Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669. DOI: http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

LA DESARTICULACIÓN MATEMÁTICA EN INGENIERÍA. UNA ALTERNATIVA PARA SU ESTUDIO Y ATENCIÓN, DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

The mathematical disarticulation in Engineering. An alternative for its study and alertness, from Mathematics Education

Diana del Carmen Torres Corrales[1], Gisela Montiel Espinosa[2]

Fecha de recepción: 28 de agosto de 2019
Fecha de aceptación: 7 de diciembre de 2019

1- Nacionalidad: Mexicana. Grado: Doctora en Matemática Educativa. Adscripción: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). Correo electrónico: d.torres@live.com.mx. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0057-5336

2- Nacionalidad: Mexicana. Grado: Doctora en Matemática Educativa. Adscripción: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). Correo electrónico: gmontiele@cinvestav.mx. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1670-9172

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669. DOI: http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Resumen

Presentamos el resultado y análisis de la primera etapa, Documentación del escenario, de una investigación en Matemática Educativa que emplea la teoría socioepistemológica y método etnográfico para identificar y caracterizar los usos de las nociones trigonométricas que se presentan en el problema cinemático directo en la Robótica, desde la Ingeniería Mecatrónica, en particular en el escenario formativo profesionalizante de una universidad mexicana. Evidenciamos que aunque se da una articulación curricular es insuficiente para responder a la necesidad de una articulación de usos robusta de las nociones trigonométricas de donde se resalta la construcción de referentes visuales como el contexto que da significado, pero que está ausente en las asignaturas de Matemáticas que es donde se enseña Trigonometría. Finalmente especificamos dos variables sociales de naturaleza distinta a la matemática que son importantes para nuestro estudio y planteamos una hipótesis para la siguiente etapa.

Palabras clave: *Matemática Educativa, Teoría Socioepistemológica, Método Etnográfico, Formación de ingenieros, Trigonometría.*

Abstract

We present the results and analysis of the documentation of the scenery, a first stage of a research in Mathematics Education that uses the Socio-epistemological Theory and the Ethnographic Method to identify and characterize the uses of the trigonometrical notions that are present in direct-kinematics problems in Robotics from Mechatronics Engineering, in particular in the context of professional engineering training in a Mexican university. We give evidence that even though a curricular articulation is present, it is insufficient to cope with the necessity of a robust articulation of uses of trigonometric notions where the construction of visual references is highlighted as a context that gives meaning to mathematical knowledge, but is absent in Mathematics courses where Trigonometry is taught. We conclude by specifying two non-mathematical social variables that are important for our research and pose a hypothesis for the next stages.

Keywords: *Mathematics Education, Socio-epistemological Theory, Ethnographic Method, Engineering Education, Trigonometry.*

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Introducción

La desarticulación de la matemática en las asignaturas de Ciencias Básicas y las de Ingeniería Aplicada (profesionalizantes, cuarto año) en el escenario formativo universitario ha sido tema de debate y de interés de estudio para diversas disciplinas, entre ellas la Matemática Educativa (Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas), disciplina que se considera de las "Ciencias Sociales y/o las Humanidades" según la tradición y tipo de investigación que se lleve a cabo, y que tiene como objeto de estudio los fenómenos didácticos relativos al aprendizaje de la matemática.

Desde la experiencia docente, esta desarticulación la hemos vinculado a tres fenómenos recurrentes: (1) el estudiante no reconoce la matemática con la que trata en los temas de Ingeniería Aplicada, (2) el estudiante la recuerda, pero no la emplea porque no domina las técnicas o algoritmos asociados a ella y (3) el docente de Ingeniería ocupa hasta dos semanas al inicio de su periodo escolar para dar un repaso de la matemática que necesitará, con el objetivo de disminuir el porcentaje de deserción o reprobación.

En este escrito reportamos los resultados del análisis de la primera etapa del Método Etnográfico de nuestro estudio, en el cual nos planteamos como pregunta *¿qué usos de las nociones trigonométricas se presentan en el problema cinemático directo en la Robótica, desde la Ingeniería Mecatrónica?*, y utilizamos para responderla la técnica de observación no participante en conjunto con las herramientas analíticas de la Teoría Socioepistemológica.

1. Antecedentes

Entre los acercamientos que se han tenido para el estudio y tratamiento de esta desarticulación está el análisis del contenido curricular de los programas educativos. Por ejemplo, Herrera (1990) reconoció que los programas han tenido dos etapas: enseñanza de tipo técnica-artesanal y técnica-científica. En la primera se daban métodos intuitivos y empíricos de cómo resolver un problema y en la segunda etapa (a finales del siglo XX) se introdujeron además de los cursos técnicos, otros cursos con contenido teórico y matemático. Siguiendo esta última etapa, los planes de estudio tradicionales generalmente presentan un programa lineal (en orden secuencial): Ciencias Básicas (Matemáticas, Física, etc.), Ciencias de la Ingeniería y asignaturas profesionalizantes. Además de esta organización, los avances de la tecnología y la demanda de programas con mayor especificidad han generado la necesidad de realizar análisis epistemológicos del conocimiento necesario de manera que se analicen sus elementos locales, por ejemplo, su quehacer y su cultura.

En la misma dirección, Langereis, Hu y Feijs (2013) realizaron un estudio que mostró que un currículo basado en competencias permite una comprensión más robusta de un problema. Los autores tomaron el caso de la Ingeniería de Diseño Industrial en la asignatura de Microcontroladores donde los estudiantes diseñaron un juego, haciendo modelación que va desde el diseño al modelo –caso contrario del currículo tradicional que va del problema matemático al problema ingenieril–. Entre sus resultados, reconocen que la modelación vinculó el conocimiento matemático y técnico, y se identificó que un problema complejo de diseño se resuelve a través de segmentarlo en problemas pequeños.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

La crítica que hacen Langereis *et al.* (2013), una revisión a los programas de estudio de interés a nuestra investigación y la consulta a las recomendaciones curriculares del Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería, A.C., (CACEI)[3], nos permiten identificar que el modelo que Herrera (1990) califica de ortodoxo se conserva en cierta medida y se orienta a las carreras de Ingeniería a conservarlo. El objetivo de nuestra investigación no es abonar pros o contras a dicho modelo, sino profundizar en la matemática como saber articulador de las Ciencias Básicas, las Ciencias de la Ingeniería y las asignaturas profesionalizantes, desde una disciplina y una perspectiva que nos permiten *problematizarla*. Esto es hacer a la matemática parte del fenómeno didáctico y con ello despersonalizarlo, es decir, quitar responsabilidad sólo al profesor y/o al estudiante; reconocer hasta qué nivel la desarticulación está en la matemática escolar misma y dirigir la atención al rediseño del discurso Matemático Escolar.

Esta problematización comienza cuestionando qué matemática y cómo se transmite y se construye en escenarios particulares; por ello acotamos nuestra revisión bibliográfica a las aportaciones relativas a la matemática para Ingeniería y a la didáctica del saber a problematizar, el trigonométrico, ambas desarrolladas en la perspectiva teórica elegida.

1.1. Matemáticas para Ingeniería

Enmarcadas en la teoría socioepistemológica (TS) se han realizado diversas investigaciones que dan cuenta de la desarticulación relacionada al contenido curricular en programas de Ingeniería, donde se concibe que el conocimiento matemático es un objeto del pensamiento y tiene un *uso culturalmente situado* (Cantoral y Farfán, 2003).

Una estrategia para explicar esta desarticulación es reconocer las transformaciones que el saber escolar ha sufrido, producto de su transposición didáctica, confrontando sus usos con aquellos propios de su génesis histórica. Por ejemplo, Hinojos y Farfán (2017) al analizar obras de científicos del área eléctrica reconocieron que el uso de la noción matemática de estado estacionario es transversal a las tres obras. Sin embargo, en la enseñanza del análisis de circuitos eléctricos en programas de Ingeniería Eléctrica esta noción no se discute, haciendo que su naturaleza se oscurezca y se fomenten significados matemáticos limitados.

Por otro lado, Mendoza-Higuera y Cordero (2018) reconocieron que en la obra de Lyapunov el uso de la noción matemática de estabilidad consistía en reproducir comportamientos (conocido un comportamiento dibujar otro parecido). Sin embargo, en los libros de texto de Ciencias Básicas para Ingeniería Biónica no se discute que la ecuación diferencial tiene la función de reproducir comportamientos sino que es utilizada para buscar un modelo de derivadas de una función desconocida y resolverla.

Otro tipo de investigaciones se sitúa en escenarios de la Ingeniería, principalmente en formación, para estudiar situaciones de su quehacer donde el uso está influenciado por su cultura y cumple una función específica. Por ejemplo, Tuyub y Buendía (2017) al analizar la componente didáctica (con una investigación no participante, mediante la grabación de clases y la revisión de artículos y tesis) de una Maestría en Ingeniería, identificaron dos usos que le otorgan a las gráficas cartesianas lineales: organizar información y

3- Es una asociación civil mexicana sin fines de lucro, que tiene como objetivo la acreditación de los programas educativos en el área de las ingenierías para que las instituciones de educación superior (IES) ofrezcan educación de calidad a los futuros egresados. Sitio oficial: www.cacei.org

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

mostrar procedimientos y técnicas. Estos usos de las gráficas indican la función que cumplen en determinados problemas, mismos que difieren de lo tradicional de las Ciencias Básicas: la utilización de fórmulas, centrándose en la noción pendiente y la intersección con el eje .

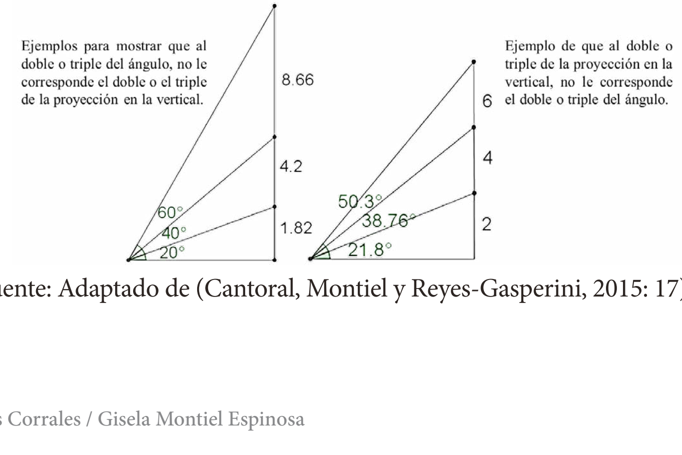
Por su parte, Mendoza-Higuera, Cordero, Solís *et al.* (2018) al analizar las producciones de una situación de aprendizaje de estudiantes de Ingeniería Civil, en un problema de acumulación de fluidos de una presa, identificaron que la actividad matemática no se orientó a calcular la solución de la ecuación diferencial, tal como ocurre en las Ciencias Básicas, sino en establecer los comportamientos tendenciales a través de simulaciones (con software de computadora) que permitieron controlar el nivel del líquido. De esta manera, el uso de la ecuación diferencial permitió modelar un fenómeno estable, hicieron restas y desigualdades; y en la elaboración de gráficas surgieron la variación de parámetros, la realización de ajustes y la construcción de patrones; significados del conocimiento matemático que van más allá de los promovidos en las Ciencias Básicas.

De estos estudios que han problematizado el conocimiento matemático en la Ingeniería se reconoce que existe una desarticulación matemática que se atribuye a una enseñanza, en las Ciencias Básicas, que ha privilegiado el empleo de fórmulas sobre la naturaleza misma del conocimiento matemático, como su origen, las condiciones para que sea factible su uso y las necesidades humanas a que responde. Reconocemos que esta enseñanza ha permitido aprendizaje, nuestra visión teórica no es suprimir los significados promovidos por el empleo de fórmulas sino ampliarlos con intención de disminuir la desarticulación que se da respecto al uso de la matemática en otras disciplinas a lo largo del currículo.

1.2. Construcción social de conocimiento trigonométrico

Particularmente en esta línea de investigación Montiel (2011) identificó en un estudio histórico-epistemológico, que un escenario de emergencia del *problema trigonométrico* es el estudio de la naturaleza no proporcional de la relación ‘ángulo central-cuerda subtendida’ en el círculo, en un contexto geométrico. En la escuela esto equivaldría al estudio de la relación no proporcional ángulo-cateto opuesto/adyacente, en el triángulo rectángulo (figura 1). Sin embargo, en las asignaturas de Matemáticas donde se introduce a la Trigonometría en el sistema educativo mexicano se aprende en un contexto que carece de construcciones y operaciones geométricas, y se estudian las relaciones proporcionales entre los lados de los triángulos rectángulos semejantes en relación con un solo ángulo.

Figura 1. Relación trigonométrica



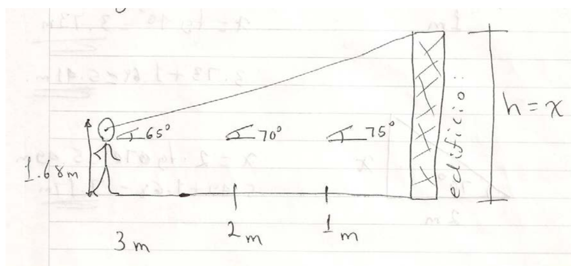
Fuente: Adaptado de (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015: 17)

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Este tipo de enseñanza ha provocado que se admita la construcción de un *significado lineal*: considerar que a incrementos o decrementos constantes del cateto habrá decrementos o incrementos constantes del ángulo o viceversa (figura 2) (Jácome, 2011).

Se identifica el uso de la razón trigonométrica como *división de longitudes* porque no se necesita medir ni construir el triángulo rectángulo sino que es suficiente elegir la razón adecuada a la situación física con los datos que da el problema y sustituirlos en la calculadora. Entonces, la función que cumple es *calcular un valor faltante* sin importar el contexto que sea, provocando que la Trigonometría se convierta en un escenario de aplicación de lo proporcional y oscurezca su naturaleza (Cantoral *et al*., 2015).

Figura 2. Significado lineal de la razón trigonométrica



Fuente: Jácome (2011: 126)

En ese sentido "estudiar su naturaleza implica, identificar lo *no proporcional* de esta relación, pero analizarla y cuantificarla con *lo proporcional* (las razones), en actividad matemática de construcción geométrica" (Cantoral *et al*., 2015: 17). Ésta es la hipótesis epistemológica que surge de las primeras investigaciones en la línea y que sirven de base para los rediseños del discurso Matemático Escolar que a continuación sintetizamos.

Para contrarrestar este significado lineal se han realizado diseños didácticos-experimentales donde la actividad matemática se centra en lo que *hace el estudiante* para construir conocimiento trigonométrico. Scholz (2014) realizó su estudio en el nivel medio superior, mientras que Torres-Corrales (2014) en el primer año de Ingeniería. En ambos, los estudiantes midieron físicamente y emplearon *applets* de GeoGebra para elaborar y/o estudiar modelos a escala de triángulos y círculos en problemas de cálculo de distancias, donde hicieron relaciones entre sus elementos (ángulos, lados, radios, cuerdas y arcos).

Scholz (2014) diseñó una secuencia didáctica basada en la tarea de Vohns (2006) ya que permitía integrar los elementos de construcción social de la epistemología de prácticas de Montiel (2011). A partir de la evidencia recolectada, identifica que al integrar procesos de construcción geométrica para la resignificación de la razón trigonométrica, ésta se acompaña de *razonamientos* matemáticos (empírico, aritmético, algebraico y geométrico), entendidos como formas de actuar ante la tarea que van a dotar de significado a *lo trigonométrico*. Mientras que la actividad matemática en Torres-Corrales (2014) permitió que los estudiantes identificaran que la razón trigonométrica es una *herramienta proporcional* para estudiar y cuantificar una relación no-proporcional, a partir de reconocer y comparar que la relación entre ángulo-arco es proporcional mientras que ángulo-cuerda no lo es.

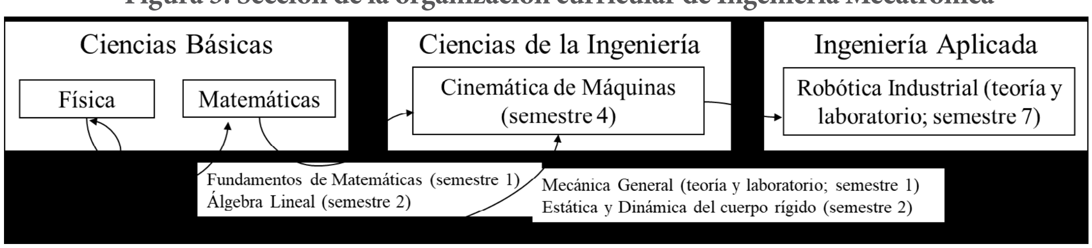
En ambas investigaciones se evidenció la importancia de la interacción con la noción de ángulo, transitando por sus usos (angularidad) como: *cualidad* (por su forma), *cantidad* (susceptible a medirse), como *relación* (por cómo se define y acota), y por tener carácter *estático* y *dinámico*; consideración reportada por Rotaeche y Montiel (2017) y que resulta de interés porque el cambio de epistemología propuesta introduce al concepto y su complejidad (epistemológica, didáctica y cognitiva) como parte de la construcción de significado relativo a lo trigonométrico en la Ingeniería. Lo más relevante, en términos de la actividad matemática en juego, es el acercamiento covariacional a la relación ángulo-cuerda (o ángulo-cateto) para reconocer su naturaleza trascendente; mientras que en el discurso escolar tradicional, el ángulo se trata como un referente para poner atención en la razón.

2. Planteamiento del estudio

Dado el valor pragmático de la Trigonometría en diversas áreas del conocimiento (incluidas las áreas matemáticas) planteamos el estudio de su uso culturalmente situado en la Ingeniería. Para acotar el estudio delimitamos la investigación en un primer nivel con la revisión de algunos planes y programas del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON, universidad pública descentralizada, ubicada en el norte de México); esto con el objetivo de seleccionar el programa con contenido trigonométrico en el mayor número de asignaturas. El programa seleccionado fue *Ingeniería Mecatrónica*.

Tomando en consideración que realizaríamos un estudio de los usos culturalmente situados del conocimiento trigonométrico, optamos por un *estudio etnográfico* que nos permitiera una comprensión profunda de la cultura del estudiante de Ingeniería Mecatrónica al resolver un tipo de problema particular; de ahí que seleccionáramos solo una asignatura de la Ingeniería Aplicada (cercana a la práctica profesional) como delimitación, en un segundo nivel de nuestro objeto de estudio. Elegimos la asignatura *Robótica Industrial* cuyos contenidos muestran una clara **articulación curricular** con las asignaturas de las Ciencias de la Ingeniería y las Ciencias Básicas (figura 3).

Figura 3. Sección de la organización curricular de Ingeniería Mecatrónica



Fuente: Construcción personal

Robótica Industrial contribuye a una competencia disciplinar del programa y en ella se estudian tres problemas de robots industriales seriales: cinemático directo, cinemático inverso y jacobiano, los dos primeros tratan del análisis de la posición y el tercero del análisis de la velocidad. Como delimitación de nuestro objeto de estudio en un tercer nivel elegimos el *problema cinemático directo* porque incluye la elaboración de diagramas y el desarrollo de ecuaciones con nociones trigonométricas a partir de estos (cuadro 1).

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Cuadro 1. Elección de un problema de Ingeniería Mecatrónica

Competencia disciplinar	Robótica Industrial (teoría y laboratorio)	Estudio de la cinemática directa de posición
Desarrollar soluciones para sistemas de producción celular avanzada y flexible, con base en diseño y manufactura asistida por computadora.	Desarrollar la competencia de analizar, manipular y configurar sistemas robóticos, aplicando los parámetros de Denavit y Hartenberg para generar modelos matemáticos de la cinemática directa e inversa de robots seriales.	El objetivo es determinar el efecto acumulativo del conjunto de variables de las articulaciones por efectos del movimiento resultante.

Fuente: Construido a partir de (Instituto Tecnológico de Sonora [ITSON], 2014)

2.1. Problema de investigación

La investigación se plantea la pregunta: ¿qué usos de las nociones trigonométricas se dan en la Ingeniería Mecatrónica cuando los estudiantes resuelven problemas de la Robótica?, y emplea el *Método Etnográfico* (cuadro 2) para identificar los usos y caracterizarlos en el marco cultural de la comunidad elegida. Las etapas del método se agrupan en tres momentos: (1) recolección, (2) producción y (3) análisis de datos. El primer momento ha permitido distinguir dos variables sociales importantes para nuestro estudio; por un lado las que tienen que ver con la cultura propia de la Ingeniería Mecatrónica y por otro las asociadas con los usos del conocimiento matemático en juego. En particular, de la matemática nos interesa identificar *qué trigonometría* y cómo se transmite y *se construye* para valorar si la **articulación curricular** se corresponde con una articulación en la forma en que el conocimiento trigonométrico es usado (**articulación de usos**), y a partir de ahí plantear algunas hipótesis de lo que podría pasar en la etapa de producción de datos.

Cuadro 2. Etapas del método etnográfico de la investigación

Recolección de datos (observación no participante)	Producción de datos (observación participante y conversación)	Análisis de datos
1. Documentación del escenario. Estudiar a la Robótica como una disciplina científica y el problema cinemático directo. 2. Planeación de la entrada al escenario. Protocolo de entrada para consentimiento y tratamiento de datos, cuaderno de notas y diario de campo para observación participante, guiones para entrevistas y adiestramiento para anotaciones, audio, video y fotografía.	3. Trabajo de campo. Entrada en el escenario. Registro y análisis preliminar de datos. Verificación de los datos. Validación de los datos. Retirada del escenario. Empleo y ajustes de los instrumentos diseñados.	4. Análisis descriptivo. Describir de manera densa las particularidades de lo local y las interacciones humanas. 5. Análisis de la actividad matemática. Comprender a profundidad la cultura de la Ingeniería Mecatrónica como elemento constitutivo del pensamiento matemático.

Fuente: Construido a partir de (Geertz, 2006; Hammersley y Atkinson, 1994; Rodríguez-Gómez y Valldeoriola, 2012)

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

En este escrito reportamos la primera etapa del momento de *Recolección de datos* de nuestro estudio, para lo cual nos planteamos una pregunta auxiliar que guió el análisis: *¿qué usos de las nociones trigonométricas se presentan en el problema cinemático directo en la Robótica, desde la Ingeniería Mecatrónica?*

3. Referentes teóricos de partida

Como ya se mencionó, la investigación se enmarca en la TS que nace al seno de la Matemática Educativa y que reconoce la *limitación de significados del conocimiento matemático* que promueve la escuela como parte de los fenómenos didácticos. Esta limitación la atribuye y explica desde el constructo teórico *discurso Matemático Escolar* (dME) que se caracteriza como "las bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos relativos a la matemática" (Cantoral, Farfán, Lezama *et al.*, 2006: 86), y que por su estructuración se convierte en un "sistema de razón que produce violencia simbólica, a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos" (Soto y Cantoral, 2014: 1534).

Por la forma en que se estructura el dME la actividad de aula centra su atención en hacer que el estudiante domine los medios semióticos (representaciones) que le permiten acceder al objeto matemático. Por ejemplo, tomando el caso discutido en la introducción, el dME de la razón trigonométrica admite la construcción de un significado lineal porque las tareas se concentran en fomentar que los estudiantes elijan la razón correcta para resolver un problema de valor faltante; regularmente la actividad matemática radica en la división de la medida de dos longitudes o en una operación en la calculadora y un despeje.

El *cambio de epistemología* que proponen los estudios basados en una construcción social del conocimiento trigonométrico plantea que el estudiante realice construcciones geométricas, tome medidas, estudie relaciones y su naturaleza, y construya herramientas para estudiar y cuantificar dichas relaciones. A esta transición la TS la reconoce como el paso *de los objetos a las prácticas*, y estudia lo que construye el estudiante a partir de lo que le fomentamos hacer y no de lo que es capaz de hacer. Esto no quiere decir que se abandona el dominio de las representaciones, de hecho incorpora su construcción entendiendo las relaciones y los usos del conocimiento que lo permiten. Es en el *uso del conocimiento* que la teoría reconoce la construcción de *significado matemático*.

Por lo antes expuesto es que la TS se plantea como objeto de estudio "*la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional*" (Cantoral, 2013: 25). Su postura *social* incluye consideraciones situacionales y de interacción, pero principalmente al reconocimiento de prácticas invariantes relacionadas con el uso del conocimiento matemático que enmarca en cuatro principios:

- *Principio de racionalidad contextualizada*. Se asume que la forma en que las personas razonan depende del contexto donde construyen su conocimiento. Para entender esta dependencia el contexto se reconoce en tres niveles: el cultural, el situacional y el de significación. El *contexto cultural* da pertenencia a grupos humanos específicos pues se reconoce su dominio en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados; mientras que el *contexto situacional* reconoce la influencia del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática, dichas condiciones las determina el problema que se estudia o pueden

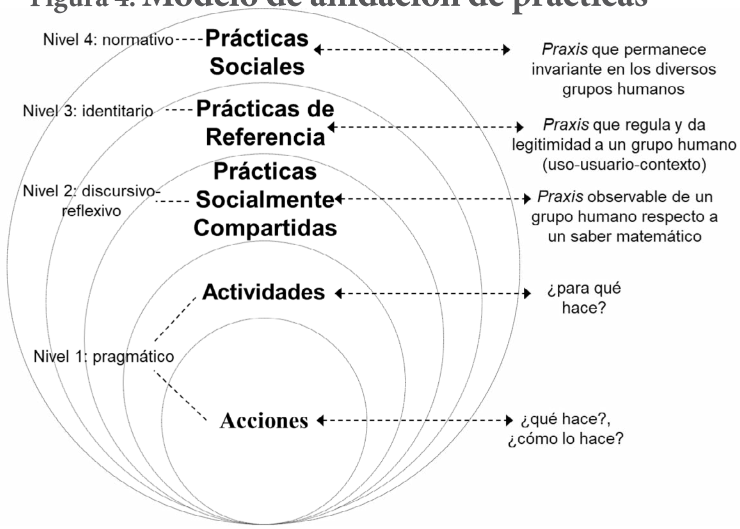
Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

ser establecidas mediante un diseño didáctico. El contexto que da forma y sentido a la matemática en juego, lo denominamos *contexto de significación*.

- *Principio de relativismo epistemológico*. Por la diversidad de contextos donde se construye conocimiento se considera que la sabiduría humana no sólo se limita a la escuela, sino que se desarrolla en *escenarios populares* (de la vida cotidiana), *técnicos* (profesionales) y *cultos* (obra matemática original o escenarios escolares) (Cantoral, 2013), y es el grupo humano que vive en dicho escenario el que construye los mecanismos para validarlo según le sea funcional. Por ello la validez de un saber es relativa a los contextos y a quienes lo producen.
- *Principio de significación progresiva o resignificación*. Dados los dos principios anteriores, el significado asociado al conocimiento matemático estará en constante construcción por el grupo humano a medida que interactúe en diferentes contextos para resolver problemas. Los significados se confrontan pero no necesariamente se descartan, simplemente son funcionales según el contexto.
- *Principio normativo de la práctica social.* "Se asume que las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, como las generadoras del conocimiento" (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014: 99). Una práctica social no refiere al hacer en colectivo, sino a la normativa que hace al individuo o al grupo social hacer lo que hace.

Para reconocer las prácticas que norman la construcción de conocimiento es necesario estudiarla en diversos escenarios y encontrar los invariantes, con relación al uso del conocimiento que subyacen a ellos. Estos usos invariantes en diversos escenarios, es lo que se reconoce como *la naturaleza social de la matemática*, lo que se denomina *lo matemático*. Se parte del análisis del quehacer humano en interacción social y para ello se ha configurado un Modelo de Anidación de Prácticas (MAP) que explica la construcción de conocimiento matemático en cuatro niveles (figura 4).

Figura 4. Modelo de anidación de prácticas



Fuente: Adaptado de (Cantoral *et al*., 2015: 13)

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Se analiza la *acción* directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en su relación con la matemática en juego; desde este momento se pueden ir identificando los *usos del conocimiento*, caracterizados como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cabañas, 2011: 75), "ya sea que el sujeto sea consciente de ello o no, que manipule de manera explícita o implícita, o que utilice representaciones típicamente escolares o propias del contexto" (Rotaeche, 2012: 27); los *usos* son funcionales porque dan respuesta a la tarea matemática. La articulación de acciones compone una *actividad* situada culturalmente.

Una organización de actividades, entendida como "iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto" (Cantoral *et al*., 2014: 99), compone una *práctica socialmente compartida*. Estas prácticas se enmarcan en una *práctica de referencia*, expresión material e ideológica de un paradigma. Finalmente, la *práctica social* donde se ubica a la normativa del quehacer humano (diversas prácticas de referencia en los escenarios populares, técnicos y cultos), con relación a un saber matemático en particular.

4. Método para la documentación

Esta primera etapa constituye la problematización del saber matemático *técnico* en un escenario escolar cercano al profesional; razón por la cual debe considerar la racionalidad y la validez del conocimiento propio de la Ingeniería Mecatrónica, inicialmente desde lo que plantea la comunidad académica y científica. Utilizamos la técnica de *observación no participante* del método etnográfico para estudiar en un primer momento, de manera indirecta, la cultura de la Ingeniería Mecatrónica a través de fuentes documentales; la validez cualitativa de la documentación está en la objetividad y veracidad procurada al evitar la relación directa con su producción (Hammersley y Atkinson, 1994).

Revisamos diversas fuentes para elaborar la documentación: revistas especializadas de Ingeniería, algunos sitios de Internet (wikis, blogs, videos, etc.), *Handbooks* (manuales disciplinares) y libros. Por decisión metodológica y por ser fuentes confiables en el campo seleccionamos los libros: Spong, Hutchinson y Vidyasagar (2004), Craig (2006), Norton (2009), Saha (2010) y Reyes-Cortés (2011).

Concretamos utilizando la técnica de observación no participante mediante dos análisis: *descriptivo* y *cualitativo de la actividad matemática*. Con el primero se logran caracterizar los contextos cultural y situacional, mientras que el segundo permite delimitar un contexto de significación y a partir de ahí identificar usos de las nociones trigonométricas en las asignaturas asociadas al problema elegido de la Robótica (figura 3).

La investigación de Montiel (2011) de la problematización del saber matemático culto en un escenario histórico (cuadro 3), sirve de referente para identificar los significados trigonométricos que se han perdido, por ejemplo, en los libros de texto, producto de la transposición didáctica, o en experimentos de enseñanza; para robustecer las explicaciones sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Cuadro 3. Elementos básicos para la construcción social de la relación trigonométrica

	Práctica socialmente compartida: Anticipación
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía
Contexto	Geométrico-Proporcional
Racionalidad	Helenística- Euclidiana
Herramienta y Variables	Relación Trigonométrica: ángulo central (separación angular) y cuerda (distancia)
Escala de tiempo	Finita

Fuente: Actualizada de (Montiel, 2011: 123)

No se trata de hacer un comparativo entre la génesis histórica y los libros de texto, o lo que sucede en los experimentos de enseñanza, sino de contrastar la actividad matemática a partir de considerar el papel de: "la medición y la proporcionalidad, los procesos de construcción geométrica, el análisis de la relación 'ángulo – longitud en el triángulo o cuerda en el círculo', la modelación para el paso de lo macro a lo micro" (Cantoral *et al*., 2015: 21).

Un análisis en la misma dirección, se llevó a cabo en la fase documental aquí reportada, en un escenario de formación en Ingeniería, próximo a la práctica profesional; razón por la cual incorporamos algunos criterios que resultaron pertinentes en investigaciones previas: *ideas básicas inherentes* (Vohns, 2006) y *razonamientos de la Trigonometría* (Scholz, 2014); e incorporaremos otros, propios del conocimiento matemático involucrado en el problema cinemático directo: *razonamiento cuantitativo y covariacional en Trigonometría* (Moore, 2014); *usos del ángulo* (Rotaeche y Montiel, 2017); algunos elementos de los *modos de pensamiento* (Sierpinska, 2000), en tanto se trabaja de forma articulada con estructuras (vectores y matrices) del Álgebra Lineal; y finalmente con el *razonamiento espacial* (Newcombe y Shipley, 2015). Daremos a todos el tratamiento de *razonamiento*, entendido como formas de actuar ante una tarea.

Todos estos elementos analíticos –que no son excluyentes entre sí–, junto con los niveles pragmáticos del MAP se organizaron en un cuadro, y los pusimos en funcionamiento bajo el *supuesto hipotético* de cómo actúa el estudiante frente a los ejercicios o problemas de los libros de texto recomendados en el programa de estudios, retomando los ejemplos del propio libro y la experiencia docente de la primera autora, quien cuenta con formación académica de Ingeniería y experiencia profesional en la institución.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

5. Resultados

La *Documentación del escenario de estudio* nos permitió tener un acercamiento inicial al problema de investigación, nos familiarizamos con la Robótica y el problema cinemático directo antes de realizar el trabajo de campo.

La *Ingeniería Mecatrónica*[4] es una integración de diferentes áreas de la Ingeniería como la Mecánica, la Electrónica y los Sistemas Computacionales, cuyo propósito es crear, mejorar, armonizar o perfeccionar productos o procesos que trascienden hacia la *automatización*. Inicialmente el término *mecatrónica* fue propuesto por una empresa japonesa en 1969 como una disciplina que estudia la Robótica, cuyo objetivo es mejorar productos electromecánicos.

5.1. Robótica como escenario de trabajo

Para estudiar a la Robótica nos preguntamos: ¿cuál es el problema que resuelve? Inicialmente la Robótica surgió de la ciencia ficción, aunque también ha sido descrita desde la religión y la mitología. Sin embargo, lo que nos interesó fue reconocerla desde el desarrollo de la Ingeniería en general, y la Ingeniería Mecatrónica en particular; esto nos llevó a estudiarla en la etapa de *automatización industrial de las máquinas*, el momento donde los robots industriales, junto con los sistemas de diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés) y la manufactura asistida por computadora (CAM, por sus siglas en inglés), caracterizaron las tendencias más recientes en la automatización de procesos de manufactura (Spong *et al.*, 2004).

En la actualidad la Robótica es una disciplina autónoma que se estudia desde diversas áreas para generar desarrollo científico. Una de ellas es la Ingeniería Mecatrónica que tiene como antecedente el control automático, donde la invención de la computadora digital marcó su principal desarrollo (Reyes-Cortés, 2011).

Particularmente, *el problema que se resuelve* con la Robótica desde la Ingeniería Mecatrónica es **la síntesis de algunos aspectos del funcionamiento del cuerpo humano mediante mecanismos, sensores, actuadores y computadoras**. Esta síntesis se necesita por dos situaciones: existen trabajos que ponen en peligro al humano y la demanda en la eficiencia de los procesos (Craig, 2006).

El diseño de máquinas se ha inspirado, en parte, por el funcionamiento del cuerpo. Entre la diversidad de máquinas se encuentran los robots, que se diferencian según la Organización Internacional para la Estandarización (ISO, por sus siglas en inglés) en su capacidad de reprogramabilidad, multifuncionalidad para tareas y asistir el trabajo humano (Saha, 2010).

El *robot* es la fusión de dos tecnologías previas: teleoperadores y máquinas de control numérico. Un robot resulta apropiado para asistir el trabajo humano cuando la tarea es *sucia, agotadora, peligrosa o difícil*. De tener una de estas características un humano probablemente no será capaz de ejecutar el trabajo en forma eficiente. Por lo tanto, es apropiado para que se automatice o lo realice un robot (Saha, 2010).

4- Tomado desde el sitio oficial de la Asociación Mexicana de Mecatrónica: www.mecamex.org

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Dada lo expuesto sobre la Robótica, la reconocemos como un *escenario de trabajo* de la Ingeniería Mecatrónica, en la que convergen saberes de múltiples disciplinas para responder al problema de sintetizar aspectos del cuerpo humano a través del diseño y análisis de robots. Asimismo, reconocemos a la Ingeniería Mecatrónica como ***Práctica de Referencia*** en tanto dota de identidad al ingeniero y regula su quehacer en la Robótica.

5.2. Programa educativo de Ingeniería Mecatrónica

Ingeniería Mecatrónica (plan 2009)[5] es un programa educativo adscrito a la Dirección de Ingeniería y Tecnología que ofrece el ITSON, ubicado en Ciudad Obregón, Sonora; y está acreditado por CACEI.

Este programa, consta de 9 semestres, 61 asignaturas curriculares y 1 remedial de Fundamentos de Matemáticas (ubicada en primer semestre), de las cuales 19 asignaturas incluyen clases de laboratorio (manejo operativo de componentes, máquinas, etc.). El perfil de egreso pretendido es formar:

> …un profesional íntegro y competente para la gestión de sistemas mecatrónicos, con capacidad analítica, creativo en el desarrollo de nuevas soluciones tecnológicas, capacitado para trabajar en equipo y ser líder dentro grupos interdisciplinarios y multidisciplinarios, con un fundamento científico-técnico sólido, con habilidades que aseguran su éxito en la ejecución de proyectos para el mejoramiento y automatización de equipos o procesos contribuyendo al desarrollo de las industrias en un entorno globalizado (ITSON, 2009).

Estas condicionantes del programa educativo dan los primeros elementos del *contexto situacional*, en tanto permiten ubicar las asignaturas que se articulan curricularmente con la asignatura de Robótica (figura 3); y en particular, los temas necesarios para el tratamiento del problema cinemático directo. De ahí que las unidades seleccionadas para el análisis cualitativo de la actividad matemática retomen los siguientes temas (cuadro 4):

}

5 Tomado desde el sitio oficial de la universidad: www.itson.mx/oferta/imt/Paginas/imt.aspx

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Cuadro 4. Contenido trigonométrico del problema cinemático directo

Bloque	Semestre	Asignatura	Temas
Ciencias Básicas	1	Fundamentos de Matemáticas	En el plano cartesiano: (1) relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo y (2) para ángulos generales, y (3) triángulos oblicuángulos.
		Mecánica General	Partículas y cuerpos rígidos en el plano: (1) diagrama de cuerpo libre, (2) desplazamiento, (3) componente rectangular de un vector, (4) torca, (5) reacciones en apoyos y (6) ecuaciones cinemáticas.
	2	Álgebra Lineal	En vectores unitarios (distancia, ángulo y ortogonalidad): (1) norma de un vector y (2) producto punto (con relación al coseno del ángulo) y (3) producto cruz (con relación al seno del ángulo) de dos vectores.
		Estática y Dinámica del cuerpo rígido	Bastidores y máquinas en el plano: (1) diagrama de cuerpo libre, (2) desplazamiento, (3) componente rectangular de un vector, (4) torcas de fuerzas, (5) reacciones en apoyos, (6) ecuaciones vectoriales de equilibrio, (7) desplazamiento lineal y (8) angular.
Ciencias de la Ingeniería	4	Cinemática de Máquinas	En el plano: (1) componente rectangular de un vector, (2) reacciones en apoyos, (3) movimiento complejo (traslación y rotación), (4) análisis de mecanismos articulados con los métodos gráfico y (5) trigonométrico de posición.
Ingeniería Aplicada	7	Robótica Industrial	En el plano y/o espacio: (1) componente rectangular de un vector, (2) reacciones en apoyos, matrices de (3) rotación y (4) de cambio de coordenadas y (5) representación de la localización de un objeto.

Fuente: Construcción personal

5.3. Problema cinemático directo

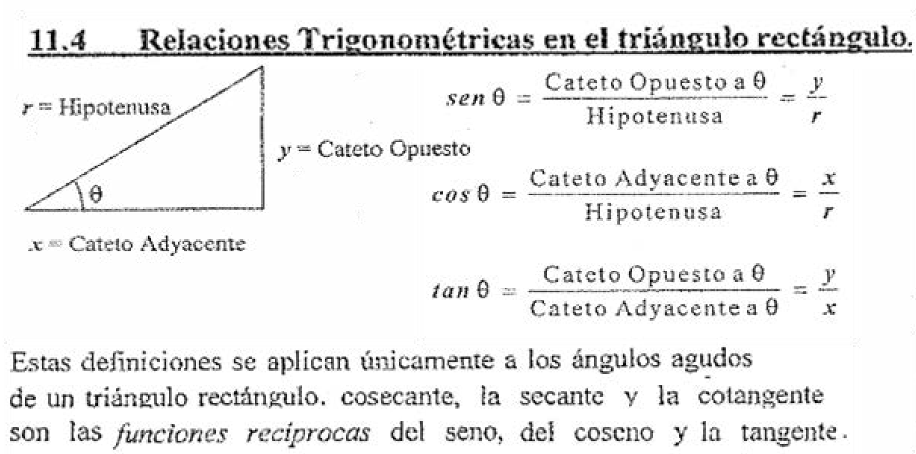
Resolvimos los ejercicios y problemas relacionados con contenido trigonométrico de las seis asignaturas y su bibliografía que tratan del problema cinemático directo. Por cuestiones de extensión mostramos a manera de ejemplo el cuadro de análisis cualitativo de tres problemas y para el resto una síntesis de su análisis.

5.3.1. Ciencias Básicas

En **Fundamentos de Matemáticas** encontramos tres temas con contenido trigonométrico. En el tema **(1) relaciones trigonométricas** (también las llama funciones) en el triángulo rectángulo se presentan tareas similares a las de niveles educativos previos (básico-secundaria y medio superior), lo relevante aquí es que se propicia el empleo de *radicales* para obtener valores exactos en el cálculo (figura 5).

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Figura 5. Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo



11.4 Relaciones Trigonométricas en el triángulo rectángulo.

r = Hipotenusa

y = Cateto Opuesto

x = Cateto Adyacente

$$sen\,\theta = \frac{\text{Cateto Opuesto a }\theta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$cos\,\theta = \frac{\text{Cateto Adyacente a }\theta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$tan\,\theta = \frac{\text{Cateto Opuesto a }\theta}{\text{Cateto Adyacente a }\theta} = \frac{y}{x}$$

Estas definiciones se aplican únicamente a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. cosecante, la secante y la cotangente son las *funciones reciprocas* del seno, del coseno y la tangente.

Fuente: Adaptado de (Morimoto, 2009: 242, 243, 247)

El razonamiento dominante en los ejercicios y problemas es el *aritmético*, se definen las razones trigonométricas y se usan para calcular un valor faltante único de la distancia con apoyo de la calculadora. Esto puede fomentar el desarrollo de *habilidades memorísticas* sobre la relación cateto-cateto y provocar que las cantidades no se reflexionen a pesar de obtener valores *incongruentes geométricamente*, por ejemplo, que no se forme el triángulo rectángulo como un polígono, que un cateto sea mayor que la hipotenusa o que la suma de ángulos internos sea mayor a 180°. Es decir, que la atención del estudiante se centre en calcular valores de forma aritmética, sin volver a su origen geométrico.

Al dar *a priori* el triángulo rectángulo se omiten los elementos de medición, construcción de referentes visuales y modelación, y se inhibe la responsabilidad de *visualizar* el ángulo de interés porque el cálculo del valor se hace respecto al ángulo agudo de la base del triángulo.

Así, al igual que lo reportado en Montiel y Jácome (2014) y Cantoral *et al.* (2015), para otros niveles educativos, se da un ***uso aritmético*** (división de longitudes) de las razones trigonométricas para realizar la ***actividad*** de calcular con exactitud un valor faltante de la distancia en ilustraciones de triángulos.

En el tema **(2) relaciones trigonométricas para ángulos generales** la actividad matemática consiste en *ubicar puntos (x, y)* en el plano cartesiano y calcular las razones trigonométricas (figura 6) donde se forma implícitamente un triángulo rectángulo.

Se fomenta la articulación de cuatro razonamientos en los ejercicios y problemas a resolver: (1) *métrico*, con la ubicación en el plano cartesiano y la introducción de la convención del *sentido del ángulo* (positivo-antihorario y negativo-horario); (2) *gráfico*, con el trazo del lado terminal con ángulo α respecto al eje *x* positivo; (3) *aritmético*, en el cálculo de valores de las razones trigonométricas como división de longitudes; y (4) *cuantitativo*, al reconocer de dónde provienen los valores que usa en las fórmulas para obtener los faltantes en el plano.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

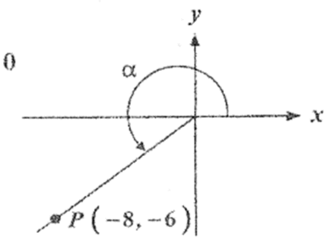
Figura 6. Relaciones trigonométricas para ángulos generales

Obtener los valores de las funciones trigonométricas de α, dado que $P(-8,-6)$ está en su lado terminal.

Solución: Como $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-8)^2+(-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

$$sen\,\alpha = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad cos\,\alpha = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5} \qquad tan\,\alpha = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$csc\,\alpha = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3} \qquad sec\,\alpha = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4} \qquad cot\,\alpha = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$



Fuente: Adaptado de (Morimoto, 2009: 250)

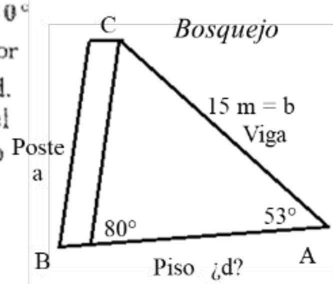
Los ejercicios son intramatemáticos y es *innecesario trazar* explícitamente triángulos rectángulos, por lo tanto se omiten los elementos de medición, construcción de referentes visuales y modelación. El cálculo de las razones trigonométricas se hace respecto al punto que se ubica en el plano cartesiano. En consecuencia, se da un ***uso aritmético*** de las razones trigonométricas para realizar la ***actividad*** de calcular con exactitud el valor de las razones dado un punto *(x, y)* para el valor del ángulo dado el cuadrante donde se ubique.

En el tema **(3) triángulos oblicuángulos** se definen las leyes de senos y cosenos, y al igual que los dos temas previos se utilizan para calcular un valor faltante, sin embargo, se propicia una tarea distinta: *construir un bosquejo del triángulo* (figura 7, cuadro 5).

Figura 7. Relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos

Un poste forma un ángulo de **80°** con el piso y está sostenido por una viga de **15** m de longitud. La viga va desde el borde del poste hasta el piso formando un ángulo de **53°** con éste. Calcular la distancia que hay entre la base del poste y la base de la viga.

Bosquejo



Ley adecuada a la situación $\dfrac{b}{Sen\,B} = \dfrac{c}{Sen\,C}$

Cálculo del ángulo faltante $A + B + C = 180°$

$C = 180° - (53° + 80°)$

$\underline{C = 47°}$

Cálculo de la distancia faltante $d = 15\,m\left(\dfrac{Sen\,47°}{Sen\,80°}\right)$

$\underline{d \approx 11.1395\,m}$

Fuente: Enunciado de (Morimoto, 2009: 271)

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Cuadro 5. Análisis de las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos

Construcción de significado relativo a lo trigonométrico en la Ingeniería					
Elemento		**Acciones (¿qué hace?, ¿cómo lo hace?)**			
Medición y proporcionalidad		**Se omiten.**			
Procesos de construcción de referentes visuales		**Elabora bosquejos a mano de triángulos oblicuángulos.**			
Modelación para el paso de lo macro a lo micro		**Aunque es una modelación limitada, porque las medidas están dadas, a partir de un enunciado verbal hace un bosquejo del objeto.**			
Razonamientos					
Empírico/Métrico		**Espacial**		**Geométrico**	**X**
Gráfico		**Aritmético**		**Algebraico**	**X**
Covariacional		**Cuantitativo**		**Analítico**	
Usos del ángulo					
Cualidad		**Relación**	**X**	**Cantidad**	**X**
Carácter:		**Estático**	**X**	**Dinámico**	
Análisis de la actividad matemática: Se fomenta la articulación de dos razonamientos en los ejercicios y problemas: (1) geométrico, identifica los elementos del triángulo al elaborar el bosquejo a partir del enunciado y utiliza la suma de ángulos internos de un triángulo; y (2) algebraico, define las leyes de senos y cosenos, elige la ley adecuada a la situación, sustituye los datos y calcula un valor faltante único de la distancia con apoyo de la calculadora. Se continúa el desarrollo de habilidades memorísticas sobre la relación cateto-cateto.					
Uso (implícito) de las razones seno y coseno del ángulo: aritmético. Uso de las leyes de seno y coseno: algebraico. Actividades (¿para qué hace?): traza triángulos oblicuándolos (triángulos rectángulos implícitos) para calcular con exactitud un valor faltante de la distancia.					

Fuente: Construido con base en (Cantoral *et al*., 2015; Moore, 2014; Newcombe y Shipley, 2015; Rotaeche y Montiel, 2017; Scholz, 2014; Sierpinska, 2000 y Vohns, 2006)

En Álgebra Lineal encontramos tres temas con contenido trigonométrico en los cuales prevalece el *razonamiento algebraico* como dominante. En el tema **(1) norma de un vector** se define a partir del teorema de Pitágoras el concepto de norma (magnitud, longitud) de un vector unitario $\|v\|^2=\langle v\cdot v\rangle$ o $\|v\|=\sqrt{(\langle v,v\rangle)}$. Mientras que en los temas **(2) producto punto** (con relación al *coseno del ángulo*) y **(3) producto cruz** (con relación al *seno del ángulo*) de dos vectores se definen axiomas y se realizan ejercicios con operaciones simbólicas (incluido el uso del ángulo); lo más relevante es que se omite definir la *matriz de rotación*, que resulta un concepto crucial del problema de la Robótica seleccionado.

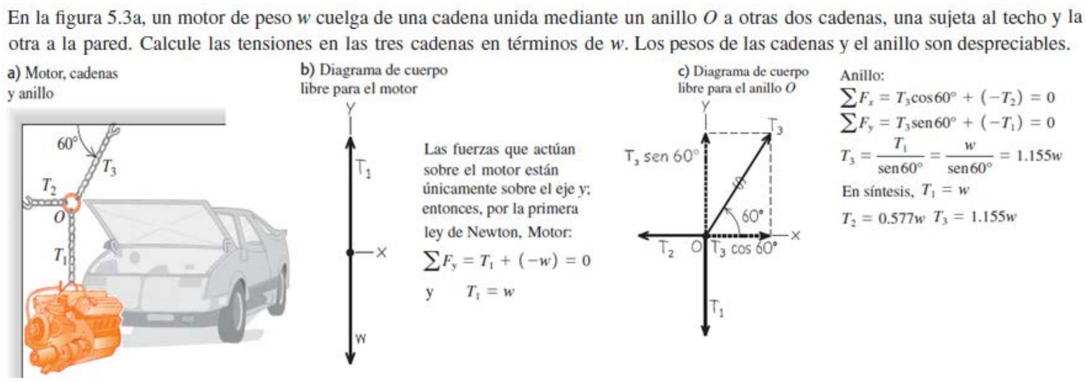
Al estar centrada la actividad matemática en definir axiomas y realizar ejercicios se omiten los elementos de medición, construcción de referentes visuales y modelación, y por lo tanto se da un ***uso algebraico*** (de tipo axiomático) de las relaciones de seno y coseno para realizar la ***actividad*** de calcular cantidades simbólicas y hacer demostraciones; aunque también se da un ***uso (implícito) aritmético*** de las razones seno y coseno del ángulo.

En **Mecánica General** encontramos seis temas con contenido trigonométrico. En el problema de análisis estático de un cuerpo rígido (figura 8) se incluyen cuatro temas: (1) diagrama de cuerpo libre, (2)

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

desplazamiento, (3) componente rectangular de un vector y (6) ecuaciones cinemáticas; los temas restantes los mostramos en las asignaturas subsecuentes.

Figura 8. Análisis estático de un motor de automóvil



Fuente: Adaptado de (Young y Freedman, 2009: 139-140)

Lo relevante es que el triángulo no está dado *a priori* como en Fundamentos de Matemáticas (tema 1), sino que se traza e identifica a partir de elaborar el *diagrama de cuerpo libre* (esquema donde se representan cantidades físicas –fuerzas, distancia, etc.– como vectores unitarios con referencia al origen del plano cartesiano).

El problema permite que articule tres razonamientos: (1) *espacial*, a partir de la ilustración del objeto identifica los ángulos (se forma con referencia al eje *x* o *y*) de interés de las fuerzas que actúan en el objeto (motor); (2) *gráfico*, representa las fuerzas en el plano cartesiano como componentes rectangulares (*xy*), los cuales forman un triángulo rectángulo; y (3) *algebraico*, desarrolla ecuaciones de equilibrio para calcular las componentes rectangulares (no son vectores) de las fuerzas mediante las *razones trigonométricas*. También se dan dos usos del ángulo respecto al problema: como relación y cantidad (fija) y de estos dos resalta su *carácter estático.*

Los elementos de construcción de referentes visuales y de modelación se contextualizan al escenario de la Física. Mediante la elaboración del diagrama de cuerpo libre se construyen *referentes visuales* para *modelar* el problema en el plano –las fuerzas (tensiones) que actúan en el motor– y a partir de ahí se hace el *análisis estático* con la primera ley de Newton (considera que el motor está en reposo total). Con el trazo de distintos triángulos rectángulos, algunos de ellos sobre vectores que no están sobre los ejes del plano (con dirección diferente a 0º, 90º, 180º, 270º o 360º) identificamos *elementos de referentes visuales* que van a permitir el establecimiento de la razón trigonométrica. Sólo no se presenta la medición, porque todos los datos le son dados al estudiante.

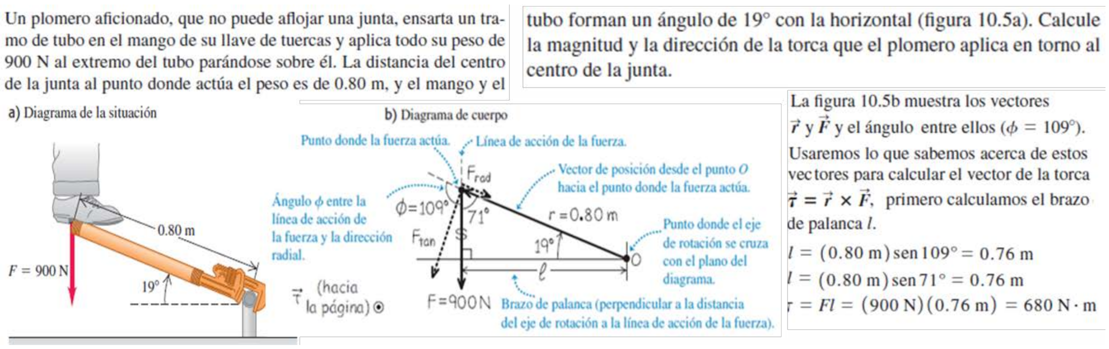
Por lo tanto, se da un ***uso (implícito) aritmético y algebraico*** de las razones seno y coseno del ángulo para realizar la ***actividad*** de calcular con exactitud el valor faltante de la magnitud (hipotenusa del triángulo) de las fuerzas que actúan en el objeto en reposo.

En **Estática y Dinámica del cuerpo rígido** encontramos ocho temas. El problema de torca (figura 9, cuadro 6) articula siete, el tema restante lo mostramos en Cinemática de Máquinas. Aunque el triángulo rectángulo está dado *a priori* en el diagrama de la situación, es necesario *identificarlo* y luego *reconstruirlo*

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

(bosquejo) en el diagrama de cuerpo; además, se estudia el *movimiento circular* que genera la *torca* (cantidad física que describe la acción de giro de una fuerza).

Figura 9. Torca aplicada a una máquina


Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de 19° con la horizontal (figura 10.5a). Calcule la magnitud y la dirección de la torca que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

La figura 10.5b muestra los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y el ángulo entre ellos ($\phi = 109°$). Usaremos lo que sabemos acerca de estos vectores para calcular el vector de la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, primero calculamos el brazo de palanca l.

$$l = (0.80\ \text{m})\ \text{sen}\ 109° = 0.76\ \text{m}$$

$$l = (0.80\ \text{m})\ \text{sen}\ 71° = 0.76\ \text{m}$$

$$\tau = Fl = (900\ \text{N})(0.76\ \text{m}) = 680\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Fuente: Adaptado de (Young y Freedman, 2009: 318-319)

Cuadro 6. Análisis de la torca aplicada a una máquina

Construcción de significado relativo a lo trigonométrico en la Ingeniería					
Elemento	**Acciones (¿qué hace?, ¿cómo lo hace?)**				
Medición y proporcionalidad	Se omiten.				
Procesos de construcción de referentes visuales	Construye un diagrama de cuerpo en forma de triángulo rectángulo (bosquejo) a partir de identificarlo en el diagrama de la situación; hace relaciones para estudiar la torca aplicada a los objetos.				
Modelación para el paso de lo macro a lo micro	Con el diagrama de cuerpo modela la torca que se aplica a los objetos (junta a aflojar, tubo y máquina) y determina el giro por acción de la fuerza aplicada (pie de la persona).				
Razonamientos					
Empírico/Métrico		Espacial	X	Geométrico	X
Gráfico		Aritmético		Algebraico	X
Covariacional		Cuantitativo		Analítico	
Usos del ángulo					
Cualidad	X	Relación	X	Cantidad	X
Carácter:		Estático		Dinámico	X
Análisis de la actividad matemática: Se fomenta la articulación de tres razonamientos: (1) espacial, para construir el triángulo rectángulo visualiza el ángulo de interés (se forma con referencia al eje horizontal o vertical); (2) geométrico, hace relaciones (perpendicularidad, paralelismo y ángulos complementarios) en el diagrama de la situación para construir el triángulo en el diagrama de cuerpo; y (3) algebraico, desarrolla ecuaciones vectoriales para calcular la torca, que matemáticamente es el producto de la fuerza y el brazo de palanca (distancia perpendicular entre el punto de referencia y la línea de acción de la fuerza); y establece las componentes rectangulares del vector de posición con las razones trigonométricas.					
Uso (implícito) de la razón seno del ángulo: aritmético. Uso de la razón seno del ángulo: algebraico. Actividades (¿para qué hace?): identifica y reconstruye el triángulo rectángulo, y alude y/o hace movimientos circulares para calcular con exactitud el valor faltante de las componentes rectangulares del vector de posición que actúan en la torca aplicada a los objetos; ampliar la longitud del brazo de palanca permite una mayor torca.					

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

5.3.2. Ciencias de la Ingeniería

Estudiamos *Cinemática de Máquinas* con el libro de Norton (2009) del cual reconocimos un tópico que organiza el conocimiento técnico: **la arquitectura de robots**.

Identificamos que un robot posee tres subsistemas: visión, control y movimiento. El primero se refiere a robots con inteligencia artificial, la cual no poseen los robots industriales de tipo serial. El segundo hace referencia a la comunicación entre el robot y la computadora que lo manipula, y el tercero a la parte física o mecánica llamada manipulador, además del efector final, actuador y transmisión. Por decisión metodológica de nuestro objeto de estudio, seleccionamos el subsistema de movimiento y de éste al manipulador. Para nuestra investigación un *robot es un manipulador (brazo mecánico)* que realiza tareas como carga, ensamble, en sí trabajo de mano de obra no calificada o semicalificada.

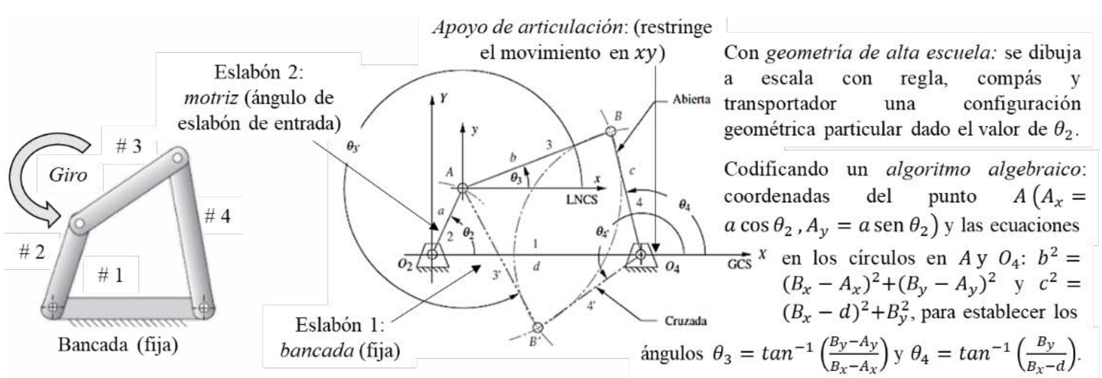
Los robots industriales se conectan en serie, semejantes a como se unen las articulaciones de nuestro brazo: hombro-codo-muñeca. A los elementos del robot, semejantes a un hueso, se les llaman *eslabones*, que se consideran cuerpos rígidos (indeformable y sin masa), y a como se unen los eslabones se les llaman *articulaciones* (juntas o pares cinemáticos), estas últimas restringen el movimiento relativo entre los eslabones.

Al movimiento permitido entre los eslabones se le llama *grado de libertad*, para el caso de los robots industriales cada eslabón-articulación posee un grado de libertad dado que en cada uno se incluye un actuador (motor) que genera el movimiento.

Los tipos de articulaciones que tienen son *prismáticos* (permite que dos eslabones se deslicen uno respecto al otro a lo largo de su eje) y *rotacionales* (permite que dos eslabones giren uno respecto al otro alrededor de un eje). Dado el tipo de articulaciones se genera un *espacio de trabajo* (volumen hasta dónde llega el efector final), el cual forma una *configuración cinemática general* (prisma rectangular, cilindro rectangular, esfera, etc.).

En **Cinemática de Máquinas** encontramos cinco temas con contenido trigonométrico que se articulan en el problema de *posición de mecanismos* (figura 10, cuadro 7). A diferencia de las asignaturas de Ciencias Básicas los triángulos se identifican y trazan con referencia al *movimiento circular* a partir de elaborar un *modelo a escala* del problema.

Figura 10. Análisis gráfico y trigonométrico de posición de un mecanismo de cuatro barras



Fuente: Adaptado de (Norton, 2009: 38, 162).

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Cuadro 7. Análisis gráfico y trigonométrico de posición de mecanismos

<table>
<tr><th colspan="6">Construcción de significado relativo a lo trigonométrico en la Ingeniería</th></tr>
<tr><th>Elemento</th><th colspan="5">Acciones (¿qué hace?, ¿cómo lo hace?)</th></tr>
<tr><td>Medición y proporcionalidad</td><td colspan="5">Utiliza regla, transportador y compás para elaborar el diagrama a una escala conveniente, en el cual especifica longitudes, ángulos y curvas (circunferencias y arcos); en la proporcionalidad considera que las longitudes y curvas cambian por el factor de escala pero los ángulos son iguales; y que los eslabones son cuerpos rígidos de longitud fija.</td></tr>
<tr><td>Procesos de construcción de referentes visuales</td><td colspan="5">Construye un diagrama cinemático (modelo a escala) a partir de una ilustración del objeto (mecanismo); hace relaciones para estudiar el movimiento complejo (traslación y rotación) con el análisis gráfico.</td></tr>
<tr><td>Modelación para el paso de lo macro a lo micro</td><td colspan="5">Con el diagrama cinemático modela el movimiento complejo (circular) que hace el mecanismo (eslabones 3 y 4) por efecto del ángulo de entrada (eslabón 2); la bancada (eslabón 1) está fija pero tiene dos articulaciones rotacionales que permiten que los eslabones adyacentes (2 y 4) giren.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Razonamientos</td></tr>
<tr><td>Empírico/Métrico</td><td>XX</td><td>Espacial</td><td>X</td><td>Geométrico</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>X</td><td>Aritmético</td><td></td><td>Algebraico</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Covariacional</td><td>X</td><td>Cuantitativo</td><td>X</td><td>Analítico</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="6">Usos del ángulo</td></tr>
<tr><td>Cualidad</td><td>X</td><td>Relación</td><td>X</td><td>Cantidad</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carácter:</td><td>Estático</td><td>X</td><td>Dinámico</td><td>X</td></tr>
<tr><td colspan="6">Análisis de la actividad matemática: Se fomenta la articulación de nueve razonamientos. Con los primeros cinco hace el análisis gráfico del caso particular: (1) empírico, mide distancias y ángulos; (2) espacial, señala con flechas el movimiento que efectúa el mecanismo; (3) geométrico, elabora el diagrama cinemático a escala; (4) gráfico, asocia el plano cartesiano como referente para estudiar los componentes del diagrama; y (5) métrico, señala la convención positiva del ángulo en sentido antihorario.
A partir del diagrama cinemático, hace el análisis trigonométrico mediante las razones trigonométricas que le permiten calcular las componentes rectangulares de los vectores de posición y con las razones recíprocas calcula el valor de los ángulos; esto corresponde al razonamiento: (6) algebraico, desarrolla ecuaciones vectoriales y opera cantidades.
Finalmente, con los razonamientos: (7) covariacional, relaciona ángulo-distancia del vector de posición; (8) cuantitativo, reflexiona que los valores faltantes de las distancias y ángulos que calculó sean congruentes geométricamente con el mecanismo; y (9) analítico, valida los resultados obtenidos del análisis trigonométrico con el gráfico.
Se dan los tres usos del ángulo: como cualidad, cuando señalaron una curva que indica la convención positiva del ángulo (giro antihorario); relación (visualiza el ángulo de interés con relación al eje o) y cantidad (variable).
También se resalta su carácter estático dentro del dinámico porque se estudia un caso, pero se sabe que está en movimiento.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Uso (implícito) de las razones seno y coseno del ángulo: aritmético.
Uso de la relación ángulo-distancia: geométrico (modelo a escala da la solución).
Uso de las razones seno y coseno, y de la tangente inversa del ángulo: algebraico.
Actividades (¿para qué hace?): identifica y traza triángulos rectángulos, y alude y/o hace movimientos circulares para calcular con exactitud los valores faltantes de traslación y rotación que hace un mecanismo articulado por efectos del movimiento.</td></tr>
</table>

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

5.3.3. Ingeniería Aplicada

En **Robótica Industrial** estudiamos el *problema cinemático directo de posición* del cual identificamos que al ser un análisis cinemático, se considera el movimiento relativo entre los elementos (eslabón-articulación) del robot omitiendo las causas que lo producen (fuerzas o momentos) y su masa, por ello los elementos se consideran cuerpos rígidos.

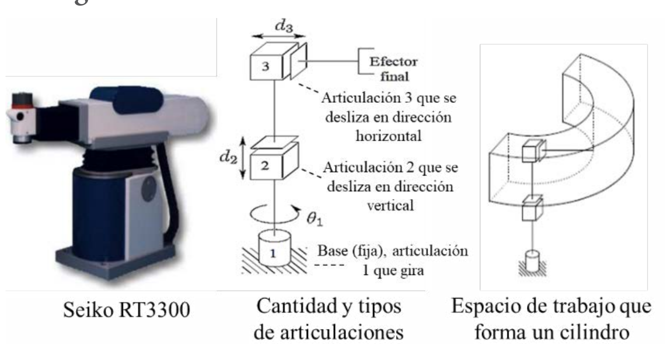
También identificamos que el problema se resuelve con el *algoritmo Denavit-Hartenberg*, convención para describir y representar la geometría espacial del robot con respecto a un sistema de referencia fijo. En conjunto con la *regla de la mano derecha*, convención para representar la dirección y sentido de un vector, donde los dedos pulgar, índice y medio forman tres ejes mutuamente ortogonales.

El algoritmo Denavit-Hartenberg reduce el problema a encontrar una matriz de 4×4 que representa la *ubicación del efector final en relación con su base*. La *matriz* de *transformación lineal homogénea* se forma por las matrices de cada elemento - la relación entre dos eslabones adyacentes - del robot, en la cual se calculan cuatro parámetros. Respecto a un elemento, el ángulo θ_i de la articulación y la longitud del eslabón a_i, y cuando un elemento se conecta a otro, el ángulo α_i de torsión de la unión y la distancia d_i del eslabón respecto a la unión de las articulaciones.

Tomamos como ejemplo el robot Seiko RT3300, el cual lo organizamos en cuatro fases por la diversidad de tareas que se presentan. Aunque en las tres primeras fases no se dan usos de las nociones trigonométricas, se manifiestan acciones y actividades que contextualizan el problema de la Robótica al escenario de la Física para posteriormente, en la fase cuatro, matematizarlo. En particular, mediante la elaboración de tres diagramas cinemáticos se construyen *referentes visuales* para *modelar* el problema en el espacio, sólo no se presenta la medición, porque todos los datos son dados; y al igual que en Estática y Dinámica, y Cinemática de Máquinas, se estudia el *movimiento circular*, pero sin el triángulo rectángulo.

En la **primera fase** (figura 11) se articulan dos razonamientos: (1) *geométrico*, cuando identifica la cantidad y tipo de articulaciones, y las representa con cilindros (rotativas) y prismas rectangulares (deslizantes), y cuando identifica que el volumen de trabajo forma un cilindro rectangular; y (2) *espacial*, cuando señala el movimiento de giro del ángulo.

Figura 11. Primera fase del análisis cinemático



Fuente: Adaptado de (Spong *et al*., 2004: 21, 22, 76)

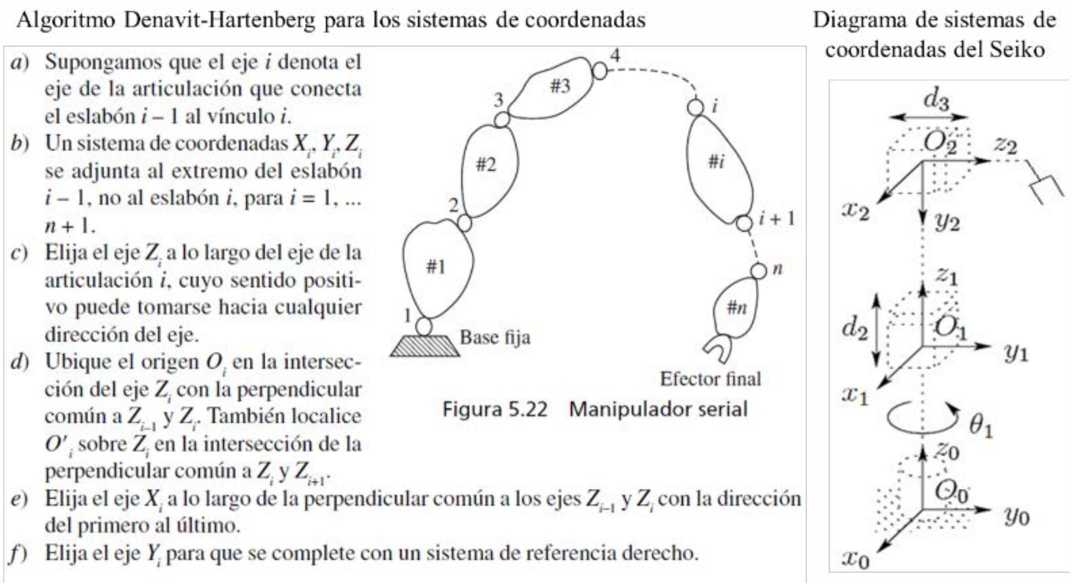
Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

En la **segunda fase** (figura 12) se articulan dos razonamientos: (1) *espacial*, cuando visualiza ejes de un elemento respecto al adyacente; y (2) *gráfico*, cuando asigna un sistema de coordenadas a cada elemento siguiendo sistemáticamente el algoritmo y la regla de la mano derecha; lo relevante es que el sistema cartesiano no está dado *a priori* como en las asignaturas de las Ciencias Básicas, sino que se asigna de acuerdo con el robot.

En el *diagrama de sistemas de coordenadas* representa a los eslabones mediante vectores (unitarios y ortogonales) y adjunta a cada uno un sistema de coordenadas haciendo relaciones de perpendicularidad y paralelismo; este diagrama es una *configuración cinemática particular* ya que los elementos toman diferentes valores a medida que el robot se mueve.

El diagrama propuesto tiene todos los ejes de articulación paralelos, por lo que los ángulos de torsión y las longitudes de los eslabones se consideran cero, excepto en el eslabón 2, donde α_2=-90° para mantener a Z positivo en todos los desplazamientos.

Figura 12. Segunda fase del análisis cinemático

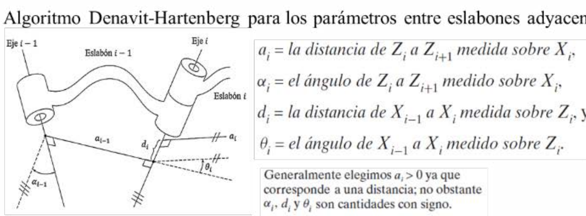


Fuente: Adaptado de (Saha, 2010: 100; Spong *et al*., 2004: 73)

En la **tercera fase** (figura 13) se articulan cuatro razonamientos: (1) espacial, cuando identifica para cada elemento y su adyacente, ejes, ángulos y distancias; (2) métrico, al establecer longitudes mediante la relación eje-eje; (3) *covariacional*, cuando estudia la relación ángulo-distancia de los elementos; y (4) *cuantitativo*, al calcular la cantidad fija o variable del parámetro a partir de las relaciones que hizo, donde identifica que las *variables* son la articulación rotativa θ_1 y las articulaciones prismáticas d_2 y d_3, las cuales están acotadas por las limitaciones físicas del robot. El uso del ángulo se da como *relación* (eje *x, y* o *z*) y *cantidad* (variable), ambos en su carácter *estático* y *dinámico*; estático por el estudio de cada caso, cuando el ángulo es una *inclinación* respecto al elemento adyacente y dinámico porque cambia con el movimiento del robot.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

Figura 13. Tercera fase del análisis cinemático



Parámetros de la cinemática del problema

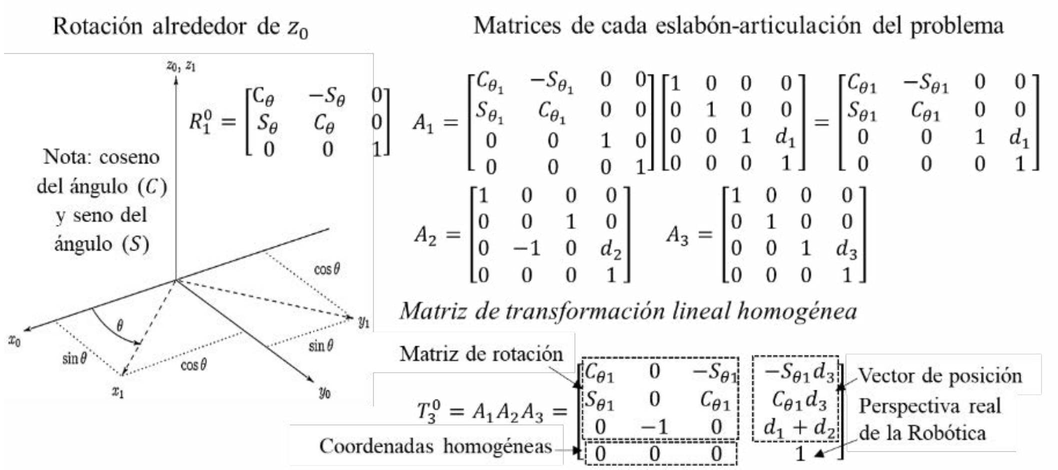
Articulación	Ángulo de torsión del eslabón (α_i,°)	Longitud del eslabón (a_i)	Ángulo de articulación (θ_i,°)	Desplazamiento del eslabón (d_i)
1	0	0	θ_1*	d_1
2	−90	0	0	d_2*
3	0	0	0	d_3*

Nota: * significa que es variable de acuerdo con la asignación del sistema coordenado.

Fuente: Imagen y algoritmo de (Craig, 2006: 68-69)

En la **cuarta fase** (figura 14), con el razonamiento *algebraico*, desarrolla las matrices de elementos retomando los parámetros del algoritmo (fase 3) y con estas matrices calcula la matriz de transformación total efectuando las operaciones correspondientes. El uso del ángulo se da como *relación* y *cantidad* (variable), ambos en el carácter *estático* y *dinámico*. Con el estudio de cada caso, el carácter estático permite considerar al ángulo como un *alcance* en la transformación total de la base respecto al efector final y con el dinámico que puede ser variable por el movimiento del robot.

Figura 14. Cuarta fase del análisis cinemático



Fuente: Representación gráfica adaptada de (Spong *et al.*, 2004: 39)

Finalmente, al analizar las cuatro fases del problema identificamos que:

- En la primera fase se manifiesta la construcción de referentes visuales y la modelación cuando elabora *diagramas cinemáticos* (bosquejos) a partir de una ilustración del robot y con ellos *modela* su movimiento, para realizar la ***actividad*** de identificar la cantidad y tipos de articulaciones, y visualizar el espacio de trabajo.
- En la segunda fase, mediante la elaboración del diagrama se construyen *referentes visuales* para estudiar el problema y se *modela* la dirección y sentido de los elementos con respecto al elemento adyacente, para realizar la ***actividad*** de establecer una configuración cinemática particular del robot.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

- En la tercera fase se retoma el diagrama de la fase 2 y se identifica con el algoritmo que la articulación rotacional situada en la base genera un ángulo θ_1, las dos articulaciones restantes por ser prismáticas no generan ángulo y las tres articulaciones permitirán el desplazamiento de sus eslabones, y sólo en la primera el desplazamiento será fijo dado que existe una distancia d_1 entre x_0 y x_1 medida en z_0. Por lo que realiza la ***actividad*** de identificar el valor de los cuatro parámetros (dos ángulos y dos distancias) de la cinemática del problema y los organiza en una tabla.
- En la cuarta fase se retoman los parámetros establecidos en la fase 3 para desarrollar las matrices de elementos y calcular la matriz de transformación total, con la cual se valida mediante los diagramas de las fases previas que el vector de posición sea *mecánicamente congruente* con los movimientos del robot dado que éste a diferencia de la matriz de rotación, es una cantidad vectorial y se rige por los axiomas del Álgebra Lineal.

Por lo tanto, en el problema cinemático directo de posición se da un ***uso (implícito) aritmético*** de las razones seno y coseno del ángulo, y un ***uso algebraico*** de la matriz de rotación del eje z , para realizar la ***actividad*** de calcular la localización del efector final con respecto a la base del robot por efectos del movimiento resultante.

6. Análisis y discusión

Con el análisis documental evidenciamos que en lo relacionado al problema cinemático directo de robots se da una articulación curricular de la Trigonometría en la Ingeniería Mecatrónica. En primer lugar, la Trigonometría se enseña en las Ciencias Básicas iniciando en Fundamentos de Matemáticas y continuando con el resto de las asignaturas de Matemática y Física, de donde identificamos y caracterizamos dos usos transversales que también permanecen en las Ciencias de la Ingeniería y en la Ingeniería Aplicada: *uso aritmético y algebraico*, en el primero las razones trigonométricas son una herramienta de división de longitudes (catetos y/o hipotenusa) y en el segundo uso desarrolla y/o emplea ecuaciones con cantidades variables y fijas; en estos usos la noción trigonométrica en juego permite calcular con exactitud un valor faltante único.

Si bien se da una articulación de los usos aritmético y algebraico de las nociones trigonométricas, dicha articulación resulta frágil para responder al problema de la Robótica que se requiere desde la Física y más aún para las Ciencias de la Ingeniería y la Ingeniería Aplicada. Identificamos una articulación frágil porque en Fundamentos de Matemáticas, que es donde se enseña la razón trigonométrica y ésta es la base para el resto de las nociones trigonométricas, se aprende sin estudiar (medir, hacer relaciones, etc.) y/o construir el ***referente visual***, el cual es un requisito indispensable para el resto de las asignaturas, pues permite entender el problema, desarrollar las ecuaciones y/o validar la solución, e incluso en ocasiones provee la solución, como fue en Cinemática de Máquinas.

Carecer de referentes visuales robustos que necesita la Ingeniería genera una *desarticulación de usos* crucial para el problema de la Robótica y para los problemas previos, ya que empobrece el contexto de

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

significación de las nociones trigonométricas al limitar su estudio al triángulo rectángulo, dado *a priori* con todos los datos para resolver la tarea.

Del **análisis descriptivo** reconocimos variables sociales importantes para nuestro estudio. Por un lado, en el ***contexto cultural*** de la automatización industrial de las máquinas, se estableció a la Ingeniería Mecatrónica como una rama de la Ingeniería que se encarga de la síntesis del funcionamiento del cuerpo humano a través del diseño y análisis de robots, mediante mecanismos, sensores, actuadores y computadoras; actualmente primordiales porque existen trabajos peligrosos para el ser humano y por la necesidad de procesos industriales eficientes. En la delimitación de nuestro objeto de estudio, dos aspectos fueron fundamentales en este contexto cultural: *el movimiento circular*, que se genera gracias a una articulación rotacional, y *el desplazamiento* por una articulación prismática; en particular, el movimiento circular se vincula con el contexto de significación de la Trigonometría.

Por otro lado, el ***contexto situacional*** identificado en la organización curricular del programa educativo, nos permitió identificar de manera general cómo se estructura (perfil de egreso, cantidad de semestres y de asignaturas) y de manera particular el contenido trigonométrico (asignaturas, temas, problemas y ejercicios) asociado al problema cinemático directo. Aunque es obvia la separación temporal entre el trabajo con Trigonometría en las Ciencias Básicas y su "aplicación" en las Ciencias de la Ingeniería o en la Ingeniería Aplicada, esto no basta para explicar los fenómenos que manifiestan los estudiantes de no reconocerla o no recordar las fórmulas.

También se reconoció que, conforme se avanza en la trayectoria escolar, la Trigonometría requiere articularse con otros saberes, entre ellos otros saberes matemáticos. Si bien esta articulación intramatemática pudiera ser una estrategia natural en un escenario donde la matemática está al servicio de la Ingeniería; el discurso escolar de las Ciencias Básicas para trabajar con la Trigonometría reproduce la estructura del discurso de los niveles previos (secundaria y medio-superior) en cuanto a *qué enseña* y *cómo lo enseña*, con excepción de que enfatiza en la necesidad de cálculos con exactitud (manejando radicales).

En general, el análisis descriptivo nos permitió reconocer, en un escenario técnico (profesional), a la Ingeniería Mecatrónica como ***Práctica de Referencia***, en tanto otorga identidad al grupo humano y regula su quehacer, en particular lo reconocemos en su actuar en la Robótica por ser parte de nuestro objeto de estudio.

Del **análisis cualitativo** de cada problema identificamos y caracterizamos los usos de las nociones trigonométricas a partir de la actividad matemática reconstruida y la función que cumple (el *para qué sirve*). Posteriormente, con un análisis transversal de esto, fue natural evidenciar la (des)articulación de usos del conocimiento trigonométrico entre los bloques de la organización curricular (figura 3), y se pudieron documentar elementos de significación relevantes para la construcción de conocimiento trigonométrico.

En el bloque de las **Ciencias Básicas**, las asignaturas de Matemáticas proporcionan todos los datos para resolver el ejercicio o problema y por ello resultan innecesarios la medición, la construcción de referentes visuales y la modelación, o bien, se dan escasamente; esto hace que predomine el *uso aritmético* (en Fundamentos de Matemáticas) o el *uso algebraico* (en Álgebra Lineal) de las nociones trigonométricas para calcular con exactitud el valor faltante de distancias o cantidades simbólicas en triángulos. En cambio, en las asignaturas de Física (Mecánica General, y Estática y Dinámica), aunque se proporcionan todos los datos del problema, se admiten procesos de construcción de referentes visuales y de modelación porque es necesario identificar al triángulo rectángulo a partir del problema, (re)construirlo en

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

un diagrama y a partir de él desarrollar ecuaciones de las componentes rectangulares (razones de seno y coseno del ángulo) para calcular con exactitud el valor faltante de fuerzas o posiciones de vectores unitarios; por lo que también se da un *uso aritmético* de las razones trigonométricas pero se le añade la ***construcción de referentes visuales*** contextualizados al escenario de la Física (Estática y Cinemática).

En las Ciencias Básicas la **desarticulación de usos** se da porque:

- En Matemáticas se da el triángulo sólo como representación, pero en Física se (re) construye, matematiza el problema y se validan los resultados a partir de él.
- Sólo en Física se estudian problemas con *movimiento circular*.
- En Matemáticas la *relación* del ángulo es *respecto a un eje horizontal* (eje *x*), lo que admite una forma única de definirse y acotarse, mientras que en Física la relación depende de la referencia que se tome, pudiendo ser *respecto al eje x o y* o .
- En Matemáticas y Física se da por separado el carácter estático y dinámico del ángulo.

En el bloque de las **Ciencias de la Ingeniería** (Cinemática de Máquinas) se modeló el problema de un mecanismo mediante la construcción de un diagrama (modelo a escala), el cual implicó que se midiera y se generara un referente contextualizado al escenario de la Física (Cinemática); esto permitió el *uso geométrico* de la relación ángulo-distancia, el *uso aritmético* y *algebraico* de las razones de seno y coseno del ángulo, y el *uso algebraico* de la razón tangente inversa del ángulo, y de esta manera se calcularon con exactitud los valores faltantes de traslación y rotación. Por lo que se identificó una **articulación de usos** porque:

- Como en Fundamentos de Matemáticas y Física, fue necesario hacer división de longitudes (cateto e hipotenusa) para calcular las componentes rectangulares del vector.
- Como en las asignaturas de Física, fue necesario identificar y trazar el triángulo rectángulo, y estudiar el movimiento circular que efectúa el objeto (mecanismo).
- Al igual que en Física, la construcción del diagrama permitió matematizar el problema y validar los resultados matemáticos; al que se añade la necesidad de medir y construir un modelo a escala.
- Como en Física, el uso del ángulo como *relación* puede ser respecto al eje *x* o *y*.
- Las Ciencias Básicas usan el ángulo en su carácter estático o dinámico, gracias al movimiento circular del problema se articularon *simultáneamente*, lo cual permitió su uso como *cantidad*; cantidad *fija* dado el estudio del caso particular pero con la consideración de ser *variable*.

En el bloque de la **Ingeniería Aplicada** (Robótica Industrial) se modeló el problema de un robot mediante la construcción de tres diagramas (bosquejos) con el algoritmo Denavit-Hartenberg y la regla de la mano derecha, con los cuales se matematizó el problema y se validó el resultado; esto permitió además de un *uso aritmético* de las razones seno y coseno del ángulo, un *uso algebraico* de la matriz de rotación del eje para calcular la localización (posición y orientación) del efector final respecto a la base por efectos del movimiento resultante. Por lo que se identificó una **articulación de usos** porque:

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669.

- Desde Fundamentos de Matemáticas (tema 2) y continuando con Física y Cinemática de Máquinas se estipula el uso del ángulo como *cualidad* al establecer como convención el *sentido del ángulo* (positivo-antihorario y negativo-horario).
- En Física y Cinemática de Máquinas se da el uso del ángulo como *relación* que puede ser respecto al eje *x* o *y*, al que se añade el eje *z* en Robótica Industrial..
- Como en las asignaturas de Física y Cinemática de Máquinas se estudió el movimiento circular que efectúa un objeto (eslabón-articulación).
- Al igual que en Física y Cinemática de Máquinas, la construcción de los diagramas (bosquejos) permitió matematizar el problema y validar los resultados matemáticos.
- Tal como en Fundamentos de Matemáticas, fue necesario hacer división de longitudes (cateto e hipotenusa) para formar la matriz de rotación del eje *z* (figura 14).
- Como en Álgebra Lineal, el desarrollo de las matrices se enfocó en la *operación de cantidades* variables de tipo simbólicas.
- Así como en Cinemática de Máquinas se da el uso del ángulo como cantidad (fija y variable), y se articula el carácter estático y dinámico gracias al movimiento circular.

Respecto a la actividad matemática reconstruida, reconocemos que en Cinemática de Máquinas y en Robótica Industrial se da el **trabajo geométrico/gráfico** como ***práctica socialmente compartida***, que caracterizamos como la forma de generar y estudiar el diagrama. Con la diferencia de que en la primera asignatura el modelo a escala permite calcular la solución al problema y en la segunda asignatura los modelos son bosquejos que aunque no dan la solución, con ellos se analiza el problema, se desarrollan las ecuaciones y se valida el resultado.

Finalmente, dado lo expuesto en este apartado, reconocemos a los *referentes visuales* (triángulo, círculo, movimiento circular y desplazamiento) como el ***contexto de significación*** para la construcción de las nociones trigonométricas porque con ellos se modeló el problema, dando el paso de lo macro (objeto real) a lo micro (modelo: diagrama) y se articularon más usos.

Construir el referente visual implica que se genere y estudie un modelo (bosquejo o a escala). Primero contextualizado a la Física (Estática o Cinemática) y luego con él se hagan relaciones entre cateto-cateto y/o ángulo-distancia para matematizar el problema y validar el resultado matemático calculado.

En particular, el movimiento circular de un objeto (junta a aflojar, eslabón de un mecanismo o elemento del robot) se dio para estudiar por *casos particulares* el *giro del ángulo* con respecto a una *referencia* (cateto, distancia, longitud, ejes) con o sin utilizar el sistema cartesiano. Reconocemos que el movimiento circular fue el que permitió el estudio *covariacional* de la relación trigonométrica ángulo-referencia y el reconocimiento de su naturaleza trascendente; y tratar al ángulo más allá de un referente.

Finalmente se identificó **desarticulación curricular** de las nociones trigonométricas entre Robótica Industrial y las Ciencias Básicas porque:

- La *regla de la mano derecha* es un concepto crucial, el cual omiten los programas de las Ciencias Básicas aunque sus libros (Física y Álgebra Lineal) lo indican.
- Se reconoce el manejo de la *matriz de rotación* que está ausente en Álgebra Lineal, aunque se dan temas asociados a su concepto.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669. DOI: http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Conclusiones

A lo largo de los ejercicios y problemas de todas las asignaturas prevaleció el *uso aritmético* de las nociones trigonométricas, porque invariablemente se necesitaba hacer división de longitudes para: establecer fórmulas o algoritmos, emplear otros razonamientos y/o resolver el problema. El uso aritmético es fundamental, pero se necesita acompañar de un *referente visual* que permita configurar un contexto situacional (problema) donde se articulen más usos, y de esta manera el estudiante reconozca y emplee nociones trigonométricas sin importar el problema que resuelva.

A medida que se transitó entre las asignaturas de las Ciencias Básicas, a las asignaturas de Ciencias de la Ingeniería y a la Ingeniería Aplicada, también se identificó que se articularon mayor cantidad de *razonamientos*, una explicación es el aumento de la complejidad de los problemas, pero desde la documentación reconocemos que es la necesidad de *construir referentes visuales* con mayor especificidad, donde predominó el razonamiento espacial al que posteriormente se añadieron los razonamientos gráficos y geométricos.

Se empleó el *razonamiento espacial-gráfico* cuando la tarea requirió identificar datos del problema y con ellos (re)construir un diagrama asociando el sistema cartesiano (plano o espacio) como referencia, mientras que el *razonamiento espacial-geométrico* se utilizó cuando la tarea requirió identificar datos del problema y con ellos estudiar o (re)construir un diagrama donde se hicieron relaciones geométricas, por ejemplo, suma de ángulos internos de un triángulo, relaciones de perpendicularidad y paralelismo entre segmentos de rectas.

Por lo tanto, establecemos como *hipótesis* para el trabajo de campo que: a través del razonamiento espacial al estudiar el movimiento circular, los estudiantes de Ingeniería Mecatrónica reconocen la naturaleza de la noción trigonométrica ángulo-distancia, y ello constituye un escenario donde es posible confrontar el significado lineal.

Durante el trabajo de campo, pondremos atención en el razonamiento espacial que manifiesten los estudiantes al utilizar el algoritmo Denavit-Hartenberg y la regla de la mano derecha para resolver el problema cinemático directo; de donde podremos identificar los mecanismos de validación del conocimiento matemático asociados a su *relativismo epistemológico* que no se logra con la documentación.

La documentación que mostramos enfatiza en la necesidad de comprender preliminarmente el quehacer de un grupo humano antes de realizar el trabajo de campo, con la finalidad de interpretar y explicar de manera robusta el objeto de estudio triangulando los acercamientos documental e *in situ*. Ejemplificamos cómo, desde una rama particular de las Ciencias Sociales, la Matemática Educativa, utilizamos la técnica de *observación no participante* del método etnográfico para realizar un primer acercamiento al estudio de la construcción social del conocimiento trigonométrico de la Ingeniería Mecatrónica. Planteamos que la *Documentación del escenario* resulta un acercamiento crucial en cualquier proyecto de investigación de las Ciencias Sociales y de otras Ciencias.

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669. DOI: http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Referencias

Cabañas, Guadalupe. 2011. *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, Ricardo. 2013. *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

---------- y Rosa Farfán. 2003. Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3): 255–270. https://doi.org/10.1023/A:1026008829822

----------, Rosa Farfán, Javier Lezama, Gustavo Martínez-Sierra. 2006. Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial: 83-102.

----------, Gisela Montiel y Daniela Reyes-Gasperini. 2015. Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8: 9-28. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123

----------, Daniela Reyes-Gasperini y Gisela Montiel. 2014. Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3): 91-116.

Craig, John. 2006. *Robótica.* México: Pearson.

Geertz, Clifford. 2006. *La interpretación de las culturas*. España: Gedisa.

Hammersley, Martyn y Paul Atkinson. 1994. *Etnografía. Métodos de Investigación*. Barcelona: Paidós.

Herrera, Rodolfo. 1990. Crítica al modelo ortodoxo de la enseñanza de la ingeniería e ideas para su modificación. *Tecnología en marcha*, 10(1): 3-16.

Hinojos, Jesús y Rosa Farfán. 2017. Acerca de las nociones de estabilidad en electricidad, la relación entre el calor y la electricidad. *Revista de História da Educação Matemática*, 3(3): 68-100.

Instituto Tecnológico de Sonora. 2014. *Programa de curso de Robótica Industrial c/Lab.* México: ITSON.

Instituto Tecnológico de Sonora. 2019. Ingeniería Mecatrónica. https://www.itson.mx/oferta/imt/Paginas/imt.aspx (13 de mayo, 2019)

Jácome, Gonzalo. 2011. *Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor*. Tesis de maestría, México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Langereis, Geert, Jun Hu y Loe Feijs. 2013. How to Introduce Matematical Modelling in Industrial Design Education? En *Teaching Matematical Modelling: Connceting to Research and Practice*, editado por Gloria Stillman, Gabriele Kaiser, Werner Blum, Jill Brown. Países Bajos: Springer, 551-561. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_47

Mendoza-Higuera, Johanna y Francisco Cordero. 2018. La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 11(1): 36-61.

----------, Cordero, Francisco, Miguel Solís y Karla Gómez. 2018. El Uso del Conocimiento Matemático en las comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad Matemática. *Bolema*, 32(62): 1219-1243. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a23

Revista de Ciencias Sociales y Humanidades. ISSN-P: 0188-9834 ISSN-E:2395-8669. DOI: http://dx.doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Montiel, Gisela. 2011. *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

---------- y Gonzalo Jácome. 2014. Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50): 1193-1216. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Moore, Kevin. 2014. Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1): 102-138. DOI: 10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Morimoto, Teodoro. 2009. *Fundamentos de Matemáticas*. México: Instituto Tecnológico de Sonora.

Newcombe, Nora y Thomas Shipley. 2015. Thinking about spatial thinking: New typology, new assessments. En *Studying visual and spatial reasoning for design creativity*, editado por John Gero. Dordrecht: Springer, 179–192. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9297-4_10

Norton, Robert. 2009. *Diseño de maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos.* México: McGraw-Hill.

Reyes-Cortés, Fernando. 2011. *Robótica. Control de robots manipuladores*. México: Alfaomega.

Rodríguez-Gómez, David y Jordi Vallldeoriola. 2012. *Metodología de la investigación.* España: Universitat Oberta de Cataluña.

Rotaeche, Rosa. 2012. *Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico*. Memoria predoctoral, México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

---------- y Gisela Montiel. 2017. Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática*, 29(1): 171-199. DOI: 10.24844/EM2901.07

Saha, Subir. 2010. *Introducción a la robótica*. México: Mc Graw Hill.

Scholz, Olivia. 2014. *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo*. Tesis de maestría, México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México. doi: 10.13140/RG.2.2.34414.10568

Sierpinska, Anna. 2000. On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En *On the Teaching of Linear Algebra*, editado por Jean-Luc Dorier. Springer: Dordrecht, 209-246. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Soto, Daniela y Ricardo Cantoral. 2014. Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50): 1525-1544. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25

Spong, Mark, Seth Hutchinson y M Vidyasagar. 2004. *Robot dynamics and control*. Singapore: John Wiley & Sons.

Torres-Corrales, Diana. 2014. *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería*. Tesis de maestría, México: Instituto Tecnológico de Sonora. doi: 10.13140/RG.2.1.2993.5603/1

Tuyub, Isabel y Gabriela Buendía. 2017. Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en ingeniería. *Revista de Investigación Educativa de la Rediech,* 8(15): 11-28.

Vohns, Andreas. 2006. Reconstructing basic ideas in geometry—an empirical approach. *ZDM*, 38(6): 498-504. https://doi.org/10.1007/BF02652787

Young, Hugh y Roger Freedman. 2009. *Física universitaria*. México: Pearson Educación.