El diseño de situaciones de aprendizaje como elemento para el enriquecimiento de la profesionalización docente

Rosa María Farfán* | Fabián Wilfrido Romero Fonseca**

Se presentan los elementos teóricos y metodológicos de una situación de aprendizaje destinada al enriquecimiento de la profesionalización docente en el marco de una maestría dirigida al profesorado del estado de Oaxaca, en convenio entre la Secretaría de Educación estatal y el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Los resultados de la investigación obtenidos bajo la óptica de la teoría socioepistemológica se ponen en juego para tal diseño, especialmente los derivados de la construcción de un lenguaje gráfico que posibilite la apropiación de una amplia gama de formas y operaciones. Trataremos especialmente el rol que juegan las variables de control que dirigen la gestión de la situación.

Palabras clave

Matemática educativa
Socioepistemología
Situación de aprendizaje
Lenguaje gráfico
Profesionalización docente

* Investigadora del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México). Líneas de investigación: construcción social del conocimiento matemático y estudios de género y matemáticas. CE: rfarfan@cinvestav.mx

** Estudiante de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México). Línea de investigación: construcción social del conocimiento matemático, especialmente sobre series de Fourier. CE: fwromero@cinvestav.mx

Introducción

De inicio diremos que la matemática educativa se relaciona estrechamente con una profunda reflexión sobre los saberes. Es importante señalar que los conocimientos mediante los cuales se establecen las relaciones didácticas no son objetos muertos que el profesor "transmite" al alumno, y que éste "recibe" y se los "apropia". Por el contrario, la matemática educativa los concibe como objetos vivientes, sujetos de evolución y cambio conforme a la sociedad en donde nacen o se enraízan. El estudio de las relaciones que el estudiante establece con los saberes que le son presentados, relaciones en sí mismas de naturaleza eminentemente móvil, es el centro de una reflexión sobre las condiciones y la naturaleza de los aprendizajes. Ello conduce a una aproximación opuesta a la "pedagogía general", en tanto que ésta ofrece reglas de aprendizaje y de la educación, independiente de los contenidos enseñados. Al menos para las disciplinas científicas y las matemáticas, cuyos contenidos son altamente estructurados, es poco probable que se pueda construir un conocimiento pertinente para explicar los fenómenos de enseñanza si no se consideran los saberes de referencia.

Esto último hace necesario un estudio epistemológico para entender cuáles fueron las causas que posibilitaron la generación de los saberes a fin de articularlos pertinentemente en el aula. Como ya señalamos, el fenómeno educativo es eminentemente social, compete globalmente a la cultura en la que se da y, por tanto, a los "puntos de vista" específicos del entorno social en el que se desarrolla; es por ello que, de manera natural, la investigación en matemática educativa se desarrolla al abrigo de diferentes paradigmas. Particularmente para la socioepistemología,

> El punto de partida para la construcción de saberes es la *actividad* normada por emergentes de naturaleza social que denominamos *prácticas sociales*. Éstas regulan el ejercicio de prácticas compartidas a través de las cuales, los sujetos (individuales o colectivos) nos relacionamos *intra* e *ínter* psicológicamente. En este sentido, los saberes son las diferentes formas de comprender y explicar las realidades y se encuentran vinculados con las *prácticas socialmente compartidas*, las que a su vez están normadas por las *prácticas sociales* (Cantoral, 2013: 48).

Indudablemente, los saberes matemáticos han sido constituidos socialmente, en ámbitos no escolares; al introducirlos al sistema didáctico han debido modificarse, lo que ha afectado tanto su estructura como su funcionalidad y las relaciones entre estudiantes y profesores. De ahí la importancia de entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático y científico a las prácticas tanto de los docentes como de sus estudiantes. La socioepistemología ha construido una categoría para abordar teórica y metodológicamente ese proceso: el discurso matemático escolar (dME):

> La socioepistemología tiene una mirada crítica al discurso matemático escolar, ya que éste tiene una centración en los objetos matemáticos y no en las prácticas sociales. Uno de sus planteamientos consiste en hacer que la matemática escolar sea funcional y deje de ser utilitaria, entendiendo la matemática funcional como un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad, todo ello en oposición al conocimiento utilitario (Morales y Cordero, 2014: 327).

Dada la naturaleza del dME como ente inmóvil, carente de significados y utilitario que propicia la exclusión de la construcción social del conocimiento se pretende proveer una epistemología —la socioepistemología— que posibilite el rediseño del dME a partir de la problematización del saber matemático con miras a favorecer el aprendizaje de este saber.

En este escrito nos proponemos hacer una revisión de nuestros resultados de investigación en la construcción de un lenguaje gráfico, con el fin de posibilitar al profesorado el conocimiento de las herramientas indispensables que le permitan diseñar y llevar a la práctica situaciones de aprendizaje en el aula de matemáticas. Como han reportado investigaciones recientes (Reyes, 2016), de esta manera se favorece el empoderamiento de los docentes. Para ello iniciamos con una breve descripción de la teoría de situaciones didácticas que usamos en nuestros diseños. Si bien no pretendemos abarcar la teoría exhaustivamente, sí mostraremos los elementos que consideramos esenciales. En seguida, haremos una presentación de los resultados de manera resumida acerca de tres aspectos importantes de nuestros diseños: las operaciones gráficas, la resolución gráfica de desigualdades y la construcción de funciones.

Con ello creemos que el lector estará en condiciones de apropiarse de una visión global del quehacer de la investigación en matemática educativa junto con su aplicación dentro del aula de matemáticas con el fin de diseñar e implementar, pertinentemente, proyectos de investigación en la clase de matemáticas a propósito del tema que aquí discutiremos: el lenguaje gráfico.

Breve esbozo de la teoría de situaciones didácticas

El entorno inmediato del sistema didáctico es el "sistema de enseñanza", que está constituido por un conjunto diverso de dispositivos que permiten operar a los distintos sistemas didácticos. Alrededor de este sistema de enseñanza se encuentra el entorno social, que puede caracterizarse por la presencia de padres, académicos y las instancias políticas. En el entorno de lo que Chevallard (1991) denomina el sistema de enseñanza en sentido estricto hay un "sitio" donde se piensa el sistema didáctico, denominado noosfera. En la noosfera, los representantes del sistema de enseñanza se encuentran, directa o indirectamente, con los representantes de la sociedad. Esta versión simplificada del funcionamiento escolar puede, sin embargo, desarrollar formas muy complejas de éste.

Todo funcionamiento social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenido de saberes como contenidos a enseñar (Chevallard, 1991). Los contenidos de los saberes designados como aquellos a enseñar, en general preexisten a la definición de aquellos que son designados como tales, pero en algunas ocasiones constituyen "creaciones didácticas" por necesidades de enseñanza.

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar sufre, a partir de ese momento, un conjunto de transformaciones adaptativas que hacen apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma un objeto de saber en un objeto de enseñanza se denomina "transposición didáctica" (Chevallard, 1991). La noosfera es el centro operacional del proceso de transposición; allí se producen todos los conflictos entre sistema didáctico y entorno.

Luego de que en el sistema didáctico se ha determinado un saber a enseñar, éste se convierte, sin lugar a dudas, en un saber transpuesto, despersonalizado, descontextualizado. Es labor del profesor proceder en sentido contrario al productor de tal conocimiento; debe contextualizar y repersonalizar el saber, es decir, debe buscar situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar (Brousseau, 1986). El estudiante que se ha apropiado de los conocimientos procede a descontextualizarlos y despersonalizarlos para poderlos usar.

Un supuesto básico de la teoría de situaciones didácticas (TSD) es que el alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986). Este supuesto se basa en principios de la psicología genética y de la psicología social, y se podrían resumir así: el aprendizaje se apoya en la acción. La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación.[1] Deben tenerse en cuenta los aprendizajes previos de los alumnos para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos: se conoce en contra de los conocimientos anteriores.[2]

La concepción moderna de la enseñanza le pide al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas a través de la elección acertada de los problemas que le propone.

Tomando una situación matemática como elemento primario podemos plantearnos cómo transformarla en una situación de aprendizaje; para ello, debemos cerciorarnos de que la respuesta inicial del alumno no constituya la respuesta "correcta", sino que se vea obligado a hacer modificaciones a sus conocimientos previos. Uno de los factores principales de estas situaciones de aprendizaje lo constituye el hecho de que las respuestas que produce el alumno sean respuestas provocadas por las exigencias del medio, y

1 Estos constituyen elementos básicos de la obra de Piaget.
2 Esta afirmación constituye una idea fundamental de la epistemología postulada por Bachelard (1938).

no a los deseos del profesor; al logro de este hecho se le llama "devolución" de la situación por el profesor. La devolución no se realiza sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que lo caracterizan (Brousseau, 1986).

Se llama situación adidáctica a una situación matemática específica de dicho conocimiento que por sí misma, sin apelar a situaciones didácticas, y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el alumno. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma de provocar este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hacen que fracasen las estrategias espontáneas (Chevallard *et al.*, 1995).

Se llamarán variables didácticas, de la situación adidáctica, aquellos elementos de la situación que al ser modificados permiten engendrar tipos de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución. El empleo que hace el profesor de situaciones adidácticas, con una determinada intención didáctica, constituyen lo que se denomina situación didáctica. La situación didáctica comprende las situaciones adidácticas, un cierto medio y el profesor, que tiene el propósito de que los alumnos aprendan un determinado conocimiento matemático.

El medio se constituye, así, en un elemento fundamental dentro de la noción de situación didáctica, ya que está constituido por todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y que puede emplear con seguridad y sin cuestionamientos, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el fin de que pueda lograr el objetivo deseado. Es muy importante notar que en tal medio se encuentra el profesor. Este hecho será de gran importancia en el momento de analizar su función en la actividad de reproducción de situaciones didácticas.

En la relación didáctica maestro-alumno se erige explícita o implícitamente un acuerdo acerca de cuáles son las responsabilidades de cada uno de ellos. Es un sistema de relaciones recíprocas análogas a las de un contrato, pero a diferencia de los contratos sociales, éste estará determinado no por reglas previas a la relación, sino por la naturaleza del conocimiento matemático buscado. Este contrato didáctico evoluciona conforme evoluciona la relación del estudiante con la situación adidáctica. El estudiante puede resistirse a la devolución de la situación, o experimentar problemas; es entonces que las acciones del profesor, traducidas a la negociación del contrato, experimentan evolución.

Finalmente, como hemos dicho anteriormente, las situaciones adidácticas están caracterizadas por un conocimiento específico; es posible establecer correspondencias entre estos tipos de conocimientos, los modos de funcionamiento de dichos conocimientos y los respectivos intercambios del alumno con el medio que aquéllos provocan. Con base en estas correspondencias, las situaciones adidácticas pueden ser definidas de la siguiente manera:

- *Situación de acción.* Corresponde a un modelo implícito que sugiere una decisión o el empleo de un algoritmo y que provoca intercambio de informaciones no codificadas. El modelo de acción le permite al alumno mejorar su modelo implícito; son acciones que aún no le permiten formular, probar ni postular una teoría.

- *Situación de formulación*. La forma de conocimiento corresponde a un lenguaje que le permite la producción de mensajes y, por ende, el intercambio de informaciones codificadas según ese lenguaje. En este tipo de situaciones el estudiante intercambia y comunica sus exploraciones a sus compañeros o a su profesor y ya puede comunicarlos en un lenguaje matemático, así sea muy incipiente.
- *Situación de validación*. Toma la forma de conocimiento de una teoría, que le permite construir sus propios juicios, los cuales pueden intercambiarse. En esta situación, el estudiante debe demostrar por qué el modelo que construyó es válido, a fin de convencer a otros de ello.

Sobre el precálculo

Tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, que tocan con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición que Dirichlet-Bourbaki formuló en 1939: el concepto general de *función* se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto. La enseñanza tiende a sobrevalorizar los procedimientos analíticos y la algoritmización, y deja de lado a los argumentos visuales por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas. Es decir, la concepción que de la matemática se tenga permea su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, el cual forma parte de la negociación, en el sentido de que el recurso algorítmico permite subsanar decorosamente lo establecido en el contrato y "aligera" la responsabilidad del profesor al eliminar dificultades subyacentes al contenido matemático.

La investigación sobre las premisas que sustentan la instalación de un lenguaje gráfico que permita el tránsito entre varios contextos ha sido reportada en Farfán (2012) y Cantoral y Farfán (1998). En síntesis, hemos sostenido que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, elementos centrales del estudio del precálculo y cálculo, se precisa, entre otros, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

En términos escolares se plantea la necesidad de propiciar la modificación del curso de precálculo al inicio de los estudios universitarios; un diseño para la escuela lo presentamos en Farfán (2013). En lo que sigue expondremos, *grosso modo*, los elementos del análisis preliminar en términos de ingeniería didáctica, en el sentido de Artigue (1992), así como los elementos sustantivos del diseño a fin de proporcionar un ejemplo de innovación para la escuela obtenida de la investigación en matemática educativa.

- *Estudio epistemológico.* La naturaleza del concepto de función es en extremo compleja; su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibió como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores. Una lista exhaustiva de obstáculos epistemológicos del concepto de función se encuentra en Sierpinska, 1992.
- *Estudio cognitivo.* Los objetos inmersos en el campo conceptual del cálculo (análisis) son particularmente complejos a nivel cognitivo pues, como en el caso que nos ocupa, la función se presenta como un proceso cuyos objetos son los números; este mismo concepto deviene en objeto al ser operado bajo otro proceso como la diferenciación (o integración), y así sucesivamente. De modo que al iniciar un curso de cálculo el estudiante debe concebir a la función como un objeto y por ende susceptible de operación; de otro modo, ¿qué significa operar un proceso? En nuestras experiencias con profesores y estudiantes hemos constatado que si logran incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, no sólo manejan a la función como objeto sino que además transitan entre los contextos algebraico, geométrico y numérico versátilmente, es decir, si se tiene dominio del contexto geométrico/visual, tanto en la algoritmia como en la intuición y en la argumentación, es posible el tránsito entre las diversas representaciones. El problema estriba en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico; por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar la existencia de una raíz doble algebraicamente que geométricamente, por lo que se acude al refugio algorítmico con facilidad.

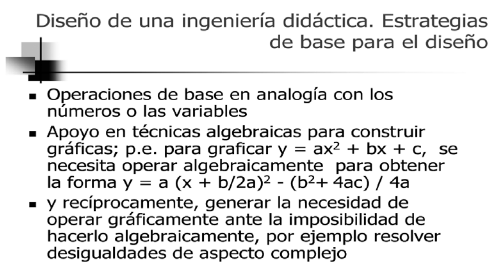
A partir de estos elementos nos proponemos un diseño con el objetivo explícito de construir un lenguaje gráfico. La hipótesis central, después de un análisis socioepistemológico a profundidad como el que se desarrolla en Farfán (2012), consiste en asumir que: previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales que se presentan como virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales, y que establezca un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, o mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

Esta hipótesis ha sido desarrollada tomando las siguientes directrices; en primer término se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables, dando sentido a operaciones fundamentales como las siguientes:

$-f(x)$ y $f(-x)$	Reflexión respecto del eje x y del eje y respectivamente.
$f(x+a)$ y $f(x-a)$, con $a>0$	Traslación en la dirección del eje x.
$f(x)+a$ y $f(x)-a$, con $a>0$	Traslación en la dirección del eje y.
$af(x)$	Contracción o dilatación respecto del eje y.
$f^{-1}(x)$	Reflexión respecto de la recta .
$\frac{1}{f(x)}$	Invierte ceros en asíntotas y viceversa, y las abscisas tales que $\|y\| > 1$ corresponderán con aquéllos donde $\|y\| < 1$ y viceversa, dejando intactos los puntos sobre las rectas $y = 1$ y $y = -1$.
$\|f(x)\|$ y $f(\|x\|)$	Respectivamente reflexión de las imágenes negativas al simétrico positivo respecto del eje x y reflexión de sustitución del lado de la gráfica con ordenadas negativas por la reflexión del lado de la gráfica con ordenadas positivas.

El segundo aspecto relevante lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencia: la identidad ($f(x)=x$), la exponencial ($f(x)=a^x$) y la sinusoidal ($f(x)=$sen x), todas ellas para construir las funciones elementales en el sentido de Cauchy. Estas funciones sirven, respectivamente, para construir las gráficas a las funciones algebraicas, logarítmicas y exponenciales y las trigonométricas gráficamente.

Figura 1. Diseño de una ingeniería didáctica



Fuente: elaboración propia.

En este acercamiento ha resultado importante plantear situaciones-problema que involucren enunciados algebraicos que favorezcan el uso del lenguaje gráfico, por ejemplo la tarea:

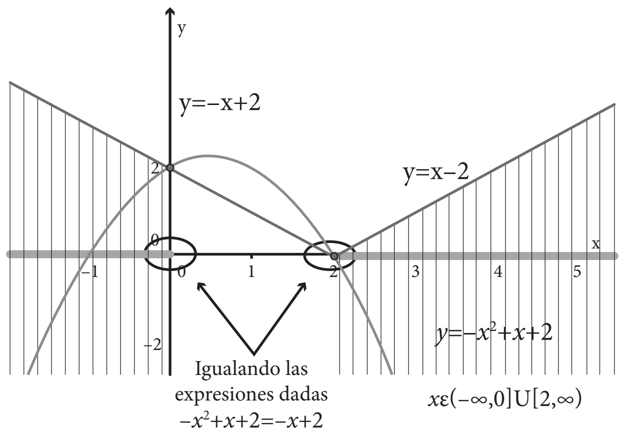
Resuelve la desigualdad $\frac{|x-a|+|x-b|}{|x+b|+|x+a|} \leq kx$

Es ampliamente desarrollada como estrategia de enseñanza en Farfán (2013), en donde el recurso de plantear la resolución de desigualdades es precisamente la variable didáctica de control del diseño que nos permite que el aprendiz deje el recurso algebraico que le ha funcionado escolarmente. Para todo ello es necesario operar algebraicamente a fin de obtener la gráfica de las funciones involucradas, para que finalmente sean comparadas y resolver de este modo los sistemas de ecuaciones a que haya lugar. Del mismo modo, buscar los extremos de funciones como $\frac{x}{ax^2+b}$ con a y b positivos, permite avanzar en la construcción del puente entre contextos, pues la tarea en este contexto sirve de guía a la sintaxis algebraica, de modo que ésta se refuerza en su significado.

Describimos enseguida un ejemplo:

Resolución de la desigualdad $-x^2 + x + 2 \leq |x-2|$

Imagen 2. Resolución gráfica de desigualdades



Fuente: elaboración propia.

En la imagen 2 pueden notarse las gráficas tanto de $y = -x^2 + x + 2$ como de $y = |x-2|$. El método usado es encontrar los puntos de corte de ambas gráficas, es decir, los valores para los cuales la gráfica de la función cuadrática es igual a la gráfica del valor absoluto, específicamente: $-x^2 + x - +2 = -x + 2$. La importancia de estos puntos radica en que marcan un cambio en las imágenes de una función con respecto a la otra. Esto es, en el primer punto de corte entre las gráficas, $x = 0$, las imágenes de la cuadrática pasan de ser menores a ser mayores que las imágenes del valor absoluto. En el segundo punto de corte, $x = 2$, las imágenes de la cuadrática pasan de ser mayores a ser menores que las imágenes del valor absoluto. Con este análisis es que se obtiene que en los intervalos $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ la gráfica de $y = -x^2 + x + 2$ es menor o igual que la gráfica de $y = |x-2|$, es decir, se satisface la desigualdad.

En síntesis, éstas son las premisas de nuestro acercamiento, cuyos ejemplos se expondrán en lo que sigue. Antes, es importante señalar que el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisan de procesos temporalmente prolongados, a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento pre-variacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado por Artigue (1998). Esa ruptura, además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación, sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio.

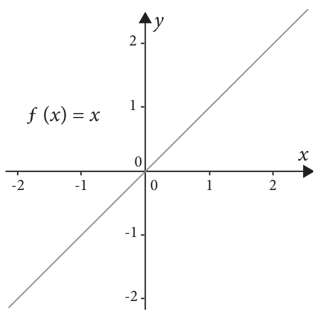
Operaciones gráficas

Creemos que es necesario rescatar algunos "mecanismos" que permitan generar conocimiento y dar significado a ciertos contenidos matemáticos. En este sentido, es importante que el estudiante logre un buen manejo del lenguaje gráfico y un pasaje fluido del contexto algebraico al gráfico. Con ello estaremos proporcionándole una base más sólida donde asentar otros conceptos de cálculo, por ejemplo, comportamiento de funciones, obtención de áreas, etcétera, y aportándole herramientas que le permitirán una mejor comprensión y, por ende, una mejor apropiación de conocimientos en niveles más abstractos.

Con el manejo de este tipo de operaciones intentamos dotar al alumno de un manejo del "lenguaje gráfico" que implica, por un lado, inducirlo a la "semántica gráfica", es decir, a la construcción de significados previos de las operaciones gráficas; y por otro, a la "sintaxis gráfica", vale decir, a su simbolización respetando ciertas reglas. En este espacio presentamos sólo el estudio de una operación, sin embargo, en Farfán *et al*. (2000) , es posible consultar otras.

$$\textit{Estudio de } \frac{1}{f(x)} \textit{ a partir de } f(x)$$

Para construir la gráfica del recíproco de una función partiremos de $f(x) = x$, pues se considera que es reconocida por el alumno. Así, se intenta que, de un análisis exhaustivo de la construcción de $1/x$, se logre la generalización a cualquier función mediante la detección de propiedades comunes.



Partimos entonces de la forma elemental $f(x) = x$

Sus características son, entre otras:

- $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Es creciente, pues si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.
- Es continua.
- Es simétrica respecto al origen de coordenadas, por tanto, es una función impar, es decir que $f(-x) = -f(x)$ ya que $f(-x) = -x = -f(x)$.

- $f(x)$ es positiva si $x > 0$, es decir, $f(x) > 0$ si y sólo si $x > 0$.
- $f(x)$ es negativa si $x < 0$, es decir, $f(x) < 0$ si y sólo si $x < 0$.
- $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Identificar características de $f(x)$ es relevante en cuanto se desea establecer cómo se modifican o conservan estas propiedades al calcular el recíproco de $f(x)$.

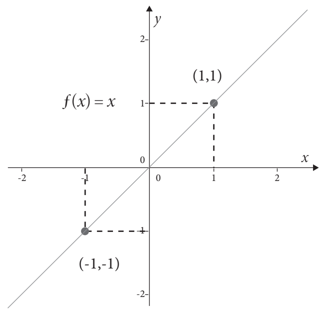
a) Estudio de los puntos (1,1) y (–1,–1)

Definimos:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$
$$\Rightarrow g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

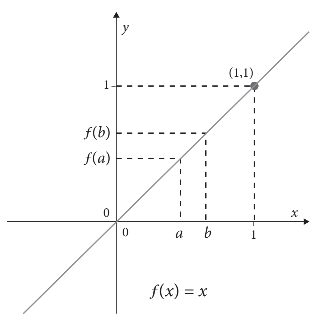
$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1$$
$$\Rightarrow g(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$



Es decir, los puntos (1,1) y (–1,–1) pertenecen tanto a la gráfica de f como a la de g.

b) Estudio de puntos a, b, $\in$ (0,1)

Para los puntos del intervalo (0,1) haremos las siguientes consideraciones:

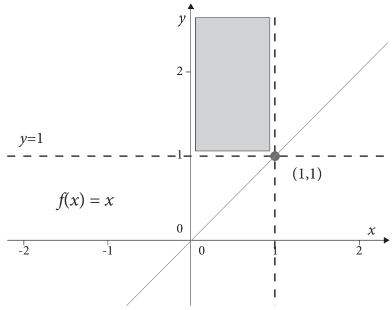


- Sean a, b, $\in (0,1)$ de modo tal que $a < b < 1$. Como $f(a) = a$ y $f(b) = b$, entonces, $f(a) < f(b)$, ya que $f(x)$ es creciente.
- Pero, $g(a)=\frac{1}{a}$ y $g(b)=\frac{1}{b}$. Si recordamos que $0 < a < b < 1$, al dividir por $a > 0$ las desigualdades no se alteran, por tanto:

  $$1 < \frac{b}{a} < \frac{1}{a}$$

  Si dividimos ahora por $b > 0$ obtenemos:

  $$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{ab}$$



- Además, $b < 1 \Rightarrow 1 < \dfrac{1}{b}$

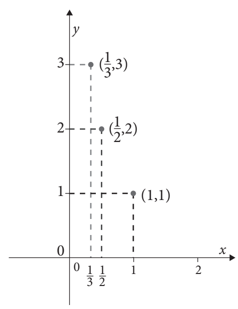
  Entonces $1 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

  Es decir $1 < g(b) < g(a)$
  Por tanto $g(x)$ decrece y se ubica por encima de $y = 1$.

Como ejemplo calculemos algunos puntos para comenzar a trazar la gráfica:

- $x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{1}{2} \quad$ y $\quad g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

- $x = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{1}{3} \quad$ y $\quad g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$



Si hacemos x cada vez más pequeño:

- $x = \dfrac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{1}{100} \quad$ y $\quad g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{100}} = 100$

en general, para n cada vez más grande:

- $x = \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{1}{n} \quad$ y $\quad g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = n$

Observamos que, a medida que $f(x)$ se hace más pequeño, $g(x)$ se hace más grande. Es decir, si hacemos tender x a cero, $f(x) = x$ también se acercará tanto como deseemos a cero y, por lo tanto, $g(x) = \frac{1}{x}$ tenderá a infinito, esto es, se hará tan "grande" como queramos.

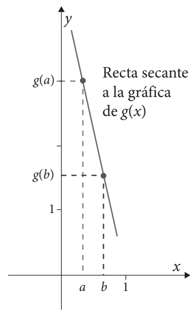
Tomemos ahora dos puntos de $f(x) : (a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tales que $a, b \in (0,1)$ con $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$ y, por lo visto anteriormente, $g(a) > g(b)$.

Además, $b - a > 0$ y $g(b) - g(a) < 0$. Efectivamente:

$$g(b) - g(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = -\frac{(b-a)}{ab}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$ es:

$$m = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{\frac{a - b}{ab}}{b - a} = -\frac{1}{ab}$$



Conforme a y b sean más pequeños $g(a) = \frac{1}{a}$ y $g(b) = \frac{1}{b}$ serán cada vez más grandes. Por otro lado, el producto de ab también está acercándose a cero, por tanto, $-\frac{1}{ab}$ se está haciendo "muy grande", es decir, este valor tiende a infinito (negativo).

Luego, como la pendiente de la recta secante a la gráfica de $g(x)$ es $-\frac{1}{ab}$, esta recta se va haciendo cada vez mas paralela al eje y a medida que nos acercamos a $x = 0$. Esto nos lleva a pensar que los puntos de la gráfica de $g(x)$ no atravesarán el eje vertical. Podemos deducir entonces que: $x = 0$ es una asíntota de la gráfica de $g(x) = \frac{1}{x}$.

c) Estudio de puntos $a, b, \in (1,+\infty)$

Ahora consideremos el intervalo $(1,+\infty)$ y sean $a, b \in (1,+\infty)$ tales que: $1 < a < b$, al dividir por $a > 0$ las desigualdades no se alteran y obtenemos:

$$\frac{1}{a} < 1 < \frac{b}{a}$$

de igual manera, si dividimos ahora por $b > 0$ nos queda

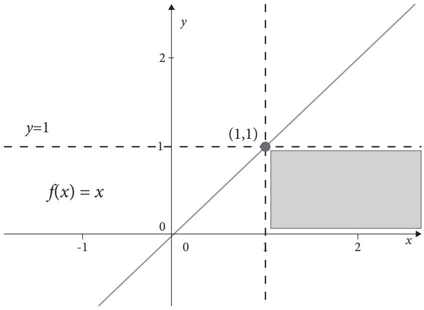
$$\frac{1}{ab} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$$

Luego,

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= a \\ f(b) &= b \end{aligned}\right\}$$ por tanto $1 < f(a) < f(b)$, y f crece y se mantiene por encima de la recta $y = 1$.

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= \frac{1}{a} \\ g(b) &= \frac{1}{b} \end{aligned}\right\}$$ por tanto, $g(b) < g(a) < 1$, g decrece y se mantiene por debajo de la recta $y = 1$.

Por otro lado, si

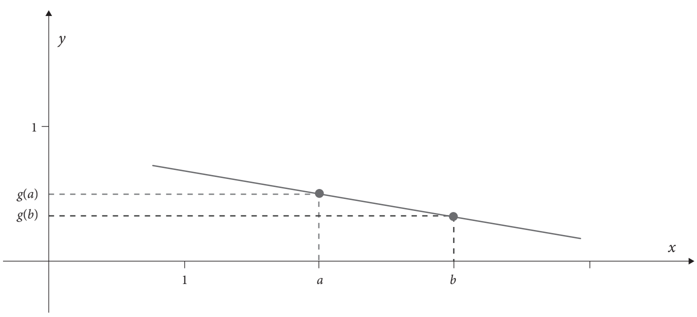


$$x \in (1,+\infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow g(x) > 0,$$

es decir, $g(x)$ se mantiene por encima de la recta $y = 0$, luego $0 < g(x) < 1$ para todo $x \in (1,+\infty)$.

Anteriormente vimos que la pendiente de la recta que une dos puntos $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$ es:

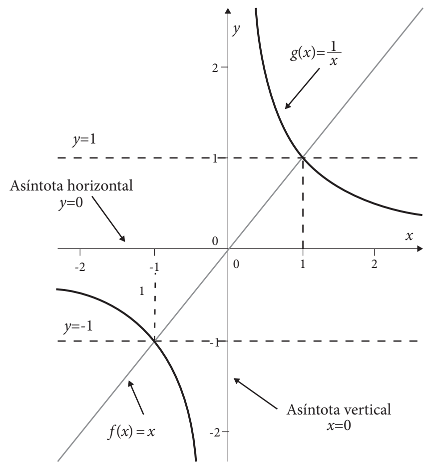
$$m = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = -\frac{1}{ab}.$$



Si ahora hacemos que a y b sean cada vez más grandes, es decir, que ambos tiendan a infinito, la pendiente de esta recta a la gráfica de $g(x)$ tenderá a cero, es decir, será cada vez más horizontal o paralela al eje x. Esto nos hace pensar que los puntos de la gráfica de $g(x)$ no atravesarán la recta $y = 0$. Así, el eje x será una asíntota horizontal de la gráfica de $g(x)$.

Del análisis de las características de $f(x)$, sabemos que f es una función impar. Ahora, como $g(x) = \frac{1}{x}$ entonces $g(-x) = -\frac{1}{x} = -g(x)$, de lo que concluimos que $g(x)$ es impar, por lo tanto, la gráfica de $g(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Entonces, con lo estudiado hasta ahora, estamos en condiciones de trazar la gráfica completa: gráfica de $f(x) = x$ y de su recíproca $g(x) = \frac{1}{x}$.



Analicemos ahora la manera en que se puede construir la gráfica del recíproco de una función arbitraria a partir de su gráfica. Para ello utilizaremos los resultados que obtuvimos en el estudio del recíproco de la función elemental $f(x) = x$.

Generalización de la construcción de $\dfrac{1}{f(x)}$ *a partir de cualquier f(x)*

1) **Signo de** $\dfrac{1}{f(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} > 0 \\[2ex] \text{Si } f(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} > 0 \end{array}\right\}$$ Por tanto, se mantiene el signo de $\dfrac{1}{f(x)}$ respecto del signo de $f(x)$.

2) **Puntos invariantes**

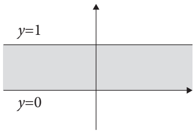
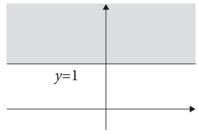
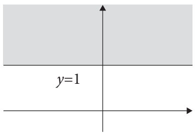
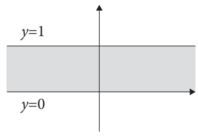
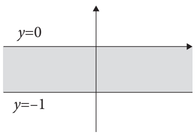
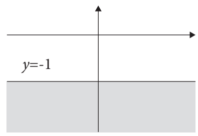
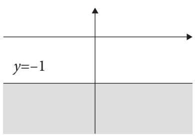
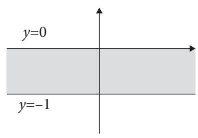
Sabemos que el recíproco de 1 es él mismo.

Por lo tanto, si $f(x) = 1$ para algún $x \in Dom\, f \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = 1$

Lo mismo ocurre con –1.

En conclusión, los puntos de la forma $(x, 1)$ y $(x, -1)$ que pertenecen a la gráfica de $f(x)$, pertenecen también a la gráfica de $\frac{1}{f(x)}$.

Todas las consideraciones anteriores quedan resumidas en la siguiente tabla:

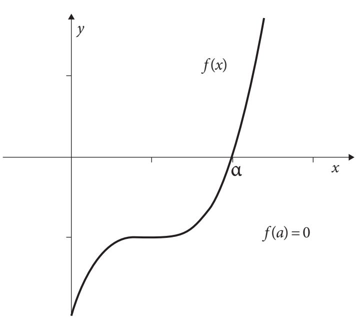
$f(x)$	Significado gráfico	$\frac{1}{f(x)}$	Significado gráfico	Observaciones
$0 < f(x) < 1$		$\frac{1}{f(x)} > 1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por encima de la recta $y = 1$
$f(x) > 1$		$0 < \frac{1}{f(x)} < 1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por debajo de la recta $y = 1$ y por encima del eje x
$-1 < f(x) < 0$		$\frac{1}{f(x)} < -1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por debajo de la recta $y = -1$
$f(x) < -1$		$-1 < \frac{1}{f(x)} < 0$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por encima de la recta $y = -1$ y por debajo del eje x

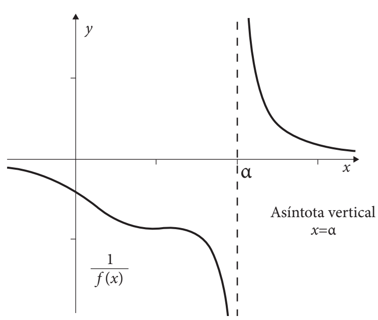
De la tabla anterior se deduce la importancia de graficar las rectas $y = 1$ y $y = -1$, pues dan una primera aproximación de las regiones donde se encontrará la gráfica de $\frac{1}{f(x)}$

3) **Ceros de $f(x)$**

Si existe $a \in Dom\, f$, tal que $f(a) = 0$ entonces $\frac{1}{f(a)}$ no está definida.

Por tanto, un cero de $f(x)$ se convierte en una asíntota de $\frac{1}{f(x)}$

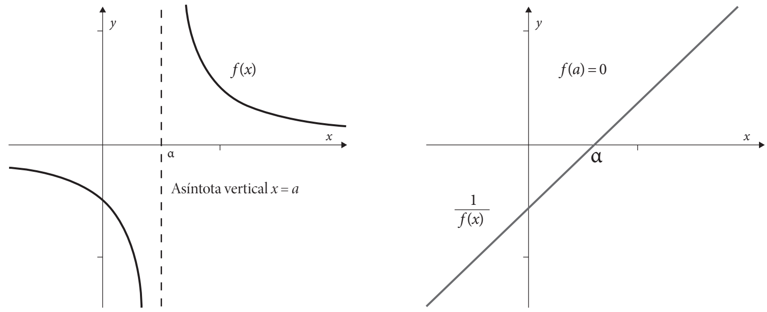




4) **Asíntotas verticales de $f(x)$**

Si $f(x)$ tiene una asíntota vertical en algún x, entonces, $f(x)$ tiende a infinito.

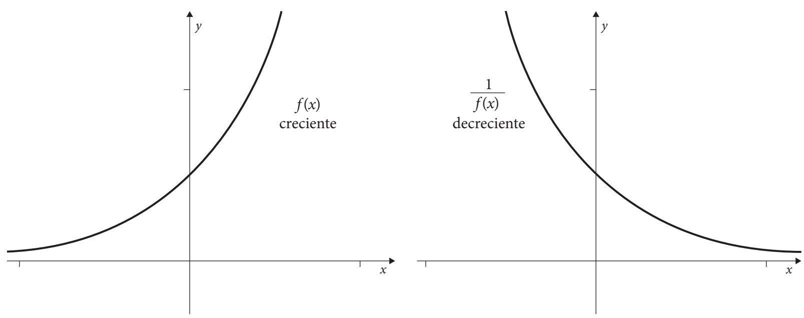
Por tanto, una asíntota vertical de $f(x)$ se convierte en un cero de $\dfrac{1}{f(x)}$



5) **$f(x)$ creciente o decreciente**

$f(x)$ es creciente si y sólo si, para todo $a,b \in Dom\, f$ tales que $a < b$, se cumple que $f(a) < f(b)$. Luego, si $a,b \in Dom\, f$ tales que $a < b$, vimos que $\frac{1}{f(b)} < \frac{1}{f(a)}$, por lo tanto, podemos concluir que:

Si $f(x)$ es creciente $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ es decreciente



Análogamente,

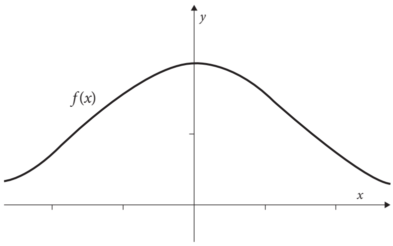
si $f(x)$ es decreciente $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ es creciente.

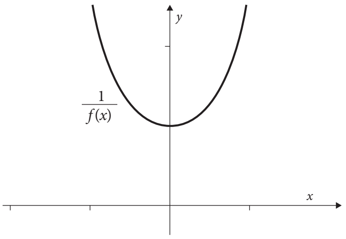
6) **Simetría respecto al eje y, es decir, $f(x)$ es una función par**

$f(x)$ es una función par, si y sólo si, para todo $x \in Dom\, f$ se cumple que $f(-x) = f(x)$.

Vemos que $\frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(x)}$ y podemos entonces concluir lo siguiente:

Si $f(x)$ es una función par, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es una función par. Por lo tanto, $\frac{1}{f(x)}$ también es simétrica respecto al eje y.





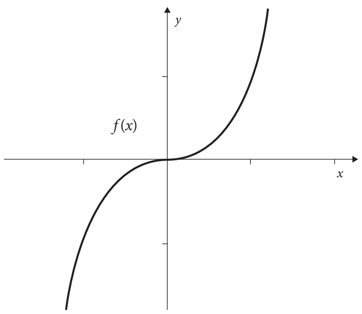
Funciones pares

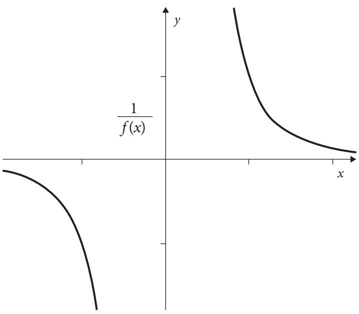
7) **Simetría respecto al origen de coordenadas, es decir, $f(x)$ es una función impar**

$f(x)$ es una función impar, si y solo si, para todo $x \in Dom\, f$ se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Luego $\frac{1}{f(-x)} = -\frac{1}{f(x)}$ y podemos entonces concluir que:

Si $f(x)$ es una función impar $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ es una función impar. Por lo tanto, $\frac{1}{f(x)}$ también es simétrica respecto al origen de coordenadas.



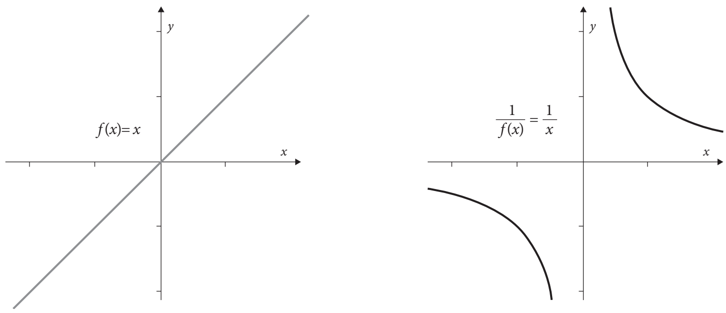


Funciones impares

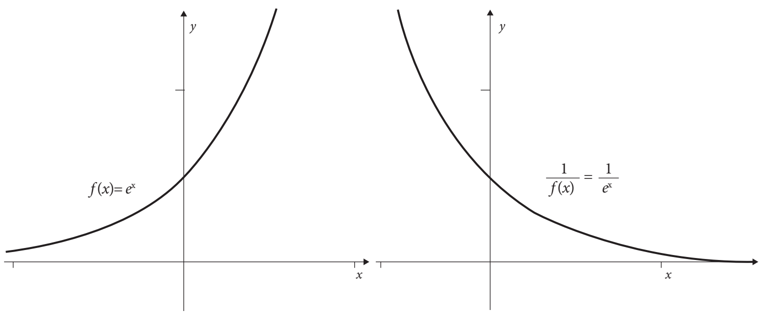
8) **Continuidad de $f(x)$**

Que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio, no implica que $\frac{1}{f(x)}$ también lo sea. En efecto, puede ocurrir que:

- $f(x)$ sea continua, como por ejemplo $f(x) = x$, pero su recíproca ser discontinua, tal es el caso de $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$. Observemos sus gráficas:



- Puede ocurrir que tanto $f(x)$ como $\frac{1}{f(x)}$ sean continuas en su dominio, por ejemplo, $f(x) = e^x$ y $\frac{1}{f(x)} = e^{-x}$. Observemos sus gráficas:



En conclusión, podemos asegurar que:

- Si $f(x) \neq 0$, para todo $x \in Dom\, f$, y $f(x)$ es continua entonces $\frac{1}{f(x)}$ es continua.

- Si $f(x) = 0$ para algún $x \in Dom\, f$, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es discontinua.

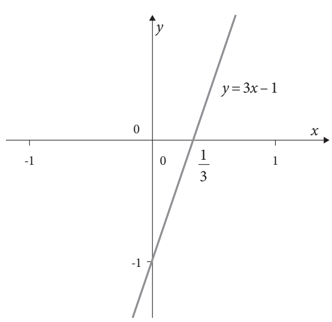
Consideramos que la pertinencia de este tipo de problemas respecto a su inclusión en los programas de precálculo radica en que dotar al alumno de un buen manejo del lenguaje gráfico facilita la comprensión y apropiación de nuevos conceptos de cálculo. En particular, el estudio del recíproco de una función permite reflexionar acerca de ciertas nociones, como asíntotas, ceros, máximos y mínimos, continuidad, y sobre lo que sucede con ellas al aplicar esta operación.

Al resolver este tipo de ejercicios, el alumno se ve obligado a pensar qué sucede ante, por ejemplo, un cero o asíntota. Este hecho lo acerca a conceptos de límite y sucesiones sin estar trabajando con ellos de manera explícita. Debe analizar lo que ocurre cuando $f(x)$ se hace cada vez más pequeña (cero), o cada vez más grande (asíntotas) y al aplicarle el recíproco; y a manejar ideas de "tiende a…", "se acerca a…". Por tanto, contribuye a formar una "base" donde sustentar nociones tales como límite, continuidad, máximos y mínimos, etcétera, inherentes al cálculo. Lograr un pasaje fluido y espontáneo entre estos dos lenguajes (gráfico y analítico) permite una mayor comprensión de las ideas subyacentes.

Resolución de desigualdades

Es innegable que la dificultad técnica que se presenta al resolver desigualdades obstaculiza su comprensión y su enseñanza y reduce su presentación escolar a unos cuantos ejemplos "complejos" a fin de completar el programa establecido. Por otra parte, las habilidades algebraicas y lógicas que desarrolla una minoría de estudiantes no contribuyen, sustancialmente, a un posterior estudio del cálculo. Nuestra estrategia para abordar en la escuela este tema estriba en el cambio de centración del contexto protagónico de la discusión, es decir, iniciamos el tratamiento en el contexto gráfico y hacemos una traslación hacia el contexto algebraico con el fin de apoyar argumentaciones o construcciones gráficas. También involucramos el contexto numérico usando la calculadora para conjeturar soluciones e ir estableciendo márgenes de aproximación que propician el fortalecimiento de la intuición numérica de los estudiantes. En lo que sigue veremos algunos ejemplos que el lector puede consultar en Farfán (2013), para mayores detalles.

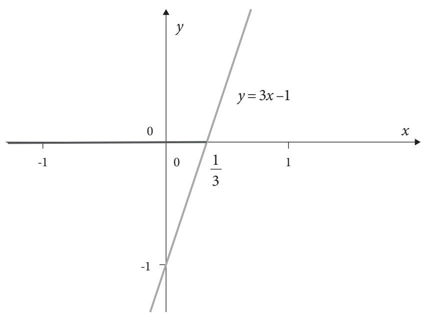
El problema de resolver una desigualdad de incógnita x radica en encontrar todos los números reales que, al sustituirlos por x, verifican la desigualdad dada. Tales números son las soluciones de la desigualdad, y forman el conjunto de soluciones que generalmente es un intervalo. Hagamos una analogía con la resolución de ecuaciones.



Resolver la ecuación $3x - 1 = 0$ es encontrar el valor de "x" para el cual el término $3x - 1$ es nulo; el problema planteado en una gráfica se interpreta como el de encontrar la intersección de la recta $y = 3x - 1$ con el eje x.

El valor de x requerido es 1/3, es decir que para dicho valor el término $3x-1$ se anula; en la gráfica, para ese valor de x la recta y el eje coinciden y la solución se expresa como $x = 1/3$.

Al introducir el término "desigualdad" se introducen los símbolos "<" (menor que), ">" (mayor que), "≤" (menor o igual que) y "≥" (mayor o igual que), que permiten que la solución sea un número, como en el caso de las ecuaciones, o bien, un conjunto de números e incluso varios conjuntos. De modo que al solicitar la solución de la desigualdad $3x-1 < 0$, observamos en la gráfica que para todos los números del eje x situados a la izquierda de 1/3 (es decir, menores que 1/3) los valores del término $3x-1$ están por debajo del eje x (es decir, son menores que cero), por lo que la solución requerida es un conjunto de números, a saber, el constituido por todos los números reales que sean estrictamente menores que 1/3. Así, la solución es el intervalo $(-\infty, 1/3)$.



Reflexionemos sobre el procedimiento anterior: hemos establecido una comparación entre la gráfica de la recta $y = 3x - 1$ y el eje de las x cuya ecuación es $y = 0$; la comparación fue dada por el símbolo "<" y nos preguntamos ¿a partir de qué número, la gráfica de la recta $y = 3x - 1$ está por debajo de la gráfica de la recta $y = 0$?

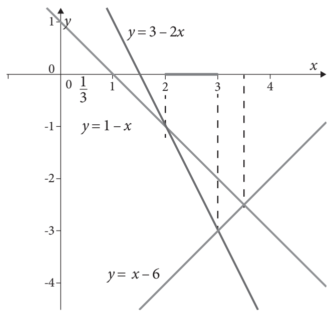
Hemos traducido "<", usado en la expresión algebraica, por "debajo de"; y se puede inferir la traducción de ">" por "arriba de" en el contexto gráfico, del mismo modo en que la igualdad se traduce como intersección (coincidencia).

De este ejemplo observamos que, en general, a diferencia de las ecuaciones, al resolver una desigualdad nos vemos obligados a exhibir un conjunto de números y que, en el contexto gráfico que usaremos en este escrito como ambiente de trabajo, resolver la desigualdad será localizar a partir de qué número (sobre el eje de las x) la comparación inducida por los símbolos ("<", ">", "≤", "≥") da lugar a la comparación ("debajo de", "arriba de", "debajo de y en la intersección", "arriba de y en la intersección") de los lugares geométricos involucrados.

Resolver la desigualdad $1 - x \geq 3 - 2x \geq x - 6$

Como antes, graficamos las rectas $y = 1 - x$, $y = 3 - 2x$ e $y = x - 6$ en un mismo sistema de ejes.

La gráfica de $y = 1 - x$ está por encima de la gráfica de la recta $y = 3 - 2x$ a partir del punto de intersección cuya abscisa es 2. En tanto que la gráfica



de la recta $y = 3 - 2x$ estará por arriba de la recta $y = x - 6$ hasta el punto de intersección que tiene por abscisa 3; después de tal valor la situación se invertirá, así que de ambas partes tenemos que la solución es el intervalo $[2,3]$, que también puede expresarse como el conjunto $(-\infty,3]\cap[2,\infty)$.

Reflexiones finales

La enseñanza tradicional sostiene que los aprendizajes se dan como resultado de "buenas prácticas" de enseñanza del docente, quien evalúa los aprendizajes a través de mecanismos de aprobación o reprobación de determinado curso; se confunde acreditar con aprender. En contraparte, los enfoques constructivistas nutren la idea de que aprender matemáticas requiere de su construcción por parte del estudiante, y que el aprendizaje se da con éxito cuando se logra poner en funcionamiento para resolver ciertas tareas en determinadas situaciones.

Desde la perspectiva de la teoría socioepistemológica se hace necesario que la gestión didáctica responda a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los escenarios (culturales, históricos e institucionales) que requiere la actividad matemática; para ello, esta actividad se debe apoyar en los propios procesos mentales del estudiante: sus conjeturas, sus procesos heurísticos, sus ensayos y exploraciones; de esta manera se abre la posibilidad de que la intuición sirva como punto de partida para el trabajo en la clase (Cantoral, 2013). Pero ¿cómo asegurar que se genera el ambiente propicio para esto? Respecto de la situación de aprendizaje se asegura que:

> …suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entiendan efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente… dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos se encuentran en situación de aprendizaje… pues la respuesta habrá de ser construida (Cantoral, 2013: 201).

Desde esta mirada se puede asegurar que un sujeto (individual o colectivo) no siempre está en situación de aprender; las situaciones de aprendizaje se deben propiciar, proponiendo una situación problema que enfrente al sujeto a un escenario en el que deba poner en juego los saberes que se requieren; se dice entonces que el individuo está en situación de aprendizaje cuando entra en conflicto, es decir, cuando el diseño provoca que su respuesta inicial a la tarea encomendada sea errónea y el mismo diseño lo hace percatarse de ello (Reyes, 2011).

La propuesta de diseño presentada busca construir un lenguaje gráfico de funciones extenso y rico en significados para quien aprende, que permita ir más allá de los procedimientos y algoritmos propios del álgebra y de la geometría analítica para dar paso a argumentos visuales a partir del uso de la gráfica al resolver situaciones problema, específicamente, las desigualdades.

Este tipo de tratamiento de las funciones, donde se incorporan fuertemente los elementos visuales, permite el tránsito entre los distintos contextos de la función: algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal. Esta herramienta le sirve al docente como nuevo punto de partida para que realicen nuevas situaciones en el aula, pues al conocer nuevas investigaciones relacionadas con los diferentes temas, esto contribuirá a que se promueva una actitud de liderazgo, confianza y mejora en sus prácticas para la enseñanza, favorecerá el empoderamiento del docente (Reyes y Cantoral, 2014) y, por ende, el enriquecimiento de la profesionalización docente.

Referencias

Artigue, Michèle (1992), "Ingénierie didactique", *Recherches en Didactique des Mathématique*, vol. 9, núm. 3, pp. 281-308.

Artigue, Michèle (1998), "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 1, núm. 1, pp. 40-55.

Bachelard, Gaston (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, París, Ed. Vrin.

Brousseau, Guy (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 33-112.

Cantoral, Ricardo (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*, Barcelona, Gedisa.

Cantoral, Ricardo y Rosa María Farfán (1998), "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", *Epsilon*, núm. 42, pp. 353-369.

Chevallard, Yves (1991), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires, Aique.

Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Joseph Gascón (1995), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, ICE-Horsori.

Farfán, Rosa María (2012), *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*, Barcelona, Gedisa.

Farfán, Rosa María (2013), *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo*, México, SEP-Subsecretaría de Educación Media Superior.

Farfán, Rosa María, Marcela Ferrari y Gustavo Martínez (2000), "Lenguaje algebraico y pensamiento funcional", en Ricardo Cantoral (coord.), *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Trillas, pp. 89-144.

Morales, Astrid y Francisco Cordero (2014), "La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 17, núm. 3, pp. 319-345.

Reyes-Gasperini, Daniela (2011), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*,

Tesis de Maestría, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
Reyes-Gasperini, Daniela (2016), *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa*, Tesis de Doctorado, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
Reyes-Gasperini, Daniela y Ricardo Cantoral (2014), "Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático", *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 48, pp. 360-382.
Sierpinska, Ana (1992), "On Understanding the Notion of Function", en Ed Dubinsky y Guershon Harel (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Washington, MAA Notes 25, pp. 23-58.