investigación económica, vol. LXVII, 265, julio-septiembre de 2008, pp. 61-84

Decisiones de producción de las empresas en condiciones de incertidumbre de precios

ABIGAIL RODRÍGUEZ NAVA
FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ*

INTRODUCCIÓN

En esta investigación, en el marco de la teoría neoclásica, desarrollamos tres modelos con enfoques distintos que comparten el propósito de explicar las decisiones de producción de una empresa competitiva en condiciones de incertidumbre en los precios de los insumos y bienes finales. En los modelos propuestos la racionalidad de empresa se determina a partir de: 1) la maximización de la utilidad esperada, 2) la maximización de los beneficios esperados y 3) la maximización de ganancias con presencia de títulos financieros y mercados contingentes.

Las tres vertientes anteriores buscan precisar cuáles son los criterios que una empresa considera para elegir la cantidad de producción y las cantidades de insumos que demanda cuando el único elemento que se excluye del marco plenamente competitivo es la información perfecta. En

Manuscrito recibido en enero de 2008; aceptado en mayo de 2008.
* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, <abigail.rn@prodigy.net.mx>, y Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional, <fvenegas@ipn.mx>, respectivamente. Los autores agradecen los valiosos comentarios de dos dictaminadores anónimos de la revista.

los escenarios que se exploran, la información es simétrica pero incompleta; existe incertidumbre porque no se conocen con certeza los precios de insumos y bienes finales. En los modelos que se desarrollan a continuación sólo se considera la decisión de producción; no contemplamos otras elecciones de la empresa como la inversión o el financiamiento. La presente investigación se concentra en la comparación de los tres enfoques anteriores destacando sus ventajas y limitaciones en los resultados que proporcionan.

El presente documento está organizado de la siguiente manera: en la siguiente sección se presenta la primera propuesta de formalización basada en la teoría de la utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern (1944); en la sección tres se desarrolla un modelo con base en la maximización de los beneficios cuando existe incertidumbre en los precios; en la cuarta sección se introducen títulos financieros como elemento necesario para la decisión del productor; por último presentamos las conclusiones de la investigación.

LA UTILIDAD ESPERADA RESPECTO A LOS BENEFICIOS

La primera formalización conocida, y la más utilizada para representar el comportamiento de una empresa competitiva en condiciones de incertidumbre de precios, se basa en la teoría de la utilidad esperada. Se trata de un marco analítico, desarrollado en primera instancia para representar el comportamiento del consumidor, en el que los agentes eligen entre alternativas riesgosas (loterías). Cada una de éstas, proporciona un conjunto de resultados posibles a los que se les asocia una distribución de probabilidad objetiva y conocida. Con el propósito de trasladar la noción de utilidad esperada a las decisiones de la empresa, revisamos rápidamente algunos conceptos básicos.

Definición 1. Una lotería simple, L, es un vector de probabilidades $L=(p_1, \ldots, p_N)$, donde $p_n \geq 0$ para toda n, y $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$.

En una lotería cada p_n se interpreta como la probabilidad de que el n-ésimo resultado ocurra, $1 \leq n \leq N$. Así, cada resultado posible proviene de una variable aleatoria de la que se conoce su distribución de probabilidades. En este escenario, cada uno de los n posibles resultados puede interpretarse como la realización de diferentes condiciones de la naturaleza en un instante de tiempo, o bien como la realización de condiciones del mundo similares en distintos instantes del tiempo. Por tanto, la teoría de la utilidad esperada no implica necesariamente la elección intertemporal.

Definición 2. Una función de utilidad esperada del tipo Von Neumann-Morgenstern $U: \mathcal{L} \rightarrow R$ es la asignación de números $(u_1,\ldots, u_N)$ a los N resultados posibles, tales que para cada lotería simple $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$, se tiene: $U(L) = u_1p_1 + \ldots + u_Np_N$. Así, la utilidad esperada de una lotería es el valor esperado de las utilidades de los N resultados posibles.

La utilidad esperada permite jerarquizar las preferencias de los agentes no sólo en términos ordinales, sino también en términos cardinales; esto es así porque la incorporación de probabilidades de los sucesos permite al individuo decidir qué tan preferible es un resultado a otro. Una conclusión importante en la teoría de utilidad esperada es el siguiente resultado:

Teorema de la utilidad esperada: si una relación racional de preferencias, $\succeq$, definida sobre el espacio de lotería $\mathcal{L}$, satisface los axiomas de continuidad e independencia, entonces la relación de preferencias admite una representación en términos de la utilidad esperada, es decir, dadas dos loterías $L = (p_1, \ldots, p_N)$ y $L' = (p'_1, \ldots, p'_N)$, entonces $L \succeq L'$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n$.

En este contexto, la decisión de la empresa consiste en elegir el nivel de producción con el que se espera obtener la máxima utilidad de los beneficios; los beneficios resultantes son inciertos, porque dependen de los valores que puedan tomar las variables aleatorias asociadas a los precios de los bienes terminados, o a los precios de los insumos.

Criterio de elección del nivel de producción

La propuesta básica para modelar la decisión de las empresas se debe a Sandmo (1971) quien supone que la actividad de la empresa puede representarse por las siguientes funciones:

$$F(x) = C(x) + B \tag{1}$$

$$\Pi(x) = Px - C(x) - B \tag{2}$$

En la ecuación [1] se expresa que la función de producción del bien x, $F(x)$, depende de los costos variables $C(x)$ y de los costos fijos B. En la ecuación [2] se definen los beneficios como la diferencia entre los ingresos obtenidos por la venta del producto, Px, y los costos de producción. Sandmo supone que los precios, P, de las unidades producidas son una variable aleatoria con función de densidad $f(P)$ y valor medio esperado $\mathrm{E}[P] = \mu$. No existe incertidumbre asociada a los precios de los insumos. En este caso, la utilidad esperada de las ganancias (función tipo Von Neumann-Morgenstern) es:

$$E\big[U\big(Px - C(x) - B\big)\big] \tag{3}$$

La función de utilidad de la empresa $U(\Pi)$ es cóncava, continua y diferenciable (específicamente, la utilidad marginal de las ganancias es positiva, pero decreciente). La concavidad de la función de utilidad expresa que la empresa muestra aversión al riesgo.

De la ecuación [3] se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para un máximo:

$$E\big[U'(\Pi)\big(P - C'(x)\big)\big] = 0 \tag{4}$$

$$E\Big[U''(\Pi)\big(P - C'(x)\big)^2 - U'(\Pi)C''(x)\Big] < 0 \tag{5}$$

La condición [4] puede reescribirse como:

$$E\big[U'(\Pi)P\big] = E\big[U'(\Pi)C'(x)\big]$$

o bien:

$$E\big[U'(\Pi)(P - \mu)\big] = E\big[U'(\Pi)(C'(x) - \mu)\big] \tag{6}$$

A partir de esta última ecuación se obtiene:

$$C'(x) \leq \mu \qquad [7]$$

De [7] se deduce que en el nivel de producción óptimo, el costo marginal debe ser menor o igual al precio esperado.

Grados de incertidumbre

Sandmo (1971) incluye en su propuesta la comparación entre las decisiones de una empresa cuando no existe incertidumbre en los precios y cuando sí existe. Al respecto, la comparación cardinal entre $U'(\Pi)$ y $U'[E(\Pi)]$ depende de la relación existente entre P y μ. Además, Sandmo realiza una prueba de dominancia estocástica de segundo orden para comparar entre dos alternativas riesgosas. Para ello, propone expresar el precio aleatorio de un bien como $\gamma P + \theta$ y con el fin de preservar la media esperada de los precios establece que:

$$dE[\gamma P + \theta] = 0$$

$$d\theta/d\gamma = -\mu$$

Junto con Sandmo, Batra y Ullah (1974) intentan probar que el volumen del producto elaborado por una empresa tiende a disminuir ante el incremento en la incertidumbre de los precios, medida a través de la varianza de éstos, γ, y bajo el supuesto de que el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es decreciente en las ganancias, es decir,

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} < 0, \text{ siempre que } \frac{\partial R_A}{\partial \Pi} < 0, \text{ donde } R_A = -\frac{U''(\Pi)}{U'(\Pi)}$$

Más adelante, Ishii (1977) generaliza el resultado anterior a partir de un supuesto menos restrictivo; es suficiente que el coeficiente de aversión absoluta al riesgo sea no creciente para asegurar que ante el incremento en la incertidumbre del precio del bien elaborado, se reduzca la producción.

En un estudio más reciente Eeckhoudt y Hansen (1980), muestran un resultado similar para el nivel de producción de la empresa, basándose en dos supuestos: 1) la empresa es adversa al riesgo (no es relevante el coeficiente de aversión absoluta al riesgo) y 2) la variación en la incertidumbre de precios está acotada por la existencia de un precio máximo p_M y uno mínimo p_m, los cuales son diferentes al precio aleatorio original P, pero que como éste tienen la misma esperanza matemática.

Comentarios al enfoque de la utilidad esperada de los beneficios

La modelación de las decisiones de la empresa con base en la teoría de la utilidad esperada permite considerar diferentes tipos de unidades económicas productivas, diferenciadas por su actitud hacia el riesgo (aversión, neutralidad o gusto), en lugar de considerar que todas las empresas son neutrales al riesgo.[1] No obstante, el análisis está limitado principalmente por las siguientes razones:

a) El criterio tradicional de decisión entre distintas alternativas de producción se basa en elegir aquella alternativa que proporcione el máximo volumen de beneficios. En términos de la utilidad esperada, se elige con base en el valor esperado de una lotería, es decir, comparando las utilidades esperadas. Si bien este criterio es útil en términos normativos, para la economía positiva no es una adecuada representación de la elección de una empresa dada la imposibilidad de representar sus preferencias de producción a través de funciones de utilidad.

b) En este enfoque, la decisión de la empresa no necesariamente es intertemporal. Cuando la empresa elige su nivel de producción se enfrenta a un conjunto de pares precio-probabilidad en el espacio de loterías, e indirectamente a los pares utilidad de beneficios-probabilidad. Cualquiera de esos pares puede ocurrir en un instante del

[1] En ocasiones se supone que las empresas son neutrales al riesgo sobre la base de los argumentos de que poseen grandes montos de riqueza, gran cantidad de derechos de propiedad, considerable experiencia financiera y fácil acceso a los mercados de capitales. Esta idea es sostenida por autores como Martin Bailey, Costas Azariadis y Joseph Stiglitz.

tiempo. En el análisis del comportamiento de la empresa, la intuición es que siempre se preferirá la lotería donde el precio más elevado del bien terminado tenga asociado una mayor probabilidad; o bien, si la incertidumbre está presente en los precios de los insumos, donde la mayor probabilidad se asocie a los menores precios.

c) Las medidas de aversión al riesgo no proporcionan resultados invariantes porque dependen de las funciones de utilidad con que se representen las preferencias.

d) Se conserva la Paradoja de Allais[2] que cuestiona la validez del axioma de independencia.

Por último, señalamos una extensión al enfoque original, la cual consiste en suponer que los resultados esperados se definen en términos monetarios, es decir, el agente maximiza una función de utilidad que depende de cantidades de dinero (para la empresa esto significa que los precios y los beneficios se definen en unidades monetarias).[3]

EL VALOR PRESENTE DE LAS GANANCIAS ESPERADAS

En esta sección se examina el problema de optimización de una empresa competitiva, la cual busca maximizar el volumen de beneficios esperados en cada instante del tiempo, cuando no se conoce con certeza el precio del bien o los precios de los insumos en cada fecha. Observe, en primer lugar, que en el escenario determinista, la función objetivo de la empresa es:[4]

---

2 Maurice Félix Charles Allais (nació el 31 de mayo de 1911 en París, Francia) es un economista y físico francés ganador del Premio Nobel de Economía en 1988 por sus contribuciones pioneras a la teoría de mercados y a la utilización eficiente de los recursos. Ha sido profesor de la Escuela Nacional Superior de Minas de París desde 1944 y director de su Centro de Análisis Económico desde 1946. Entre sus obras destacan ***A la búsqueda de una disciplina económica*** (1942) (reeditada con el nuevo título ***Tratado de Economía Pura*** en 1952) y ***Economía e interés*** (1947). Allais desarrolló matemáticamente los trabajos sobre el equilibrio y la eficiencia de los mercados de Vilfredo Pareto y Leon Walras. Su nombre está asociado a la paradoja de Allais, que es un problema de la teoría de decisiones de 1953 que contradice la teoría de la utilidad esperada. En mayo de 1987, en el documento "La condición monetaria de una economía de mercado", predijo el lunes negro que ocurrió el 19 de octubre de dicho año.

3 La función de utilidad esperada definida sobre cantidades monetarias a veces se denomina función de utilidad Bernoulli.

4 El modelo representativo de optimización de ganancias de una empresa, en un marco intertemporal y determinista se debe a Treadway (1969); extensiones de este modelo se pueden encontrar en Nadiri (1982).

$$\text{Max } V = \int_0^{\infty} \left(p_t Q_t - w_t L_t - G_t I_t \right) e^{-\delta t} dt \quad [8]$$

$$s.a: \; Q_t = F(K_t, L_t) - C(\dot{K}) \quad [9]$$

$$\dot{K} = I_t - \mu K_t, K(0) = K_0 \quad [10]$$

$$K_t, L_t > 0 \quad [11]$$

Donde p_t es el precio del bien producido Q_t, L_t es la cantidad del factor trabajo, K_t es la cantidad del insumo capital, I_t es la cantidad de nuevos bienes de inversión, w_t es el precio del trabajo (salario real), G_t el precio de los bienes de inversión, r es la tasa de interés y μ la tasa de depreciación del capital; todas estas variables (excepto la tasa de depreciación) varían con el tiempo y su valor es plenamente conocido.

La restricción [9] establece que la cantidad de bienes producidos, depende de la función de producción $F(K_t, L_t)$ y del costo asociado a la variación del capital $C(\dot{K})$. La ecuación [10] establece que la variación en el acervo de capital es igual a la inversión nueva menos la depreciación del capital, con la condición inicial de que el nivel de capital en el tiempo $t = 0$ es K_0. Por último, en la ecuación [11] se establece que la cantidad de los insumos utilizados debe ser positiva, una condición necesaria para que se efectúe la producción. Al resolver el problema de optimización anterior, se obtienen las siguientes condiciones de equilibrio con las que se alcanza la máxima producción y beneficios:

$$F_L(K_t, L_t) = w_t \quad [12]$$

$$\ddot{K} = \frac{(r_t + \mu) g_t - F_K(K_t, L_t) + r_t C'(\dot{K})}{C''(\dot{K})}, \; g_t = G_t / p_t \quad [13]$$

$$\lim_{t \to \infty} C'(\dot{K}) e^{-rt} = 0 \quad [14]$$

En la ecuación [12] se establece que el producto marginal del trabajo debe ser igual al salario real.

En [13] se expresa que el valor presente del producto marginal del capital (cuasi-fijo) es equivalente al costo marginal de la inversión. Por último, la ecuación [14] establece que el valor presente de los costos marginales de la variación en el capital es cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Como señalamos al comienzo de esta sección, el problema de maximización de beneficios con incertidumbre de precios consiste en reproducir este escenario básico, pero introduciendo como elementos de riesgo la aleatoriedad en los precios asociados. En este enfoque se supone que los precios aleatorios se asocian a un espacio fijo de probabilidad (Ω, F, P). Los elementos que definen el espacio de probabilidad son: Ω, el conjunto de posibles resultados o estados de la naturaleza, cuyos subconjuntos son llamados eventos; F, una sigma-álgebra o conjunto de eventos relevantes; y P, una medida de probabilidad. La elección de la empresa en condiciones de incertidumbre es en este contexto siempre es una decisión intertemporal.

Riesgo de ganancia

Una propuesta representativa del enfoque de maximización de beneficios con incertidumbre de precios se debe a Scott (1983), en donde se supone que el nivel de ganancias esperadas está dado por:

$$E[\Pi_t] = F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t K_t \qquad [15]$$

Y el valor esperado V de la empresa es:

$$V_t = \frac{1}{i} E(\Pi_t) - \frac{\lambda}{i} Cov(\Pi_t, \Pi_t^m)$$

$$Cov(\Pi_t, \Pi_t^m) = \sigma_t^{jm} = \rho_t^{jm} \sigma_t^j \sigma_t^m$$

$$\sigma_j^2 = K^2 \sigma_r^2 \qquad [16]$$

Donde i es la tasa de interés libre de riesgo, λ es el precio del riesgo de ganancia por unidad del valor de mercado del capital, $Cov(\Pi_t, \Pi_t^m) = \sigma_t^{jm}$ expresa la covarianza entre los beneficios de la empresa Π_t y los beneficios de otras empresas en el mercado Π_t^m, ρ_t^{jm} indica la correlación entre las ganancias de la empresa j y las ganancias del mercado, σ_t^j es la desviación estándar de las ganancias de la empresa, y σ_t^m es la desviación estándar de las ganancias del mercado.

El modelo supone que la empresa desconoce el precio de los insumos, no obstante, los salarios w_t y las tasas de interés r_t vigentes en cada fecha t, tienen medias conocidas w y r, y varianzas σ_w^2, σ_r^2 independientes entre sí. Formalmente lo que se conoce acerca de los precios de los insumos capital y trabajo puede expresarse como:

$$r_t \sim \left(r, \sigma_r^2\right),\ w_t \sim \left(w, \sigma_w^2\right),\ Cov\left(\sigma_r^2, \sigma_w^2\right) = 0$$

Con base en las ecuaciones [15] y [16] y suponiendo que existe una tasa de rendimiento constante permitida legalmente s, el problema de optimización de la empresa es:

$$\begin{aligned} \underset{\{L,K\}}{\text{Max}} \quad Z_t = {} & \frac{1}{i}\left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t K_t\right] \\ & - \frac{\lambda}{i}(\rho_t^{jm} \sigma_t^m K_t \sigma_t^r) - \frac{\phi}{i}\left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - s K_t\right] \end{aligned} \quad [17]$$

Donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción de la tasa de rendimiento.

Como condiciones de equilibrio para obtener los máximos beneficios se debe cumplir:

$$F_L(K_t, L_t) = w_t \quad [18]$$

$$F_K(K_t, L_t) = \frac{1}{1-\phi}\left[r_t - \phi s + \lambda \rho_t^{jm} \sigma_t^m \sigma_t^r\right] \quad [19]$$

Los resultados [18] y [19] son semejantes a los obtenidos con certidumbre. En [18] se muestra que en la elección óptima el producto marginal del trabajo iguala al salario real; en [19] se concluye que el producto marginal del capital es una proporción de la tasa de interés del riesgo de ésta y del riesgo de las ganancias del mercado.

Maximización de beneficios con tasa de interés estocástica

En el modelo que proponemos a continuación, suponemos que la empresa desconoce el precio del capital o tasa de interés, pero supone que la dinámica de ésta se representa a través de un movimiento geométrico browniano (proceso de Wiener). En este caso, la empresa representativa maximiza el flujo esperado de ganancias Π_t, es decir:

La empresa representativa maximiza el flujo esperado de ganancias Π_t:

$$\text{Max } E\left\{\int_0^\infty f(\Pi_t)e^{-\rho t}|F_0\right\},\ 0 < \rho < 1 \qquad [20]$$

Donde ρ es la tasa de descuento.

$$s.a{:}\ d\Pi_t = F(K_t, L_t)dt - w_t L_t dt - K_t dR_t \qquad [21]$$

La ecuación [21] representa la evolución de los beneficios Π_t donde f es una función cóncava con primera y segunda derivadas continuas. Las ganancias en cada fecha t, dependen de la producción $F(K_t, L_t)$ y del costo que se paga por los factores capital y trabajo. El salario real w_t, varía con el tiempo, pero su magnitud se conoce con certeza.

La tasa de interés varía de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica:

$$dR_t = \frac{dr_t}{r_t} = (\mu - \delta)dt + \sigma dZ_t\,,\ \ dZ_t \sim N(0, dt) \qquad [22]$$

Entonces, [21] puede reescribirse como:

$$d\Pi_t = F(K_t, L_t)dt - w_t L_t dt - K_t(\mu - \delta)dt - K_t \sigma dZ_t$$

$$d\Pi_t = \Pi_t\left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - K_t(\mu - \delta)\right]dt - K_t \sigma dZ_t \qquad [23]$$

En el problema de optimización descrito por las ecuaciones anteriores, la variable de estado es r_t; la variable de control es Π_t, o equivalentemente las variables L_t y K_t porque para maximizar los beneficios la empresa elige las cantidades óptimas de trabajo y capital.

Definimos ahora:

$$J(\Pi_t, t) = \max_{\Pi|[t,\infty)} E\left\{\int_0^\infty f(\Pi_t)e^{-\rho s} | F_t\right\} = V(\Pi_t)e^{-\rho t} \qquad [24]$$

Que puede reescribirse como:

$$J(\Pi_t, t) = \max_{\Pi|[t,\infty)} E\left\{\int_t^{t+dt} f(\Pi_s)e^{-\rho s}ds + \int_{t+dt}^\infty f(\Pi_s)e^{-\rho s} | F_t\right\}$$

$$J(\Pi_t, t) = \max_{\Pi|[t,t+dt]} E\left\{\int_t^{t+dt} f(\Pi_s)e^{-\rho s}ds + \int_{t+dt}^\infty J(\Pi_t + d\Pi_t, t+dt) \middle| F_t\right\}$$

Si se utiliza el teorema del valor medio para integrales definidas y la expansión en series de Taylor de J alrededor de (Π_t, t), tenemos que:

$$J(\Pi_t, t) = E\left\{ f\left(\Pi_s\right)e^{-\rho s}dt + (0)dt + J(\Pi_t, t) + dJ(\Pi_t, t) \middle| F_t\right\}$$

Donde $(0)dt$ significa que $0(dt)/dt \to 0$ cuando $dt \to 0$. Si aplicamos el lema de Itô para una función que depende de una ecuación diferencial estocástica definida por un movimiento browniano, entonces:

$$J(\Pi_t,t)=E\left\{f\left(\Pi_t\right)e^{-\rho s}+(0)dt+J(\Pi_t,t)+J_r\left(J_t+\left[f(K_t,L_t)-w_tL_t-K_t(\mu-\delta)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}J_{rr}\sigma^2 r_t K_t^2\right)dt+J_r\sigma_L r_L K_t dZ_t \middle| F_t\right\}$$

Donde los subíndices de J_t, J_r, J_{rr}, denotan las primeras o segundas derivadas parciales de la función solución $J(r_t, t)$.

Si se obtienen los valores esperados en los términos de la ecuación anterior y se simplifica, obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$0=\max_{\Pi_t} E\left\{f\left(\Pi_t\right)e^{-\rho t}+J_t+J_r\left[f(K_t,L_t)-w_tL_t-K_t(\mu-\delta\right]dt\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}J_{rr}\sigma^2 r_t^2 K_t^2\right\}=HJB \quad [25]$$

A partir de la ecuación anterior y suponiendo que $f(\Pi_t)$ se mantiene constante durante el instante *dt*, obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial HJB}{\partial K_t}=J_r f_K(K_t,L_t)-J_r(\mu-\delta)+J_{rr}\sigma_t^2 r_t^2 K_t=0 \quad [26]$$

$$\frac{\partial HJB}{\partial L_t}=J_r f_L(K_t,L_t)-w_t=0 \quad [27]$$

Junto con la condición de transversalidad que asegura un valor presente de los beneficios reales esperados igual a cero.

$$\lim_{t\to\infty}\Pi e^{-\rho t}=0 \quad [28]$$

Si suponemos que $J(\Pi_t,t)\approx J(r_t,t)+o(r_t)$, proponemos entonces como candidato solución de [25] a:

$$J(r_t, t) = r_t^{\alpha} e^{-\rho t}, \ \alpha > 0, \ 0 < \rho < 1 \qquad [29]$$

De la cual, obtenemos las derivadas parciales:

$$J_t = -\rho r_t^{\alpha} e^{-\rho t}$$

$$J_r = \alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\rho t}$$

$$J_{rr} = \alpha(\alpha - 1) r_t^{\alpha-2} e^{-\rho t}$$

Si se sustituye [29] y sus derivadas en las condiciones de primer orden, y luego se simplifica, tenemos que:

$$J_r f_K(K_t, L_t) = J_r(\mu - \delta) + J_{rr}\sigma_t^2 r_t^2 K_t$$

$$\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\rho t} f_K(K_t, L_t) = \alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\rho t}(\mu - \delta) + \alpha(\alpha - 1) r_t^{\alpha-2} e^{-\rho t}\sigma_t^2 r_t^2 K_t$$

$$r_t^{\alpha-1} f_K(K_t, L_t) = r_t^{\alpha-1}(\mu - \delta) + (\alpha - 1) r_t^{\alpha}\sigma_t^2 K_t$$

$$f_K(K_t, L_t) = (\mu - \delta) + (\alpha - 1) r_t \sigma_t^2 K_t \qquad [30]$$

De la segunda condición de equilibrio:

$$J_r f_L(K_t, L_t) = J_r w_t$$

$$f_L(K_t, L_t) = w_t \qquad [31]$$

El resultado mostrado en la ecuación [30] muestra la condición por la cual se determina la cantidad óptima de capital, el cual se elige donde la productividad marginal del capital iguale al valor promedio esperado de la tasa de interés $(\mu - \delta)$ más la proporción $(\alpha - 1)\sigma_t^2 K_t$. Por último, la ecuación [31] reproduce el resultado del caso determinista, si no existe un riesgo asociado a la variación en el tiempo del salario real, entonces la cantidad óptima de trabajo debe satisfacer que el producto marginal de éste iguale al salario real.

Comentarios al enfoque de maximización del valor presente de los beneficios esperados

Es conveniente destacar que el enfoque de maximización de beneficios esperados, en condiciones de incertidumbre, se caracteriza por la presencia de variables que se consideran aleatorias, las cuales requieren de una especificación precisa de la función de distribución de probabilidad.

Por otro lado, a diferencia del enfoque de maximización de la utilidad esperada, en el que la actitud hacia el riesgo es un supuesto del modelo incorporado a través de la forma de la función de utilidad, aquí la actitud hacia el riesgo, por parte de la empresa, se observa en los resultados, cuando al elegir sus decisiones contempla las características de las variables aleatorias, su nivel promedio y su volatilidad (en nuestro caso, $\mu - \delta$ y σ_t^2).

Por último señalamos que este enfoque recupera y extiende el planteamiento tradicional determinista de la empresa, tanto el del escenario estático, como el caso intertemporal.

INCORPORACIÓN DE TÍTULOS FINANCIEROS Y BIENES CONTINGENTES

En esta sección se considera la presencia de títulos (instrumentos) financieros asociados a la existencia de mercados contingentes (mercados de productos derivados) a fin de examinar su influencia sobre las decisiones de producción. El escenario básico consiste en una economía compuesta por un conjunto completo de bienes contingentes. Los bienes se distinguen entre sí por sus características físicas, por su disponibilidad espacial, su disponibilidad temporal, y de acuerdo con el estado de la naturaleza en el que son viables. Los conceptos primordiales de este enfoque analítico se mencionan a continuación.

Definición 3. Para todo bien físico $n = 1, 2, \ldots, N$ y estados $s = 1, 2, \ldots, S$, un bien contingente ns es un título que otorga el derecho a recibir una unidad del bien físico n si el estado s ocurre.

Definición 4. Dado un conjunto finito de estados, N, y un conjunto finito de títulos contingentes, S. Sea $D = N \times S$ la matriz que determina el número de unidades pagadas por el título n en el estado s, si $span(D) = \{D^T\theta : \theta \in R^N\}$ es el espacio generado por los posibles pagos bajo la elección del vector θ de títulos, entonces los mercados son completos si se cumple que $span(D) = R^S$. La completitud de los mercados de bienes contingentes significa que existe igual número de títulos, mercados contingentes y estados de la naturaleza.

La incertidumbre en este escenario está presente porque no se conoce cuál es el estado del mundo que prevalecerá en el futuro y, por lo tanto, no se conoce con certeza cuáles bienes estarán disponibles; la información es incompleta, pero simétrica. En estas condiciones, los agentes económicos son similares en sus preferencias y tecnologías de producción; sólo difieren entre sí en las expectativas y creencias respecto a la probabilidad de ocurrencia de los eventos futuros.

Contratos de futuros

En esta sección examinamos la propuesta de Feder, Just y Schmitz (1980). Ellos proponen un modelo en el que las decisiones de producción dependen de los precios de los factores y de los precios de los contratos futuros. En su modelo, la incertidumbre está presente en el precio *spot* de los bienes en los mercados futuros, y sólo afecta las decisiones de compra y venta de contratos futuros. En este caso, el problema de optimización de una empresa es:

$$\max_{K,U} EU\left\{P\left[F(K) - X\right] + (P_0 X - CK)(1 + r)\right\} \qquad [32]$$

Donde U es la función de utilidad de la empresa, K es el volumen de insumo, X es el volumen de contratos futuros vendidos, C es el costo por unidad de insumo, P es el precio *spot* o precio del producto en la fecha de venta, P_0 es el precio futuro, r es la tasa real de interés. La ecuación [32] expresa que las ganancias esperadas igualan al valor de la producción no comprometida con contratos futuros, más el valor de los contratos futuros, menos el costo de los insumos.

A partir de [32] se calculan las condiciones de equilibrio:

$$\frac{\partial EU}{\partial K} = E\{U'PF_K - C(1+r)\} = 0 \qquad [33]$$

$$\frac{\partial EU}{\partial X} = E\{U'P_0(1+r) - P\} = 0 \qquad [34]$$

Si $\{PF_K - C(1+r)\} = F_K\{P_0(1+r) - P\}$, entonces

$$F_K = \frac{C}{P_0} \qquad [35]$$

Un primer resultado relevante lo proporciona la ecuación [35]. En este caso, la decisión de producción se determina donde el producto marginal del factor utilizado iguala a la razón entre el costo del insumo y el precio futuro conocido en el contrato; así, en la decisión de producción no influye la incertidumbre asociada a los precios *spot*, ni tampoco la actitud hacia el riesgo implícita en la función de utilidad. El modelo básico se puede extender para investigar cómo la incertidumbre de los precios *spot* incide en la decisión de comercialización de contratos futuros. A partir de la ecuación [34] se escribe:

$$P_0 = \frac{\overline{P}}{(1+r)}$$

Donde $\overline{P}$ es el precio *spot* observado y P_0 el precio futuro pactado (precio *forward*) para la fecha de entrega del bien. Si se define al volumen de producto sujeto a incertidumbre de precios como: $Z = F(K) - X$, entonces se tiene que:

$$Z \underset{>}{\overset{<}{=}} 0 \text{ si } P_0 \underset{<}{\overset{>}{=}} \frac{\overline{P}}{(1+r)} \qquad [36]$$

Lo que significa, en términos del valor presente, que si el precio futuro acordado P_0 es mayor que el precio *spot* esperado $\overline{P}$, entonces la empresa adquiere posiciones cortas en contratos futuros, es decir, vende contratos futuros sobre el bien en exceso a su producción planeada $Z < 0$. Si el precio futuro acordado es menor que la expectativa del precio *spot*, la empresa especula adquiriendo posiciones largas en contratos futuros $Z > 0$. Este segundo resultado reproduce la condición para la no existencia de arbitraje (no existen ganancias libres de riesgo) en contratos futuros:

$$F_0 = S_0 e^{r(T-t)} \qquad [37]$$

Donde F_0 es el precio futuro acordado, S_0 el precio *spot*, r la tasa de interés libre de riesgo y $T - t$ el plazo al vencimiento del contrato. De acuerdo con [37], si se verifica la igualdad, entonces no existen posibilidades de arbitraje; si $F_0 < S_0 e^{r(T-t)}$, es decir, si se estima que el precio futuro acordado será menor que el precio *spot* observado, conviene adquirir títulos de futuros de compra del bien; mientras que si $F_0 > S_0 e^{r(T-t)}$, entonces conviene adquirir títulos de futuros de venta del bien.

Es importante notar que en el momento en que un par fecha-evento ha ocurrido, los contratos futuros deben cerrarse efectuando las transacciones (entregando los bienes) a los precios futuros acordados, lo cual generará ganancias o pérdidas a las empresas (adicionales al resultado de optimización de la producción) de acuerdo con la confirmación de sus expectativas en precios.

Contratos de opciones financieras

A continuación presentamos una propuesta alternativa a la planteada en la sección anterior; la diferencia es que ahora suponemos la presencia de opciones financieras tipo europeo. En este caso, el problema de optimización de la empresa consiste en maximizar el valor esperado que obtendrá con la producción y con los contratos que lleve a cabo en cada estado de la naturaleza; la cual se representa con alguna de las siguientes posibilidades. Para opciones de compra se tienen dos funciones objetivo:

$$\begin{aligned}&\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+Mc_i\right\}\\&=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\max\left[S_T-K,0\right]\right\}\end{aligned} \quad [38]$$

$$\begin{aligned}&\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-Mc_i\right\}\\&=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-M\max\left[S_T-K,0\right]\right\}\\&=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\min\left[K-S_T,0\right]\right\}\end{aligned} \quad [39]$$

Para opciones de venta, se tienen también dos casos:

$$\begin{aligned}&\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+Mp_i\right\}\\&=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\max\left[K-S_T,0\right]\right\}\end{aligned} \quad [40]$$

$$\begin{aligned}&\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-Mp_i\right\}\\&=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]-M\max\left[K-S_T,0\right]\right\}\\&=\max_{VE}\left\{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[P_iF(X_i)-G(X_i)\right]+M\min\left[S_T-K,0\right]\right\}\end{aligned} \quad [41]$$

Donde $F(X_i)$ representa la producción utilizando el insumo X_i en el estado de la naturaleza i (par fecha-evento), $G(X_i)$ representa la función de costos asociada con la producción del bien, α_i es la probabilidad asociada a la ocurrencia del estado i (note que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$), M es la cantidad de títulos de opciones europeas que se adquieren sobre el bien subyacente (que puede ser el mismo bien producido), c_i es el precio de un contrato *call* (opción de compra) calculado para el estado i, p_i es el precio de un *put* (opción de venta), S_T es el precio *spot* observado en la fecha de expiración del título, y K es el precio de ejercicio establecido en el contrato.

Con base en esta notación, las ecuaciones anteriores expresan que el valor esperado de los beneficios de la empresa es igual a la diferencia entre el valor de los productos elaborados y su costo en cada par fecha-evento, más las pérdidas o ganancias asociadas al valor de los títulos de las opciones europeas en cada estado de la naturaleza, es decir, el número de contratos de opciones M por el precio de cada título. Específicamente, en la ecuación [38] se supone la compra de opciones de compra, en [39] la venta de opciones de compra, en [40] la compra de opciones de venta y en [41] la venta de opciones de venta.

En el escenario descrito, tenemos un conjunto completo de bienes contingentes representados en los títulos de las opciones financieras; se trata de un conjunto completo porque suponemos que existe un contrato *call* o *put* para cada estado de la naturaleza i. En cualquiera de los problemas de optimización descritos, la empresa elige el nivel de producción del bien y el número de títulos de opciones financieras. En todos los casos se obtiene como condición de equilibrio:

$$F'(X_i) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{G'(X_i)}{P_i} \qquad [42]$$

Lo que significa que la producción óptima en cada estado de la naturaleza debe cumplir que el producto marginal del insumo iguale a su costo marginal ponderado por la probabilidad de ocurrencia de ese estado, α_i.

Por otro lado, la elección del número de títulos financieros depende de la relación entre el precio *spot* del bien en los mercados futuros y del precio de ejercicio pactado. El rendimiento esperado asociado con una posición larga en un *call*, de acuerdo con la ecuación [38], establece que se adquieren más títulos si se espera que $S_T \geq K$ porque esto generará ganancias a la empresa si la opción se ejerce. Para posiciones *call* cortas, dadas en [39], se adquirirán más títulos si $S_T < K$ (si se espera que la contraparte no ejerza la opción). Las empresas mantendrán posiciones *put* largas [40] si $S_T \leq K$, dado que así se generarán más ganancias. Por último, de acuerdo con la ecuación [41] la empresa elegirá posiciones *put* cortas si espera que $S_T > K$. Una diferencia adicional con el modelo presentado en la sección anterior es que las empresas tienen el derecho de ejercer o no la opción, lo que implica que aunque se han pagado los precios de las opciones, los bienes contingentes pueden ser o no entregados a los precios pactados.

Comentarios a la presencia de títulos financieros y bienes contingentes

En los modelos de maximización del valor presente de los beneficios de un productor, que incorpora en su decisión la presencia de títulos financieros, los resultados fundamentales son:

a) La incorporación de títulos financieros significa que en la fecha actual se establecen contratos para la entrega futura de los bienes (compra o venta). La entrega de los bienes está condicionada a la ocurrencia de un par fecha-evento, los precios de los títulos financieros y los precios futuros son plenamente conocidos y son pactados en la fecha en que se suscribe el contrato; los precios *spot* de los bienes en cada fecha se desconocen. Si las empresas pueden determinar un conjunto de planes de producción, cada uno de los cuales establece para cada par fecha-evento la cantidad de producción, las cantidades de insumos requeridos y el precio futuro asociado, entonces no hay incertidumbre acerca del valor presente del plan de producción óptimo; siempre y cuando exista un conjunto completo de bienes contingentes. Cuando se afirma que la empresa no toma en cuenta la incertidumbre al decidir su plan óptimo de producción, esto significa que no considera sus preferencias o actitudes hacia el riesgo. Sin embargo, es importante subrayar que las expectativas acerca del par fecha-evento que sucederá, sí se consideran porque a cada plan de producción se asocia una probabilidad de ocurrencia.

b) La empresa no considera en su decisión de producción el precio *spot* de los bienes que existirá en cualquier par fecha-evento del futuro. Estos precios sólo influyen en sus decisiones de inversión especulativa, es decir, en el tipo y en la cantidad de contratos financieros que se elegirán. Este hecho es válido en el caso en que existe un conjunto completo de bienes contingentes.

CONCLUSIONES

En esta investigación, hemos presentado tres enfoques alternativos para estudiar las decisiones de producción de una empresa cuando existe incertidumbre asociada a los precios del bien producido o a los insumos requeridos; los modelos desarrollados bajo cada enfoque conducen a diferentes resultados, como se explica a continuación.

En el enfoque de la teoría de la utilidad esperada, la elección del volumen de producción óptimo implica seleccionar un conjunto de pares precio-probabilidad en el espacio de loterías, de modo que se obtenga la máxima utilidad. La elección no necesariamente es intertemporal. Si el criterio de elección se basa en comparar magnitudes de utilidad esperada, este criterio es débil en términos prácticos ante la imposibilidad de representar las preferencias de producción de una empresa mediante funciones de utilidad. En este enfoque se reconoce que las decisiones de producción de la empresa están condicionadas por su actitud hacia el riesgo, esta actitud está implícita en las características de la función de utilidad que se elige.

El segundo escenario analizado consiste en la maximización de las ganancias esperadas cuando se supone que la incertidumbre está asociada con los precios aleatorios. Se trata de reproducir las características de un modelo de producción intertemporal determinista, sólo que ahora se incluye la aleatoriedad de los precios; se supone que en cada instante del tiempo ocurre un precio aleatorio del cual se conoce su distribución de probabilidad. En particular, se ha propuesto un modelo de optimización donde el precio del capital, la tasa de interés, es estocástica porque su dinámica puede describirse mediante un movimiento geométrico browniano. Los principales resultados de este esquema con incertidumbre en los precios de los insumos son: *a*) se obtienen criterios similares al caso determinista para la elección del volumen de producción, se elige producir donde el producto marginal del insumo utilizado iguale a su precio marginal más una fracción de la volatilidad de los precios; *b*) el comportamiento de los precios aleatorios (su función de distribución de probabilidad, o el proceso estocástico que define su dinámica) permite efectuar ejercicios de contrastación empírica; *c*) la actitud hacia el riesgo por parte de las empresas incide en la elección de producción a través de la media y la volatilidad de los precios.

Por último, en el tercer enfoque, la incertidumbre se asocia a la existencia de bienes contingentes con títulos financieros. En este escenario se conocen todos los pares fecha-evento posibles y sus respectivas probabilidades, se conocen los precios de los títulos financieros, los precios futuros de los bienes y los precios *spot* asociados con cada estado de la naturaleza. La empresa maximiza el valor esperado resultante de la realización de los planes de producción para cada estado de la naturaleza y de las ganancias o pérdidas derivadas de la comercialización de títulos financieros. Si a estas condiciones se añade la existencia de un conjunto completo de bienes contingentes, los resultados son: *a*) la decisión de producción no considera la incertidumbre, es decir, no es afectada por las actitudes hacia el riesgo de la empresa ni por las expectativas de los precios *spot* de los bienes; *b*) los precios *spot* esperados para cada par fecha-evento sólo complementan el valor esperado de las ganancias, porque inciden en la decisión de compra o venta de títulos financieros.

REFERENCIAS

Batra, R.N. y A. Ullah, "Competitive Firm and the Theory of Input Demand under Price Uncertainty", *The Journal of Political Economy*, vol. 82, núm. 3, 1974, pp. 537-548.

Eeckhoudt, L. y P. Hansen, "Minimum and Maximum Prices, Uncertainty, and the Theory of the Competitive Firm", *The American Economic Review*, vol. 70, núm. 5, 1980, pp. 1064-1068.

Feder, G., R.E. Just y A. Schmitz, "Futures Markets and the Theory of the Firm under Price Uncertainty", *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 94, núm. 2, 1980, pp. 317-328.

Ishii, Y., "On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty: Note", *The American Economic Review*, vol. 67, núm. 4, 1977, pp. 768-769.

Nadiri, M.I., "Producers Theory", en K. J. Arrow y M. D. Intriligator (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, capítulo 10, Países Bajos, North Holland Publishing Company, 1982.

Sandmo, A., "On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty", *The American Economic Review*, vol. 61, núm. 1, 1971, pp. 65-73.

Scott, F. "A Note on Uncertain Input Prices, Profit Risk, and the Rate-of-Return Regulated Firm", *Land Economics*, vol. 59, núm. 3, 1983, pp. 337-341.

Treadway, A.B. "On Rational Entrepreneurial Behavior and the Demand for Investment", *Review of Economic Studies*, núm. 38, 1969, pp. 227-239.

Von Neumann, J. y O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Estados Unidos, Princenton University Press, 1944.