo para que su campo de visión quede a la misma altura del objeto 3D a observar. Así, ellos reconocen la vista frontal y encuentran el ángulo de visión adecuado para ver, únicamente, el color verde (evidencia de categorías CV, CD).

Las flechas en la Fig. 4b indican la ubicación de la niña y el niño a fin de reconocer y relacionar distintas vistas. Construir estas relaciones les implicó establecer correspondencia entre el color observado (objeto 3D) y la vista ortogonal (2D) (evidencia de categorías CV, M, CD). Inferimos que la acción de movimiento

del cuerpo y, por ende, transitar entre diferentes puntos de referencia respecto al objeto observado (Figs. 3b, 3d, 4b) les permitió

discriminar la correspondiente representación 2D (Figs. 3a, 3c, 4a) del objeto observado.

Figura 4. Reconocimiento de vistas ortogonales de un objeto 3D



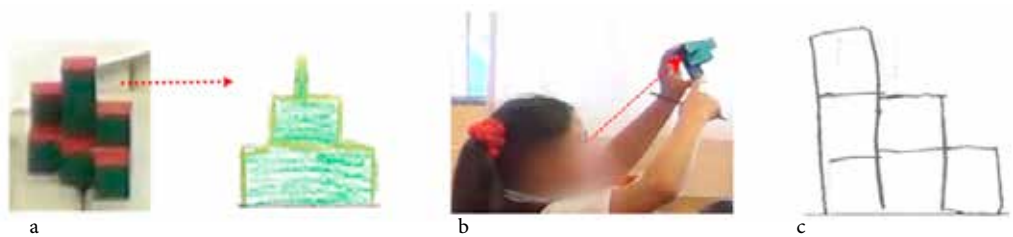
Representar y reconocer

En esta trayectoria se incluyó también el movimiento del objeto para representar alguna de sus vistas (segunda actividad) o dar indicaciones para una construcción (tercera actividad). En este caso, los niños ubicaron y rotaron el objeto, según la vista a reconocer. En la Fig. 5 ilustramos este vínculo entre reconocer y representar la vista frontal (representada con cuadrados verdes) y la vista inferior (representada con cuadrados amarillos).

En la Fig. 5a se muestra el paso del objeto a un tipo de dibujo de la cara frontal. En este caso, Erica traza un plano esquemático intentando representar un dibujo prerrealista, diferenciado por tres niveles (nivel se refiere a la cantidad de cubos que hay en cada configuración horizontal). Nuestra interpretación del

dibujo de Erica es que ella puede reconocer, en el objeto dado, la organización de los cubos en secciones horizontales (filas, de abajo hacia arriba y viceversa), pero no la organización en secciones verticales (columnas, de derecha a izquierda y viceversa). Además, la variación en el tamaño del primero y segundo nivel parece ilustrar la profundidad, lo que ella percibe. En este sentido, Erica reconoce y dibuja el todo del objeto, pero no traza las divisiones verticales. Estos resultados coinciden con las dificultades señaladas previamente por Pani y Dupree (1994) respecto a la percepción de relaciones de perpendicularidad en formas tridimensionales. Por consiguiente, se requiere integrar a la trayectoria propuesta otras actividades que permitan a los niños aprender estrategias para representar este tipo de vistas.

Figura 5. Reconocimiento de vistas y de ubicación de cubos



Fuente: elaboración propia.

Para identificar la vista inferior, el paso del objeto al dibujo esquemático se ve influenciado por el movimiento del objeto que Erica realiza (Fig. 5b). Al parecer ella representa el todo (la forma de la cara) y sus partes (caras de los cubos) de la vista observada (Fig. 5c). Interpretamos que los dibujos de Erica muestran su desarrollo representacional respecto a la identificación de los cubos que conforman una construcción, diferenciados por niveles (evidencia de categorías CV, CD).

Estos dos ejemplos de representaciones confirman lo señalado por Mitchelmore (1980) sobre las etapas en el desarrollo de la percepción del espacio y el aprendizaje de las convenciones de representaciones ortogonales, esto es, relaciones entre lo que los niños “ven” y lo que “saben” respecto a las características geométricas. En este caso, los objetos están contruidos con varios cubos adheridos unos junto a otros por alguna(s) cara(s).

Representar y reconstruir

Las tres actividades siguientes involucran construcciones a partir de diferentes informaciones. La actividad 3 de la trayectoria incluye tareas de réplica de un módulo multicubo (Fig. 6). En parejas, un niño da las instrucciones de la ubicación de cada uno de los cubos mientras que el otro sigue estas indicaciones para reconstruirlo. Ninguno de ellos puede ver lo que el otro ve o hace.

Figura 6. Reconocimiento de vistas y reconstrucción del objeto con cubos



Fuente: elaboración propia.

Dar indicaciones implicó para los niños establecer relaciones de dirección como “arriba de”, “al lado de”, “a la derecha o izquierda de” y de movimiento de cubos. Para quien las recibía y seguía, implicó interpretarlas considerando como punto de referencia su compañero (evidencia de categorías CV, L, DesC). En esta actividad los niños usaron tanto características del objeto 3D (formado por cubos) como el conteo, lo que coincide con lo señalado por Sack y Vazquez (2011) respecto a la habilidad de los niños para realizar codificaciones numéricas. Una variación en complejidad de esta actividad consistiría en ubicar las parejas de frente o de espaldas, asunto que no se consideró para este experimento.

En la cuarta actividad, los niños reconstruyeron un objeto 3D usando algunos policubos a partir de una representación isométrica 2D (Figs. 7a, 7b) y después, en la actividad, 5 de ellos debían dibujar las piezas utilizadas. En este caso Ismael exploró diferentes formas de ensamble de policubos (estrategia de ensayo y error) hasta lograrlo (Fig. 7a), estrategia usada por varios de ellos. Para dibujar cada policubo usado en la construcción, Ismael superpuso cada pieza y calcó su contorno (Fig. 7b), por lo que su representación conserva tanto el área como la forma (evidencia de categoría OP). Este tipo de representación es plana esquemática (Mitchelmore, 1980), lo que da cuenta de que representa una vista ortogonal.

En la última actividad se usaron colores para diferenciar cada policubo (representación y material manipulable, Fig. 7c) y los niños debían reconstruir el objeto representado isométricamente. La complejidad de la actividad consiste en encajar los siete policubos para obtener la construcción representada. Karla usa la superposición con otra finalidad: reconocer la ubicación de un policubo en la representación 2D y ensamblarla en la construcción (evidencia de categorías CV, L, DesC). En ese proceso hizo diferentes movimientos geométricos (traslaciones, rotaciones y giros), estrategia que le permitió encajar el último policubo en el espacio faltante.

Figura 7. Construcción de objetos 3D a partir de representaciones 2D



Fuente: elaboración propia.

Para construir los objetos dada una representación isométrica fue necesario que los niños interpretaran convenciones de colores o tonos de gris, según fuera el caso. Algunas de estas representaciones estaban a escala y otras conservaban tamaños de la representación y los policubos, por lo que los niños usaron procedimientos de codificación y decodificación, así como composición

y descomposición de las formas 3D para lograr las construcciones, como se ilustró con Ismael y Karla. Estas acciones permitieron a este grupo de niños seguir aprendiendo respecto a las relaciones entre lo que se “ve” y lo que se “sabe” de la forma.

Cabe destacar que todos los niños, en ambos ciclos de la implementación, lograron concluir cada una de las actividades.

Figura 8. Ejemplos de construcciones a partir de una representación isométrica

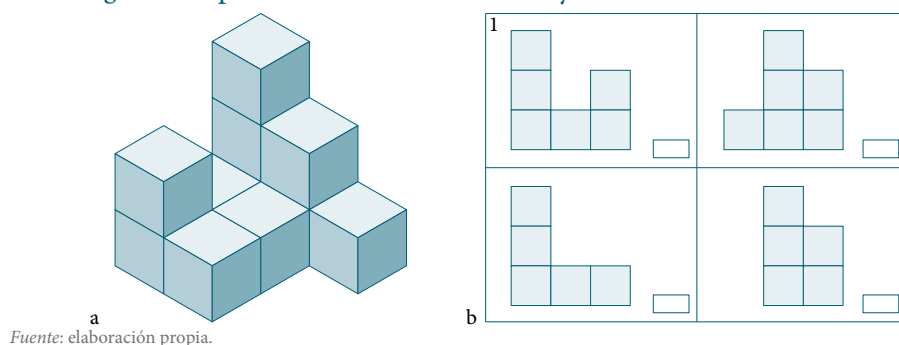


Fuente: elaboración propia.

Al replicar cada construcción los niños mostraron avances para identificar cubos y policubos ubicados en una determinada posición. A lo largo de este experimento, el proceso de decodificación se identificó en los estudiantes en las actividades de construcción antes descritas. Acciones que dan cuenta de ello son sus movimientos físicos (transformaciones), como rotación y giros para lograr los ensambles, verbalizar la posición de las piezas por sus colores (encima de alguna pieza, al lado) y reconocer diversas vistas de

cada policubo. Las experiencias que favorecieron contrastar la posición y orientación de los policubos, así como los cambios de dimensión (espacio representacional y espacio geométrico) y la invariancia entre la cantidad y formas de los policubos permitieron que los estudiantes avanzaran en el reconocimiento de representaciones de objetos 3D. Además, la comunicación de indicaciones para la construcción generó en ellos la necesidad de usar un lenguaje más preciso para indicar dirección y proximidad.

Figura 9. Representación tridimensional y vistas de un módulo multicubo



Construcción del significado del sistema de referencia.

¿Quién se mueve, cómo y para qué?

Las acciones que posibilitan al sujeto analizar el espacio donde se encuentra y reconocer las convenciones que como observador tiene del objeto de análisis son fundamentales en el desarrollo del razonamiento espacial. Por ejemplo, dónde ubicarse respecto al objeto o cómo ubicar al objeto a fin de reconocerlo, reconstruirlo o representarlo. En este apartado mostraremos el caso de Luis para ilustrar lo realizado por los demás niños en las actividades; con ello pretendemos dar cuenta de cómo este tipo de experiencias sensorio-motrices, propuestas en la trayectoria, contribuyen a poner en diálogo lo concreto (perceptivo) y lo abstracto, e inciden en la posibilidad de establecer relaciones espaciales.

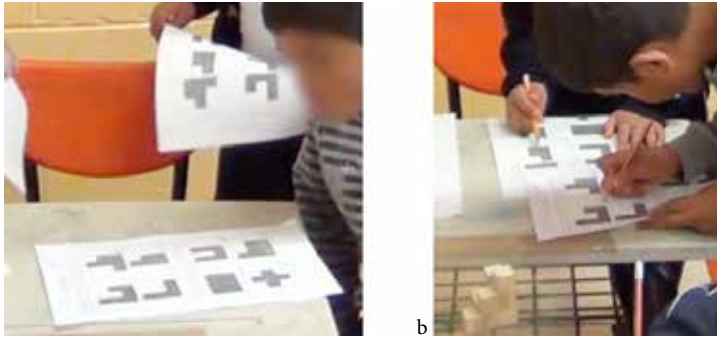
El sujeto se mueve, el objeto no. Acción de reconocer, procedimiento de decodificar

En la actividad 1 el objeto permanecía fijo, con lo cual se fomenta la realización de acciones de movimiento del cuerpo para identificar diferentes vistas. Explorar las diferentes vistas de los módulos multicubos permitió a los niños reconocerlas en su representación en

escala de grises. La Fig. 9a representa el módulo multicubo (representación isométrica) que los niños observan físicamente y la Fig. 9b son representaciones ortogonal-frontal de varios módulos multicubos. Los niños debían reconocer y relacionar cuál de las representaciones ortogonales le correspondía al módulo objeto de análisis. Para que ellos diferenciaron la vista frontal de las otras vistas fue necesario construir un sistema de referencia local para identificar esta vista, dada la ubicación de las mesas de trabajo (Fig. 3).

En el desarrollo de esta actividad, Luis identificó la vista superior e inferior sin dificultad, pero no fue así para las laterales y frontales (evidencia de categorías CV y L). Reconocer la vista frontal (Fig. 9a) y la vista lateral le requirió ubicar su cuerpo frente al objeto físico (Fig. 10a) y así identificar su forma (Figs. 9b y 10b). Lo anterior confirma lo señalado por Pany y Dupree (1994) en el sentido de que comprender y relacionar la ubicación y la forma de una representación bidimensional (vista del módulo ortogonal) con su correspondiente forma tridimensional (en este caso, módulo multicubo) es una tarea compleja, pues requiere que el observador tenga un punto de referencia como elemento de un marco de referencia local.

Figura 10. Relación de objeto 3D con vistas 2D



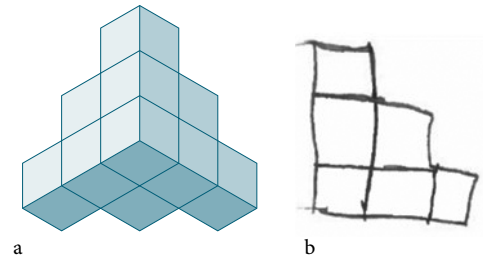
Fuente: elaboración propia.

El objeto se mueve, el sujeto no. Representar y reconstruir

La segunda actividad planteaba el reconocimiento y representación de la vista lateral derecha del objeto dado (representado en la Fig. 11a). Luis logró representar la vista lateral derecha del módulo multicubo (Fig. 11a) a través del conteo y la ubicación de la pieza en el módulo observado (Fig. 11b).

Las acciones realizadas fueron ubicar el módulo frente a él (Fig. 12a) para reconocer la forma de la vista a dibujar y después usar el conteo de caras de los cubos visibles (evidencia de la categoría DesC) usando como referentes el color de cada vista y el nivel (Fig. 12b).

Figura 11. Dibujo de vista lateral derecha



Fuente: elaboración propia.

Figura 12. Estrategias para reconocer vistas de módulo multicubo



Fuente: elaboración propia.

En la tercera actividad los niños se organizaron en equipos. En cada equipo, la mitad daba las indicaciones para la construcción de un módulo multicubo (que tenían físicamente) mientras que la otra mitad lo reconstruía

a partir de las indicaciones recibidas. A Luis le correspondió dar las instrucciones de construcción, y para ello usó nuevamente el conteo (Fig. 13) para comunicar la cantidad de cubos en cada nivel. Sus acciones fueron ubicar

Figura 13. Estrategia de conteo para dar indicaciones de construcción



Fuente: elaboración propia.

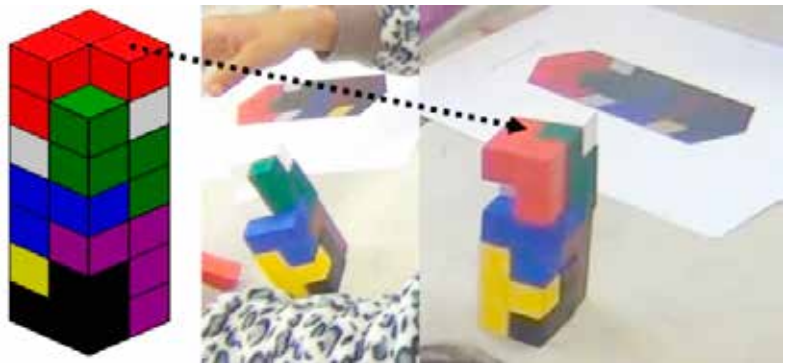
el módulo multicubo frente a él y girarlo para reconocer tanto la cantidad como la forma en cada vista, usando como referente el color que las diferenciaba (evidencia de las categorías M y DesC). Nuestra interpretación de estas acciones es que Luis reconoce la estructura y organización de la forma 3D, y la diferencia por nivel.

Dar indicaciones para reconstruir una forma 3D con policubos fue un reto para Luis, pues lo llevó a experimentar con los manipulativos concretos e imaginar movimientos (rotaciones y giros) antes de realizarlos. Con estas experiencias, Luis mostró aprendizajes para establecer vínculos entre representaciones isométricas y ortogonales con su correspondiente módulo multicubo. Sin embargo, interpretar una representación isométrica para construir una forma 3D usando policubos continuó siendo un reto para él (Fig. 14).

En la actividad 6 Luis tuvo dificultades para decodificar la representación dada

(Fig. 14), pues no ubicó correctamente las piezas, lo que lo llevó a obtener una primera construcción parcialmente correcta porque algunas piezas coincidían con las de la tarea. Aunque esta construcción no fue una réplica de la dada, él relacionó los policubos por colores y creó su propia construcción, manteniendo la conexión entre las piezas (evidencia de las categorías CV, L y M). Como señala Lawrie (2012), en una representación 2D se pierde información y el sujeto debe reconstruirla haciendo uso de sus propias experiencias y representaciones interiorizadas. En la representación isométrica (Fig. 14) había cubos ocultos, por lo que Luis debía interpretar y visualizar la ubicación de cada pieza, contrastar e imaginar la información faltante en la representación. Nuestra interpretación de esta dificultad es que entró en tensión lo que él sabía de la forma (material manipulativo, su percepción) y lo que él veía en la representación 2D, como lo refieren Pittalis y Christou (2013).

Figura 14. Construcción de objeto 3D a partir de interpretación de representación 3D

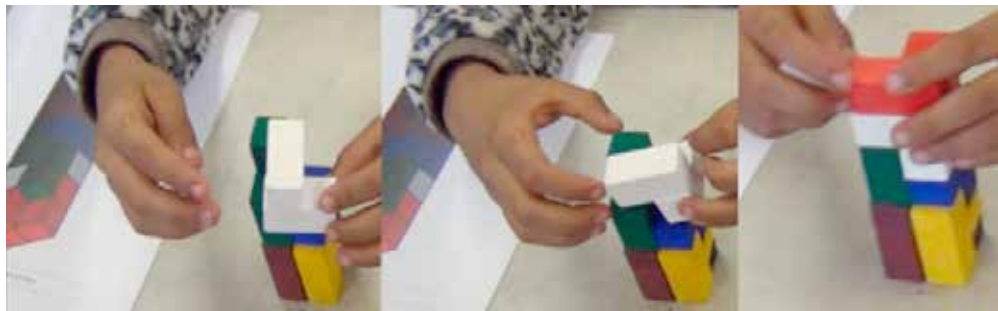


Fuente: elaboración propia.

En este proceso de aprendizaje de cambio de dimensión (procedimiento de decodificación) fue necesario que Luis notara, con una intervención de enseñanza, la relación entre colores y orden para colocar los policubos, sin indicarle la posición u orientación. Como se muestra en la Fig. 15, Luis ubicó el policubo en diferentes posiciones, contrastó algunas de las

vistas del objeto con la representación dada y así logró concluir su construcción (evidencia de la categoría CV). Él descubrió, después de varios intentos (persistencia), la organización de cada policubo a través de rotaciones y giros para ensamblarlos como un todo; esta estrategia le permitió avanzar en su construcción (Figs. 14 y 15).

Figura 15. Proceso de construcción de objeto 3D



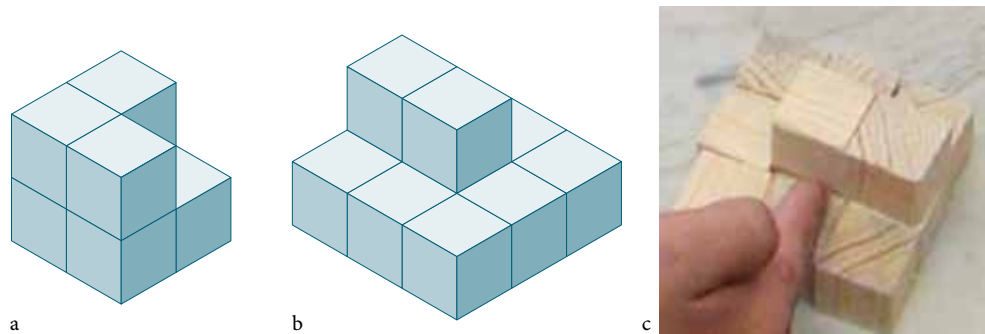
Fuente: elaboración propia.

El sujeto imagina el objeto y hace rotaciones (mentales)

Al finalizar la última sesión, en la puesta en común se analizó si los niños reconocían los cubos ocultos en las representaciones (Figs. 16a, 16b). En la descripción y análisis que sigue, además del trabajo de Luis, también se refiere el de Mónica, pues esta interacción le favoreció a Luis para identificar cubos ocultos en una representación.

Algunos niños contaban sólo aquellos cubos que percibían completos, y otros únicamente contaban las caras, interpretándolas como cubos. En la Fig. 16a, Luis identificó dos cubos mientras que Mónica fue la única de los 34 estudiantes que identificó los 7 cubos de este módulo. Cuando se le pidió que explicara, ella afirmó que había cubos “escondidos” en el primer nivel y los mostró (evidencia de la categoría CV).

Figura 16. Representación de dos formas 3D



Fuente: elaboración propia.

Para la representación 16b, Luis descompuso la forma en niveles y contó los cubos (ocultos y visibles) por nivel, replicando la misma estrategia compartida por Mónica (evidencia de la categoría CV). Él afirmó que eran 11. Cuando se le preguntó por el total de cubos escondidos, Luis afirmó muy seguro “tres y medio” (Fig. 16b).

Luis mostró evolución en su percepción del espacio y de los cambios de dimensión. Al inicio tuvo dificultades para identificar y relacionar las vistas de módulos multicubos con sus representaciones; pero a medida que experimentó con este tipo de módulos e intercambió estrategias con sus pares, usó el conteo para relacionar cada vista del módulo con las representaciones 2D (evidencia de la categoría DesC), aprendió a notar cubos ocultos y desarrolló habilidades de visualización y descomposición de la representación dada para identificar sus elementos (cantidad de cubos).

Cuando no se cuenta con el objeto 3D (físicamente), sino con una representación 2D (ortogonal o isométrica, por ejemplo) es necesario aprender estrategias como la interpretación de convenciones, el uso de escala de grises y el descubrimiento de información oculta. Una de las principales estrategias empleadas para completar esta información fue el conteo, tanto en Luis como en Mónica. Interpretamos estas acciones como resultado de procesos de composición y descomposición —juntar y separar—, como lo señalan Clements *et al.* (2014), fundamentales tanto en aritmética (con los números), como en geometría (con formas bidimensionales y tridimensionales). Indicar la cantidad de cubos en una representación favoreció el paso de lo concreto a lo abstracto para diferenciar el espacio representado del geométrico y complementarlos.

DISCUSIÓN

En la trayectoria de aprendizaje 34 estudiantes exploraron diferentes vistas del mismo objeto y experimentaron implicaciones en la

percepción de formas en el espacio cuando hay movimiento físico del objeto o del sujeto, además de poner en diálogo las relaciones del sistema de referencia y el punto de vista del observador. Por un lado, el uso de colores para diferenciar las vistas de un objeto generó en los niños la necesidad de ubicarse en un ángulo de visión adecuado para su identificación (Figs. 5, 6, 12) y los tonos de gris les dieron información sobre la profundidad del objeto representado. Experimentar con estas convenciones permitió a los participantes en esta investigación reconocer niveles y posiciones de piezas (Figs. 3, 9, 16) y, al mismo tiempo, relacionarlos con las sombras (tonos de grises más oscuros). Por otro lado, utilizar diferente color para cada policubo favoreció establecer correspondencia entre la posición y ubicación de esta pieza en la representación, con el objeto en construcción, y viceversa (Figs. 8, 14, 15).

Además, al fomentar la producción de sus propios dibujos de alguna vista, este grupo de alumnos se familiarizó con convenciones para representar tridimensionalidad, lo que les generó retos. En este caso, al representar las vistas superiores o frontales no lograron ilustrar relaciones de perpendicularidad entre líneas oblicuas, dificultad reportada por Pani y Dupree (1994). Por lo anterior, consideramos que esta trayectoria requiere de actividades adicionales que enseñen a transitar de planos esquemáticos a realistas (Mitchellmore, 1980). Resultados de otros estudios afirman que desarrollar estas habilidades está estrechamente ligado con el desarrollo de la percepción del espacio.

Los cambios de dimensión son naturales en actividades de construcción a través de la composición y descomposición de multicubos y policubos. Comparar diferentes representaciones para decidir el objeto representado permitió a los niños generar sus propias estrategias para reconocer si hay cubos que “no se ven”, “están escondidos” o “hay huecos”, y así poner en diálogo lo que se ve y lo que se sabe. Podemos afirmar que la trayectoria favoreció, en este grupo de estudiantes, la visualización

y rotaciones mentales al construir una forma 3D con los siete policubos a partir de su representación isométrica, en acciones como interpretar y reconocer la ubicación de todos los cubos de cada policubo. En este proceso, la comparación fue una estrategia de monitoreo para validar la correspondencia entre la representación y la construcción (parcial o completa), así como la anticipación de cómo ubicar las piezas: imaginar antes de hacerlo físicamente.

Movimientos como rotaciones y giros permitieron la visualización de piezas ocultas en las representaciones, así como el conteo y la identificación de que con las mismas piezas es posible armar diferentes módulos que ocupan el mismo espacio. Estas experiencias posiblemente ayuden en la comprensión del significado de volumen que, según Mamolo *et al.* (2015) y Teixidor (2016), es una dificultad común en los estudiantes. Al respecto, es necesaria más investigación que pueda dar cuenta de un seguimiento más puntual.

La construcción de un objeto 3D a partir de información suministrada en una representación isométrica o descripción verbal oral de otro compañero promovió el uso de términos (expresiones lingüísticas) y de movimientos corporales para comunicar relaciones espaciales. Lo anterior sustenta la relevancia del lenguaje (palabras y gestos) para comunicar acciones como un puente entre el significado y la construcción de conocimiento geométrico, en particular, el establecimiento de convenciones. Todos los niños participantes, con edades de 6 a 8 años, terminaron sus construcciones, evidencia de avances en la comprensión e interpretación en la lectura de las representaciones isométricas dadas de objetos tridimensionales. Esto contrasta con los resultados de Dindyal (2015), quien identificó dificultades cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de problemas que impliquen lectura de representaciones. Hace falta más investigación al respecto.

CONCLUSIÓN

Los resultados del experimento de enseñanza, ejemplificados con acciones realizadas por este grupo de niños de 6-8 años, ilustran las potencialidades de la trayectoria de aprendizaje propuesta para ser implementada en salones de clase.

Respecto a la primera pregunta de investigación, resultado de los dos ciclos implementados en este experimento, podemos afirmar que la secuenciación de las actividades posibilitó a los niños integrar procesos como reconocer, representar y reconstruir objetos 3D a través de diferentes representaciones bidimensionales (ortogonales y isométricas), lo cual se evidenció en acciones verbales y no verbales (movimientos corporales). En particular, las tareas que implicaron a los estudiantes transitar entre materiales manipulables y representaciones abstractas propiciaron el desarrollo de elementos del razonamiento espacial como de-construir, situar, sentir e interpretar. Éstas se evidenciaron en acciones como visualizar, comparar, mover, localizar, des-componer, codificar y decodificar, necesarias para construir el significado de sistema de referencia y el rol del observador.

Respecto a la segunda pregunta, reiteramos que las tareas de des/re/composición y cambios de dimensión (2D ↔ 3D) con material manipulable lograron impulsar tanto la interpretación de representaciones —isométricas y ortogonales (decodificación)— como el dibujo de representaciones ortogonales (codificación). En este proceso el uso de materiales manipulativos fue fundamental. Como se mostró en este artículo, es indispensable para el diseño de tareas de una trayectoria de aprendizaje considerar dificultades documentadas, en este caso particular, la tridimensionalidad, pues ayudan en la toma de decisiones sobre el tipo de tareas y su secuenciación.

En suma, sostenemos que en esta trayectoria se conjuga el *movimiento* del cuerpo y los objetos con la *interpretación* de movimientos

como rotaciones, traslaciones y superposición, relaciones implícitas de congruencia y semejanza, la de-construcción para identificar los polígonos a utilizar y poder replicar (construir) un objeto dado, así como el conteo y relación de cubos de las representaciones con los objetos. Afirmamos también que la percepción sensorio-motriz necesita enriquecerse con estrategias para transitar entre lo concreto (acciones sobre objetos) y lo abstracto

(transformaciones entre representaciones) desde edades tempranas. No obstante, es necesario continuar con acciones escolares para aprender las relaciones y diferencias entre el objeto representado (espacio representativo) y su representación (espacio geométrico), empezando en edades tempranas. En consecuencia, es imperante continuar con investigaciones sobre cómo promover el desarrollo del razonamiento espacial en las aulas de clase.

REFERENCIAS

- CLEMENTS, Douglas, Arthur Baroody y Julie Sarma (2014), *Research Background on Early Childhood Mathematics*, Washington, Background Research for the National Governor's Association (NGA)-Center Project on Early Mathematics.
- COBB, Paul y Koeno Gravemeijer (2008), "Experimenting to Support and Understand Learning Processes", en Anthony Kelly, Richard Lesh y John Baek (eds.), *Handbook of Design Research Methods in Education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 68-95.
- DAVIS, Brent y Spatial Reasoning Study Group (2015), *Spatial Reasoning in the Early Years: Principles, assertions, and speculations*, Nueva York, Taylor y Francis.
- DEL GRANDE, John (1990), "Spatial Sense", *The Arithmetic Teacher*, vol. 37, núm. 6, pp. 14-20.
- DINDYAL, Jaguthsing (2015), "Geometry in the Early Years: A commentary", *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 47, núm. 3, pp. 519-529.
- FASTAME, Maria-Chiara (2017), "Empowering Visuo-Spatial Abilities among Italian Primary School Children: From theory to practice", en Myint-Swe Khine (ed.), *Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming research into practice*, Cham (Suiza), Springer International Publishing, pp. 125-141.
- FREUDENTHAL, Hans (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Reidel Publishing Company.
- GAL, Hagar y Liora Linchevski (2010), "To See or not to See: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 74, núm. 2, pp. 163-183.
- GONZÁLEZ, Angelina y Mario Sánchez (2020), "Conocimientos de docentes de primaria en formación respecto a perímetro y área de polígonos", *Perfiles Educativos*, vol. 42, núm. 169, pp. 70-87.
- GONZATO, Margherita, Teresa Fernández y Juan Díaz-Godino (2011), "Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial", *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 77, pp. 99-117.
- GUTIÉRREZ, Ángel (1992), "Procesos y habilidades en visualización espacial", en Ángel Gutiérrez (ed.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, Valencia, pp. 44-59.
- HALLOWELL, David, Yukari Okamoto, Laura Romo y Jonna La Joy (2015), "First-Graders' Spatial-Mathematical Reasoning about Plane and Solid Shapes and their Representations", *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 47, núm. 3, pp. 363-375.
- KHINE, Myint (2017), "Spatial Cognition: Key to STEM success", en Khine Myint (ed.), *Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming research into practice*, Cham (Suiza), Springer International Publishing, pp. 3-8.
- LAWRIE, Tom (2012), "Visual and Spatial Reasoning: The changing form of mathematics representation and communication", en Kaur Berinderjeet y Lam Tin (eds.), *Reasoning, Communication and Connections in Mathematics*, Singapur, National Institute of Education, pp. 149-168.
- MAMOLO, Ami, Robyn Ruttenberg-Rozen y Walter Whiteley (2015), "Developing a Network of and for Geometric Reasoning", *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 47, núm. 3, pp. 483-496.
- MITCHELMORE, Michael (1980), "Prediction of Developmental Stages in the Representation of Regular Space Figures", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 11, núm. 2, pp. 83-93.

- ORTIZ, Andrea (2018), *Desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas: una propuesta didáctica para la exploración de representaciones 2D y 3D*, Tesis de Maestría, México, Universidad Pedagógica Nacional.
- ORTIZ Rocha, Yudi Andrea e Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres (2019), “Desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas a través del uso de rompecabezas con ‘pentominós’”, en María-Angélica Buendía (ed.), *Memoria electrónica del Congreso Nacional de Investigación Educativa (COMIE)*, vol. 4, núm. 4, pp. 1-12.
- PALMÉR, Hanna y Jorrryt van Bommel (2020), “Young Students Posing Problem-Solving Tasks: What does posing a similar task imply to students?”, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 52, núm. 4, pp. 743-752.
- PANI, John y Davido Dupree (1994), “Spatial Reference Systems in the Comprehension of Rotational Motion”, *Perception*, vol. 23, núm. 8, pp. 929-946.
- PIAGET, Jean y Bärbel Inhelder (1956), *The Child's Conception of Space*, Londres, Routledge & Kegan Paul.
- PITTALIS, Marios y Constantinos Christou (2013), “Coding and Decoding Representations of 3D Shapes”, *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 32, núm. 3, pp. 673-689.
- REINHOLD, Simone, Bianca Beutler y Carla Merschmeyer-Brüwer (2013), “Pre-schoolers Count and Construct: Spatial structuring and its relation to building strategies in enumeration-construction tasks”, en Anke Lindmeier y Aiso Heinze (eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking*, Kiel (Alemania), PME, vol. 4, pp. 81-88.
- SACK, Jacqueline e Irma Vazquez (2011), “Development of a Learning Trajectory to Conceptualize and Represent Volume Using Top-View Coding”, en Ubuz Behiye (ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Developing Mathematical Thinking*, Ankara (Turquía), PME, vol. 4, pp. 89-98.
- SARAMA, Julie y Douglas Clements (2009), *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning trajectories for young children*, Nueva York, Routledge.
- SERRANO, Ángela-María, Rafael Ramírez y Pablo Flores (2018), “El sentido espacial sobre traslaciones en un libro de texto”, *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 98, pp. 117-131.
- STEFFE, Leslie y Patrick Thompson (2000), “Teaching Experiment Methodology: Underlying principles and essential elements”, en Anthony Kelly y Richard Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, LAE, pp. 267-306.
- TAYLOR, Holly y Allyson Hutton (2013), “Think3d!: Training spatial thinking fundamental to STEM education”, *Cognition and Instruction*, vol. 31, núm. 4, pp. 434-455.
- TEIXIDOR Cárdenas, Esperanza (2016), “3D, 2D, 1D”, *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 92, pp. 93-103.
- UTTAL, David, Nathaniel Meadow, Elizabeth Tip-ton, Linda Hand, Alison Alden, Christopher Warren y Nora Newcombe (2013), “The Malleability of Spatial Skills: A meta-analysis of training studies”, *Psychological Bulletin*, vol. 139, núm. 2, pp. 352-402.