

*Revista Electrónica Nova Scientia*

**Homogeneización de materiales compuestos de  
inclusiones elipsoidales periódicas**  
**Homogenization of periodical ellipsoidal  
inclusions composites**

**H. Hernández Cabanas<sup>1</sup>, José A. Otero<sup>1,3</sup>, Guillermo  
Monsivaís<sup>4</sup> y Reinaldo Rodríguez-Ramos<sup>5</sup>**

---

<sup>1</sup> Física Aplicada, Instituto de Cibernética, Matemática y Física, La Habana

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca

<sup>3</sup> Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México

<sup>4</sup> Instituto de Física, Universidad Autónoma del Estado de Morelos

<sup>5</sup> Facultad de Matemática y Computación, Universidad de la Habana

---

**México-Cuba**

*Hans Hernández Cabanas.* E-mail: shemanel@gmail.com

## Resumen

Los materiales compuestos son de vital importancia para el ser humano desde sus primeros tiempos, en la actualidad el empleo de estos materiales ha proliferado en la industria debido a la presencia de propiedades físicas que no están presentes en ninguno de sus componentes. El hecho de conocer previamente las propiedades de los materiales compuestos es uno de los problemas a los que se enfrenta la ciencia. Los métodos de homogeneización se emplean para calcular las propiedades efectivas de materiales compuestos. En el presente trabajo se plantea la formulación del método de homogeneización asintótica para compuestos tridimensionales y la transformación de los problemas locales a partir de las simetrías presentes en un compuesto de inclusiones elipsoidales periódicas. Se formula la resolución de los problemas locales por el método de elementos finitos utilizando elementos tetraédricos de cuatro nodos en la discretización del problema. Se realizan los cálculos numéricos para la obtención de los coeficientes efectivos en un material de inclusiones elipsoidales periódicas de aluminio embebidas en una matriz. La matriz es a su vez un compuesto del mismo aluminio con inclusiones esféricas de carburo de silicio con distribución cuadrada. Se muestran algunos de los resultados obtenidos para este compuesto variando la fracción volumétrica de aluminio para distintas razones de aspecto de las inclusiones elipsoidales. Se observa que en el caso de constituyentes isotrópicos, con una geometría del compuesto que presente una dirección predominante, el material resultante pierde esta propiedad.

**Palabras Clave:** materiales compuestos, métodos de homogeneización, método de elementos finitos, propiedades efectivas

Recepción: 04-12-2014

Aceptación: 06-04-2015

## Abstract

Composites are vital to humans since the earliest time; today the use of these materials has proliferated in the industry due to the presence of physical properties not present in any of its components separately. One of the problems facing modern science is previously know the composites properties. Homogenization methods are used to calculate the effective properties of composite materials. In this paper the formulation of asymptotic homogenization method for three-dimensional composites and transformation of local problems from the symmetries present in a composite with periodical ellipsoidal inclusions are presented. The local problems resolution is formulated by finite element method using four-node tetrahedral elements in the problem's discretization. Numerical calculations for obtaining the effective coefficients in material with periodical ellipsoidal aluminum inclusions embedded in a matrix are made. The matrix is a composite of periodical esferical silicon carbide inclusions in an aluminum matrix. Some obtained results for this composite by varying the volume fraction of silicon carbide for different aspect ratios of the ellipsoidal inclusions are shown. It is observed that in the case of isotropic constituents, with a composite's geometry having a predominant direction, the resulting material loses isotropic property.

**Keywords:** composites, homogenization method, finite element method, effective properties

## Introducción

Los materiales compuestos se conforman por la unión de dos o más materiales, quedando separados éstos por regiones o dominios. Estos materiales son utilizados por el hombre desde la antigüedad en la construcción de sus viviendas. En la actualidad se emplean para cubrir un sinnúmero de aplicaciones, desde elementos estructurales y arquitectónicos en construcción, hasta las aplicaciones más avanzadas en la industria aeroespacial, automotriz y electrónica (Mieres, 2003).

Entre los métodos de homogeneización, uno de los más empleados es el de homogeneización asintótica. Entre los trabajos más destacados en este tema se encuentra el de J Bravo-Castillero, en el que se encuentran los coeficientes efectivos de un compuesto multilaminado termo-magneto-electro-elástico (Bravo-Castillero et al., 2009). En laminados, destaca asimismo, el de J Hernández Cabanas, donde se estudia la influencia de la dirección de polarización en un laminado magneto-electro-elástico (Cabanas et al., 2010). Además, entre los trabajos en compuestos fibrosos se encuentra el de J Bravo-Castillero, en el que se estudian los compuestos periódicos de distribución cuadrada y hexagonal (Bravo-Castillero et al., 2012). Se tiene en fibras, también el de R Rodríguez-Ramos, en el que se estudian celdas con forma de paralelogramo tanto de manera analítica como numérica con el uso de elementos finitos con comparaciones de ambos métodos con resultados teóricos (Rodríguez-Ramos et al., 2010). En la obtención de coeficientes efectivos por el método de homogeneización asintótica destaca asimismo el trabajo de AV Georgiades, KS Challagulla y AL Kalamkarov. En éste se presenta la homogeneización de un material inteligente que es una lámina compuesta por una rejilla de fibras ortotrópicas inmersa en una matriz. Este trabajo se divide en dos partes, la primera es un estudio teórico (Challagulla et al., 2010) y en la segunda se presentan algunas aplicaciones de este material (Georgiades et al., 2010). Por otra parte, DA Hadjiloizi, AV Georgiades y AL Kalamkarov, desarrollan un modelo de homogeneización asintótica a múltiple escala para compuestos termo-magneto-electro-elásticos (Hadjiloizi et al., 2012). En 2013, JA Otero, presenta un método semi-analítico de homogeneización para la obtención de coeficientes efectivos elásticos en un compuesto con contacto imperfecto (Otero et al., 2013). MRE Nasution y otros, en 2014, presentan un nuevo modelo de homogeneización asintótica, para trabajar

propiedades termodinámicas en compuestos 3D con espesor finito, donde toman en cuenta las bondades de la homogeneización 2D (Nasution et al., 2014).

En otro orden de importancia, relacionado con el método de homogeneización asintótica, el trabajo de U Gabbert, se vincula el método de elementos finitos con la homogeneización para la resolución del problema inverso de buscar la distribución a microescala que optimice, a nivel de macroescala, las propiedades deseadas para una aplicación (Gabbert et al., 2010). Aunque el trabajo que más destaca es el de AL Kalamkarov, IV Andrianov y VV Danishevs'kyy, donde se hace una revisión del estado del arte en los métodos de homogeneización, así como un estudio de cuales son más convenientes utilizar en dependencia del caso de estudio, además de la presentación de nuevas aproximaciones (Kalamkarov et al., 2009).

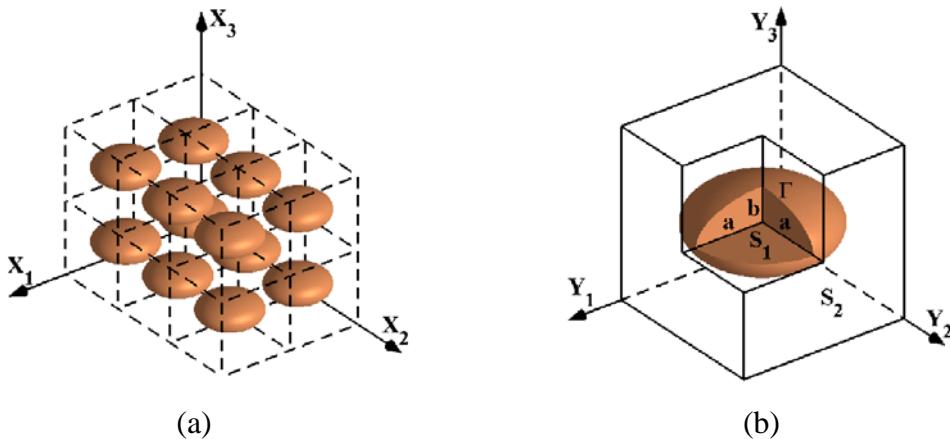
El presente trabajo presenta el método semianalítico de homogeneización asintótica para compuestos tridimensionales. Éste se basa en el empleo del método de homogenización asintótica con resolución numérica de los problemas locales mediante el método de elementos finitos. Se calculan los coeficientes efectivos de un compuesto de inclusiones elipsoidales de aluminio embebidas periódicamente en distribución ortoédrica en una matriz de carburo de silicio. Al ser los elementos constituyentes materiales isotrópicos y la geometría del compuesto tener una dirección diferenciada, es de esperar que el compuesto resultante pierda esta propiedad. Se presentan algunos de los resultados numéricos obtenidos, que muestran la variación de sus coeficientes efectivos al variar la fracción volumétrica de las inclusiones para distintas razones de aspecto de los elipsoides, además de mostrar que el compuesto pierde la isotropía.

### *Modelación del problema en compuestos 3D*

Se considera un medio heterogéneo que ocupa un volumen  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  con fronteras  $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  y consistente en un material de dos fases, donde las inclusiones elipsoidales y la matriz son materiales isotrópicos. Las inclusiones elipsoidales tienen una distribución periódica a lo largo de los ejes  $OX_1$ ,  $OX_2$  y  $OX_3$ , como se puede apreciar en la sección del compuesto que se muestra en la figura 1(a). Dichas inclusiones son elipsoides de revolución sobre un eje paralelo al eje  $OX_3$  por lo que presentan dos ejes de igual longitud  $a$  y otro menor que estos en el eje

$Ox_3$  de longitud  $b$  tal y como muestra la figura 1(b). La razón de aspecto de estos elipsoides se

calcula por la relación entre el eje menor y el eje mayor  $\frac{b}{a}$ .



**Figura 1.** Sección de la distribución periódica del compuesto y celda unitaria

Las ecuaciones que gobiernan el problema elástico heterogéneo son

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \text{ en } \Omega, \quad (1)$$

$$u_i = 0, \text{ en } \partial_1 \Omega, \\ \sigma_{ij} n_j = 0, \text{ en } \partial_2 \Omega, \quad (2)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$  y  $\sigma_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $n_j$  son las componentes del tensor de esfuerzos, del vector desplazamiento y del vector unitario normal a  $\partial_2 \Omega$ , respectivamente. Las ecuaciones constitutivas y las componentes del vector deformación  $\varepsilon_{kl}$  están dadas por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (4)$$

Los coeficientes de elasticidad  $C_{ijkl}(\mathbf{x})$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) son funciones periódicas. La celda periódica  $S$  se toma como un ortoedro tal que  $S = S_1 \cup S_2$  con  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ , donde el dominio  $S_2$  está ocupado por la matriz y su complemento  $S_1$  es la inclusión elipsoidal de

revolución sobre el eje  $OY_3$  y centro en el origen  $O$ . La interfase de contacto entre el elipsoide y la matriz es denotada por  $\Gamma$ . Los valores asociados a la matriz y la inclusión serán señalados mediante superíndices en paréntesis (2) y (1) respectivamente. Asumiendo contacto ideal entre las fases, se puede expresar dicha condición mediante

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} \Big|_{\Gamma} &= u_i^{(2)} \Big|_{\Gamma} \\ c_{ijkn}^{(1)} \sigma_{ij}^{(1)} n_j \Big|_{\Gamma} &= c_{ijkn}^{(2)} \sigma_{ij}^{(2)} n_j \Big|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (5)$$

## Método

### *Método de Homogeneización Asintótica*

El método de homogeneización asintótica a doble escala se basa en el empleo de dos variables, una global o lenta  $\mathbf{x}$  sobre el compuesto y otra local o rápida  $\mathbf{y}$  sobre la celda. La relación entre éstas es  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\alpha$ , donde  $\alpha$  es un parámetro lo suficientemente pequeño que expresa la relación entre las dimensiones de la celda periódica y las dimensiones características del compuesto. La otra característica de este método es plantear un desarrollo asintótico de la variable involucrada en el problema para a partir de éste, y utilizando la periodicidad del problema, obtener las soluciones mediante integración. Es posible encontrar expresiones homogeneizadas de las ecuaciones involucradas en el problema a resolver.

Se plantea el desarrollo asintótico de la componente del vector desplazamiento de la siguiente forma

$$u_i = u_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \alpha u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha^2 u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (6)$$

donde  $i = 1, 2, 3$ . Sustituyendo (6) en (3) y (4) se obtienen

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha \varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (8)$$

donde

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} + C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_l}, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_l} + C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_l}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right), \quad (11)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right). \quad (12)$$

Usando entonces (6) y (7) en (1), y reagrupando términos según el exponente de  $\alpha$ , se tiene para  $\alpha^{-1}$  y  $\alpha^0$  respectivamente

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} = 0. \quad (14)$$

Sustituyendo (9) en (13) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u_k^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_l} \right) = - \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial C_{ijkl}(\mathbf{y})}{\partial y_j}, \quad (15)$$

donde la función  $u_k^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  puede ser expresada mediante

$$u_k^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}_{pq} N_k(\mathbf{y}) \frac{\partial u_p^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_q}, \quad (16)$$

siendo  ${}_{pq} N_k(\mathbf{y})$  ( $k, p, q = 1, 2, 3$ ) las componentes Y-periódicas de los seudo-desplazamientos locales.

Los problemas locales  $pq$  en la celda periódica pueden obtenerse mediante la sustitución de (16) en (15). Obteniendo de esta forma

$$\frac{\partial {}_{pq} \tau_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_j} = - \frac{\partial C_{ijpq}(\mathbf{y})}{\partial y_j}, \quad (17)$$

donde las componentes del tensor de los esfuerzos locales están dadas por

$${}_{pq} \tau_{ij}(\mathbf{y}) = C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial {}_{pq} N_k(\mathbf{y})}{\partial y_l}. \quad (18)$$

Sustituyendo (16) en las ecuaciones (9) y (11) se obtienen

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( C_{ijpq}(\mathbf{y}) + {}_{pq} \tau_{ij}(\mathbf{y}) \right) \frac{\partial u_p^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_q}, \quad (19)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}_{pq} N_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial {}_{pq} N_j(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right) \frac{\partial u_p^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_q}. \quad (20)$$

Se define el operador promedio sobre la celda como

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\bullet) dy, \quad (21)$$

donde  $|Y|$  es el volumen de la celda. Promediando la expresión (10) y utilizando la periodicidad de  $\sigma_{ij}^{(0)}$ , el problema estático homogéneo es obtenido en la forma

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad (22)$$

siendo entonces las ecuaciones constitutivas del problema homogéneo

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) = \langle \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = C_{ijpq}^* \frac{\partial u_p^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_q}, \quad (23)$$

y

$$C_{ijpq}^* = \langle C_{ijpq}(\mathbf{y}) + {}_{pq} \tau_{ij}(\mathbf{y}) \rangle, \quad (24)$$

son los coeficientes elásticos efectivos. Aplicando el operador promedio en la expresión (20) y usando la periodicidad de  ${}_{pq} \mathbf{N}(\mathbf{y})$ , el tensor de deformaciones homogéneo es

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) = \langle \varepsilon_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right). \quad (25)$$

Asimismo las condiciones de contorno dadas en (2) son transformadas en

$$\begin{aligned} u_i^{(0)}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \text{en } \partial_1 \Omega, \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}) n_j &= 0, \quad \text{en } \partial_2 \Omega. \end{aligned} \quad (26)$$

El problema de la obtención de los coeficientes efectivos radica en la obtención de soluciones periódicas en  $S$ , de seis problemas locales  ${}_{pq} L$ , en términos de la variable local  $\mathbf{y}$ , donde  $p, q = 1, 2, 3$ . Cada problema se desacopla en un conjunto independiente de ecuaciones. En la Tabla 1 se muestra la correspondencia entre los coeficientes efectivos y los problemas locales.

**Tabla 1.** Coeficientes efectivos relacionados a cada problema local

$_{11}L$	$_{22}L$	$_{33}L$	$_{23}L$	$_{13}L$	$_{12}L$
$C_{1111}^*$	$C_{1122}^*$	$C_{1133}^*$	0	0	0
$C_{2211}^*$	$C_{2222}^*$	$C_{2233}^*$	0	0	0
$C_{3311}^*$	$C_{3322}^*$	$C_{3333}^*$	0	0	0
0	0	0	$C_{2323}^*$	0	0
0	0	0	0	$C_{1313}^*$	0
0	0	0	0	0	$C_{1212}^*$

Los problemas locales se pueden plantear de la siguiente forma:

- Problemas  $_{\lambda\beta}L$ , con  $\lambda, \beta = 1, 2$  y  $\lambda \neq \beta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{\lambda 1}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{\lambda 2}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{\lambda 3}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial C_{\lambda 3 \lambda 3}}{\partial y_3}, \\ \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{33}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial C_{3 \lambda \lambda 3}}{\partial y_\lambda}, \\ \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{\beta 1}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{\beta 2}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{\lambda 3} \tau_{\beta 3}}{\partial y_3} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

- Problemas  $_{\beta\beta}L$ , con  $\beta = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{13}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial C_{11\beta\beta}}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{23}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial C_{22\beta\beta}}{\partial y_2}, \\ \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{\beta\beta} \tau_{33}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial C_{33\beta\beta}}{\partial y_3}. \end{aligned} \quad (28)$$

- Problema  $_{12}L$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{12}\tau_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{12}\tau_{12}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{12}\tau_{13}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial C_{1212}}{\partial y_2}, \\ \frac{\partial_{12}\tau_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{12}\tau_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{12}\tau_{23}}{\partial y_3} &= -\frac{\partial C_{2112}}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial_{12}\tau_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{12}\tau_{32}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{12}\tau_{33}}{\partial y_3} &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

En el presente problema, la celda unitaria presenta las simetrías propias del grupo puntual  $D_{4h}$ , según la teoría de grupos (Landau et al., 1977), por lo que presenta simetría respecto a los planos coordenados. Además, los coeficientes elásticos  $C_{ijkl}(\mathbf{y}) \equiv C_{ijkl}(y_1, y_2, y_3)$  son funciones pares respecto a  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$ , por lo que satisfacen las condiciones

$${}_{pq}N_i\Big|_{y_h=d_h}=0, \quad \text{si } \delta_{hi}+\delta_{hp}+\delta_{hq} \text{ es impar} \quad (30)$$

$${}_{pq}\tau_{hi}\Big|_{y_h=d_h}=0, \quad \text{si } \delta_{hi}+\delta_{hp}+\delta_{hq}+1 \text{ es impar} \quad (31)$$

donde  $h, i, p, q = 1, 2, 3$ ,  $d_h = \{0, l_h\}$  siendo  $l_h$  la semi-longitud de la celda en la dirección  $y_h$  y

$$\delta_{hi} = \begin{cases} 1 & \text{si } h=i \\ 0 & \text{si } h \neq i \end{cases}. \quad (32)$$

Utilizando las condiciones (30) y (31) los problemas locales  ${}_{pq}L$  sobre la celda unitaria pueden ser transformados en problemas de contorno sobre 1/8 de la celda periódica (Bakhvalov et al., 1989), esta sección de la celda se presenta en la figura 2. Se pasan ahora los problemas locales  ${}_{pq}L$  a la nueva variable  ${}_{pq}M_k$  según

$${}_{pq}N_k = {}_{pq}M_k - y_p \delta_{kq}, \quad (33)$$

donde  $p, q, l = 1, 2, 3$ . La ecuación (18) puede ser escrita como

$${}_{pq}\tau_{ij}(\mathbf{y}) = {}_{pq}\sigma_{ij}(\mathbf{y}) - C_{ijpq}(\mathbf{y}). \quad (34)$$

Para esto se ha denotado

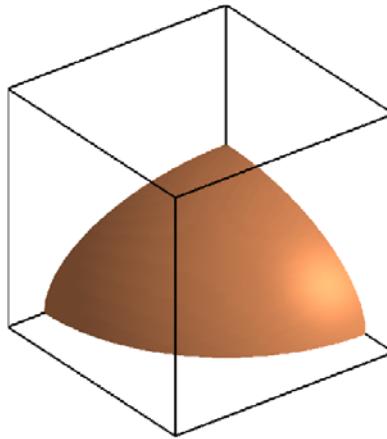
$${}_{pq}\sigma_{ij}(\mathbf{y}) = C_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial {}_{pq}M_k(\mathbf{y})}{\partial y_l}, \quad (35)$$

y las ecuaciones (17) y (24) se transforman en

$$\frac{\partial_{pq} \sigma_{ij}(\mathbf{y})}{\partial y_j} = 0, \quad (36)$$

y

$$C_{ijpq}^* = 8 \left\langle {}_{pq} \sigma_{ij}(\mathbf{y}) \right\rangle. \quad (37)$$



**Figura 2.** Sobre la octava parte de la celda los problemas locales pueden convertirse en problemas de contorno.

Finalmente, los problemas locales  ${}_{pq} L$  pueden ser escritos en esta forma, utilizando la notación abreviada para los coeficientes elásticos  $C_{ijkl}$ . Se tiene que el problema local sobre 1/8 de la celda se expresa por

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{pq} \sigma_{11}^{(r)}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{pq} \sigma_{12}^{(r)}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{pq} \sigma_{13}^{(r)}}{\partial y_3} &= 0, \\ \frac{\partial_{pq} \sigma_{21}^{(r)}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{pq} \sigma_{22}^{(r)}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{pq} \sigma_{23}^{(r)}}{\partial y_3} &= 0, \\ \frac{\partial_{pq} \sigma_{31}^{(r)}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{pq} \sigma_{32}^{(r)}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{pq} \sigma_{33}^{(r)}}{\partial y_3} &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

donde

$${}_{pq} \sigma_{23}^{(r)} = {}_{pq} \sigma_{32}^{(r)} = C_{44}^{(r)} \left( \frac{\partial_{pq} M_3^{(r)}}{\partial y_2} + \frac{\partial_{pq} M_2^{(r)}}{\partial y_3} \right), \quad (39)$$

$${}_{pq} \sigma_{13}^{(r)} = {}_{pq} \sigma_{31}^{(r)} = C_{55}^{(r)} \left( \frac{\partial_{pq} M_3^{(r)}}{\partial y_1} + \frac{\partial_{pq} M_1^{(r)}}{\partial y_3} \right), \quad (40)$$

$${}_{pq}\sigma_{12}^{(\Upsilon)} = {}_{pq}\sigma_{21}^{(\Upsilon)} = C_{66}^{(\Upsilon)} \left( \frac{\partial {}_{pq}M_2^{(\Upsilon)}}{\partial y_1} + \frac{\partial {}_{pq}M_1^{(\Upsilon)}}{\partial y_2} \right), \quad (41)$$

$${}_{pq}\sigma_{\beta\beta}^{(\Upsilon)} = C_{\beta 1}^{(\Upsilon)} \frac{\partial {}_{pq}M_1^{(\Upsilon)}}{\partial y_1} + C_{\beta 2}^{(\Upsilon)} \frac{\partial {}_{pq}M_2^{(\Upsilon)}}{\partial y_2} + C_{\beta 3}^{(\Upsilon)} \frac{\partial {}_{pq}M_3^{(\Upsilon)}}{\partial y_3}, \quad (42)$$

siendo  $\lambda, \Upsilon = 1, 2$  y  $\beta = 1, 2, 3$ .

Las condiciones de contorno se expresan, con  $d_h = \{0, l_h\}$ , de las siguientes maneras:

- Problema  $_{11}L$

$$\begin{aligned} {}_{11}\sigma_{12}^{(\Upsilon)}, {}_{11}\sigma_{13}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\ {}_{11}M_1^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= d_1, \\ {}_{11}\sigma_{21}^{(\Upsilon)}, {}_{11}M_2^{(\Upsilon)}, {}_{11}\sigma_{23}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\ {}_{11}\sigma_{31}^{(\Upsilon)}, {}_{11}\sigma_{31}^{(\Upsilon)}, {}_{11}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2 \in \Upsilon, y_3=d_3} &= 0, \end{aligned} \quad (43)$$

- Problema  $_{22}L$

$$\begin{aligned} {}_{22}M_1^{(\Upsilon)}, {}_{22}\sigma_{12}^{(\Upsilon)}, {}_{22}\sigma_{13}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\ {}_{22}\sigma_{21}^{(\Upsilon)}, {}_{22}\sigma_{23}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\ {}_{22}M_2^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= d_2, \\ {}_{22}\sigma_{31}^{(\Upsilon)}, {}_{22}\sigma_{31}^{(\Upsilon)}, {}_{22}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2 \in \Upsilon, y_3=d_3} &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

- Problema  $_{33}L$

$$\begin{aligned}
 {}_{33}M_1^{(\Upsilon)}, {}_{33}\sigma_{12}^{(\Upsilon)}, {}_{33}\sigma_{13}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{33}\sigma_{21}^{(\Upsilon)}, {}_{33}M_2^{(\Upsilon)}, {}_{33}\sigma_{23}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{33}\sigma_{31}^{(\Upsilon)}, {}_{33}\sigma_{31}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2 \in \Upsilon, y_3=d_3} &= 0, \\
 {}_{33}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2 \in \Upsilon, y_3=d_3} &= d_3,
 \end{aligned} \tag{45}$$

- Problema  $_{23}L$

$$\begin{aligned}
 {}_{23}M_1^{(\Upsilon)}, {}_{23}\sigma_{12}^{(\Upsilon)}, {}_{23}\sigma_{13}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{23}M_1^{(\Upsilon)}, {}_{23}\sigma_{22}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{23}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= d_2, \\
 {}_{23}M_1^{(\Upsilon)}, {}_{23}M_2^{(\Upsilon)}, {}_{23}\sigma_{33}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2 \in \Upsilon, y_3=d_3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{46}$$

- Problema  $_{13}L$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(\Upsilon)}, {}_{13}M_2^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{13}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= d_1, \\
 {}_{13}\sigma_{21}^{(\Upsilon)}, {}_{13}M_2^{(\Upsilon)}, {}_{13}\sigma_{23}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{13}M_1^{(\Upsilon)}, {}_{13}M_2^{(\Upsilon)}, {}_{13}\sigma_{33}^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2 \in \Upsilon, y_3=d_3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{47}$$

- Problema  $_{12}L$

$$\begin{aligned}
 {}_{12}\sigma_{11}^{(\Upsilon)}, {}_{12}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{12}M_2^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1=d_1, y_2 \in \Upsilon, y_3 \in \Upsilon} &= d_1, \\
 {}_{12}M_1^{(\Upsilon)}, {}_{12}\sigma_{22}^{(\Upsilon)}, {}_{12}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2=d_2, y_3 \in \Upsilon} &= 0, \\
 {}_{12}\sigma_{31}^{(\Upsilon)}, {}_{12}\sigma_{32}^{(\Upsilon)}, {}_{12}M_3^{(\Upsilon)} \Big|_{y_1 \in \Upsilon, y_2 \in \Upsilon, y_3=d_3} &= 0,
 \end{aligned} \tag{48}$$

Los coeficientes efectivos se pueden calcular mediante (37), quedando de la forma:

- Problema  $_{11}L$

$$C_{11}^* = 8 \left\langle C_{11} \frac{\partial_{11} M_1}{\partial y_1} + C_{12} \frac{\partial_{11} M_2}{\partial y_2} + C_{13} \frac{\partial_{11} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (49)$$

$$C_{12}^* = 8 \left\langle C_{11} \frac{\partial_{22} M_1}{\partial y_1} + C_{12} \frac{\partial_{22} M_2}{\partial y_2} + C_{13} \frac{\partial_{22} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (50)$$

$$C_{13}^* = 8 \left\langle C_{11} \frac{\partial_{33} M_1}{\partial y_1} + C_{12} \frac{\partial_{33} M_2}{\partial y_2} + C_{13} \frac{\partial_{33} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (51)$$

- Problema  $_{22}L$

$$C_{21}^* = 8 \left\langle C_{12} \frac{\partial_{11} M_1}{\partial y_1} + C_{22} \frac{\partial_{11} M_2}{\partial y_2} + C_{23} \frac{\partial_{11} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (52)$$

$$C_{22}^* = 8 \left\langle C_{12} \frac{\partial_{22} M_1}{\partial y_1} + C_{22} \frac{\partial_{22} M_2}{\partial y_2} + C_{23} \frac{\partial_{22} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (53)$$

$$C_{23}^* = 8 \left\langle C_{12} \frac{\partial_{33} M_1}{\partial y_1} + C_{22} \frac{\partial_{33} M_2}{\partial y_2} + C_{23} \frac{\partial_{33} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (54)$$

- Problema  $_{33}L$

$$C_{31}^* = 8 \left\langle C_{13} \frac{\partial_{11} M_1}{\partial y_1} + C_{23} \frac{\partial_{11} M_2}{\partial y_2} + C_{33} \frac{\partial_{11} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (55)$$

$$C_{32}^* = 8 \left\langle C_{13} \frac{\partial_{22} M_1}{\partial y_1} + C_{23} \frac{\partial_{22} M_2}{\partial y_2} + C_{33} \frac{\partial_{22} M_3}{\partial y_3} \right\rangle, \quad (56)$$

$$C_{33}^* = 8 \left\langle C_{13} \frac{\partial_{33} M_1}{\partial y_1} + C_{23} \frac{\partial_{33} M_2}{\partial y_2} + C_{33} \frac{\partial_{33} M_3}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (57)$$

- Problema  $_{23}L$

$$C_{44}^* = 8 \left\langle C_{44} \left( \frac{\partial_{23} M_3}{\partial y_2} + \frac{\partial_{23} M_2}{\partial y_3} \right) \right\rangle. \quad (58)$$

- Problema  $_{13}L$

$$C_{55}^* = 8 \left\langle C_{55} \left( \frac{\partial_{13} M_3}{\partial y_1} + \frac{\partial_{13} M_1}{\partial y_3} \right) \right\rangle, \quad (59)$$

- Problema  $_{12}L$

$$C_{66}^* = 8 \left\langle C_{66} \left( \frac{\partial_{12} M_1}{\partial y_2} + \frac{\partial_{12} M_2}{\partial y_1} \right) \right\rangle. \quad (60)$$

#### *Resolución de los problemas locales por el método de elementos finitos*

En muchas ocasiones, la solución exacta de los problemas locales del método de homogeneización es imposible de obtener mediante métodos analíticos. Solamente para geometrías muy específicas de las inclusiones es posible obtener las soluciones analíticas. Una solución alternativa es el empleo de métodos numéricos aproximados como el método de las diferencias finitas y el método de elementos finitos. Por esta razón se utiliza el método de elementos finitos a partir del principio de mínima energía potencial. La energía potencial para un sólido elástico puede ser expresada mediante

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV - \int_V u^T f dV - \int_S u^T T dS - \sum_i u_i^T P_i. \quad (61)$$

En esta expresión se encuentran relacionadas la energía de deformación por unidad de volumen del cuerpo, la energía potencial asociada a las fuerzas sobre el cuerpo  $f$ , a las fuerzas de tracción  $t$  y a las cargas puntuales  $P_i$  respectivamente. En el caso presente se tiene que  $f = T = P_i = 0$ .

Las relaciones (38 - 42) pueden expresarse en forma matricial como

$${}_{pq} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{pq} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (62)$$

donde

$${}_{pq} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} {}_{pq} \boldsymbol{\sigma}_{11} & {}_{pq} \boldsymbol{\sigma}_{22} & {}_{pq} \boldsymbol{\sigma}_{33} & {}_{pq} \boldsymbol{\sigma}_{23} & {}_{pq} \boldsymbol{\sigma}_{13} & {}_{pq} \boldsymbol{\sigma}_{21} \end{bmatrix}^T, \quad (63)$$

$${}_{pq} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} {}_{pq} \varepsilon_{11} & {}_{pq} \varepsilon_{22} & {}_{pq} \varepsilon_{33} & {}_{pq} \varepsilon_{23} & {}_{pq} \varepsilon_{13} & {}_{pq} \varepsilon_{12} \end{bmatrix}^T \quad (64)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial {}_{pq} M_1}{\partial y_1} & \frac{\partial {}_{pq} M_2}{\partial y_2} & \frac{\partial {}_{pq} M_3}{\partial y_3} & \frac{\partial {}_{pq} M_2}{\partial y_3} + \frac{\partial {}_{pq} M_3}{\partial y_2} & \frac{\partial {}_{pq} M_1}{\partial y_3} + \frac{\partial {}_{pq} M_3}{\partial y_1} & \frac{\partial {}_{pq} M_1}{\partial y_2} + \frac{\partial {}_{pq} M_2}{\partial y_1} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

La región de estudio que sería en este caso  $1/8$  de la celda unitaria es dividida en un número finito de elementos tetraédricos. Cada uno de estos elementos se define mediante 4 nodos ubicados en sus vértices. Los seudo-desplazamientos, para cada punto del elemento, pueden expresarse en función de los valores de éstos en los nodos, a través de las funciones de interpolación, como

$${}_{pq} M = \Psi \mathbf{q}, \quad (66)$$

donde

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$q = [q_{11} \ q_{21} \ q_{31} \ q_{12} \ q_{22} \ q_{32} \ q_{13} \ q_{23} \ q_{33} \ q_{14} \ q_{24} \ q_{34}]^T \quad (68)$$

siendo  $q_{ij}$  es la  $i$ -ésima componente del seudo-desplazamiento en el  $j$ -ésimo nodo y las funciones  $\psi_i$  son las funciones de interpolación del elemento dadas en coordenadas naturales

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \xi, \\ \psi_2 &= \eta, \\ \psi_3 &= \zeta, \\ \psi_4 &= 1 - \xi - \eta - \zeta. \end{aligned} \quad (69)$$

La relación entre las deformaciones y los seudo-desplazamiento (64) puede ser escrita de la forma

$${}_{pq}\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{33} & \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{23} \\ \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{33} & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{13} \\ \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{23} & \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{13} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial_{pq} M_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial_{pq} M_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial_{pq} M_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial_{pq} M_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial_{pq} M_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial_{pq} M_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial_{pq} M_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial_{pq} M_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial_{pq} M_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad (70)$$

donde  $\mathfrak{J}_{ij}$  son los coeficientes de la matriz inversa del Jacobiano  $\mathbf{J}$  de la transformación

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{13} \\ \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{23} \\ \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (71)$$

Utilizando las relaciones (66) y (70) las deformaciones se pueden escribir en forma matricial como sigue

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (72)$$

donde  $\mathbf{B}$  es la matriz de la relación entre las deformaciones y los seudo-desplazamientos del elemento

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{33} & \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{23} \\ \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{33} & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{13} \\ \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{23} & \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{13} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta(\Psi), \quad (73)$$

$$\Delta(\Psi) = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \\ \partial/\partial\zeta \end{bmatrix}(\Psi) \quad (74)$$

$$= \begin{bmatrix} \partial\psi_1/\partial\xi & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\xi & 0 & 0 & \cdots & \partial\psi_4/\partial\xi & 0 & 0 \\ \partial\psi_1/\partial\eta & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\eta & 0 & 0 & \cdots & \partial\psi_4/\partial\eta & 0 & 0 \\ \partial\psi_1/\partial\zeta & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\zeta & 0 & 0 & \cdots & \partial\psi_4/\partial\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \partial\psi_1/\partial\xi & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\xi & 0 & \cdots & 0 & \partial\psi_4/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial\psi_1/\partial\eta & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\eta & 0 & \cdots & 0 & \partial\psi_4/\partial\eta & 0 \\ 0 & \partial\psi_1/\partial\zeta & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\zeta & 0 & \cdots & 0 & \partial\psi_4/\partial\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \partial\psi_1/\partial\xi & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\xi & \cdots & 0 & 0 & \partial\psi_4/\partial\xi \\ 0 & 0 & \partial\psi_1/\partial\eta & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\eta & \cdots & 0 & 0 & \partial\psi_4/\partial\eta \\ 0 & 0 & \partial\psi_1/\partial\zeta & 0 & 0 & \partial\psi_2/\partial\zeta & \cdots & 0 & 0 & \partial\psi_4/\partial\zeta \end{bmatrix}.$$

Al ser las funciones de interpolación  $\psi_i$  tan sencillas y sus derivadas son 1 o -1, al desarrollar  $\Delta(\Psi)$  se obtiene una matriz que toma valores 1, 0 o -1, por lo que la matriz  $\mathbf{B}$  quedaría explícitamente como

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathfrak{J}_{11} & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{12} & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{13} & 0 & 0 & \hat{\mathfrak{J}}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{J}_{21} & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{22} & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{23} & 0 & 0 & \hat{\mathfrak{J}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{J}_{31} & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{32} & 0 & 0 & \mathfrak{J}_{33} & 0 & 0 & \hat{\mathfrak{J}}_3 \\ 0 & \mathfrak{J}_{31} & \mathfrak{J}_{21} & 0 & \mathfrak{J}_{32} & \mathfrak{J}_{22} & 0 & \mathfrak{J}_{33} & \mathfrak{J}_{23} & 0 & \hat{\mathfrak{J}}_3 & \hat{\mathfrak{J}}_2 \\ \mathfrak{J}_{31} & 0 & \mathfrak{J}_{11} & \mathfrak{J}_{32} & 0 & \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{33} & 0 & \mathfrak{J}_{13} & \hat{\mathfrak{J}}_3 & 0 & \hat{\mathfrak{J}}_1 \\ \mathfrak{J}_{21} & \mathfrak{J}_{11} & 0 & \mathfrak{J}_{22} & \mathfrak{J}_{12} & 0 & \mathfrak{J}_{23} & \mathfrak{J}_{13} & 0 & \hat{\mathfrak{J}}_2 & \hat{\mathfrak{J}}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\hat{\mathfrak{J}}_i = -\mathfrak{J}_{i1} - \mathfrak{J}_{i2} - \mathfrak{J}_{i3}$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Ahora es necesario calcular las tensiones para cada uno de los elementos. Usando las relaciones (64) y (72) se obtiene

$$\sigma = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}. \quad (75)$$

La energía de deformación asociada a un elemento  $e$  se obtiene

$$\Pi_S^e = \int_e \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon dV. \quad (76)$$

Sustituyendo (64) y (63) en (76) se obtiene la energía de deformación en la forma

$$\Pi_S^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_S^e \mathbf{q}, \quad (77)$$

donde  $\mathbf{K}_S^e$  es la matriz de rigidez del elemento

$$\mathbf{K}_S^e = \int_0^1 \int_0^{(1-\zeta)} \int_0^{(1-\eta-\zeta)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta. \quad (78)$$

Tomando en consideración la contribución de todos los elementos a la energía potencial de deformación del sistema se obtiene

$$\Pi_S = \sum_e \Pi_S^e = \sum_e \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_S^e \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_S \mathbf{Q}, \quad (79)$$

donde  $\mathbf{K}_S$  es la matriz de rigidez global y  $\mathbf{Q}$  es el vector seudo-desplazamiento global.

La sustitución de los  $\partial_{pq} M_i / \partial y_j$  correspondientes, (66) y (70) en (49-50) se obtiene la contribución del elemento  $e$  en el coeficiente efectivo del material como

$${}^e C_{ij}^* = 8 \int_0^1 \int_0^{(1-\zeta)} \int_0^{(1-\eta-\zeta)} \overline{\mathbf{D} \mathbf{B}} \mathbf{q} \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta. \quad (80)$$

siendo en cada caso:

- Problemas  $_{\beta\beta}L$

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} {}^eC_{11} & {}^eC_{12} & {}^eC_{13} \\ {}^eC_{21} & {}^eC_{22} & {}^eC_{23} \\ {}^eC_{31} & {}^eC_{32} & {}^eC_{33} \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{11} & 0 & 0 & \mathfrak{I}_{12} & 0 & 0 & \mathfrak{I}_{13} & 0 & 0 & \hat{\mathfrak{I}}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_{21} & 0 & 0 & \mathfrak{I}_{22} & 0 & 0 & \mathfrak{I}_{23} & 0 & 0 & \hat{\mathfrak{I}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{I}_{31} & 0 & 0 & \mathfrak{I}_{32} & 0 & 0 & \mathfrak{I}_{33} & 0 & 0 & \hat{\mathfrak{I}}_3 \end{bmatrix} \quad (82)$$

- Problema  $_{23}L$

$$\bar{\mathbf{D}} = {}^eC_{44} \quad (83)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathfrak{I}_{31} & \mathfrak{I}_{21} & 0 & \mathfrak{I}_{32} & \mathfrak{I}_{22} & 0 & \mathfrak{I}_{33} & \mathfrak{I}_{23} & 0 & \hat{\mathfrak{I}}_3 & \hat{\mathfrak{I}}_2 \end{bmatrix} \quad (84)$$

- Problema  $_{13}L$

$$\bar{\mathbf{D}} = {}^eC_{55} \quad (85)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{31} & 0 & \mathfrak{I}_{11} & \mathfrak{I}_{32} & 0 & \mathfrak{I}_{12} & \mathfrak{I}_{33} & 0 & \mathfrak{I}_{13} & \hat{\mathfrak{I}}_3 & 0 & \hat{\mathfrak{I}}_1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

- Problema  $_{12}L$

$$\bar{\mathbf{D}} = {}^eC_{66} \quad (87)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{21} & \mathfrak{I}_{11} & 0 & \mathfrak{I}_{22} & \mathfrak{I}_{12} & 0 & \mathfrak{I}_{23} & \mathfrak{I}_{13} & 0 & \hat{\mathfrak{I}}_2 & \hat{\mathfrak{I}}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Tomando en consideración las aportaciones de cada elemento al coeficiente efectivo, éste queda de la forma

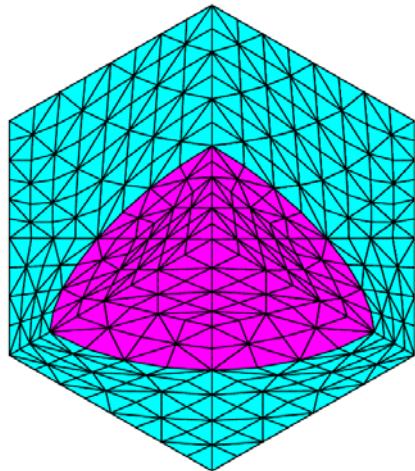
$$C_{ij}^* = \sum_e {}^e C_{ij}^*. \quad (89)$$

## Resultados

Para la obtención de los resultados se utilizan las propiedades de los constituyentes obtenidas por Sabina y otros colaboradores en 1993, mostradas en la Tabla 2 (Sabina et al., 1993). En el caso del cálculo mediante el uso del método de elementos finitos, se hace una discretización del espacio en elementos tetraédricos definidos por 4 nodos ubicados en los vértices de los elementos. En la figura 3 se muestra un ejemplo de esta discretización.

**Tabla 2.** Propiedades de los materiales constituyentes.

Material	Al	Al-SiC
$C_{11}$	$1.105 \times 10^{11}$	$2.653 \times 10^{11}$
$C_{12}$	$0.571 \times 10^{11}$	$0.837 \times 10^{11}$
$C_{44}$	$(C_{11} - C_{12})/2$	



**Figura 3.** Ejemplo de mayados para 1/8 de la celda

Se realizaron cálculos para diferentes valores de la fracción volumétrica en varias razones de aspecto de las inclusiones de aluminio y se comprobó que los resultados obtenidos en los

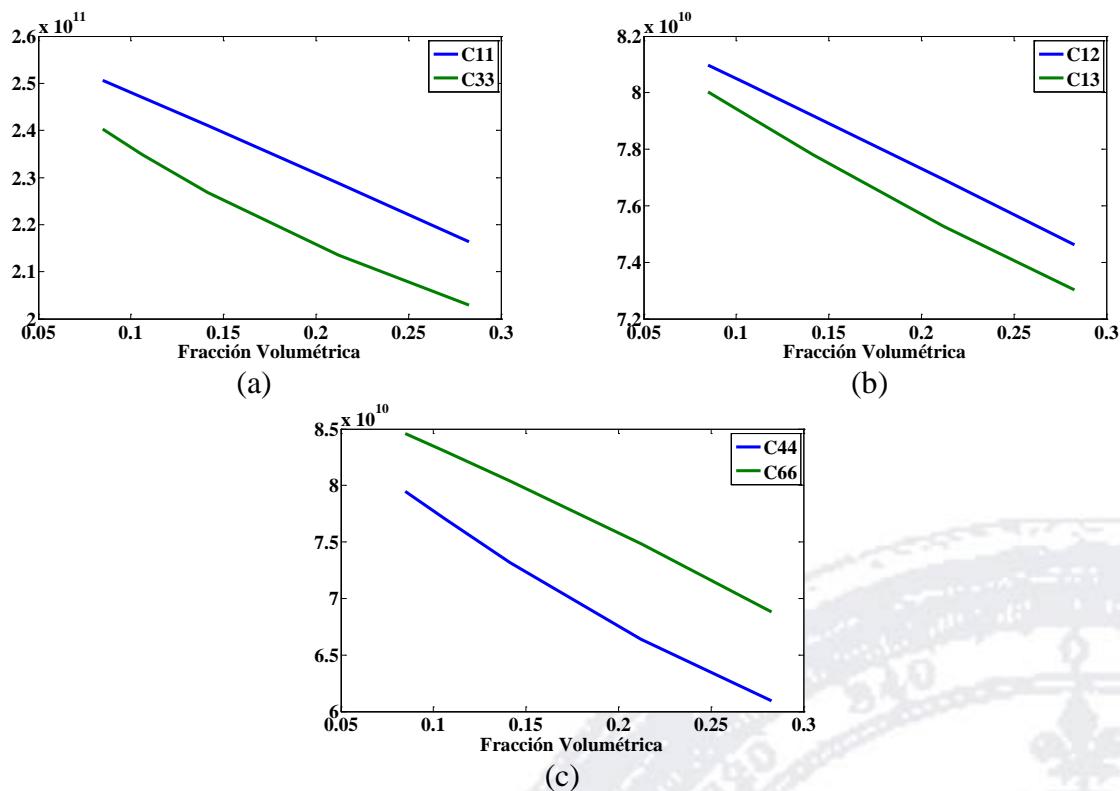
compuestos perdían la propiedad isotrópica de los materiales constituyentes. Los resultados obtenidos muestran en todos los casos que los compuestos presentan isotropía solo en las direcciones de los ejes  $OX_1$  y  $OX_2$ , siendo posible apreciarlo en los valores que se muestran a modo de ejemplo en la Tabla 3. En ésta se comprueba que los coeficientes  $C_{12}$ ,  $C_{33}$  y  $C_{66}$  se diferencian de los coeficientes a los que son iguales en el caso de los materiales isotrópicos, mientras que el resto de las igualdades se mantiene, con lo cual se puede verificar dicha pérdida de isotropía, principalmente con la diferenciación de  $C_{11}$  y  $C_{22}$  con  $C_{33}$ .

**Tabla 3.** Valores de los coeficientes efectivos para algunos de los cálculos realizados.

Razón de Aspecto	$\frac{1}{1.5}$	$\frac{1}{2.5}$	$\frac{1}{3.5}$	$\frac{1}{4.5}$
Fracción Volumétrica	0.03141592654	0.08726646260	0.08552113335	0.1060287521
$C_{11}$	$2.586116166 \times 10^{11}$	$2.481441534 \times 10^{11}$	$2.498355492 \times 10^{11}$	$2.470324585 \times 10^{11}$
$C_{21}$	$8.279647462 \times 10^{10}$	$8.099672265 \times 10^{10}$	$8.096160908 \times 10^{10}$	$8.030339063 \times 10^{10}$
$C_{31}$	$8.259718398 \times 10^{10}$	$8.042983599 \times 10^{10}$	$8.039251312 \times 10^{10}$	$7.918136569 \times 10^{10}$
$C_{12}$	$8.279647462 \times 10^{10}$	$8.099672265 \times 10^{10}$	$8.096160908 \times 10^{10}$	$8.030339063 \times 10^{10}$
$C_{22}$	$2.586115541 \times 10^{11}$	$2.481442264 \times 10^{11}$	$2.498355111 \times 10^{11}$	$2.470324614 \times 10^{11}$
$C_{32}$	$8.259731559 \times 10^{10}$	$8.042950178 \times 10^{10}$	$8.039264201 \times 10^{10}$	$7.918135798 \times 10^{10}$
$C_{13}$	$8.259718398 \times 10^{10}$	$8.042983599 \times 10^{10}$	$8.039251312 \times 10^{10}$	$7.918136569 \times 10^{10}$
$C_{23}$	$8.259731559 \times 10^{10}$	$8.042950178 \times 10^{10}$	$8.039264201 \times 10^{10}$	$7.918135798 \times 10^{10}$
$C_{33}$	$2.586418454 \times 10^{11}$	$2.462454641 \times 10^{11}$	$2.421662352 \times 10^{11}$	$2.348745984 \times 10^{11}$
$C_{66}$	$8.781446935 \times 10^{10}$	$8.304675156 \times 10^{10}$	$8.411203114 \times 10^{10}$	$8.302625042 \times 10^{10}$
$C_{55}$	$8.748684791 \times 10^{10}$	$8.117103084 \times 10^{10}$	$8.052835409 \times 10^{10}$	$7.703239741 \times 10^{10}$
$C_{44}$	$8.748682633 \times 10^{10}$	$8.117117881 \times 10^{10}$	$8.052852871 \times 10^{10}$	$7.703259974 \times 10^{10}$

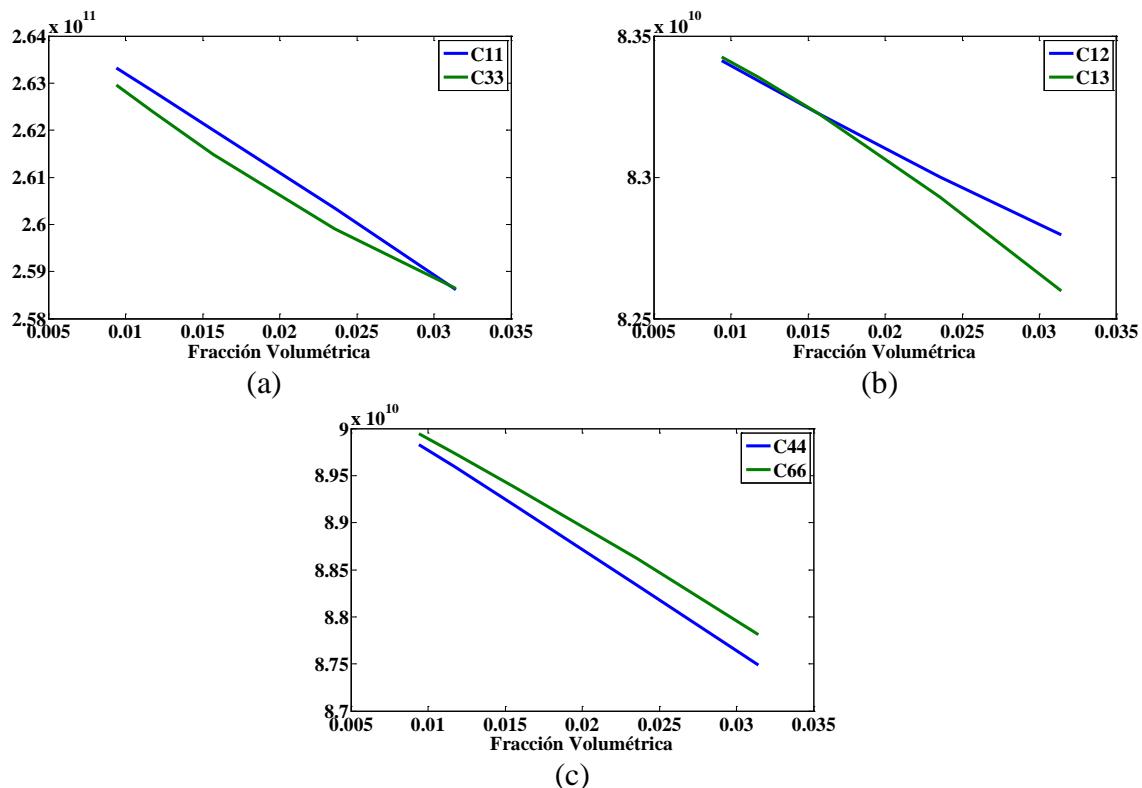
La variación de los coeficientes efectivos, y la pérdida de la propiedad de isotropía se pueden apreciar al comparar las gráficas de los valores de los coeficientes que son iguales en un material isotrópico. En las figuras 4 y 5 pueden verse estas gráficas para la comparación de los

coeficientes  $C_{11}$ - $C_{33}$ ,  $C_{12}$ - $C_{13}$  y  $C_{44}$ - $C_{66}$  en las subfiguras (a), (b) y (c) respectivamente en cada una. Se aprecia que los coeficientes  $C_{33}$ ,  $C_{13}$  y  $C_{44}$  se hacen menores al perder la isotropía por ser el eje menor del elipsoide de revolución coincidente con la dirección del eje  $OY_3$ . La variación de los coeficientes que provoca la pérdida de la isotropía de los constituyentes en el compuesto, es mediante la diferenciación de los coeficientes que involucran la dirección diferenciada, en este caso justamente los tres coeficientes mencionados más los que por la simetría del compuesto son iguales a éstos como el  $C_{23}$ ,  $C_{55}$  y los simétricos a ellos.



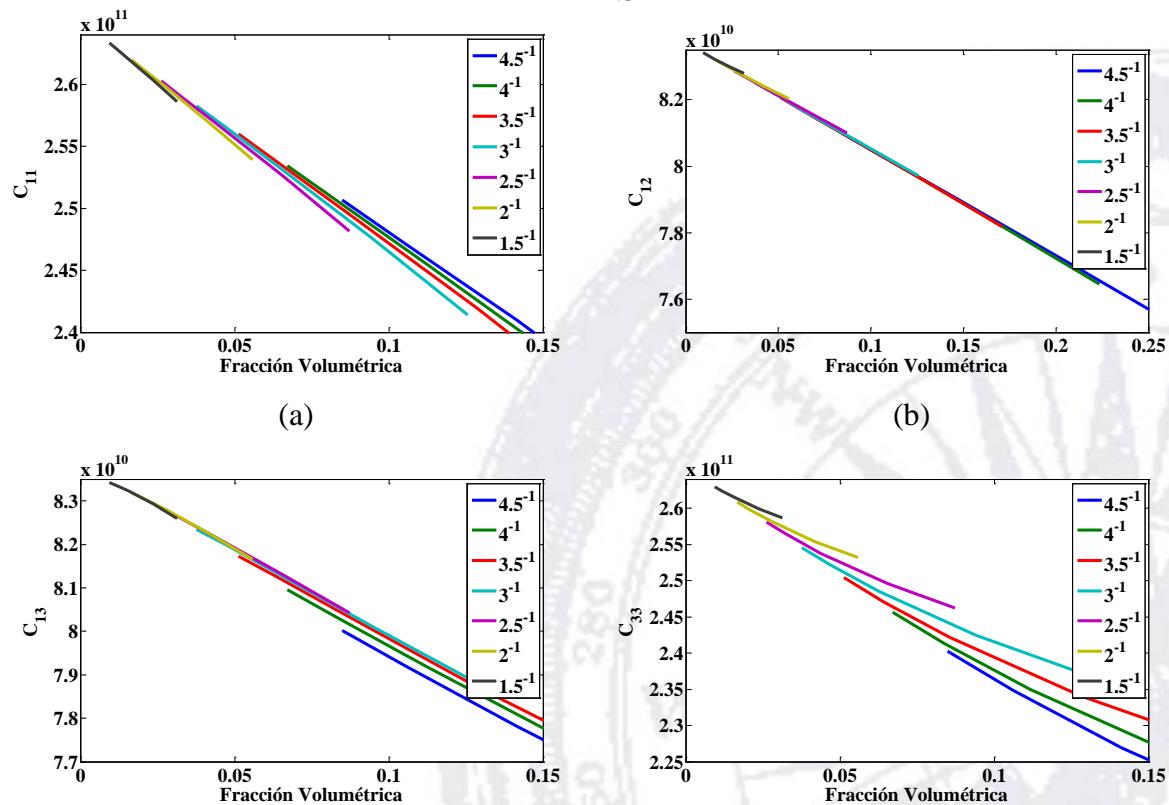
**Figura 4.** Variación de los coeficientes efectivos dependiendo de la fracción volumétrica para una razón de aspecto

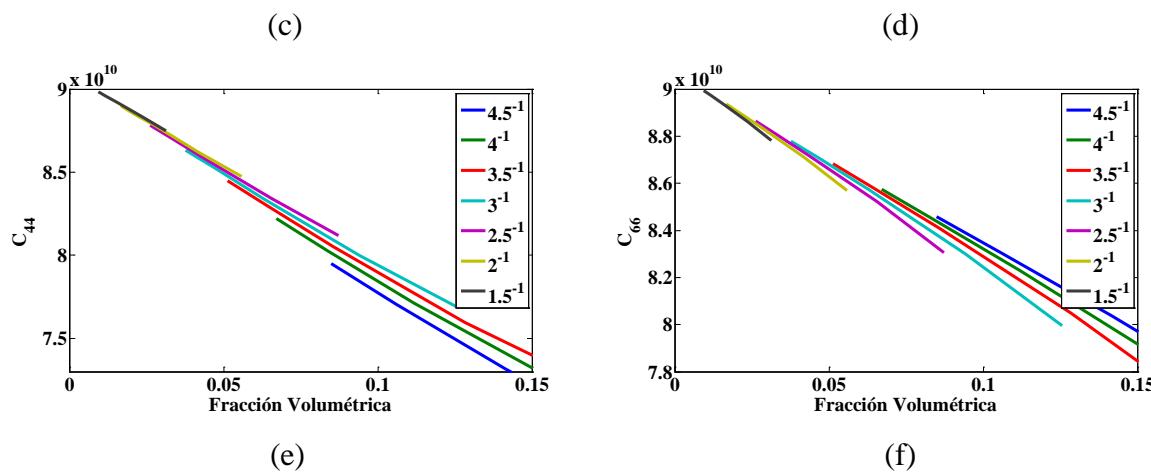
$$\text{de } \frac{1}{4.5}$$



**Figura 5.** Variación de los coeficientes efectivos dependiendo de la fracción volumétrica para una razón de aspecto

$$\text{de } \frac{1}{1.5}$$





**Figura 6.** Variación de los coeficientes efectivos dependiendo de la fracción volumétrica de carburo de silicio variando la razón de aspecto de la inclusión de aluminio.

En la figura 6 se muestran los gráficos de los coeficientes efectivos obtenidos en función de la variación de la fracción volumétrica. En cada subfigura se graficaron estos valores para cada una de las razones de aspecto trabajadas en curvas diferentes para su comparación. Es apreciable, salvo en el caso del coeficiente  $C_{12}$ , que los valores de éstos varían al variar la razón de aspecto a pesar de que no haya una coincidencia en las fracciones volumétricas utilizadas para el cálculo en cada curva. De esta forma es posible ver que al aumentar la deformación de los elipsoides, los coeficientes  $C_{11}$  y  $C_{66}$  aumenten también, figuras 6(a) y 6(f), mientras que  $C_{13}$ ,  $C_{33}$  y  $C_{44}$  disminuyen su valor, figuras 6(c), 6(d) y 6(e). Esto enfatiza aún más la diferencia descrita anteriormente en la tabla 2 y las figuras 4 y 5, donde se mostraba que los coeficientes que involucran la dirección diferenciada disminuían con respecto a los otros, que como muestran los gráficos, tienden a aumentar marcando aún más esta diferencia.

## Conclusiones

En el presente trabajo queda mostrado explícitamente el método semianalítico de homogeneización asintótica, desde su formulación hasta el desarrollo de su solución. Se muestra que, si los componentes son materiales isotrópicos y la geometría del compuesto presenta una dirección diferencial manteniendo las otras dos iguales entre sí, el compuesto resultante pasará de tener un comportamiento isotrópico a tener solamente isotropía en las direcciones de los ejes  $OX_1$  y  $OX_2$ . Además, se muestra cómo van variando los coeficientes efectivos del compuesto de inclusiones elipsoidales periódicas al variar la fracción volumétrica y la razón de aspecto de las

inclusiones. Se aprecia cómo se diferencian los coeficientes efectivos provocando la pérdida de la propiedad de isotropía y cómo disminuyen o aumentan al variar la razón de aspecto, según se relacionen con la dirección diferenciada o no.

### Agradecimientos

Los autores agradecen al Posgrado en Ciencias de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), gracias al apoyo de los cuales fue posible esta investigación.

### Referencias

- Bakhvalov, N., and G. Panasenko. (1989). Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media, vol. 36 of Mathematics and Its Applications (Soviet Series). Kluwer.
- Bravo-Castillero, Julián, Reinaldo Rodríguez-Ramos, Houari Mechkar, José A. Otero, Joanka Hernández Cabanas, Lazaro Maykel Sixto, Raúl Guinovart-Díaz, and Federico J. Sabina. (2009). Homogenization and effective properties of periodic thermomagnetoelectroelastic composites. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 4 (5): 819–836.
- Bravo-Castillero, Julián, Raúl Guinovart-Díaz, Reinaldo Rodríguez-Ramos, Federico J. Sabina, and Renald Brenner. (2012). Unified analytical formulae for the effective properties of periodic fibrous composites. *Materials Letters* 73: 68–71. doi:10.1016/j.matlet.2011.12.106.
- Cabanas, Joanka Hernández, José Antonio Otero, Julián Bravo-Castillero, Reinaldo Rodríguez-Ramos, and Guillermo Monsiváis Galindo. (2010). Magnetoelectroelastic layered composite with variations in the magnetization orientation. *Nova Scientia* 2010 (4): 58–76.
- Challagulla, K. S., A. V. Georgiades, and A. L. Kalamkarov. (2010). Asymptotic homogenization modeling of smart composite generally orthotropic grid-reinforced shells: Part i - theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 29 (4): 530–540. doi:10.1016/j.euromechsol.2010.03.007.
- Gabbert, Ulrich, Sreedhar Kari, Niels Bohn, and Harald Berger. (2010). Mechanics and model-based control of smart materials and structures, 59–68. Springer. doi:10.1007/978-3-211-99484-9.

- Georgiades, A. V., K. S. Challagulla, and A. L. Kalamkarov. (2010). Asymptotic homogenization modeling of smart composite generally orthotropic grid-reinforced shells: Part ii - applications. European Journal of Mechanics - A/Solids 29 (4): 541–556. doi:10.1016/j.euromechsol.2010.03.006.
- Hadjiloizi, D. A., A. V. Georgiades, and A. L. Kalamkarov. (2012). Dynamic modeling and determination of effective properties of smart composite plates with rapidly varying thickness. International Journal of Engineering Science 56: 63–85. doi:10.1016/j.ijengsci.2012.02.007.
- Kalamkarov, Alexander L., Igor V. Andrianov, and Vladyslav V. Danishevskyy. (2009). Asymptotic homogenization of composite materials and structures. Applied Mechanics Reviews 62: 20. doi:10.1115/1.3090830.
- Landau, Lev D., and Evgenii M. Lifshitz. (1977). Quantum mechanics - non-relativistic theory., 3rd edn. Vol. 3 of Curse of theoretical physics. Pergamon Press.
- Mieres, J. (2003). Aplicaciones de materiales compuestos en el refuerzo de estructuras de hormigón. En Materiales Compuestos 2003. Vol. II. Barcelona, España: Reverté.
- Nasution, Muhammad Ridlo Erdata, Naoyuki Watanabe, Atsushi Kondo, and Arief Yudhanto. (2014). A novel asymptotic expansion homogenization analysis for 3-D composite with relieved periodicity in the thickness direction. Composites Science and Technology 97: 63–73. doi:10.1016/j.compscitech.2014.04.006.
- Otero, José A., Reinaldo Rodríguez-Ramos, Julián Bravo-Castillero, Raúl Guinovart-Díaz, Federico J. Sabina, and G. Monsivais. (2013). Semi-analytical method for computing effective properties in elastic composite under imperfect contact. International Journal of Solids and Structures 50 (3–4): 609–622. doi:10.1016/j.ijsolstr.2012.11.001.
- Rodríguez-Ramos, Reinaldo, Harald Berger, Rahul Guinovart-Díaz, Juan Carlos López-Realpozo, Mathias Würkner, Ulrich Gabbert, and Julián Bravo-Castillero. (2010). Two approaches for the evaluation of the effective properties of elastic composite with parallelogram periodic cells. International Journal of Engineering Science 58: 2–10. doi:10.1016/j.ijengsci.2012.03.020.
- Sabina, F.J., V.P. Smyshlyaev y J.R. Willis. (1993). Self-consistent analysis of waves in a matrix-inclusion composite—I. Aligned spheroidal inclusions. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 41 (10): 1573–1588. doi:10.1016/0022-5096(93)90014-7.