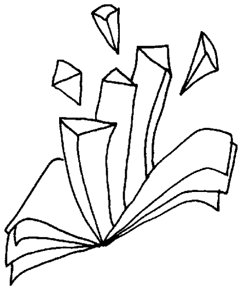
Herramientas tecnológicas en el desarrollo de sistemas de representación para la resolución de problemas*

MANUEL SANTOS TRIGO Y DAVID BENÍTEZ MOJICA**



Los estudiantes manifiestan sus formas de pensar y resolver problemas a partir del empleo de modelos que involucran distintos sistemas de representación. En este estudio, un problema de rutina se emplea como plataforma para que los estudiantes expresen, construyan y refinen sus ideas acerca de conceptos que involucran cambio o variación. El uso de la tecnología desempeña un papel importante en la presentación, identificación y exploración de conjeturas y relaciones. En particular, se observa que la utilización de distintas representaciones se transforma en un puente para conectar temas que tradicionalmente aparecen en áreas como cálculo, geometría, aritmética y álgebra.

An important goal in mathematics instruction is that students develop powerful conceptual systems that lead them to solve mathematical problems. We recognize that students use models that involve descriptions, explanations, and in general system of representations to externalize their ideas about mathematics and problem solving. Thus, models function as a means for students to exhibit and refine their repertoire of resources and mathematical problems solving strategies. In this study, a routine problem is used as a platform to encourage students to search for multiple ways to solve and transform the nature of the problem into a set of learning activities. In this process, the use of technology becomes an important tool to understand and connect concepts from areas that include arithmetic, algebra, geometry and calculus.

Maestros / Enseñanza-aprendizaje / Sistemas de representación / Problemas matemáticos / Bachillerato
Teachers / Teaching-learning / Representation systems / Mathematical problems / High school

INTRODUCCIÓN

Recientes reformas curriculares sugieren que los maestros deben diseñar e implantar actividades de aprendizaje en las cuales los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar y usar diversos sistemas de representación para resolver tareas matemáticas (National Research Council, 1998; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Sin embargo, los maestros reconocen la dificultad que enfrentan al tratar de formular problemas que ayuden a sus estudiantes a desarrollar hábitos del pensamiento que sean consistentes con estas reformas. ¿Qué recursos matemáticos y didácticos son importantes en el proceso de diseñar problemas o actividades de aprendizaje?, ¿existen principios que puedan guiar el diseño o la formulación de problemas?, ¿cómo transformar los problemas y ejercicios rutinarios que emplean los maestros en sus prácticas cotidianas, en actividades de resolución de problemas?

En este trabajo se documentan los distintos métodos de solución que emplean estudiantes del nivel medio superior cuando efectúan actividades de resolución de problemas. En particular, los mismos ejemplos que los maestros emplean en sus clases pueden usarse como plataformas para proponer distintos métodos de solución. En este proceso, el uso de la tecnología se convierte en una herramienta importante para presentar métodos de solución con cualidades matemáticas que no necesariamente se perciben cuando los estudiantes usan solamente papel y lápiz.

En el desarrollo del trabajo se sostiene que una actividad fundamental en la resolución de problemas consiste en que los estudiantes generen distintas formas o métodos de solución y examinen las propiedades inherentes a cada uno de estos métodos (Schoenfeld, 1998). En este contexto, trabajar con problemas da una oportunidad a los estudiantes para desarrollar modelos matemáticos que incluyan el uso de descripciones, explicaciones y de diversos sistemas de representación. En particular, el uso de la tecnología puede ofrecerles una ventana interesante para observar y examinar conexiones y relaciones.

MARCO CONCEPTUAL

La idea de marco conceptual que empleamos en el estudio se basa en el trabajo de Eisenhart (1991). En esta dirección, un marco conceptual se considera un soporte estructural de justificación en lugar de un esquema de explicación (*ibid.,* p.10). Se reconoce como "un argumento que incluye diferentes puntos de vista y culmina en una serie de razones para adoptar algunos puntos… y no otros" (*ibid.*, p. 10). Desde este enfoque, un marco conceptual es un razonamiento que justifica los conceptos que intervienen en la investigación y el tipo de relaciones que serán apropiadas y de utilidad en el problema de estudio o investigación. De manera similar a los marcos teóricos, los marcos conceptuales se basan en la investigación previa; sin embargo, éstos se construyen a partir de las fuentes que existen, incluyendo aquí posibles nuevos arreglos o ajustes que emerjan durante el desarrollo de la investigación.

* El presente estudio se desprende del proyecto "Procesos de resolución de problemas en ambientes que promueven el empleo de herramientas tecnológicas", financiado por CONACYT (referencia núm. 42295).

** Investigadores del Centro de Investigación y Servicios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), Universidad Autónoma de Coahuila.

Un principio fundamental en la instrucción matemática es que los estudiantes, al resolver problemas, deben desarrollar el hábito de buscar varias formas de solución e investigar ventajas y limitaciones de las representaciones que aparecen en el proceso de resolución.

> En la práctica actual, gran parte de la enseñanza tiene lugar dentro de un solo sistema de representación. Se dedica mucho tiempo y esfuerzo a que los estudiantes desarrollen habilidades para operar el lenguaje formal simbólico, y relativamente poco tiempo se dedica al empleo de otras representaciones de la misma idea (Goldenberg, 1995, p. 156).

El empleo de distintas representaciones desempeña un papel importante en el entendimiento de ideas matemáticas y en la resolución de problemas. En esta dirección, es necesario que los estudiantes construyan sistemas de representación que les permitan analizar y entender conceptos matemáticos desde varios ángulos o perspectivas. En particular, el uso de distintas herramientas tecnológicas (Excel, calculadoras, *software* dinámico) ayuda a que visualicen e identifiquen propiedades y relaciones que son parte de la estructura profunda de los conceptos o problemas. Lesh (en prensa) establece que "formas poderosas de pensar se generan en procesos iterativos y recursivos a través del desarrollo de perspectivas que involucran múltiples representaciones". En este contexto, resolver un problema va más allá de presentar una respuesta final; involucra investigar, representar, aplicar, interpretar y evaluar diferentes maneras de resolver el problema (Schoenfeld, 2002). Es decir, aprender matemáticas es un proceso de construcción continua de modelos del pensamiento matemático que deben evaluarse de manera constante y eventualmente transformarse en entidades más robustas.

Los estudiantes emplean modelos al interpretar situaciones matemáticamente. Estos modelos se fundamentan en sistemas conceptuales que se expresan a través de distintos medios, los cuales involucran el uso de diversos tipos de representaciones, descripciones, o explicaciones. En esta dirección es importante reconocer que la única forma de acceder a los sistemas conceptuales internos de los estudiantes es por un medio externo. Tan pronto como ellos desarrollan un sistema conceptual para encontrarle el sentido a una situación, emplean ese sistema conceptual para moldear sus experiencias. Así, cuando una persona o grupo está resolviendo un problema, las formas de pensar se expresan usando un medio externo que les ayuda a clarificar, modificar, refinar o revisar cada forma individual de pensamiento. Existe la tendencia a pensar que la única forma en que podemos conocer lo que pensamos es exteriorizando nuestra forma de pensar; y el mismo acto de exteriorizar nuestra forma de pensar tiende a inducir nuevos cambios, produciéndose de esta manera eslabones importantes entre las representaciones y el pensamiento. Así, cuando un estudiante primero dibuja y luego examina un diagrama, su manera de pensar puede haber cambiado en una forma importante.

La tecnología ofrece a los estudiantes un medio que puede favorecer el acceso y el desarrollo de recursos matemáticos que les ayuden en la construcción de esos modelos (Devlin, 1997). En particular, la representación de relaciones en forma dinámica les permite realizar exploraciones que frecuentemente conducen a la identificación y formulación de conjeturas. Además, en las representaciones dinámicas, los estudiantes fácilmente pueden construir y mover elementos en tal representación o configuración para poder analizar propiedades o relaciones de familias de figuras. Aquí los alumnos eventualmente reconocen la necesidad de plantear argumentos que fundamenten sus propias conjeturas.

Es importante aceptar que pueden existir distintos puntos de vista acerca de lo que significa pensar matemáticamente y que diferentes comunidades pueden distinguir o caracterizar el pensamiento matemático de acuerdo con sus propias experiencias profesionales. Aquí resulta interesante generar una visión amplia, que ayude a proponer un marco donde se identifiquen los fundamentos de la disciplina, los cuales garanticen una formación en los estudiantes que les permita ajustarse adecuadamente a los constantes desarrollos del campo de estudio. ¿Qué tipo de experiencias necesitan desarrollar en la resolución de problemas para enfrentar situaciones o problemas fuera de la escuela?, ¿cuáles son las herramientas conceptuales o modelos que necesitan para enfrentar esos problemas?, ¿cómo pueden los estudiantes mismos desarrollar mecanismos de aprendizaje que les permitan compartir, reutilizar, refinar y modificar o robustecer sus modelos de resolución de problemas? Lesh (en prensa) ha empleado lo que identifica como "estudios de expertos en evolución" para tratar de investigar preguntas como las anteriores. En este tipo de estudios, los participantes trabajan en ciertas actividades que les permiten reconocer y transformar sus propios modelos de pensamiento. En este sentido, se establece un ambiente donde:

- Los participantes continuamente articulan, examinan, comparan y contrastan sus formas de pensar acerca de las matemáticas, la enseñanza, el aprendizaje y la resolución de problemas. Es decir, las herramientas conceptuales y modelos que utilizan para realizar las actividades reflejan sus formas de pensamiento.
- Los participantes revisan y refinan las herramientas conceptuales a partir de una interacción dentro de una comunidad que valora las contribuciones de todos los miembros.
- Los participantes desarrollan herramientas y formas de pensar que ellos mismos evalúan en términos de sus aplicaciones potenciales. Además, generan información sobre cómo tal herramienta ha llegado a ser funcional para ellos.

Un aspecto fundamental en el desarrollo de las experiencias de aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes es que el empleo de distintas representaciones favorece la integración y la conexión de contenidos de la disciplina. Así, las múltiples formas de representar la información de una situación pueden resultar un vehículo para utilizar ideas que incluyen aspectos numéricos, algebraicos, geométricos o de cálculo.

PROCEDIMIENTOS Y ACTIVIDADES INSTRUCCIONALES

Un grupo de 35 estudiantes de tercero de bachillerato participó en un curso de cálculo con énfasis en la resolución de problemas. Los estudiantes abordaron series de problemas que incluyen ejercicios de libros de texto (además de problemas diseñados para ese curso) durante un se-

 M. Santos y D. Benítez (2003), vol. XXV, núm. 100, pp. 23-41

mestre. Las actividades de instrucción incluyeron las presentaciones por parte del maestro, el trabajo en forma individual de los alumnos y en grupos de cinco, así como discusiones de todo el grupo. Los estudiantes tuvieron acceso al uso de la computadora y calculadora; cuando trabajaron en grupos siempre había al menos uno que tenía cierta experiencia en el uso de estas herramientas, y éste ayudaba a que otros alumnos se familiarizaran rápidamente con el empleo de tales herramientas. La idea era que en el uso de la herramienta se adquiriera "transparencia" en cuanto a que no fuera un obstáculo que les impidiera vincularla directamente con la exploración matemática de los problemas.

En la fase inicial, los estudiantes en forma individual resolvían el problema, después compartían sus ideas dentro del equipo de cinco alumnos y eventualmente algunos de los métodos de solución de estos equipos se discutían con todo el grupo. El papel del maestro, además de las presentaciones ante la clase, fue coordinar y monitorear el desempeño individual y de los grupos de discusión. En algunos casos, proponía preguntas, pedía alguna explicación a los estudiantes, o sugería la consideración de cierta forma de representar la información. Durante el curso, la participación de los alumnos fue un ingrediente fundamental para el desarrollo de las actividades.

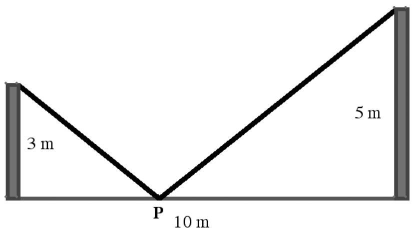
La información que se recolectó en el desarrollo del curso incluye el trabajo escrito que presentó cada grupo de discusión, los archivos del trabajo que se almacenaron en la computadora o calculadora y entrevistas con algunos estudiantes. Durante el análisis de los resultados se pone atención a los aspectos globales que caracterizan el trabajo de los estudiantes. Es decir, se reportan los distintos acercamientos que emergieron en el desarrollo de las actividades. En particular, las unidades de análisis se centran en el funcionamiento y los aportes de los grupos pequeños y las discusiones con toda la clase. El análisis se presenta a partir de la consideración de un problema donde se ilustran las distintas ideas que los estudiantes sugieren y emplean en el tratamiento de un problema rutinario. Nos interesa identificar y analizar los diferentes tipos de representaciones que ayudan a sistematizar la información y resolver el problema. ¿Existe otra forma de resolverlo? Esta fue una pregunta importante que resultó obligatoria para todos los estudiantes en su interacción con los problemas. Además, la búsqueda intencional de distintas soluciones es fundamental para establecer conexiones o extensiones relacionadas con el problema original.

Es necesario mencionar que las representaciones que emplearon los estudiantes en la solución del problema que aquí se ilustra, refleja el ambiente que se fue construyendo en el salón de clases. La presencia de representaciones múltiples en los acercamientos de los estudiantes resultó un aspecto fundamental para mostrar que gran parte de los problemas que aparecen en libros de texto pueden transformarse en actividades que resulten interesantes para los estudiantes.

EL PROBLEMA INICIAL[1]

La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 m, como se muestra en la figura 1. La longitud de cada poste es de 3 y 5 m. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de los dos postes se sujetará a un punto en tierra, localizado sobre la línea que une los dos postes. ¿Dónde debe situarse el punto sobre la tierra de tal manera que la longitud del cable sea la menor?

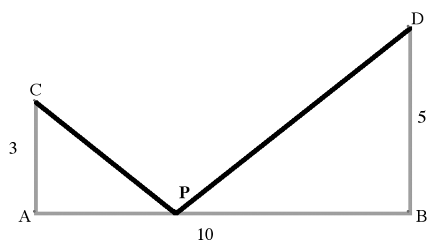
FIGURA 1 • Dos postes y un cable que une los extremos superiores con un punto sobre la recta que une a los postes.



COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA

Un aspecto importante en el proceso de solución de este problema es reconocer que la longitud del cable varía cuando el punto *P* se mueve sobre el segmento entre los dos postes y plantear la necesidad de cuantificar este cambio. En la representación inicial propuesta por los estudiantes se destaca el empleo de una notación particular para identificar los elementos clave del problema (figura 2).

FIGURA 2 • Representación del problema e introducción de una notación.



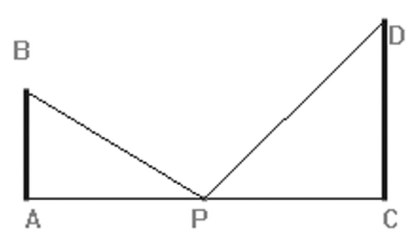
¿Cómo podemos saber si la longitud del cable cambia cuando el punto *P* se mueve a lo largo del segmento entre los dos postes?, ¿cómo podemos determinar la distancia entre un poste y el punto *P*?, ¿qué datos tenemos?, ¿cómo podemos usar el teorema de Pitágoras?

Éstas fueron las preguntas iniciales que ayudaron a los estudiantes a identificar la información relevante y a explorar la relación entre la longitud del cable y la localización del punto *P*. Con base en la representación del problema, algunos estudiantes observaron que el punto *P* podía estar ubicado en cualquier punto del segmento *AB*. También reconocieron que la hipotenusa en cada triángulo representa parte de la longitud del cable. Esto es, la suma de las dos hipotenusas representa la longitud total del cable. Además, observaron que el procedimiento que empleaban para determinar la longitud del cable, en un caso en particular, era el mismo para calcular la longitud del cable cuando el punto *P* se movía sobre el segmento *AB*. La hoja de cálculo (Excel) eventualmente apareció como una herramienta importante para calcular y representar la información del problema. A continuación se esbozan las ideas esenciales que emergieron durante este acercamiento:

El uso de una tabla

Algunos estudiantes se enfocaron en calcular casos particulares para la ubicación del punto *P*. En este sentido, hicieron uso de diferentes representaciones (tabulares y gráficas) en Excel para resolver el problema (figura 3).

FIGURA 3 • Análisis de casos particulares para el punto P.



Partiendo de esta gráfica, los estudiantes construyeron, usando Excel, una tabla para organizar los datos (figura 4).

FIGURA 4 • Cálculo de la longitud del cable para varios casos.

	A	B	C	D	E
1	AP	PC	BP	PD	BP+PD
2	0	10	3	11,1803399	14,1803399

En la primera columna pusieron un valor de *AP* igual a cero. Para construir la segunda columna (el valor de *PC*), escribieron la fórmula siguiente:

=10- A2

Esto constituye una representación, en el lenguaje de Excel, de que la distancia entre los dos postes es 10 m.

Para construir la tercera y cuarta columnas (los valores de *BP* y *PD* respectivamente), emplearon el teorema de Pitágoras y escribieron las fórmulas siguientes:

=RAIZ(9+A2^2)
=RAIZ(25+B2^2)

Estas expresiones representan los valores de las hipotenusas de los triángulos rectángulos *PAB* y *PCD.*

Los valores de la quinta columna representan la longitud total del cable y los estudiantes emplearon la expresión:

=C2+D2

Con la información anterior resultó sencillo completar la tabla (figura 5).

FIGURA 5 • Cálculos de la longitud del cable para una partición entera del segmento que une los postes.

	A	B	C	D	E
1	AP	PC	BP	PD	BP+PD
2	0	10	3	11,1803399	14,1803399
3	1	9	3,16227766	10,2956301	13,4579078
4	2	8	3,60555128	9,43398113	13,0395324
5	3	7	4,24264069	8,60232527	12,844966
6	4	6	5	7,81024968	12,8102497
7	5	5	5,83095189	7,07106781	12,9020197
8	6	4	6,70820393	6,40312424	13,1113282
9	7	3	7,61577311	5,83095189	13,446725
10	8	2	8,54400375	5,38516481	13,9291686
11	9	1	9,48683298	5,09901951	14,5858525
12	10	0	10,4403065	5	15,4403065

Con esta partición del segmento *AC,* los estudiantes observaron que la menor longitud del cable era aproximadamente igual a 12.81 m y se da para *AP = 4 m.* Con el propósito de encontrar una mejor aproximación a la solución, se dieron cuenta de que era necesario refinar la partición alrededor de la distancia *AP = 4 m* (figura 6).

FIGURA 6 • Mejora de la partición: el uso de números decimales.

A77 = 3,74999999999998

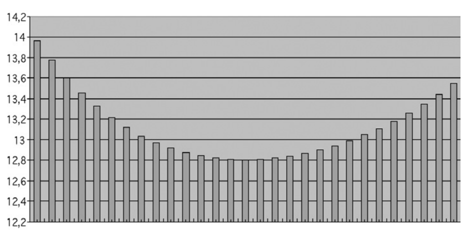
	A	B	C	D	E
74	3,72	6,28	4,77895386	8,02735324	12,8063071
75	3,73	6,27	4,78674211	8,01953241	12,8062745
76	3,74	6,26	4,79453856	8,01171642	12,806255
77	3,75	6,25	4,80234318	8,0039053	12,8062485
78	3,76	6,24	4,81015592	7,99609905	12,806255
79	3,77	6,23	4,81797675	7,98829769	12,8062744
80	3,78	6,22	4,82580563	7,98050124	12,8063069

En la tabla observaron que la longitud mínima se encuentra en un valor cercano a *AP* = 3.75 m. En este acercamiento, los estudiantes emplearon la idea de variación mediante procesos de refinación de la partición del segmento que une los dos postes. Lo importante en esta idea es que los alumnos observaron que era necesario considerar números decimales para obtener una mejor aproximación. Los ingredientes fundamentales de este modelo de pensar el problema incluyen la selección de casos particulares (distintas posiciones para *P*), el refinamiento de la partición, el empleo de la tabla y el uso de la herramienta, en este caso la hoja de cálculo.

Una aproximación visual

Después de que los estudiantes generaron la tabla anterior, construyeron la gráfica correspondiente y observaron que mientras más acercaban el punto a cualquiera de los postes, la longitud total del cable aumentaba. Observaron también que cuando el punto estaba a 3.75 m del poste más corto, la longitud total del cable alcanzaba su mínimo valor (figura 7).

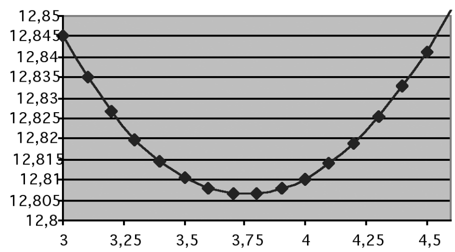
FIGURA 7 • Representación visual de la longitud del cable.



Una pregunta que surgió de esta imagen visual del problema fue: ¿cuándo o bajo qué condiciones el punto medio del segmento determina la mínima cantidad de cable? Los alumnos argumentaron que cuando la longitud de los postes era la misma, entonces el punto medio del segmento nos da la mínima longitud de cable, y cuando la longitud de los postes no era la misma, entonces el punto podría ser localizado hacia el lado del poste de menor longitud.

Otra forma en que los estudiantes respondieron incluye la gráfica de la función que relaciona valores del segmento *AP* y la longitud correspondiente (figura 8).

FIGURA 8 • Representación gráfica de la variación del cable en función de la ubicación del punto sobre la línea que une los postes.

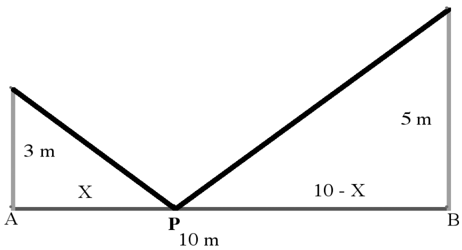


Se debe resaltar que en este proceso de refinación de la partición del segmento de 10 m de longitud, los estudiantes vieron la necesidad de pasar de una representación discreta de los datos a una representación continua de los mismos.

Aproximación algebraica combinada con el uso de la calculadora

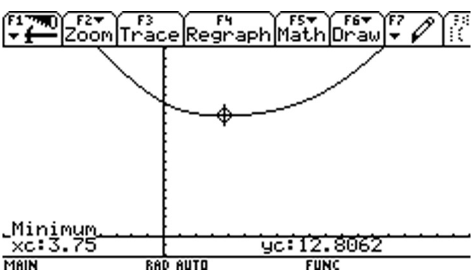
Los estudiantes reconocieron que una parte importante en la búsqueda de la longitud del cable para cada punto es identificar que existen dos triángulos rectángulos involucrados en la situación. También observaron que el punto *P* divide el segmento que une los dos postes en dos segmentos que son lados de dos triángulos rectángulos. Con base en la figura 9, propusieron encontrar la expresión general para la longitud del cable.

FIGURA 9 • Uso de lenguaje algebraico.



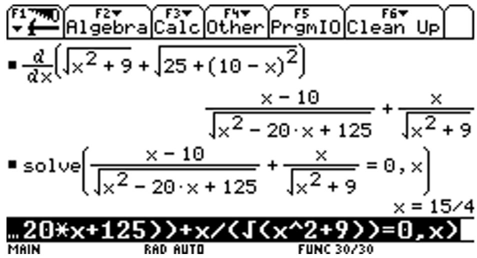
Los estudiantes expresaron la hipotenusa de cada triángulo rectángulo como $\sqrt{x^2+9}$ y $\sqrt{25+(10-x)^2}$, respectivamente, y la longitud total del cable como la suma de esas dos expresiones. Esto es, $l(x)=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{25+(10-x)^2}$. ¿Cómo podemos encontrar el mínimo valor de *l(x)* en esta expresión?, ¿podemos graficar esta función? Con la ayuda de una calculadora, obtuvieron la gráfica e identificaron el valor de *l(x)* que nos da el mínimo valor de (figura 10).

FIGURA 10 • Representación gráfica y localización de la longitud mínima del cable.



Otros estudiantes pensaron en el uso de conceptos del cálculo para encontrar el mínimo valor de *l(x)* (figura 11). Algunos emplearon la calculadora para encontrar el punto donde *l(x)* alcanza dicho valor. Al emplear este instrumento, enfrentaron el problema de decidir las dimensiones apropiadas de la "ventana" para que la gráfica pudiese mostrar los aspectos relevantes en el comportamiento de la función.

FIGURA 11 • Uso de la calculadora para realizar operaciones y determinar el punto donde el cable alcanza el menor valor.



Otros estudiantes recurrieron a procedimientos algebraicos para determinar el valor de x en el cual *l(x)* alcanzara su mínimo valor. La primera meta fue el encontrar la derivada de *l(x)* y determinar cuándo esa derivada es cero. Simbólicamente, esto significa que:

$$l'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}}=\frac{x\sqrt{25+(10-x)^2}-(10-x)\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}\sqrt{25+(10-x)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\ x^2\left[25+(10-x)^2\right]=(10-x)^2\left(x^2+9\right)$$

$$\Leftrightarrow\ 25x^2=9(10-x)^2$$

esta última ecuación se transforma en:

$$16x^2+180x-900=0\ .$$

Ahora, dividiendo ambos lados entre 4, tenemos que:

$$4x^2+45x-225=0$$

Usando la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática tenemos que:

$$x = \frac{-45 \pm \sqrt{45^2 + 16 \bullet 225}}{8}$$
$$= \frac{-45 \pm \sqrt{5^2 \bullet 3^4 + 2^4 \bullet 3^2 \bullet 5^2}}{8}$$
$$= \frac{-45 \pm 5 \bullet 3\sqrt{9+16}}{8}$$
$$= \frac{-45 \pm 5^2 \bullet 3}{8}$$
$$= \frac{-45 \pm 75}{8}$$

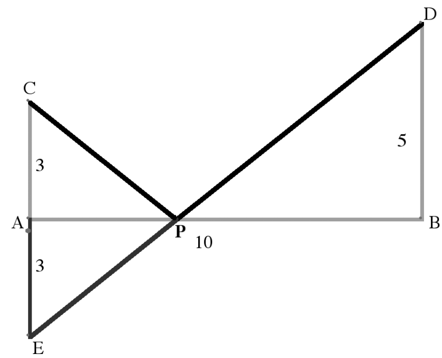
Durante este procedimiento algebraico fue evidente que los estudiantes tuvieron la oportunidad de usar una serie de propiedades de números reales, que les permitió transformar y determinar los valores correspondientes. Este aspecto es un ingrediente fundamental en el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes y se complementa con el procedimiento donde se emplea la calculadora.

Es importante mencionar que el modelo de pensamiento que se refleja en este acercamiento es básicamente algebraico. Aquí hay una representación general de la ubicación del punto *P* sobre el segmento y se establece una expresión que describe la longitud del cable. La calculadora les ayuda a visualizar el comportamiento de la función. Además, funciona como un monitor para aquellos que emplearon procedimientos algebraicos para encontrar la solución del problema. Al realizar las operaciones algebraicas los estudiantes también tienen oportunidad de apreciar el potencial del empleo de las propiedades de los números que tienden a reducir la complejidad de los cálculos.

Aproximación geométrica

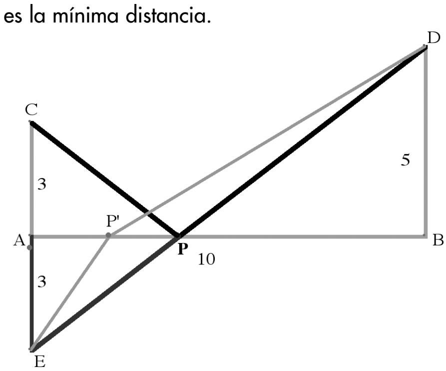
Otro método sugerido por el maestro fue examinar el caso en el cual un poste se ve reflejado en una línea vertical respecto al segmento que une los dos postes (figura 12).

FIGURA 12 • Reflejo del punto *C* sobre la línea AB.



Los estudiantes reconocieron que en este caso el segmento *ED* que intersecta al segmento *AB* en el punto *P* es la mínima longitud de cable. Ellos argumentaron que cualquier otro punto diferente como *P'*, generaría un triángulo *EP'D* en el cual la suma de *EP'* y *P'D* sería siempre más larga que *ED* (figura 13).

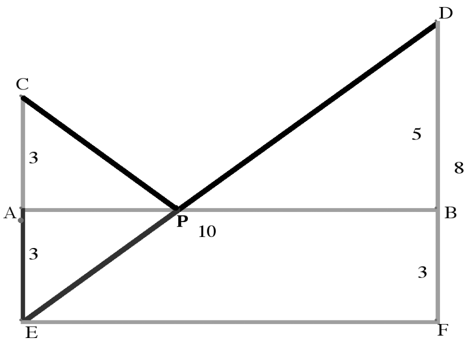
FIGURA 13 • Se argumenta que el segmento ED es la mínima distancia.



¿Cómo podemos determinar la longitud total del cable? Los estudiantes identificaron un triángulo rectángulo (figura 14) en el cual nuevamente la hipotenusa era la longitud total del cable. Esto es,

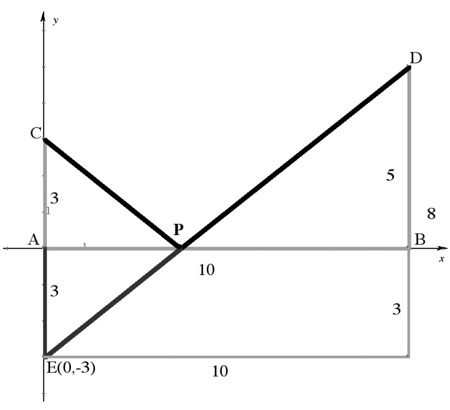
$$ED = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 12.8062$$

FIGURA 14 • Uso del teorema de Pitágoras para encontrar la distancia ED.



Otros estudiantes decidieron encontrar la distancia entre el punto *A* y el punto *P*. Para ello, introdujeron un sistema de coordenadas usando como origen el punto *A* (figura 15). Entonces encontraron la ecuación de la recta *DE* que pasa por el punto *E* (0,-3) y tiene pendiente $\frac{4}{5}$. Esto es, $y=\frac{4x}{5}+3$ y cuando *y=0*, ellos reportaron que la distancia entre *AP* era $\frac{15}{4}$.

FIGURA 15 • Introducción de un sistema de coordenadas para encontrar la distancia AP.



Algunos estudiantes mencionaron que los triángulos *APE* y *BPD* eran semejantes. Consecuentemente, los lados correspondientes eran proporcionales, esto es $\frac{x}{3}=\frac{10-x}{5}$, que conduce a $x=\frac{15}{4}$.

Los ingredientes fundamentales de este modelo de pensamiento involucran las propiedades de la reflexión de segmentos y uso de relaciones entre triángulos (semejanza y congruencia). Además, aquí el estudiante tiene la oportunidad de identificar la importancia de un sistema de referencia y emplear conceptos básicos que describen propiedades de la línea recta.

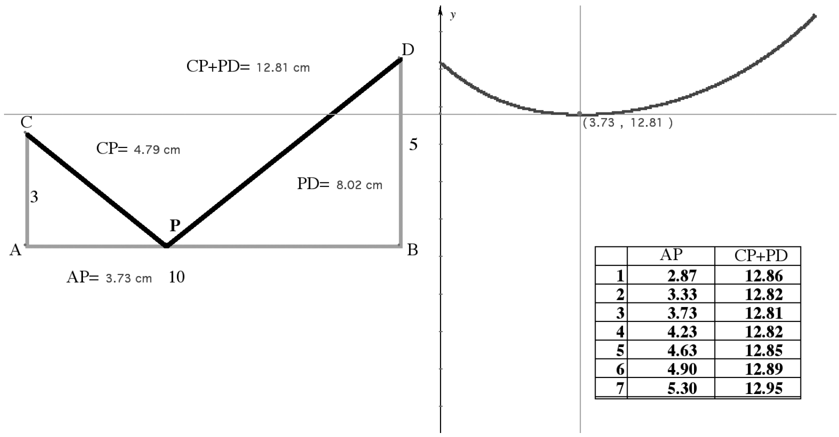
Aproximación dinámica: dos casos

1. Otra aproximación que los estudiantes mostraron mientras resolvieron el problema fue mediante el uso de un *software* dinámico. Esto les permitió determinar gráficamente la relación entre la distancia *AP* y la longitud total del cable (*CP* + *PD*). Moviendo el punto *P* a lo largo del segmento *AB* se genera una gráfica del comportamiento de la longitud total del cable. Es importante mencionar que el *software* permite generar una tabla que incluya algunos valores de la distancia *CP* y el valor correspondiente de *CP* + *PD*.

En este caso, el reporte de los estudiantes fue una aproximación de la mínima longitud del cable, es decir, 12.81 cm, que corresponde a una distancia *AP*=3.7cm (figura 16). En este proceso, los estudiantes exploraron el comportamiento del área generada por los dos triángulos cuando *P* se mueve a lo largo del segmento *AB.* Se sorprendieron al ver que la gráfica de la suma de esas dos áreas era el segmento mostrado en la figura.

2. Otro acercamiento de los estudiantes se relaciona con la identificación de una familia de elipses. Es importante mencionar que el *software* dinámico permite explorar comportamiento de distintas relaciones de manera simple.

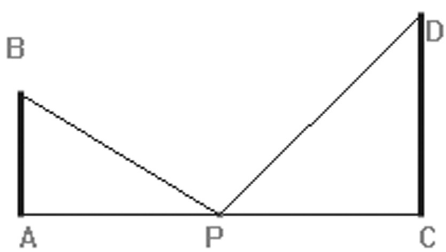
FIGURA 16 • Representación dinámica que incluye la representación del problema, la gráfica y un cuadro.



	AP	CP+PD
1	2.87	12.86
2	3.33	12.82
3	3.73	12.81
4	4.23	12.82
5	4.63	12.85
6	4.90	12.89
7	5.30	12.95

Por ejemplo, al observar la representación del problema los estudiantes sugirieron explorar el comportamiento de la suma *BP* + *PD*=*MN* para un valor determinado del segmento *MN* (figuras 17 y 18).

FIGURA 17 • Se conecta el problema original con la definición de la elipse.



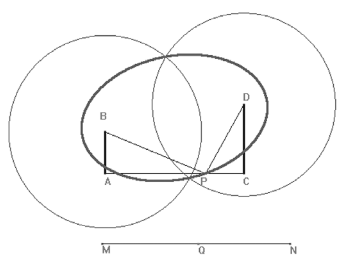
La manera como realizaron la construcción de esta familia de elipses se describe en los siguientes pasos:

a) Primero se construye el segmento *AC* y los segmentos *AB* y *CD* perpendiculares a *AC* y con las medidas del problema. Se identifica un punto *P* sobre el segmento *AC*.

b) Se construye un segmento *MN*, cuya medida es *BP* + *PD* = *MN*. Se ubica un punto *Q* sobre *MN*.

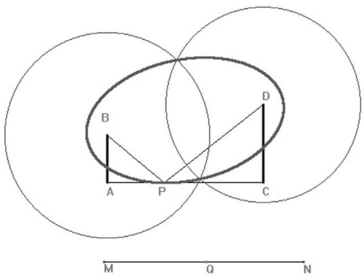
c) Con centro en *B* y radio *MQ* se traza una circunferencia. Con centro en *D* y radio *QN* se traza otra circunferencia. Se pide el lugar geométrico de las intersecciones de estas circunferencias cuando el punto *Q* se mueve a lo largo del segmento *MN*.

FIGURA 18 • Construcción de una familia de elipses.



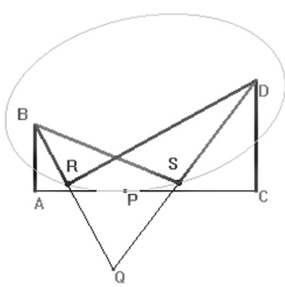
Se ha encontrado una familia de elipses. Sin embargo, la solución es aquella en la cual *MN* sea el mínimo; la medida del segmento *MN* no puede ser cero porque representa la longitud del cable. Para encontrar esta solución, se arrastra el punto *P* hasta encontrar un lugar en el cual el segmento *AC* sea tangente a la elipse (figura, 19).

FIGURA 19 • Identificación de la solución del problema.



Un aspecto importante aquí fue la necesidad de que los estudiantes construyeran un argumento para apoyar la afirmación de que la elipse tangente al segmento *AC* era la que interesaba en la solución del problema. Durante la discusión de todo el grupo y con la guía del maestro, se planteó un argumento desde las siguientes consideraciones:

FIGURA 20 • Se justifica la solución.



En la figura 20 se identifican los postes y una elipse, de tal manera que el segmento *AC* es tangente a ella en el punto *P*. Consideremos otro elemento de la familia de elipses que tienen focos en los puntos *B* y *D*, de tal manera que la línea que pasa por *A* y *C* es una secante. Sea *Q* un punto sobre tal elipse. Se trazan los segmentos *BQ* y *DQ*, se encuentran los puntos *R* y *S*, que son las intersecciones de la elipse original con estos segmentos. Bajo estas condiciones, se cumple que: $BQ > BR$ y $DQ > DS$, con lo cual se tiene que $BQ + DQ > BR + DS$ (a).

Utilizando la desigualdad del triangular en los triángulos *BQS* y *DRQ*, se tiene: $BS + SQ > BR + RQ$ (b); $DR + RQ > DS + SQ$ (c).

A partir de estas dos últimas desigualdades se concluye que: $BS + DR > BR + DS$ (d).

Recordemos que los puntos *R* y *S* están sobre la elipse; por ello se satisfacen las siguientes igualdades: $BR + DR = k$ y BS y $SD = k$, siendo k una constante. Utilizando estas igualdades en la expresión (d), se tiene:

$BS + DR > k$ (e)

Sumando $BS + DR$ en ambos lados de la desigualdad (a) se obtiene:

$BQ + DQ + (BS + DR) > 2k$ (f)

De las desigualdades (e) y (f) se puede concluir que:

$BQ + DQ > k$

Lo cual prueba que la mínima longitud de cable se da cuando el segmento *AC* es tangente a la elipse.

Aquí es importante señalar que el modelo que emplean los estudiantes para abordar el problema se basa en el diseño de una construcción dinámica del problema. En particular se destaca la relación funcional entre la longitud del segmento y la del cable sin el empleo de un lenguaje simbólico. Además, el *software* les permite explorar familia de casos fácilmente y establecer ciertas conjeturas que después tienen que ser sustentadas. Se resalta la necesidad de plantear un argumento que le dé racionalidad a sus observaciones o conjeturas.

Extensión 1

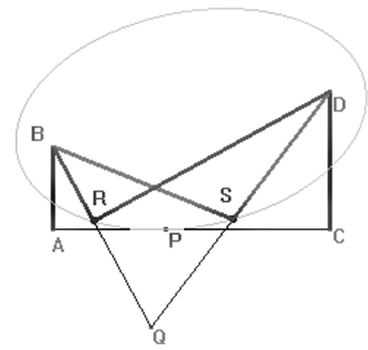
En la discusión de las cualidades de los distintos acercamientos, un estudiante preguntó acerca del punto de intersección entre los cables si ahora se unían de los extremos a las bases opuestas. El problema a explorar quedó en los siguientes términos:

> Suponiendo que la longitud de los postes es *a* y *b* y que la distancia entre ellos es *d*. Los cables están ahora atados desde el extremo superior de cada poste hasta la base del poste opuesto. La intersección de los cables es el punto *P*. ¿Cuál es la altura de ese punto de intersección con respecto a la línea que une ambos postes?

Cuando los estudiantes discutieron en el grupo los aspectos importantes de cada forma de resolver este problema, resultó natural pensar en un caso en general, en el cual estos números particulares usados para los postes, y la distancia entre ellos fueran reemplazados por cualquier cantidad. En este proceso fue relevante identificar relaciones entre triángulos semejantes (figura 20).

Partiendo de la representación, el objetivo era encontrar la longitud del segmento *QP*. En la figura se observó que la recta *EF* es paralela a *AB* y que los triángulos *AQP* y *PFC* eran semejantes. Los triángulos *EDP* y *PQB* también fueron identificados como semejantes. Las siguientes operaciones aparecieron en la solución del problema:

FIGURA 20 • Una extensión y el caso general.



Si *AQ* es *x*, *QP* es *h*, entonces tenemos que:

$$\frac{x}{h}=\frac{d-x}{b-h}$$

esto implica que

$$x=\frac{d\times h}{b}$$

.

Análogamente, de los triángulos *EDP* y *FQB* tenemos que:

$$\frac{a-h}{x}=\frac{h}{d-x}$$

de la cual tenemos que:

$$x=\frac{a\times d-d\times h}{a}$$

De las dos expresiones anteriores tenemos que:

$$\frac{d\times h}{b}=\frac{a\times d-d\times h}{a}$$

Esto es,

$$h=\frac{a\times b\times d}{d(a+b)}=\frac{a\times b}{a+b}$$

Para el caso en particular cuando $a = 3$, $b = 5$ y $d = 10$, entonces $h = 15/8$.

Extensión 2

Los estudiantes observaron que los acercamientos geométricos y dinámicos no involucraron procedimientos algebraicos para encontrar la solución. Aquí, el maestro propuso el problema siguiente:

Sea *C* un punto en el interior de un ángulo dado. Encontrar los puntos *A* y *B* sobre lados del ángulo tales que el perímetro del triángulo *ABC* sea mínimo (figura 21).

FIGURA 21 • Exploración de relaciones y conexiones con el problema original.

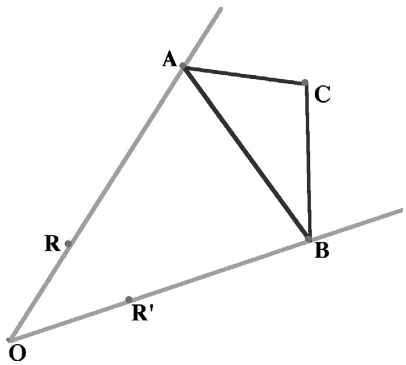
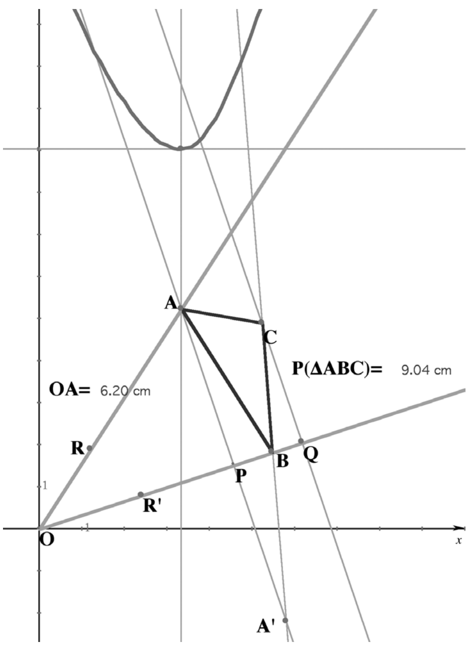


FIGURA 22 • Relación con el problema inicial.



La idea inicial fue tratar de relacionar este problema con el que habían estado trabajando. Con la ayuda del *software* dinámico, los estudiantes empezaron a construir la representación del problema y eventualmente identificaron la relación con el problema inicial (figura 22).

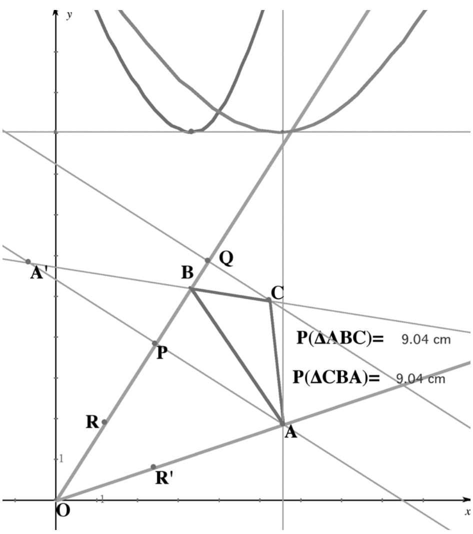
Las ideas fundamentales se describen a continuación:

1) Sean los rayos *OR* y *OR'* con un punto común *O,* y *C* un punto en el interior del ángulo *ROR'.*
2) La meta inicial es encontrar la longitud mínima desde el punto *C* a cualquier lado del ángulo. Así, desde el punto *C* se traza una perpendicular a cualquiera de los rayos. Por ejemplo, desde *C* se traza una recta perpendicular al rayo *OR'*; esta recta corta a *OR'* en *Q.* Ahora, sobre el rayo *OR* se toma un punto *A* cualquiera y desde *A* se traza una perpendicular al rayo *OR'.* Esta perpendicular corta al rayo *OR'* en *P.*
3) En esta construcción se reconoce que los segmentos *AP* y *CQ* son los postes del problema anterior unidos por *PQ.* Así, para encontrar el punto *B* sobre *PQ* para que la distancia *AB* + *BC* sea mínima se procede de manera similar a uno de los acercamientos del problema anterior. Se construye *A*', el punto simétrico de *A* respecto a *P*. Al unir el punto *A*' con el punto *C* se obtiene el punto *B* (punto de intersección del segmento *PQ* con *A'C*) y es el punto que determina la menor distancia para *AB* + *BC.*
4) Se observa que al mover el punto A sobre el rayo *OR* se genera una familia de triángulos. Así, para cada distancia *OA* existe un triángulo con cierto perímetro y para determinar el de menor

perímetro de toda esa familia se dibuja la gráfica que asocia a cada punto *A* del rayo *R* con su perímetro correspondiente (utilizando el comando Locus). Se observa que para un valor del segmento *OA* igual a 6.20 le corresponde el de menor perímetro igual a 9.04.

En la figura 23 se observa que cuando se realiza una construcción semejante pero ahora la perpendicular se traza del punto *C* al rayo *OR*, se obtiene la misma solución.

FIGURA 23 • Se verifica la solución al problema.

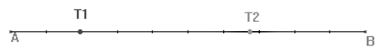


Conexiones

En la parte final de la sesión, el maestro propuso el siguiente problema:

Sean *T1* y *T2* dos trenes que viajan en sentidos opuestos por vías paralelas (figura 24). Los trenes parten simultáneamente de dos ciudades *A* y *B* que están a una distancia de 10 millas. El tren *T1* viaja a una velocidad de 3mi/h, mientras que el tren *T2* viaja a 5mi/h. ¿A qué distancia respecto a la ciudad *A* se encontrarán los trenes?, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que los trenes se encuentran?

FIGURA 24 • Representación geométrica.



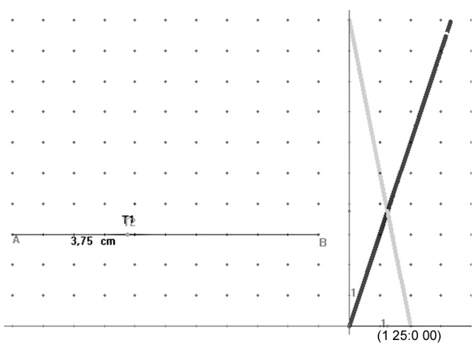
La idea central era contestar las preguntas anteriormente planteadas y tratar de encontrar la conexión de este nuevo problema con el originalmente planteado.

Los estudiantes construyeron sobre un segmento *AB*, dos puntos *T1* y *T2* con la condición que si *T1* recorre una distancia *x*, el punto *T2* recorrerá una distancia $\frac{5}{3}x$.

En la siguiente gráfica, el punto *P* representa la distancia recorrida por el tren *T1* para un tiempo *t,* mientras que el punto *Q* representa la distancia recorrida por el tren *T2* en el mismo tiempo *t.*

Para encontrar la distancia recorrida y el tiempo que transcurre hasta que los trenes se encuentran, los estudiantes arrastraron el punto *T1* y observaron la huella de los puntos *P* y *Q*. La solución del problema son los puntos de corte de las dos rectas (figura 25).

FIGURA 25 • Solución dinámica.



Fue importante observar que al final de las sesiones los estudiantes trataron de analizar y encontrar el sentido a los problemas en términos del empleo de la tecnología, en especial mediante las representaciones generadas con el *software* dinámico.

Cualidades matemáticas de los modelos de solución empleados por los estudiantes

El contenido inicial que examinaron los estudiantes por medio de sus aproximaciones en este problema fue el concepto de variación. Sin embargo, en el desarrollo de los distintos métodos de solución aparecen contenidos que comúnmente se asocian con otras disciplinas como geometría euclidiana, analítica y álgebra. Esto refuerza la idea de que hay que romper con la visión de pensar la educación de los estudiantes en términos de materias bien definidas. En su lugar, los alumnos pueden emplear conceptos e ideas de varias disciplinas, no sólo en la solución de un problema, sino en la organización y selección de los contenidos en general. Además de estudiar distintos contenidos, es importante que los estudiantes desarrollen estrategias que les permitan representar, analizar, interpretar y comunicar resultados. Cada representación que apareció en el tratamiento del problema inicial posee importantes cualidades matemáticas. Por ejemplo, el empleo de una tabla para presentar diferentes circunstancias es una estrategia poderosa para introducir la idea de aproximación y límite. Los estudiantes que inicialmente identificaron ejemplos de dos enteros cuya suma es 10 para calcular los diferentes valores de la longitud del cable, posteriormente se dieron cuenta de que esas operaciones pueden ser resueltas también con la ayuda de Excel. En ese momento, ellos propusieron no sólo números decimales, sino que introdujeron un camino sistemático para organizar los datos. El trabajar con distintas formas de representación de los números (decimales o racionales) ofrece ciertas ventajas en el entendimiento de relaciones y resultados (Santos, 2002).

El proceso de graficar los datos de una tabla permitió a los estudiantes visualizar el comportamiento de la longitud del cable. En particular, observaron que cuando el punto P está más cerca de uno de los postes, la longitud total del cable aumenta. Aquí descubrieron que la longitud de los postes era relevante para encontrar la localización del punto P. Por ejemplo, reconocieron que cuando los postes tienen la misma longitud, entonces la longitud total del cable alcanza su mínimo valor en el punto medio del segmento que los une. Fue evidente que no solamente estuvieron interesados en encontrar la respuesta del problema, sino en explorar otros posibles casos.

Durante la aproximación de la tabla, identificaron ideas que fueron necesarias para expresar la longitud del cable en términos de información dada. Por ejemplo, reconocieron que existían dos triángulos rectángulos de los cuales se podía calcular sus lados correspondientes y que la longitud del cable era la suma de sus dos hipotenusas.

Los estudiantes que se enfocaron en encontrar una función que expresara la longitud total del cable en términos de la distancia x, eventualmente daban una fórmula. El uso de una calculadora resultó importante para graficar la función y para encontrar la mínima longitud del cable, así como para encontrar la derivada de dicha función.

La aproximación geométrica fue también importante para relacionar este problema con diferentes líneas de contenido que incluyen triángulos rectángulos, sistema de coordenadas cartesianas, ecuación de una recta, triángulos semejantes, la definición de elipse, la ecuación cuadrática, el teorema de Pitágoras y la conexión con problemas de física. Los estudiantes reconocieron que dibujar el reflejo de uno de los postes fue una estrategia poderosa para resolver el problema.

La aproximación dinámica ofreció a los alumnos la oportunidad de explorar directamente qué pasa con la longitud del cable cuando el punto P se mueve a lo largo del segmento. Además, construyeron una tabla en la que se mostraban los valores de la distancia desde un poste hasta el punto P y su correspondiente longitud de cable. La principal diferencia entre esta representación y la obtenida con la calculadora es que los estudiantes pudieron realmente construir la representación del problema con la ayuda de un *software* dinámico, y además desplazar la localización del punto para observar su comportamiento; en cambio, con la calculadora la gráfica se obtenía directamente. El empleo del *software* dinámico no sólo les permite explorar relaciones, sino también construir su propio repertorio de resultados matemáticos (Santos y Espinosa, 2002). Resulta evidente que el empleo de distintas herramientas ofrece ciertas ventajas en el proceso de trabajar con los problemas. Aquí es necesario que los estudiantes tengan acceso directo al empleo de estas herramientas y posteriormente contrasten las cualidades matemáticas que emergen en sus procesos de solución. Es decir, en lugar de adoptar el uso de una sola herramienta es importante que el alumno se acostumbre a la tarea de poder seleccionar varias alternativas que le permitan explorar distintos enfoques o ángulos del problema en estudio.

OBSERVACIONES FINALES

Cuando en los ambientes de aprendizaje se valora la participación de los estudiantes y explícitamente se reconoce la importancia de buscar distintas formas de resolver problemas, se observa que éstos desarrollan una disposición hacia la construcción de distintos modelos de pensamiento. En este camino, para ellos es un reto importante generar representaciones múltiples de los problemas que les ayuden a detectar y explorar formas diferentes de solución. Algunos problemas que aparecen con frecuencia en los libros de texto regulares pueden ser tomados como la plataforma que motive a los estudiantes a practicar actividades propias del quehacer matemático.

En las diferentes aproximaciones a la solución del problema discutido en este artículo resultó evidente que el uso de la tecnología:

- Posibilita la utilización de imágenes visuales de las ideas matemáticas y permite a los estudiantes observar comportamientos o relaciones importantes en el problema.
- Puede facilitar la organización y el análisis de datos, y realizar cómputos eficazmente y con precisión.
- Puede ayudar a expresar los datos en diferentes sistemas de representación (tabulares, gráficos y analíticos). Como consecuencia, resulta una herramienta poderosa para establecer conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas (geometría, cálculo, álgebra y aritmética).

Estos elementos son ingredientes básicos que permiten a los estudiantes manifestar y refinar sus propios modelos, que ulteriormente se transforman en herramientas poderosas para buscar extensiones y posibles conexiones entre distintos contenidos de la disciplina.

REFERENCIAS

DEVLIN, K. (1997), "The logical structure of computer-aided mathematical reasoning", en *The American Mathematical Monthly,* vol. 104, núm. 7, pp. 632-646.

EISENHART, M. A. (1991), "Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers (Plenary address)", en *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of PMENA,* Blacksburg, Virginia.

GOLDENBERG, Paul (1995), "Multiple representations: A vehicle for understanding understanding", en David N. Perkins, Judah L. Schwartz, Mary Maxwell West y Martha Stone (eds.), *In software goes to school. Teaching for understanding with new technologies,* Oxford, Oxford University Press, pp. 155-171.

LESH, R. (en prensa), *Beyond constructivism: A new paradigm for identifying mathematical abilities that are most needed for success beyond school in a technology based age of information,* Australia, Queensland University of Technology.

NATIONAL Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA, The Council.

NATIONAL Research Council (1998), *High school mathematics at work. Essays and examples for the education of all students,* Washington, D. C., National Academic Press.

SANTOS, M. (2002), *Students' use of mathematical representations in problem solving. Mathematics and computer education,* pp.101-114.

SANTOS, M. y H. Espinosa (2002), "Searching and exploring properties of geometric configurations via the use of dynamic software", en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 33, núm. 1, pp. 37-50.

SCHOENFELD, A., H. (1998), "Reflections on a course in mathematical problem solving", en *Research in Collegiate Mathematics Education III*, pp. 81-113.

— (2002), "Research methods in (mathematics) education", en L. D. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education: Directions for the 21st century, Mahwah,* NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 435-487.

NOTAS

1. Este problema se le atribuye a Heron de Alejandría y en algunos textos aparece como: "Sean *A* y *B* dos puntos dados sobre el mismo lado de una recta *L*. Encontrar un punto *D* sobre *L* tal que la suma de las distancias del punto *A* al punto *D* y del punto *D* a *B* sea la mínima".