

Estudio exploratorio sobre la efectividad del método abierto basado en números (ABN) en las habilidades de cálculo mental en educación primaria

CARLOS PÉREZ WILSON* | IVONNE GONZÁLEZ SAN MARTÍN**
MARÍA JOSÉ ARAVENA VÁSQUEZ*** | GAMAL CERDA-ETCHEPARE****

El trabajo presenta una comparación respecto del desempeño en tareas de cálculo mental en educación primaria, entre establecimientos educativos que adoptan el método abierto basado en números (ABN) respecto de otros que imparten una enseñanza tradicional, relacionada con las prácticas habituales del profesorado, o bien sugerida en algunos libros de texto. La experimentación se llevó a cabo en cursos de primer año de primaria de cuatro escuelas, dos de ellas públicas, una particular privada y una particular subvencionada de Chile. Se diseñó y aplicó una prueba de cálculo mental de ejercicios aditivos con dos y tres sumandos, con la cual se midieron habilidades de rapidez y de precisión. Un análisis de diferencias inter-grupos evidencia la efectividad de la metodología ABN por sobre la tradicional en las mediciones realizadas. Se discuten los resultados y sus proyecciones dentro del contexto educativo chileno.

This work presents a comparison in the performance of mental calculation tasks in primary education, between educational institutions adopting an open method based on numbers (ABN) and those employing traditional teaching methods, related to habitual practices by professors or as suggested by some textbooks. This experiment was conducted during the first-year courses of primary education in four schools, two of them public, another one was private, and the fourth one was private with subsidies from the Chilean government. We designed and applied a mental calculation test with two and three sum exercises. We used these to measure speed and precision. An analysis of inter-group differences showed the effectiveness of the ABN methodology when compared to traditional teaching. We discuss the results and their projections within Chile's educational context.

Palabras clave

Competencia matemática
Cálculo mental
Métodos de enseñanza
Enseñanza de las matemáticas
Educación primaria

Keywords

Math competency
Mental calculations
Teaching methods
Math teaching
Primary education

Recepción: 27 de enero de 2021 | Aceptación: 22 de julio de 2022

DOI: <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2023.180.60206>

* Profesor asociado en el Instituto de Ciencias Sociales de la Universidad O'Higgins (Chile). Doctor en Matemáticas Aplicadas. Líneas de investigación: enseñanza y aprendizaje de la matemática en el ciclo escolar; adaptación de metodologías de enseñanza para estudiantes autistas. CE: carlos.perez@uoh.cl. ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6035-7341>

** Investigadora del Centro Interdisciplinario de Innovación Educativa (CIED) de la Universidad Santo Tomás (Chile). Doctora en Investigación Educativa y Psicología del Desarrollo. Líneas de investigación: inclusión escolar; atención a la diversidad; necesidades educativas especiales; matemática temprana; desarrollo cognitivo típico y atípico. CE: igonzalez.smartin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9752-8869>

*** Educadora diferencial de la Pontificia Universidad Católica de Chile (Chile). Magíster en Educación, mención gestión inclusiva. Líneas de investigación: pensamiento matemático; sentido numérico; conteo numérico; estrategias de enseñanza-aprendizaje; conteo. CE: cote-aravena@hotmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3710-9352>

**** Profesor titular de la Universidad de Concepción (Chile). Doctor en Psicología Aplicada. Líneas de investigación: cognición numérica; factores asociados al aprendizaje; matemática escolar; convivencia escolar; calidad de vida. CE: gamal.cerda@udec.cl. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3662-4179>

INTRODUCCIÓN

En el ámbito del estudio de los modelos mentales, de acuerdo con Johnson-Laird y Khemlani (2013), en el cálculo mental se reúnen varios tipos de razonamiento (relacional, sentencial, causal y cuantitativo, por mencionar algunos) con varios tipos de tareas (evaluación de la coherencia, formulación y evaluación de conclusiones dadas, por ejemplo), de manera que es posible predecir varios tipos de fenómenos, por ejemplo, la precisión, la latencia y los efectos de la modulación. El cálculo mental, en un sentido amplio, o específicamente el cálculo mental de operaciones aritméticas —también referido como *mental arithmetic* para asociarlo específicamente a este ámbito matemático— es una habilidad que emerge o es requerida cotidianamente para realizar cuentas, estimaciones, interpretar o producir información (McKenzie *et al.*, 2003). Rathgeb-Schnierer y Green (2019) proponen otra definición de carácter operacional e indican que el cálculo mental es la resolución de problemas aritméticos (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) mentalmente sin utilizar un procedimiento escrito estándar.

No es de extrañar, de acuerdo con el alcance de esta capacidad, que sea recogida y fomentada en los lineamientos curriculares de cada país. Una rápida revisión a la Enciclopedia TIMMS 2015 (Mullis *et al.*, 2016) muestra que el cálculo mental aparece explícitamente en casi todos los énfasis curriculares de los países que participan en dicha evaluación.

En referencia a países que se pueden considerar como referentes en educación matemática, Singapur, por ejemplo, establece dentro de los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación para la enseñanza primaria (MOE, 2012) el desarrollo de habilidades metacognitivas, y considera explícitamente el cálculo mental de las operaciones aritméticas y el uso de estrategias de cálculo mental para las cuatro operaciones. En el caso de Finlandia, el cálculo mental está presente en el currículo,

junto con el trabajo en la recta numérica y el énfasis manipulativo (Mullis *et al.*, 2016). Más aún, como mencionan Krzywacki *et al.* (2016), la rutina de cálculo mental al inicio de las clases es una tradición de décadas, y los profesores cuentan con materiales de apoyo para la realización de esos ejercicios.

El interés respecto de técnicas, heurísticas, estrategias y adaptabilidad para potenciar el cálculo mental también ha sido estudiado y reportado en la literatura. Al respecto se pueden citar, a modo de ejemplo, los trabajos de Threlfall (2002; 2009) y Torbeyns *et al.* (2009), relacionados con estrategias de compensación, descomposición, aproximación y, en general, a atender la contextualización de la oportunidad que presenta el propio problema aritmético para desarrollar lo que denominan flexibilidad estratégica, así como para encaminar adecuadamente el abordaje de este tipo de tareas matemáticas.

Por otro lado, la fluidez en el cálculo aritmético puede ser vista como un proceso de andamiaje de habilidades matemáticas asociadas con las funciones ejecutivas, como la memoria de trabajo, que comienzan con estrategias de tipo procedimental, como el conteo mental o kinestésico, y son reemplazadas o complementadas, a medida que se avanza en edad, por otras estrategias más eficientes, relacionadas con la evocación de hechos o soluciones desde la propia memoria (Price *et al.*, 2013). Esto resulta relevante en tanto que las funciones ejecutivas implicadas en estos procesos han demostrado ser buenos predictores del rendimiento académico posterior (Gilmore *et al.*, 2015; Orrantia *et al.*, 2018; Vanbinst y De Smedt, 2016).

Por ejemplo, una operación mental que opere dos cantidades menores que la decena puede ser resuelta mediante técnicas de conteo mental en la medida en que evoca fuertemente la conciencia fonológica y la memoria verbal. En cambio, operaciones con números mayores a la decena requieren evocar el orden posicional, lo cual genera una fuerte relación con la memoria de trabajo visoespacial (Hubber *et al.*, 2014).

En Chile, se han realizado algunas experiencias de intervención que evidencian la importancia del cálculo mental, y se fomentan estrategias para su fortalecimiento. Leger *et al.* (2014) desarrollan un sistema computacional para propiciar esta capacidad en niños y niñas de nivel primaria; al inculcar estrategias de redondeo y compensación han encontrado que la adición icónica por medio de su plataforma permite una mejor actitud de trabajo y acercamiento hacia el registro simbólico, además de optimizar el tiempo de respuesta para resolver un ejercicio de cálculo mental y mejorar el porcentaje de aciertos.

De esta manera, el objetivo de este trabajo es analizar los resultados asociados al efecto diferenciado que puede tener un enfoque instruccional específico —en este caso, el método ABN— para la enseñanza de la matemática sobre la capacidad de cálculo mental, medido a través de tareas de operatoria aritmética básica en niños y niñas de primeros años de enseñanza primaria en Chile. Este objetivo reviste un interés educativo y escolar inmediato, ya que el cálculo mental ha mostrado tener alta incidencia, junto con los niveles de razonamiento matemático, en los rendimientos académicos de las pruebas internacionales (Stacey *et al.*, 2015).

MARCO TEÓRICO

La enseñanza de la matemática en Chile

El sistema educativo chileno organiza a los establecimientos educativos según su administración: pública, privada con subvención del Estado y privada. Si bien ésta es una diferenciación de tipo administrativa, para efectos prácticos se constituye en una clasificación por situación socioeconómica, ya que las propias investigaciones sugieren una relación directa entre el tipo de administración de los establecimientos y la situación socioeconómica de las familias de los alumnos que asisten: los estudiantes de colegios públicos, subvencionados y privados son asociados a niveles socioeconómicos bajos, medios y altos

respectivamente (Bellei, 2013). No es de extrañar que esta estratificación socioeconómica exhiba permanentes diferencias en los niveles de logro de las pruebas estandarizadas nacionales, como SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad Educativa) o PSU (Prueba de Selección Universitaria), sumado a la variable tipo de establecimiento: persiste una fuerte correlación entre los resultados de las pruebas con los atributos de capital sociocultural y nivel socioeconómico (Rodríguez *et al.*, 2022). Esta importante estratificación constituye un claro signo de inequidad social, razón por la cual, en los resultados de aprendizaje en estas pruebas se observa que el nivel socioeconómico juega un rol determinante (Rodríguez *et al.*, 2019).

Las reformas en la educación chilena que se han implementado durante las últimas décadas han tenido escaso o nulo impacto en la mejora de la calidad de la educación chilena, además de algunas consecuencias negativas sobre la equidad educativa, como el aumento de la brecha en el puntaje de los exámenes (Valenzuela *et al.*, 2014).

Adicionalmente, las características de la oferta e ingreso a la educación superior afectan la formación del profesorado; persisten algunos problemas en su formación, como la desarticulación entre las actividades teóricas y prácticas, e igualmente entre contenidos disciplinares y pedagógicos, además de la falta de espacios para la reflexión sobre la actividad docente (Pino-Fan *et al.*, 2018). Además, dentro de las carencias formativas consecuencia de la formación de los profesores, la falta de autoeficacia para hacer y enseñar la resolución de problemas puede ser uno de los factores que impiden que modifiquen su práctica tradicional hacia prácticas más activas centradas en el estudiante (Saadati *et al.*, 2018). La preocupación por la formación de profesores es relevante, ya que la calidad de su desempeño tiene un efecto significativo en los resultados del aprendizaje. Un análisis desde las puntuaciones de la prueba SIMCE en octavo grado en Chile muestra estos efectos en el caso de

matemática (Canales y Maldonado, 2018). De la misma manera, la propia ansiedad matemática que exhiben los profesores en formación podría afectar la capacidad para desarrollar entornos de aprendizaje más inclusivos en el aula (Mizala *et al.*, 2015).

Lo anterior es relevante, ya que pareciera que los profesores planifican su actividad docente pensando en un estudiante idealizado, con una habilidad matemática innata, predominantemente racional y que autorregula sus conductas (Inostroza, 2016). En tal escenario idealizado, la manera en que los docentes enfrentan la enseñanza puede no ser cuestionada por ellos/ellas mismos/as.

El “método tradicional” en matemática

Si bien no es posible definir específicamente al método tradicional como metodología específica en sí misma, ésta debe ser entendida como un paradigma. Intuitivamente, es posible encontrar en la literatura un conjunto de características que comúnmente se pueden asociar a esta práctica metodológica. Así, por ejemplo, Crooks y Alibali (2014) plantean, como uno de los elementos principales de la metodología tradicional, el énfasis en conocer el procedimiento por sobre la comprensión conceptual, a lo que Yuanita *et al.* (2018) agregan la unidireccionalidad de la relación entre profesor y estudiante. Por su parte, Metz *et al.* (2016) asocian esta metodología tradicional al énfasis que se pone en el dominio de algoritmos fijos como un medio para lograr fluidez de procedimientos. Boaler y Selling (2017) complementan lo anterior al destacar el hecho que la metodología tradicional no facilita involucrar activamente a los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas, ni para la comprensión de éstas, ni para aquilatar sus identidades y relaciones con las matemáticas. Otro aspecto relevante en la asignación con la metodología tradicional viene dado por el uso del texto guía: bajo la metodología tradicional, el profesor se limita a explicar los métodos y procedimientos en la pizarra al comienzo de

la clase, para que los estudiantes practiquen con las preguntas del libro (Samuelsson y Samuelsson, 2016).

Una categorización que se presta adecuadamente a la comparación que se pretende realizar viene propuesta por Crespo (2016), quien destaca cinco características de lo que podría ser asociado a la enseñanza tradicional de la matemática: 1) el profesor es la única autoridad para validar las respuestas correctas; 2) el aula es vista como un espacio común, en donde las personas no trabajan juntas; 3) el estudiante no participa en razonamiento matemático; 4) hay un marcado énfasis en la búsqueda y hallazgo mecanicista de las respuestas; y 5) la matemática se presenta como un cuerpo de conceptos y procedimientos aislados.

Finalmente, es importante precisar que esta concepción tiene un fuerte componente sociocultural y geográfico, ya que lo que podría pensarse como la metodología tradicional en países que son reconocidamente vanguardistas en matemática, como China (Dai y Cheung, 2015), Singapur (Wong y Kaur, 2015) o Finlandia (Oksanen *et al.*, 2015), pasan a ser metodologías no tradicionales y deseables en otros lugares.

Método ABN

El método abierto basado en números (o método ABN), es una propuesta pedagógica y didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática inspirada en la corriente de la llamada matemática realista (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020; Papadakis *et al.*, 2017; Yuanita *et al.*, 2018).

Sus principios pedagógicos y didácticos tratan de recoger y mantener, en todo momento, un acercamiento a la realidad próxima del aprendiz a través de cinco características o énfasis: 1) el uso de contextos; 2) el uso de modelos; 3) el uso de las propias construcciones de los estudiantes; 4) un proceso de enseñanza interactivo; y 5) la interconexión de contenidos (Martínez-Montero y Sánchez; 2013; Martínez-Montero, 2018; Sirait y Azis, 2017).

El método ABN reúne varias características que lo alejan de lo que podría ser considerada una metodología tradicional. En primer lugar, se estructura curricularmente anticipando los escenarios de transición entre los niveles de infantil y primaria, mediante el uso de conceptos, materiales y actividades comunes para ambos niveles. En segundo lugar, se enfoca en el trabajo con la numerosidad o cardinalidad por sobre el trabajo con las cifras que componen un número, en particular, con la descomposición que otorga el valor posicional. Esto se fomenta mediante un trabajo detallado sobre los aspectos de composición y descomposición de cantidades. En tercer lugar, propone procedimientos o algoritmos para las cuatro operaciones aritméticas que replican, en su desarrollo y despliegue, el contexto de trabajo de las experiencias manipulativas previas. En cuarto lugar, este trabajo de operatoria aritmética adapta diferentes estrategias de trabajo, de acuerdo con la naturaleza aditiva o multiplicativa del problema, y así permite graduar adecuadamente el acercamiento hacia algunas de las dificultades propias de estos problemas, que residen en la inconsistencia entre la operatoria sugerida desde el lenguaje del problema enunciado, respecto de la operatoria aritmética subyacente. Finalmente, destaca que permanentemente se le pide a los niños y niñas reflexionar, contextualizar y verbalizar el procedimiento de trabajo matemático que se esté realizando con el profesor y sus pares, con el fin de propiciar la interacción e intercambio de argumentos y permitir la supervisión para el cabal entendimiento del problema y de su resolución.

Si bien como propuesta metodológica formal es de data relativamente reciente (Martínez-Montero y Sánchez, 2011), el método ha recogido evidencia respecto de sus efectos diferenciales favorables en algunas competencias matemáticas por sobre la enseñanza tradicional (Bracho-López *et al.*, 2014; Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2015; Aragón *et al.*, 2017a, 2017b; Cerda *et al.*, 2018).

Por lo anteriormente expuesto, la investigación ha querido responder a la siguiente pregunta: ¿existen diferencias en las capacidades de cálculo mental en la operatoria aritmética aditiva en niños y niñas, de acuerdo con la metodología de trabajo en matemática y al tipo de establecimiento al que asisten?

MÉTODO

La presente investigación está concebida desde un enfoque cuantitativo. Se busca analizar dos ámbitos asociados al cálculo mental: la rapidez de cálculo, entendida como la cantidad de operaciones llevadas a cabo en un periodo de tiempo determinado, y la precisión del cálculo, expresada como la cantidad de respuestas correctas obtenidas en un lapso de tiempo suficientemente amplio como para que cada estudiante pueda calcular y revisar la totalidad de los ejercicios propuestos.

Participantes

Para este estudio se tuvo acceso a cuatro establecimientos educativos de la región del Maule, Chile. En primer lugar, dos establecimientos que siguieran la metodología ABN, uno de administración municipal y otro subvencionado. Adicionalmente, y para efectos comparativos, se procedió a buscar dos establecimientos en la misma región que siguieran una metodología de tipo tradicional, en el sentido de que declaran no seguir una metodología en específico, sino que los profesores reportan una docencia basada en su propia experiencia, así como realizar la enseñanza de acuerdo a los lineamientos y programación que establecen los libros de texto, donde el profesor o profesora tiene un rol de trasmisor o aplicador de dichas actividades o tareas matemáticas (Crespo, 2016). Uno de estos establecimientos era igualmente de administración municipal, mientras que el otro era de administración privada.

Para asociar correctamente el grupo de establecimientos con metodología ABN, se consi-

deraron algunos criterios de inclusión al estudio, como por ejemplo: haber participado en cursos de capacitación de la metodología ABN impartidos por relatores/as certificados/as; haber participado en intervenciones en sus propias aulas; haber informado del uso de la metodología a los padres, madres y apoderados; y haber participado en sesiones de planificación curricular realizadas conjuntamente con el propio equipo de investigadores.

La elección de estos cuatro tipos de establecimientos buscaba demostrar que la adopción de esta metodología puede determinar resultados favorables —o al menos comparables— entre establecimientos de características socioeconómicas diferentes. Así, respecto del referente, ambos colegios públicos (ABN y tradicional) fueron elegidos buscando características socioeconómicas similares para poder ser caracterizada mediante un índice de vulnerabilidad similar. Este índice de vulnerabilidad (IVE-Sinae) es reportado por el Gobierno de Chile y representa un indicador que refleja la condición de riesgo asociada a los estudiantes de cada establecimiento (JUNAEB, 2021). En este caso, los dos establecimientos municipalizados del estudio tienen el mismo índice (arriba de 85 por ciento). Respecto del establecimiento privado, éste se eligió dado que, en general, son los que reportan mejores niveles de logro académico en Chile; es por esta razón que se eligió como referente de comparación con el establecimiento subvencionado que utiliza el método ABN.

De la muestra total en cada establecimiento se excluyeron del estudio las puntuaciones de aquellos niños que, de acuerdo con los establecimientos, presentaban necesidades educativas especiales, de manera que posteriormente se les pudiera incorporar en otro estudio específico y así no afectar los resultados generales de los objetivos de esta investigación. En total resultaron 80 estudiantes (45 mujeres y 35 hombres).

Instrumento

Test de cálculo aditivo mental

Es un test de aplicación masiva, diseñado a partir de las pruebas de adición de 2 o 3 dígitos menores que la decena, que figuran dentro del conjunto de las llamadas “tablas de cálculo mental” elaboradas por Jiménez (2021). Estas tablas están tipificadas de acuerdo con los contenidos y complejidad, con temas tales como números naturales, números enteros, decimales y fracciones, potencias y raíces, álgebra, geometría y medida, funciones y sucesiones. Si bien este repositorio no reporta estudios que justifiquen su construcción teórica, es necesario mencionar que, en cuanto a su estructura y tipo de sumas, es similar al test implementado y reportado por McKenzie *et al.* (2003). La otra ventaja evidente de este repositorio es su libre acceso en Internet, lo que permite su replicabilidad y accesibilidad por parte de otros usuarios del sistema escolar.

En atención al grupo objetivo de la investigación, se tomó un subgrupo de reactivos de la tabla “Prueba de suma de 2 y 3 dígitos menores a la decena” para diseñar un test de cálculo mental aritmético para los alumnos de primer año básico (6 años de edad promedio). Para ello, se buscó primeramente una cantidad de ejercicios representativos de sumas, con cierta proporción de acuerdo con la cantidad de sumandos y resultado de la operatoria, además de poder ser implementado adecuadamente en una hora pedagógica, que es el tiempo máximo que suelen dedicar los profesores a este tipo de actividades extracurriculares. El test fue balanceado y sometido posteriormente a juicio de maestros de primaria que siguieran tanto metodologías ABN como tradicionales o propias, con el fin de descartar casos extremos en dificultad o facilidad, y también en cuanto al tiempo necesario para su resolución atendiendo a los propósitos del estudio. Una vez recogidas las sugerencias, se

establecieron pruebas piloto con algunos cursos de sus establecimientos educativos para analizar la distribución de puntajes y ver si el diseño de la prueba lograba establecer un nivel de variabilidad suficiente que permitiera la discriminación entre ítems y sujetos. Luego de dos etapas de adecuación de los ítems con base en los resultados, y al hecho de obtener valores estables para la consistencia interna del instrumento, se estableció la versión final

del test, la cual quedó compuesta por 70 ejercicios, distribuidos en una tabla de 10x7, como se presenta en la Tabla 1. El test considera en sus reactivos operaciones aritméticas simbólicas de sumas con dos y tres sumandos, con resultados inferiores y superiores a la decena para ambos tipos de sumandos. Los resultados de las operaciones oscilan entre 6 y 27. Todas las operaciones contienen sólo manipulación de números comprendidos entre 1 y 9.

Tabla 1. Test de cálculo aditivo mental diseñado para el estudio

	A	B	C	D	E	F	G
1	3 + 4 + 6	2 + 4	6 + 4 + 3	1 + 8	8 + 8 + 6	4 + 2 + 3	6 + 7
2	2 + 6 + 7	7 + 5 + 3	3 + 5	5 + 7 + 5	7 + 2	9 + 9 + 7	1 + 5 + 2
3	3 + 9	3 + 3 + 7	9 + 4 + 6	4 + 4	2 + 8 + 9	6 + 3	7 + 7 + 9
4	7 + 7 + 7	4 + 8	4 + 5 + 7	6 + 8 + 2	5 + 3	3 + 7 + 4	5 + 4
5	7 + 5	6 + 6 + 6	3 + 5	5 + 4 + 6	8 + 7 + 3	5 + 7	4 + 6 + 5
6	1 + 9	9 + 2	4 + 4 + 4	2 + 9	4 + 9 + 3	9 + 8 + 2	2 + 6
7	2 + 6 + 8	3 + 7	7 + 2	8 + 8 + 8	3 + 8	9 + 5 + 2	7 + 9 + 1
8	2 + 1 + 7	6 + 5 + 8	2 + 8	7 + 4	9 + 9 + 9	4 + 7	6 + 1 + 8
9	3 + 4	2 + 1 + 5	6 + 7 + 9	5 + 5	7 + 6	5 + 5 + 5	5 + 7
10	8 + 4 + 8	3 + 9	2 + 1 + 4	7 + 9 + 5	8 + 2	6 + 2	3 + 3 + 3

Fuente: elaboración propia.

Respecto de las sumas con dos dígitos, hay 31 sumas, de las cuales 18 totalizan un número menor o igual a 10, y 13 de ellas dan como resultado 11 o más. En el caso de las sumas con tres dígitos, hay 39 de ellas, de las cuales 6 totalizan un número menor o igual a 10, otras 25 dan un resultado comprendido entre 11 y 20, y 8 de ellas sobrepasan la veintena.

El test fue concebido para ser aplicado de manera masiva e individual, para lo cual los alumnos fueron separados en filas para que se pudiera circular y acceder a todos ellos. La aplicación fue realizada en dos etapas consecutivas, asociadas con la medición de las habilidades de rapidez y de precisión. Para la primera etapa (rapidez) se estableció un tiempo límite de siete minutos para responder todos los ejercicios que se pudieran realizar, sin un orden determinado. En la segunda etapa

(precisión), se les invitó a realizar todas las operaciones (incluyendo, si lo deseaban, las anteriormente desarrolladas), tomándose esta vez, todo el tiempo que necesitaran. Al ser una tarea de cálculo mental, en las instrucciones se les indica a los estudiantes que no pueden ocupar ningún soporte que les permita tener un registro gráfico de los procesos de adición que vayan a realizar, lo cual es vigilado por el equipo durante toda la aplicación del test.

Respecto de la consistencia interna del instrumento, al tratarse de respuestas consideradas dicotómicas (correcta/incorrecta) se procedió a estimar el coeficiente Kuder-Richardson (KR20). El cálculo de este coeficiente arroja un valor de .98 para la fase de precisión y de .92 para la fase de rapidez, valores que pueden ser considerados adecuados (Streiner, 2003).

Procedimiento

El trabajo fue realizado en estricto apego a las normativas éticas derivadas de los protocolos internacionales para la investigación en el ámbito escolar; para ello fue necesario diseñar un protocolo de consentimiento y de asentimiento para los participantes del estudio, los cuales fueron autorizados y visados previamente por los comités de ética de las universidades participantes. Los establecimientos fueron contactados a través de sus directores/as, a quienes se les explicó el alcance y se acordó el procedimiento y calendario de trabajo, el cual comenzó con la gestión de los consentimientos y asentimientos por parte de los estudiantes y sus padres y madres, al tratarse de menores de edad. Asimismo, se garantizó el anonimato y la confidencialidad en el tratamiento de la información. Todos los participantes lo hicieron de forma voluntaria. La prueba se aplicó en una jornada previamente coordinada con el establecimiento para no perjudicar la instrucción ni interferir con otras actividades planificadas durante la jornada.

A los niños se les explicó que se les invitaba a participar en una actividad de cálculo mental; la idea se reforzó por medio de analogías para su adecuada comprensión, con frases de apoyo como “calcular con la mente”, “sin usar lápiz ni papel”, “pensando sin hablar”, y se ejemplificó con un par de ejercicios sencillos para ilustrar el cálculo.

Luego de entendido el tipo de trabajo a realizar se les explicó que la actividad tenía dos partes: en la primera, tenían que tratar de responder la mayor cantidad de ejercicios que pudieran; podían elegir ejercicios de cualquier parte de la tabla y debían escribir el resultado en el espacio de cada recuadro de la tabla de ejercicios. En algún momento, el profesor diría “alto” (o “paramos”, “stop”, o la propia instrucción que el profesor utilice frecuentemente en el aula para detener el trabajo momentáneamente). En ese momento, los alumnos debían voltear la hoja del test y esperar a que alguien del equipo pasara por su lugar para registrar

una copia de la hoja de respuestas. Luego de registradas las respuestas de todos los alumnos, se les dio un par de minutos para conversar y relajarse, luego de lo cual se les invitó a sentarse y continuar con la segunda parte. Para este segundo momento, el profesor daría el aviso de “continuar” (o la instrucción con la que suele reiniciar el trabajo en el aula) para que los estudiantes pudieran responder todos los ejercicios de la hoja, así como corregir o revisar los ejercicios previamente realizados si así lo deseaban, esta vez sin límite de tiempo.

El test se aplicó impreso en una cara de la hoja, la cual contenía además una identificación del alumno para efectos de posterior tabulación y registro. Al momento de pasar por cada lugar para el registro fotográfico del trabajo, se aprovechó para verificar que éstas tuvieran el nombre y datos personales de los alumnos; y en el caso de no tenerlos, se les pidió completarlo antes de realizar el registro gráfico de la hoja.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Dado que se buscaba indagar sobre la efectividad del método ABN respecto de la metodología tradicional, se procedió a realizar un análisis comparativo de las puntuaciones correctas respecto a los componentes de rapidez y precisión del test de cálculo mental, lo cual se llevó a cabo mediante la aplicación de pruebas *t* de diferencias de medias para grupos independientes para saber si se cumplía la homogeneidad de varianzas, mediante la prueba de Levene. Los análisis fueron realizados mediante el uso del paquete estadístico SPSS, versión 22.

RESULTADOS

La Tabla 2 muestra el recuento de puntajes de cada uno de los cuatro establecimientos concluida la etapa de rapidez, esto es, concluido el tiempo de siete minutos de aplicación del test de cálculo aditivo mental.

Tabla 2. Distribución de puntajes de la prueba de cálculo mental por establecimiento.
Etapa 1: rapidez

Tipo de establecimiento	N	Media	Desviación estándar	95% del intervalo de confianza para la media		Mínimo	Máximo
				Límite inferior	Límite superior		
Privado, tradicional	24	21.67	9.841	17.51	25.82	6	44
Municipal, ABN	12	17.58	9.356	11.64	23.53	4	35
Municipal, tradicional	15	7.53	4.138	5.24	9.82	2	17
Subvencionado, ABN	29	25.21	15.433	19.34	31.08	4	66

Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 2 destaca, por ejemplo, la mayor varianza exhibida en el caso del establecimiento subvencionado (con metodología ABN), el cual es también el que alcanza la mayor puntuación en esta etapa contra reloj. Por otro lado, el establecimiento municipalizado con metodología tradicional es el que exhibe

tanto los menores promedios como la menor variabilidad en puntajes.

Respecto de los resultados asociados a la segunda etapa del test (precisión), que consideraba el tiempo necesario para responder todos los reactivos, los resultados por establecimiento se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3. Distribución de puntajes de la prueba de cálculo mental por establecimiento
Etapa 2: precisión

Tipo de establecimiento	N	Media	Desviación estándar	95% del intervalo de confianza para la media		Mínimo	Máximo
				Límite inferior	Límite superior		
Privado, tradicional	24	62.88	10.518	58.43	67.32	33	70
Municipal, ABN	12	39.00	11.225	31.87	46.13	17	58
Municipal, tradicional	15	19.07	8.705	14.25	23.89	6	41
Subvencionado, ABN	29	55.86	15.93	49.80	61.92	17	70

Fuente: elaboración propia.

De los resultados de la Tabla 3 se puede apreciar, por una parte, que tres de los cuatro establecimientos mantienen el orden de sus desviaciones estándar respecto de la etapa anterior, lo que puede indicar que la etapa anterior ya discriminó adecuadamente las capacidades de los estudiantes. En cambio, el colegio municipal tradicional duplica su desviación estándar respecto de la etapa anterior, para quedar igualmente por debajo de los otros tres colegios.

En cuanto al rendimiento por establecimiento, se mantiene el orden de prelación de la etapa previa, aun cuando dos establecimientos, el privado con subvención y el

privado, alcanzan el puntaje máximo del test en esta etapa.

En ninguna de las dos etapas, rapidez o precisión, se observan diferencias por género respecto de los resultados: en la etapa de rapidez, las mujeres obtienen una media de 20.18 puntos (DT=13.13) *versus* los 19.06 puntos de los hombres (DT=12.98), dato que no resulta significativo ($F=.145$, $p=.705$); de la misma manera, en la etapa de precisión, las mujeres obtienen una media de 49.38 (DT=20.06) *versus* los 47.46 puntos de los hombres (DT=20.95), que tampoco es significativa ($F=.174$, $p=.678$). Así mismo, no existen diferencias de medias por género

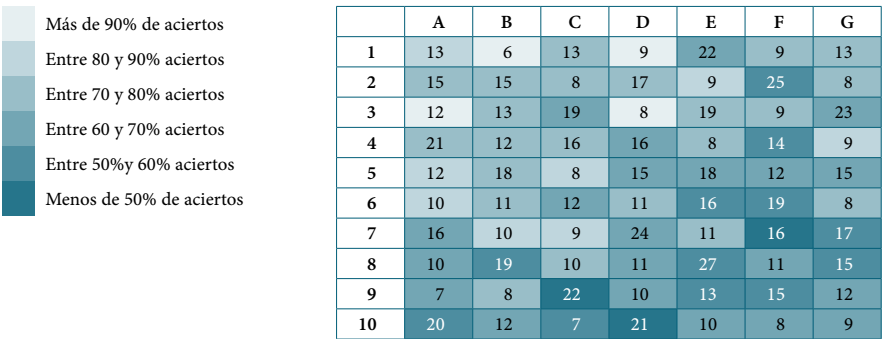
en ninguno de los tipos de suma presentadas en la sección subsiguiente.

Diferencias por tipo de ejercicio

Se procedió a analizar la distribución del porcentaje de respuestas correctas por cada ejercicio. *A priori*, desde el punto de vista teórico se espera verificar el efecto denominado “tamaño del problema”, según el cual la dificultad de los problemas aritméticos crece de

acuerdo con la cantidad de sumandos y el total de la suma que se realice. Así, la Fig. 2 ilustra la proporción de respuestas correctas en cada ejercicio de la tabla, calculada respecto del total de participantes. Se utilizó un colorado monocromático con mayor o menor contraste para identificar de mejor manera el porcentaje de aciertos para cada reactivo del test; para el caso de la Fig. 1 se agregó el valor numérico de la suma.

Figura 1. Porcentaje de respuestas correctas en cada uno de los ítems del test respecto del total de participantes



Nota: el número al interior de la celda indica el resultado de la operatoria.

Fuente: elaboración propia.

Seguidamente, se procedió a desagregar la información de la Fig. 1 respecto a cada establecimiento participante. La Fig. 2 muestra la proporción de respuestas correctas para cada ejercicio; se mantiene la misma gradualidad cromática de la figura anterior para indicar porcentaje de aciertos, esta vez calculada con base en cada establecimiento.

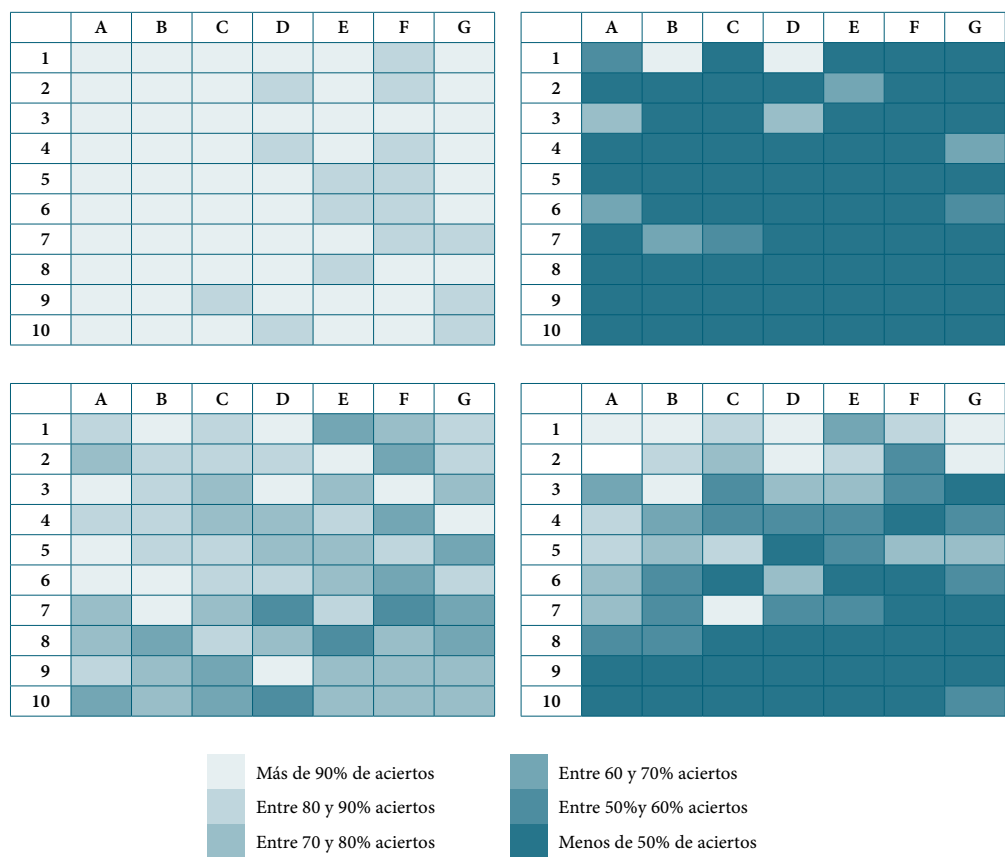
Se puede observar una marcada diferencia entre el porcentaje de respuestas correctas del establecimiento público de metodología tradicional respecto de su par con metodología ABN, incluso a nivel de las respuestas en ítems considerados de menor dificultad, como pueden ser los de dos dígitos. De la misma manera, aun cuando existen diferencias, se observa bastante cercanía entre los resultados del colegio privado con metodología tradicional y el subvencionado con metodología ABN.

Diferencias por tipo de problema aditivo

De acuerdo a la variabilidad exhibida en los puntajes de ambas etapas de aplicación del test, se consideró interesante realizar un análisis de rendimiento diferenciado por tipo de suma; para ello se consideró la cantidad de sumandos y el total de la operación; además se distinguieron cinco tipos de problemas de adición: 1) de dos dígitos, con total inferior a la decena; 2) de dos dígitos, con total superior a la decena; 3) de tres dígitos, con total inferior a la decena; 4) de tres dígitos, con total superior a la decena, pero inferior a la veintena; y 5) de tres dígitos y total superior a la veintena.

Se procedió a realizar un análisis de diferencia de medias mediante análisis ANOVA de un factor. Dado que la composición de los grupos es ligeramente diferente, las pruebas asociadas al supuesto de homocedasticidad

Figura 2. Porcentaje de respuestas correctas en cada uno de los ítems del test respecto de cada establecimiento del estudio



Nota: arriba a la izquierda se presenta el establecimiento privado con metodología tradicional; arriba a la derecha, el público con metodología tradicional. Abajo a la izquierda, el establecimiento particular subvencionado con metodología ABN; abajo a la derecha, el público con metodología ABN.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4. Pares de establecimientos que exhiben diferencias significativas en puntaje de acuerdo con el tipo de suma y sus totales

Cantidad de su- mandos y total de la suma	Rapidez		Precisión	
	Levene (Sig)	Grupos con diferencias	Levene (Sig)	Grupos con diferencias
2 dígitos, ≤10	7.397 (.000)	(1,3), (2,4), (3,4)	.916 (.437)	(1,2), (1,3), (2,4), (3,4)
2 dígitos, >10	10.981 (.000)	(1,3), (2,4), (3,4)	.555 (.646)	(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)
3 dígitos, ≤10	1.023 (.387)	(1,3), (3,4)	2.526 (.064)	(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)
3 dígitos, >10; ≤20	2.554 (.062)	(1,3), (2,3), (3,4)	4.778 (.004)	(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)
3 dígitos, >20	2.739 (.049)	(1,3), (3,4)	5.712 (.001)	(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)

Nota: se tipificaron los grupos de comparación de acuerdo con cada establecimiento y se asignaron las etiquetas siguientes: grupo 1: particular privado (tradicional); grupo 2: público (ABN); grupo 3: público (tradicional); grupo 4: particular subvencionado (ABN).

Fuente: elaboración propia.

consideraron la aplicación de la prueba de Bonferroni o Games-Howell según el cumplimiento o no de dicho supuesto al momento de la comparación.

La Tabla 4 presenta pares de establecimientos que exhiben diferencias significativas en cada tipo de suma, identificados en las etapas de rapidez y precisión

DISCUSIÓN

Este estudio se suma a otros previos que muestran los efectos favorables respecto del uso del método ABN frente a metodologías tradicionales (Bracho-López *et al.*, 2014; Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2015; Aragón *et al.*, 2017a; Aragón *et al.*, 2017b; Cerda *et al.*, 2018). Sin embargo, los estudios anteriores, en su gran mayoría, habían sido preferentemente orientados hacia aspectos relacionados con funciones ejecutivas o predictores de dominio general y específico, lo que, si bien guarda estrecha relación con la habilidad de cálculo mental, no permite su cuantificación directa.

Respecto de los resultados del test se puede observar, en primer lugar, una diferencia importante entre los resultados obtenidos en el establecimiento público que sigue la metodología ABN respecto de su par con metodología tradicional. Ambos establecimientos públicos tienen el mismo índice de vulnerabilidad e indicador de pobreza; si bien pueden existir otros elementos contextuales que expliquen parte de las diferencias observadas, el efecto diferenciado es notorio, muy favorable para el establecimiento que adoptó la metodología ABN. Más aún, en la Tabla 3 se observa que el colegio público con metodología tradicional posee igualmente diferencias significativas respecto de todos los otros establecimientos, presentes en prácticamente todos los tipos de categorías de suma, exceptuando, para la etapa de rapidez, las pruebas de tres dígitos con suma menor o igual a la decena, en donde la diferencia con el otro establecimiento municipalizado no resulta significativa; esta

diferencia, sin embargo, sí pasa a ser significativa nuevamente en la etapa de precisión. Esto puede deberse a que el trabajo a nivel de primero de primaria mantiene un fuerte foco en la operatoria manipulativa hasta la decena, que permite tener experiencias comparables entre establecimientos.

Por otro lado, si bien existen diferencias a nivel de puntuación total entre el establecimiento subvencionado con metodología ABN y el particular con metodología tradicional, la Tabla 3 muestra que, al categorizar las preguntas con base en el tipo de sumas (2 y 3 sumandos, con suma por encima o debajo de la decena/veintena), no existen diferencias significativas entre ellos, ni en la etapa de rapidez, ni en la de precisión, para ninguna de las categorías de suma, lo cual es un hecho meritorio por el alto índice de vulnerabilidad exhibido por el colegio particular subvencionado (por encima de 80 por ciento). Este hallazgo es relevante en el contexto educativo chileno si se tiene en cuenta la sostenida existencia de brechas asociadas al rendimiento académico, siempre a favor de establecimientos privados por sobre los subvencionados y particulares (Echenique y Urzúa, 2013). Lo anterior podría sugerir que un cambio metodológico sería capaz de generar cambios sustantivos en los niveles de logro en matemática que no ha sido posible obtener mediante otras políticas educativas.

En cuanto a la dificultad de los ítems, al observar los porcentajes de respuestas correctas de cada reactivo, en la Fig. 2 se puede ver que, a pesar que algunos de los reactivos tienen resultados de cálculo muy cercanos, éstos exhiben diferentes grados de dificultad, lo cual puede deberse a que, en la suma planteada, algunos ítems evocan estrategias de suma más intuitivas, como $5+5$ en lugar de $3+7$, u otras de tres sumandos, pero con asociaciones de “amigos del 10” directas, como $5+7+5$ en lugar de $6+6+5$. Se observa, igualmente, que los ejercicios de menor dificultad en los grupos estuvieron en la categoría asociada a las operaciones de dos sumandos que no sobrepasaban la

decena, y los de mayor dificultad, aquéllos de tres sumandos que sobrepasaban la veintena.

Finalmente, surge como hecho interesante que no se encontraron diferencias por género en ninguna de las dos etapas respecto del puntaje total, hecho que se mantiene para cada establecimiento, lo cual puede deberse a que las diferencias por género comienzan a incubarse a nivel inicial y después se manifiestan en los niveles más avanzados, hecho que ha sido constatado previamente en otras investigaciones (Cerdeira *et al.*, 2011).

CONCLUSIONES

El trabajo se orientó al análisis de eventuales diferencias en mediciones de cálculo mental respecto de problemas aditivos entre establecimientos educativos que adoptan diferentes modalidades de enseñanza de la matemática. Para evitar el condicionamiento de las ya conocidas diferencias en rendimiento, propias del nivel socioeconómico de acuerdo al tipo de dependencia administrativa de los colegios en Chile, se eligieron intencionadamente establecimientos con índices de vulnerabilidad similares para los niveles bajos, y un referente privado como comparación de los niveles altos, de manera que el principal atributo posible de identificar que explique las diferencias pudiera estar asociado a la metodología de enseñanza de la matemática.

Se observó la existencia de diferencias significativas en términos de capacidad entre los establecimientos que trabajan con el método ABN y los que no lo trabajan, pero que tienen características socioeconómicas similares, así como la inexistencia de éstas entre un establecimiento particular subvencionado y uno privado que sí utilizan ese método; todo ello constituye un resultado digno de reconocimiento, dada la sostenida y significativa diferencia de resultados académicos —observados históricamente en Chile— a favor de los establecimientos privados por sobre los subvencionados, y muy especialmente, por sobre los públicos.

El análisis de los resultados del test de cálculo aditivo mental muestra que las operaciones de adición con tres sumandos parecen plantear *per se* algo de dificultad adicional, misma que puede estar asociada al propio proceso de instrucción de los libros de texto de este nivel, ya que privilegian en sus ejercicios propuestos la operatoria con dos sumandos.

Cualquier metodología de enseñanza que se quiera implementar en un establecimiento educativo puede generar una natural reticencia del equipo directivo, del profesorado o de los propios padres y madres, dado que significa un costo organizacional, tiempo de perfeccionamiento o inducción profesional, cambios o interrupciones en el apoyo que se presta desde el hogar y hasta eventuales costos económicos en recursos que puede requerir. Si no hay claridad o existe poca información respecto de las potencialidades específicas que la metodología en estudio puede aportar en los/as estudiantes, los incentivos para su adopción serán bajos, y las decisiones terminarán limitándose a una necesaria comparación entre los fundamentos teóricos diferenciadores (pedagógicos y didácticos) de una metodología respecto de otra. Lo que intenta poner en valor este trabajo es mostrar que, eventualmente, la decisión sobre una adopción metodológica puede igualmente analizarse desde ámbitos que son de interés curricular transversal, como lo es el cálculo mental. En tal sentido, el nivel preescolar constituye un buen escenario para indagar respecto de estas metodologías, ya que, en este nivel educativo, las diferencias se dan más bien respecto del tipo y vivencia de las experiencias llevadas a cabo en el aula. Esa es la manera en que los establecimientos aquí reportados iniciaron su proceso de adopción, en este caso, de la metodología ABN.

Una de las principales dificultades de esta metodología que reportan los colegios es el trabajo aritmético para el cálculo de las operaciones, ya que el formato e implementación difiere de la enseñanza de la algorítmica tradicional, principalmente en la disposición de los

números, en la manera en que se descompone, y en el trabajo con las “reservas” y con las cifras o dígitos que componen a cada número. Esta dificultad, transitoria, se ve compensada con un aspecto destacable de esta metodología, que tiene que ver con su apertura y accesibilidad: todos los recursos adecuados para la comprensión del método ABN están disponibles en acceso abierto y gratuito en Internet para la comunidad educativa; allí se pueden ver actividades, videos de implementación en el aula, guías de ejercicios y secuencias didácticas, además de ser una comunidad de aprendizaje en donde se comparten experiencias de parte de los propios docentes que trabajan sobre la metodología (Martínez-Montero, 2022).¹

En cuanto al instrumento utilizado, éste se prestó adecuadamente para el objetivo del estudio, pues mediante su aplicación se pudo constatar un alto grado de consistencia interna para ambas mediciones: rapidez y precisión del cálculo mental. Si adicionalmente a sus características de confiabilidad se le agrega la de ser un recurso de libre acceso a través de Internet, esta batería de tablas de cálculo mental pasa a constituir una buena opción para examinar preliminarmente —o potenciar— las habilidades de cálculo mental en la población de estudiantes de educación primaria y secundaria.

Se eligió comenzar con la evaluación de cálculo mental en sumas debido a que es la operatoria aritmética que les resulta más familiar. Esto se ve evidenciado en el estudio de lexicón de Ferreira *et al.* (2014), en el cual se reporta que la palabra con mayor índice de disponibilidad léxica es “suma”, de alto uso también en los distintos niveles educativos de la enseñanza secundaria, seguido por las palabras multiplicación, resta y división, que corresponden a las otras tres operaciones básicas; en estas últimas, las operaciones inversas son las menos evocadas.

Finalmente, es importante rescatar que este trabajo demuestra la efectividad de una metodología específica respecto de las instancias tradicionales de enseñanza, sin juzgar ni desmerecer otras metodologías de enseñanza de la matemática. Evidentemente, existen otras propuestas o énfasis metodológicos para la matemática escolar que suelen ser igualmente adoptados por profesores y establecimientos educativos. Dentro de este conjunto creemos necesario distinguir, al menos, aquellas metodologías que han convergido en una propuesta curricular formal para la enseñanza en el ciclo escolar, como puede ser, tanto en Chile como en otros países, el método Singapur, o en Italia, el método Bortolato. Es necesario, por tanto, indicar que los resultados de las comparaciones de este estudio no se refieren a esos casos, que escapan a la clasificación de metodología tradicional, y con los que se hace necesario primeramente establecer un adecuado análisis de aspectos y énfasis comunes y diferenciadores con el propósito de realizar estudios comparados. La gran cantidad de evidencia científica publicada respecto de la efectividad de la metodología ABN en distintos escenarios educativos nos parece un hecho relevante para el contexto chileno, como una oportunidad para potenciar las habilidades matemáticas desde la más temprana infancia.

LIMITACIONES Y TRABAJO FUTURO

Dentro de las limitaciones a considerar está, naturalmente, la de ampliar la cantidad tanto de sujetos como de establecimientos participantes, lo que impone, como desafío, considerar más establecimientos a los que pueda atribuírseles, con adecuada certeza, que estén realizando un trabajo pedagógico apegado a los lineamientos de la metodología ABN de acuerdo a los criterios de inclusión descritos en este estudio.

¹ Para acceder a diversas sugerencias para la aplicación del método ABN, ver documentos de José Miguel de Rosa (2022) en: <http://www.actiludis.com> (consulta: 25 de septiembre de 2022).

Asimismo, la alta consistencia interna del instrumento podría reflejar algún grado de duplicación de contenidos entre ítems y, por tanto, cierto grado de redundancia sobre la homogeneidad (Streiner, 2003), lo que podría sugerir una reducción en la cantidad de ejercicios a considerar en el test.

Finalmente, se espera poder replicar las características de este estudio hacia el resto de las operaciones aritméticas (resta, multiplicación y división), tanto en el mismo nivel educativo como en niveles más avanzados, adecuando naturalmente la dificultad del cálculo de acuerdo con la operatoria a indagar.

REFERENCIAS

- ADAMUZ-Povedano, Natividad y Rafael Bracho-López (2015), "Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social", *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*, vol. 3, núm. 1, pp. 37-53.
- ARAGÓN, Estíbaliz, Cándida Delgado y Esperanza Marchena (2017a), "Diferencias de aprendizaje matemático entre los métodos de enseñanza ABN y CBC", *Psychology, Society & Education*, vol. 9, núm. 1, pp. 61-70.
- ARAGÓN, Estíbaliz, Maricarmen Canto, Esperanza Marchena, José Ignacio Navarro y Manuel Aguilar (2017b), "Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático con el método algoritmo abierto basado en números", *Revista de Psicodidáctica*, vol. 22, núm. 1, pp. 54-59.
- BELLEI, Cristián (2013), "El estudio de la segregación socioeconómica y académica de la educación chilena", *Estudios Pedagógicos*, vol. 39, núm. 1, pp. 325-345.
- BOALER, Jo y Sarah Kate Selling (2017), "Psychological Imprisonment or Intellectual Freedom? A longitudinal study of contrasting school mathematics approaches and their impact on adults' lives", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 48, núm. 1, pp. 78-105.
- BRACHO-LÓPEZ, Rafael, María del Carmen Gallego-Espejo, Natividad Adamuz-Povedano y Noelia Jiménez-Fanjul (2014), "Impacto escolar de la metodología basada en algoritmos ABN en niños y niñas de primer ciclo de educación primaria", *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. 10, núm. 39, pp. 97-109.
- CANALES, Andrea y Luis Maldonado (2018), "Teacher Quality and Student Achievement in Chile: Linking teachers' contribution and observable characteristics", *International Journal of Educational Development*, vol. 60, pp. 33-50.
- CERDA, Gamal, Carlos Pérez, Estíbaliz Aragón, José I. Navarro y Manuel Aguilar (2018), "The Open Algorithm Based on Numbers (ABN) Method: An effective instructional approach to domain-specific precursors of arithmetic development", *Frontiers in Psychology*, vol. 9, núm. 1811. DOI: <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01811>
- CERDA, Gamal, Carlos Pérez, Rosario Ortega, Marianela Lleujo y Luisa Sanhueza (2011), "Fortalecimiento de competencias matemáticas tempranas en preescolares, un estudio chileno", *Psychology, Society, & Education*, vol. 3, núm. 1, pp. 23-39.
- CRESPO, Sandra (2016), "Truth, Lies, and Videotapes: Embracing the contraries of mathematics teaching", *The Elementary School Journal*, vol. 117, núm. 1, pp. 101-118.
- CROOKS, Noelle y Martha Alibali (2014), "Defining and Measuring Conceptual Knowledge in Mathematics", *Developmental Review*, vol. 34, núm. 4, pp. 344-377.
- DAI, Quin y Ka Luen Cheung (2015), "The Wisdom of Traditional Mathematical Teaching in China", en Lianghuo Fan, Ngai-Ying Wong, Jinfa Cai y Shiqi Li (coords.), *How Chinese Teach Mathematics. Perspectives from insiders*, Singapore, World Scientific, pp. 3-42.
- ECHENIQUE, Juan y Sergio Urzúa (2013), "Desigualdad, segregación y resultados educacionales: evidencia desde el Metro de Santiago", *Puntos de Referencia*, núm. 359, pp. 1-13.
- FERREIRA, Anita, Pedro Salcedo y María del Valle (2014), "Estudio de disponibilidad léxica en el ámbito de las matemáticas", *Estudios Filológicos*, núm. 54, pp. 69-84.
- GILMORE, Camilla, Sarah Keeble, Sophie Richardson y Lucy Cragg (2015), "The Role of Cognitive Inhibition in Different Components of Arithmetic", *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 47, núm. 5, pp. 771-782.
- Gobierno de Chile-JUNAEB (2021), *Indicadores de vulnerabilidad: Junaeb Abierta*, en: <http://junaebabierta.junaeb.cl/catalogo-de-datos/indicadores-de-vulnerabilidad/> (consulta: 25 de enero de 2021).
- Gobierno de Singapore-Ministry of Education (MOE) (2012), *Mathematics Syllabus. Primary one to six*, en: https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf (consulta: 28 de febrero de 2023).

- HUBBER, Paula, Camilla Gilmore y Lucy Cragg (2014), "The Roles of the Central Executive and Visuospatial Storage in Mental Arithmetic: A comparison across strategies", *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, vol. 67, núm. 5, pp. 936-954.
- INOSTROZA, Fabián (2016), "Análisis crítico del discurso de profesores de matemáticas y sus estudiantes: subjetividades y saberes en aulas heterogéneas", *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, vol. 42, núm. 3, pp. 223-241.
- JIMÉNEZ, Jesús (2021), *Tablas de cálculo mental*, en: <http://docentes.educacion.navarra.es/jjime-nei/> (consulta: 25 de enero de 2021).
- JOHNSON-Laird, Phil y Sangeet Khemlani (2013), "Toward a Unified Theory of Reasoning", en Brian Ross (ed.), *The Psychology of Learning and Motivation*, vol. 59, Amsterdam, Academic Press Publishers, pp. 1-42.
- KRZYWACKI Hiedi, Leila Pehkonen y Anu Laine (2016), "Promoting Mathematical Thinking in Finnish Mathematics Education", en Hannele Niemi, Auli Toom y Arto Kallioniemi (coords.), *Miracle of Education. The principles and practices of teaching and learning in Finnish schools*, Rotterdam, Sense Publishers, pp. 109-123.
- LEGER, Paul, Grecia Gálvez, Milton Inostroza, Lino Cubillos, Gina Luci, Eric Tanter, Diego Cosmelli y Jorge Soto-Andrade (2014), "ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: características de su diseño y resultados preliminares", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 17, núm. 1, pp. 33-58.
- MARTÍNEZ-Montero, Jaime (2018), "El cálculo ABN. Un enfoque diferente para el aprendizaje del cálculo y las matemáticas", *Padres y Maestros / Journal of Parents and Teachers*, núm. 376, pp. 52-59.
- MARTÍNEZ-Montero, Jaime (2022), *Algoritmos ABN*, en: <http://algoritmosabn.blogspot.com> (consulta: 25 de septiembre de 2022).
- MARTÍNEZ-Montero, Jaime y Concepción Sánchez (2011), *Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en educación infantil*, Madrid, Wolters Kluwer.
- MARTÍNEZ-Montero, Jaime y Concepción Sánchez (2013), *Resolución de problemas y método ABN*, Madrid, Wolters Kluwer Educación.
- McKENZIE, Bruce, Rebecca Bull y Collin Gray (2003), "The Effects on Phonological and Visual-Spatial Interference on Children's Arithmetical Performance", *Educational Child Psychology*, vol. 20, núm. 3, pp. 93-108.
- METZ, Martina, Paulino Preciado-Babb, Soroush Sabbaghan, Brent Davis, Geoffrey Pinchbeck y Ayman Aljarrah (2016), "Transcending Traditional. Reform dichotomies in mathematics education", en Marcy Wood, Erin Turner, Marta Civil y Jennifer Eli (coords.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, The University of Arizona, pp. 1252-1258.
- MIZALA, Alejandra, Francisco Martínez y Salomé Martínez (2015), "Pre-service Elementary School Teachers' Expectations about Student Performance: How their beliefs are affected by their mathematics anxiety and student's gender", *Teaching and Teacher Education*, vol. 50, pp. 70-78.
- MULLIS, Ina, Michael Martin, Shirley Goh y Kerry Cotter (2016), *TIMSS 2015 Encyclopedia: Education policy and curriculum in mathematics and science*, TIMSS & PIRLS International Study Center, en: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/> (consulta: 25 de septiembre de 2022).
- OKSANEN Susana, Erkki Pehkonen y Hannula Markku (2015), "Changes in Finnish Teachers' Mathematical Beliefs and an Attempt to Explain Them", en Carola Bernack-Schüler, Ralf Erens, Timo Leuders y Andreas Eichler (coords.), *Views and Beliefs in Mathematics Education*, Wiesbaden, Springer Spektrum, pp. 27-41.
- ORRANTIA, Josetxu, Sara San Romualdo, Rosario Sánchez, Laura Matilla, David Muñoz y Lieven Verschaffel (2018), "Numerical Magnitude Processing and Mathematics Achievement", *Revista de Educación*, núm. 381, pp. 127-146.
- PAPADAKIS, Stamatios, Michail Kalogiannakis y Nicholas Zaranis (2017), "Improving Mathematics Teaching in Kindergarten with Realistic Mathematical Education", *Early Childhood Education Journal*, vol. 45, núm. 3, pp. 369-378.
- PINO-Fan, Luis, Ismenia Guzmán-Retamal, Macarena Larraín y Claudia Vargas-Díaz (2018), "La formación inicial de profesores en Chile: 'Voces' de la comunidad chilena de investigación en educación matemática", *Uniciencia*, vol. 32, núm. 1, pp. 68-88.
- PRICE, Gavin, Michèle Mazzocco y Daniel Ansari (2013), "Why Mental Arithmetic Counts: Brain activation during single digit arithmetic predicts high school math scores", *Journal of Neuroscience*, vol. 33, núm. 1, pp. 156-163.
- RATHGEB-Schnierer, Elisabeth y Michael Green (2019), "Developing Flexibility in Mental Calculation", *Educação & Realidade*, vol. 44, núm. 22, pp. 1-17.
- RODRÍGUEZ Cristina, Ariel Cuadro y Carola Ruiz (2019), "Mathematics Learning and Its Difficulties: The cases of Chile and Uruguay", en Annemarie Fritz, Vitor Haase y Pekka Räsänen (coords.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*, Cham, Springer, pp. 213-230.

- RODRÍGUEZ Garcés, Carlos, Denisse Espinosa Valenzuela, Geraldo Padilla Fuentes y Claudia Suazo Ruíz (2022), "Entre el talento académico y la segmentación socioeducativa: admisión universitaria de estudiantes Top 10% Ranking en Chile", *Revista Cubana de Educación Superior*, vol. 41, núm. 2, pp. 1-14.
- SAADATI, Farzaneh, Gamal Cerda, Valentina Giacomini, Cristian Reyes y Patricio Felmer (2019), "Modeling Chilean Mathematics Teachers' Instructional Beliefs on Problem Solving Practices", *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 17, núm. 5, pp. 1009-1029.
- SAMUELSSON, Markus y Joakim Samuelsson (2016), "Gender Differences in Boys' and Girls' Perception of Teaching and Learning Mathematics", *Open Review of Educational Research*, vol. 3, núm. 1, pp. 18-34.
- SIRAIT, Asril y Zainal Azis (2017), "The Realistic of Mathematic Educational Approach (RME) toward the Ability of the Mathematic Connection of Junior High School in Bukhari Muslim Medan", *American Journal of Educational Research*, vol. 5, núm. 9, pp. 984-989.
- STACEY, Kaye, Felipe Almuna, Rosa Caraballo, Jean-François Chesné, Sol Garfunkel, Zahra Goo-ya, Berinderjeet Kaur, Lena Lindenskov, José Luis Lupiáñez, Kyung Mee Park, Hannah Perl, Abolfazl Rafiepour, Luis Rico, Franck Salles y Zulkardi Zulkardi (2015), "PISA's Influence on Thought and Action in Mathematics Education", en Kaye Stacey y Ross Turner (coords.), *Assessing Mathematical Literacy*, Cham, Springer, pp. 275-306.
- STREINER, David (2003), "Starting at the Beginning: An Introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency", *Journal of Personality Assessment*, vol. 80, núm. 1, pp. 99-103.
- THRELFALL, John (2002), "Flexible Mental Calculation", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 50, núm. 1, pp. 29-47.
- THRELFALL, John (2009), "Strategies and Flexibility in Mental Calculation", *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 41, núm. 5, pp. 541-555.
- TORBEYNS, Joke, Bert de Smedt, Pol Ghesquière y Lieven Verschaffel (2009), "Jump or Compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100", *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 41, núm. 5, pp. 581-590.
- VALENZUELA, Juan Pablo, Cristián Bellei y Danae de los Ríos (2014), "Socioeconomic School Segregation in a Market-Oriented Educational System. The case of Chile", *Journal of Education Policy*, vol. 29, núm. 2, pp. 217-241.
- VAN DEN HEUVEL-Panhuizen Marja y Paul Drijvers (2020), "Realistic Mathematics Education", en Stephen Lerman (coord.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Cham, Springer, pp. 380-383.
- VANBINST, Kiran y Bert De Smedt (2016), "Individual Differences in Children's Mathematics Achievement: The roles of symbolic numerical magnitude processing and domain-general cognitive functions", en Marinella Cappelletti y Wim Fias (coords.), *The Mathematical Brain Across the Lifespan*, Amsterdam, Elsevier, pp. 105-130.
- WONG, Lai y Berinderjeet Kaur (2015), "A Study of Mathematics Written Assessment in Singapore Secondary Schools", *The Mathematics Educator*, vol. 16, núm. 1, pp. 19-44.
- YUANITA, Putri, Hutkemri Zulnaidi y Effandi Zakaria (2018), "The Effectiveness of Realistic Mathematics Education approach: The role of mathematical representation as mediator between mathematical belief and problem solving", *Plos One*, vol. 13, núm. 9, pp. 1-20.