Investigación Económica, *vol. LIX: 230, octubre-diciembre de 1999, pp. 121-148*

SOLUCIÓN DE UN MODELO DE CRECIMIENTO ESTOCÁSTICO CON CAPITAL PÚBLICO CON EL MÉTODO DE PARAMETRIZACIÓN DE EXPECTATIVAS

GERMÁN ROJAS*

I. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es presentar una solución numérica a un modelo con fundamentos el cual ha sido ampliamente utilizado en la literatura. La necesidad de una solución numérica se debe al carácter intrínseco del modelo propuesto: incertidumbre, diversas variables de estado, peculiaridades de las formas funcionales, etc. Sin embargo, debemos decir que esta complejidad intrínseca al modelo no sólo es un ejercicio teórico, es probable que un modelo mas "práctico" para prescribir política económica también debiera resolverse de manera numérica. De hecho, la mayoría de las decisiones de política económica se basan (o deberían basarse) en una reflexión sobre objetivos y restriccio-

Manuscrito recibido en octubre de 1998; versión final marzo de 1999.

* Departamento de Economía, Camino a Santa Teresa 930, c.p. 10700, México, D.F. Fax 52-5-6 52 62 84. Correo electrónico: rojas@master.ster.itam.mx El autor quiere agradecer los comentarios de un dictaminador anónimo, los cuales mejoraron sustancialmente este artículo. Este artículo forma parte del proyecto de investigación 4331P-S financiado por CONACYT.

que enfrentan los hacedores de estas políticas. La dificultad teórica en el modelo presentado aquí puede entenderse, ingenuamente, como una aproximación mínima a esta complejidad.

El modelo utilizado en este artículo se describe ampliamente en Arrow y Kurz (1975). La idea central del modelo es incorporar un bien público el cual tiene la forma de capital. Las externalidades que genera este bien, sólo afectan las decisiones de la economía a través del aumento de la productividad marginal del capital privado (debido a que el gobierno financia la inversión pública con impuestos del tipo *lump-sum*). Supondremos que el gobierno sólo gasta en inversión publica y que dispone exclusivamente de impuestos *lump-sum* para financiar sus actividades.

Una de las características de este modelo es su simple complejidad: añade de manera natural una variable de estado, el capital publico, lo cual ocasiona que la solución numérica del modelo se torne difícil. De aquí que la utilización de un algoritmo fácil, robusto y poderoso sea pertinente. Remito al lector interesado a un artículo donde encontrará una revisión de los métodos recientes diseñados para resolver el modelo de crecimiento neoclásico.[1] Aquí pondremos énfasis en el uso de un procedimiento rápido y fácil de instrumentar para resolver modelos dinámicos estocásticos no lineales[2] conocido como "Parametrización de Expectativas" (PEA). Las aplicaciones que se han hecho de este método son varias: Marcet (1989) lo usa para resolver el modelo de determinación del precio de los activos de Lucas; Ketterer y Marcet (1989) lo utilizan para determinar las propiedades cualitativas y cuantitativas de economías con agentes heterogéneos y mercados incompletos en modelos financieros; Den Haan (1990) lo utiliza para encontrar reglas de política monetaria óptima; Otker (1989) lo ha utilizado para analizar el impacto de cambios

[1] Véase Taylor y Uhlig (1990) y Rojas (1997) para una revisión de los métodos más utilizados en la literatura para resolver modelos no lineales en economía.

[2] García-Milá (1987) utiliza el artículo el método de "backward solving" desarrollado por Sims (1985) en un modelo similar al utilizado en este para encontrar una solución al modelo.

en las trayectorias de los impuestos distorsionadores sobre las variables reales de la economía; Rojas (1994) lo utilizó para resolver un problema de imposición óptima con capital público, etcétera.

Es importante señalar que el ejercicio presentado aquí no tiene la filosofía de los trabajos sobre ciclos económicos reales (RBC), en el sentido de querer simular un modelo para intentar reproducir ciertos hechos estilizados de la economía. Más bien, en este artículo insistimos en la instrumentación de un algoritmo a un modelo complicado. Aun así, resolver este modelo nos permite hacer indagaciones teóricas sobre las características del capital público y sus efectos en la economía.

El trabajo se ha desarrollado de la siguiente manera: en la sección II se presenta el modelo y las condiciones de primer orden necesarias para resolverlo; en la III se describe la solución propuesta y el algoritmo utilizado para llevarla a cabo; en la IV se presentan el conjunto de parámetros utilizados, las condiciones iniciales y las trayectorias de equilibrio del consumo y la inversión, así como un análisis de sensibilidad y el efecto de la inversión pública en la economía; la sección V se dedica a las conclusiones y comentarios finales.

II. EL MODELO

Supongamos que la economía está habitada por una cantidad infinita de consumidores, los cuales se enfrentan al siguiente problema de optimización:

$$\underset{\{c_t\}}{Max}\, E_0 \underset{t\ 0}{\quad} {}^{t} v_t u(c)_t$$

En donde 0 < b < 1 es el factor de descuento; E_0 es el operador de expectativas; c_t es la cantidad consumida por periodo y v_t es un *shock* estocástico que afecta la utilidad derivada de consumir por periodo.

pondremos que la función de utilidad tiene todas las propiedades deseables para que la solución exista. En particular, suponemos que $u(c_t) = \ln c_t$.

Esta familia tiene acceso a una tecnología que le permite que la producción en la economía se lleva a cabo a través de una función de producción, la cual tiene la siguiente forma:

$$y_t = Akp_{t-1}^{\alpha} kg_{t-1}^{\gamma} \mu_t$$

En donde los parámetros de la función de producción cumplen lo siguiente: $0 < \alpha < 1$ y $0 < \gamma < 1$; A es un factor de escala; *kp* es el capital privado; *kg* es el capital publico, el cual suponemos que se comporta como un proceso estocástico; μ es un proceso estocástico que afecta la función de producción.

La restricción presupuestal que enfrenta cada uno de estos consumidores en cada periodo t es la siguiente:

$$c_t + i_t + t_t \leq Akp_{t-1}^{\alpha} kg_{t-1}^{\gamma} \mu_t$$

en donde i_t es la inversión privada y t_t es un impuesto del tipo *lump-sum*. Esta restricción presupuestal se cumple para cada periodo $t = 0,1,2,3\dots$.

En esta economía hay un gobierno que gasta en un bien que toma la forma de capital publico. El gobierno no gasta en ningún otro concepto y además no se puede endeudar o ahorrar ni puede poner otros impuestos. En consecuencia, la restricción presupuestal es:

$$g_t = t_t$$

Las funciones de transición que determinan el movimiento de la inversión privada y el gasto público son:

$$kp_t = (1-\delta)kp_{t-1} + i_t$$
$$kg_t = (1-\delta)kg_{t-1} + g_t$$

En donde suponemos que la tasa de depreciación del capital cumple $0 < \delta < 1$. Además, suponemos que la depreciación es igual para los dos capitales.

La solución a este problema se obtiene sustituyendo las 2 funciones de transición en la restricción presupuestal y a su vez sustituyendo ésta en la función de utilidad. En consecuencia, tenemos que el consumidor representativo se enfrenta al siguiente problema de optimización:

$$\underset{kp}{L} = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v_t \ln\left[Akp_{t-1}^{\alpha} kg_{t-1}^{\gamma} \mu_t - kp_t - kg_t + (1-\delta)kp_{t-1} + (1-\delta)kg_{t-1}\right]$$

La variable de control en este problema es kp_t y las variables de estado son $kp_{t-1}, kg_{t-1}, v_t, \mu_t$.

De la condición de primer orden respecto a kp_t obtenemos la ecuación de Euler:

$$v_t c_t^{-1} = \beta E_{t+1}\left\{c_{t+1}^{-1}\left[\alpha Akp_t^{\alpha-1} kg_t^{\gamma} \mu_{t+1} + (1-\delta\right]v_{t+1}\right\}$$

La ecuación de Euler, la restricción presupuestal, las leyes de movimiento para kp y kg y una condición inicial sobre kp y kg describen el equilibrio competitivo, dada una trayectoria de impuestos.[3]

[3] La condición adicional que *d* escribe el comportamiento óptimo de esta familia es la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} E_0 c_t^{-1} kp_t \to 0.$$

III. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Debido a la estructura no lineal del modelo, no se pueden encontrar soluciones analíticas para c_t y kp_t.[4] En consecuencia, tenemos que utilizar métodos numéricos para resolver el modelo y poder averiguar algunas características. Es decir, es necesario "simular" el modelo. Para ello utilizaremos el Método de Parametrización de Expectativas (PEA).[5]

La idea central del PEA es encontrar una función, $\Psi(B, kp_{t-1}, kg_{t-1}, \mu_t, v_t)$, en donde B es un vector de parámetros, la cual aproxime la expectativa condicional que aparece en la ecuación de Euler. La función Ψ debe tener como argumentos las variables de estado $kp_{t-1}, kg_{t-1}, v_t, \mu_t$, las cuales son la información disponible para las familias en el periodo t. Es importante observar que la solución del modelo depende de qué tan buena aproximación sea $\Psi(B, kp_{t-1}, kg_{t-1}, \mu_t, v_t)$ a la expectativa condicional, así como de los parámetros que caracterizan a esta función.

Una de las ventajas fundamentales de este algoritmo (en comparación a otros métodos, como iteración en la función de valor), es que nos permite trabajar, en principio, con una gran cantidad de variables de estado sin que se incurra en un costo computacional elevado. Además, con ligeras modificaciones, nos permite hacer comparaciones de política económica y resolver problemas que son imposibles de estudiar (tal es el caso del método cuadrático-lineal).

Para entender mejor la intrumentación del método, seamos más explícitos respecto al modelo considerado[6]. Supongamos que los procesos

---

[4] Para encontrar el valor del consumo, necesitamos saber el valor esperado del consumo mañana y de la productividad marginal del capital, pero para encontrar esta expectativa necesitamos saber el valor del consumo presente.

[5] Este método se describió originalmente en Marcet (1989).

[6] Para una descripción detallada de como aplicar este algoritmo, remito al autor a Rojas (1997).

estocásticos que describen la evolución del capital público, el *shock* tecnológico y el *shock* en la función de utilidad se comportan de acuerdo a lo siguiente:

$$kg_t = \rho_1 kg_{t-1} + \varepsilon_t^{kg}$$

$$\mu_t = \rho_{21} \mu_{t-1} + \varepsilon_t^{\mu}$$

$$v_t = \rho_3 v_{t-1} + \varepsilon_t^{v}$$

Reproducimos la función de utilidad y la función de producción por comodidad:

$$u(c_t) = \ln c_t .$$

$$y_t = Akp_{t-1}^{\alpha} kg_{t-1}^{\gamma} \mu_t$$

En consecuencia, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v_t c_t^{-1} = \beta E_{t+1} \left\{ c_{t+1}^{-1} \left[\alpha Akp_t^{\alpha-1} kg_t^{\gamma} \mu_{t+1} + (1-\delta \right] v_{t+1} \right\}$$

$$C_t + kp_t + kg_t \leq Akp_{t-1}^{\alpha} kg_{t-1}^{\gamma} \mu_t + (1-\delta) kp_{t-1} + (1-\delta) kg_{t-1}$$

$$kg_t = \rho_1 kg_{t-1} + \varepsilon_t^{kg}$$

$$\mu_t = \rho_{21} \mu_{t-1} + \varepsilon_t^{\mu}$$

$$v_t = \rho_3 v_{t-1} + \varepsilon_t^{v}$$

en donde, dados unos valores iniciales de $(kp_{-1},\ kg_{-1},\ \mu_{-1},\ v_{-1})$ y una realización exógena de $(\varepsilon_t^{kg},\ \varepsilon_t^{\mu},\ \varepsilon_t^{v})$ podemos encontrar los valores de las variables (c_t, kp_t). Ahora describiremos el algoritmo PEA en detalle.

Algoritmo

1. Sustituimos la expectativa condicional por una función que tenga como argumentos las variables de estado. Por ejemplo, supongamos que utilizamos una forma funcional del tipo:

$$v_t c_t^{-1} = \beta F \exp\left[a \ln kp_{t-1} + b \ln kg_{t-1} + c \ln \mu_t + d \ln v_t\right]$$

2. Dados ciertos valores de los parámetros del modelo $(A, \alpha, \delta, \beta, \gamma)$, la descripción del proceso tecnológico $\left(\rho_i, i = 1,2,3; \varepsilon^{kg} \sim N(0, \sigma^{kg,2}), \varepsilon^{\mu} \sim N(0, \sigma^{\mu,2}), \varepsilon^{v} \sim N(0, \sigma^{v,2})\right)$[7], condiciones iniciales para $(kp_{-1},\ kg_{-1},\ \mu_{-1},\ v_{-1})$ y unas condiciones iniciales para el vector B = (F, a, b, c, d) resolvemos el sistema de ecuaciones para una serie (T) larga del *shock*. Es decir, encontramos la secuencia $\left[c_t, kp_t\right]_{t=1}^{t=T}$.

[7] Hay que señalar que los procesos estocásticos sólo se generan una vez y no se repite la realización del *shock*.

3. Hemos encontrado la trayectoria de las variables endógenas para un valor inicial de B = (F, a, b, c, d). Ahora estimamos los parámetros de la función propuesta con las series generadas. La estimación la hacemos con mínimos cuadrados no lineales.[8] A los parámetros estimados les llamaremos B^1.
4. Volvemos al paso 2, pero ahora utilizamos B^1 para calcular las variables endógenas y encontramos un nuevo vector, al cual llamaremos B^2. Repetimos el paso 3.
5. En el momento que el vector B^{n-1} se acerca arbitrariamente al vector B^n decimos que hemos convergido. Las variables endógenas asociadas al vector B^n son la solución al problema.

Como se puede observar, el método es relativamente sencillo de aplicar para resolver modelos con varias variables de estado. En nuestro caso tenemos cuatro variables de estado, lo cual hace que el costo computa-

[8] Recuerde que queremos encontrar una función que aproxime "bien" la expectativa condicional que se encuentra del lado derecho de la ecuación de Euler. Una vez generada una primera serie para las variables endógenas, actualizamos el valor del vector B con una estimación por mínimos cuadrados no lineales de los parámetros de la función . Es decir:

$$c_{t+1}^{-1}[\alpha A kp_t^{\alpha-1} kg_t^{\gamma} \mu_{t+1} + (1-\delta)]v_{t+1} = \hat{F} kp_{t-1}^{\hat{a}} kg_t^{\hat{b}} \mu_t^{\hat{c}} v_t^{\hat{d}} + \varepsilon_t$$

En donde suponemos que $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$. Los parámetros a estimar son los elementos del vector B. El termino dependiente lo calculamos utilizando las series que obtuvimos en el paso 1. Para llevar a cabo la estimación de mínimos cuadrados no lineales, se linealiza con una expansión de Taylor alrededor de un conjunto inicial de valores iniciales. La ecuación no lineal se vuelve a linearizar alrededor de los coeficientes estimados y así sucesivamente hasta que los coeficientes converjen. Este procesos iterativo se describe en Pindick y Rubinfield (1981).

cional de métodos como el de iteración en la función de valor sean demasiado costosos.[9]

Una de las preguntas que nos podemos hacer es que tan "exacta es la solución" que hemos encontrado. La exactitud de la solución depende de la forma funcional utilizada. En nuestro caso, depende del grado del polinomio utilizado. Por ejemplo, nosotros estamos utilizando un polinomio de primer grado. Si aumentamos el grado (permitiendo que términos cruzados y términos de mayor orden aparezcan en el polinomio utilizado) podemos mejorar arbitrariamente la solución.

IV. SOLUCIÓN DEL MODELO

A continuación presentamos la solución del modelo a través de PEA. Para resolverlo es necesario especificar los parámetros utilizados, las condiciones iniciales, los supuestos sobre los procesos exógenos, las formas funcionales específicas así como una serie de parámetros técnicos.[10] Después de discutir brevemente lo anterior, se presentan las características de la solución, un análisis de sensibilidad y discutimos los resultados.

Es conveniente insistir en que el ejercicio que presentamos aquí no intenta reproducir ningún hecho estilizado de ningún conjunto de datos en particular (ya sea un país específico o periodo histórico) del tipo utilizado en la literatura de los ciclos económicos reales. Kydland y Prescott

[9] Sin embargo, uno de los problemas de PEA es que no es sencillo encontrar condiciones iniciales para B. Otra limitante es que este algoritmo busca solamente alrededor de aquellos puntos que parecen más factibles de suceder (conocido como *Endogenous Oversampling*. Aunque esto parece una limitante, el objetivo de hacer "endogenous oversampling" es reducir el tiempo de cómputo, ya que en caso contrario se le asigna la misma probabilidad de ocurrencia a todos los puntos de la parrilla. Lo ideal sería utilizar la intuición que tenemos sobre el modelo en cuestión para ahorrar tiempo de cómputo y sólo mirar aquellas regiones de búsqueda que nos interesan.

[10] Criterios de convergencia, detalles del generador de números aleatorios, etc. El lector interesado puede conseguir los programas de cómputo (están en código FORTRAN) en donde se especifican dichos detalles escribiendo a rojas@master.ster.itam.mx

(1990) y Cooley (1995) han resaltado la manera en que distintos modelos han intentado reproducir características peculiares de ciertas economías (sobre todo la norteamericana) utilizando el modelo neoclásico. En el ejercicio realizado por nosotros, queremos destacar las ventajas de un algoritmo cuando lo aplicamos a un modelo más complicado, pero que tiene un interés teórico y empírico de gran relevancia. En este sentido, lo que hacemos es "teoría en la computadora", ya que mediante el apoyo de métodos de simulación abordamos la discusión teórica de un modelo específico. De esta manera, la elección de parámetros, condiciones iniciales y procesos estocásticos no intentan reproducir ningún hecho estilizado, aunque si respetamos la intuición económica que esta detrás de estos valores y del espíritu de los modelos de equilibrio general.

Parámetros

Los valores de los parámetros que se utilizaron se tomaron de García-Mila (1987). Estos valores permiten que el modelo presente características que, bajo ciertas condiciones, podrían reproducir algunos hechos estilizados y, además, tienen cierta intuición con las características de una economía, al menos en el estado estacionario. Por ejemplo, la tasa de depreciación es del 2.5% trimestral, equivalente al 10% anual, que es la tasa observada en Estados Unidos; la participación del capital privado es de 32%, lo cual refleja los datos para la economía norteamericana después de la posguerra; el valor del factor de descuento se fija para que el rendimiento real sea, en el estado estacionario, igual a 2.8% real, la cual ha sido la tasa de rendimiento de largo plazo observada en la economía norteamericana en los últimos años; y la constante en la función de producción solamente es una variable de escala.

En el caso del parámetro asociado al capital público hay una gran discusión sobre su valor,[11] por lo que hacemos un pequeño análisis de sen-

[11] Véase Aschauer (1989) para una discusión sobre este tema.

sibilidad para estudiar el impacto de este parámetro en la solución, lo cual es uno de los ejercicios que se pueden hacer con soluciones numéricas: estudiar teóricamente el impacto de un parámetro, del cual se conocepoco o no se pueden hacer estimaciones econométricas, sobre la trayectoria dinámica de las variables endógenas.

En el caso de los procesos estocásticos, solamente suponemos que se comportan como procesos AR(1). No se hizo ninguna identificación de estos procesos y se generaron en la computadora utilizando los valores mencionados antes.[12]

A continuación, aparecen los valores específicos de los parámetros utilizados así como las características del *shock* tecnológico[13]:

Parámetros

β	0.973
γ	0.33
α	0.32
δ	0.025
A	0.394

Procesos estocásticos

$\rho 1$	0.75
$\rho 2$	0.95
$\rho 3$	0.75
ε^{kg}	0.01
ε^{μ}	0.02
ε^{v}	0.01

Condiciones iniciales

Para encontrar el valor del capital en el periodo *0* utilizamos el valor de éste en el estado estacionario no estocástico. En el caso de los procesos

[12] También podemos especificar procesos más complicados o, incluso, identificar los procesos para una economía en particular, como lo llevo a cabo García-Mila. Sólo hay que destacar que si los procesos son de un orden más alto, debemos incluirlos en la especificación de la función que utilizamos para aproximar la expectativa condicional.

[13] Los procesos estocásticos se generaron con una subrutina de números aleatorios (véase Press, Teukolsky, Vettering y Flannery (1992)).

estocásticos, asignamos un valor inicial arbitrario y utilizamos los valores del *shock* una vez que se ha estabilizado alrededor de su estado estacionario.

Condiciones iniciales

k_1	3.5

Condiciones iniciales para el vector B = (F, a, b, c, d)

En principio, podemos tomar arbitrariamente valores para el vector B. Sin embargo, esto puede ocasionar que el algoritmo tome mucho tiempo para encontrar la solución e, incluso, no llegar a encontrar alguna. Otra manera de proceder es utilizar la solución de alguna variante del modelo, a fin de acotar la búsqueda. De esta forma, el algoritmo podrá encontrar con mayor facilidad una solución y, además, converger más rápidamente. En nuestro caso, tomamos la solución al modelo sin trabajo presentada por Den Haan y Marcet (1990).[14]

Parámetros del polinomio

F	4.168
a.	-.6526
b.	-.6033
c.	-.3736
d.	-.8517

[14] A su vez, Den Haan y Marcet (1990) parten de la solución al modelo con 100% de depreciación y función de utilidad logarítmica. Este modelo tiene una solución analítica, por lo que se pueden obtener la función de valor exacta y compararla con la solución obtenida con PEA.

Para este ejercicio utilizamos T = 2,500 (es decir, si entendemos que cada periodo de tiempo es un trimestre, estamos simulando la economía para un horizonte de 625 años), por lo que tenemos 2500 observaciones para el consumo y el capital privado.[15]

Solución del Modelo

La solución al modelo son los parámetros de la forma funcional propuesta, por que en este caso tenemos:

F	a	B	c	d
3.29169174	-0.61645301	0.24882556	-0.59805424	0.31688723

En las gráficas 1-5 se presentan las variables del modelo (sólo presentamos las gráficas para las variables endógenas y para los *shocks*). Recuerde que el capital publico y los *shocks* a la producción y a la función de utilidad se crean con un generador de números aleatorios.

En el Cuadro 1, se presentan algunas propiedades estadísticas de nuestra economía artificial. Debido al carácter experimental de nuestro ejercicio, estos datos no tienen ninguna relación con hechos estilizados de ninguna economía.

CUADRO 1

Variable	Media	Des. St.	t-1	t	t+1
Y	0.66448	0.05719	0.97	1	0.97
C	0.54724	0.04756	0.96	0.96	0.93
I	0.07575	0.02566	0.47	0.53	0.5
K	3.0436	0.25596	0.9	0.88	0.84
G	0.0412	0.01739	-0.026	-0.02	0.004
Kg	1.6485	0.02472	0.016	0.03	0.05

[15] El resto de las variables endógenas se puede recuperar a partir de estas dos variables.

Análisis de Sensibilidad

En primer lugar, presentamos la solución del modelo cuando modificamos los valores de los distintos parámetros de nuestro modelo. Con el fin de simplificar el análisis, solo cambiamos los parámetros que, *a priori*, nos parecen más significativos, como lo son los asociados al capital público o a la función de producción, las preferencias y los *shocks* estocásticos. Debemos señalar que el análisis de sensibilidad dependerá de cuáles parámetros son desconocidos (es común que para muchos países no se hayan hecho estimaciones adecuadas de estos parámetros); de si existe duda o debate sobre el valor de los parámetros; y también de un interés teórico, como lo es indagar sobre el efecto del capital público sobre el capital privado.

A continuación presentamos la solución al modelo cuando tomamos distintos valores para los parámetros del modelo original[16]:

CUADRO 2

Análisis de sensibilidad

	F	A	B	c	d
$\gamma = 0.$	3.31060787	-0.61645301	0.24882556	-0.59805424	0.31688723
$\gamma = 0.2$	3.34227594	-0.61763964	0.27398107	-0.60807386	0.31773399
$\gamma = 0.4$	3.24818562	-0.61523179	0.2283042	-0.58888167	0.31567532
$\alpha = 0.2$	2.65294256	-0.47254123	0.31702515	-0.63039589	0.32904502
$\alpha = 0.4$	3.58148948	-0.68800283	0.21450245	-0.59924452	0.32297443
$\beta = 0.99$	3.82705367	-0.58949697	0.17073887	-0.54236746	0.23767883
$\beta = 0.95$	2.80603019	-0.63342753	0.34720959	-0.64400147	0.39748369
$\delta = 0.03$	3.28653504	-0.62260700	0.27818242	-0.62843064	0.32679861
$\delta = 0.02$	3.30273094	-0.61082589	0.22078719	-0.56854765	0.30579238
A = 0.5	2.75993265	-0.60168693	0.18022525	-0.59332996	0.33141245
A = 1	1.56709490	-0.55949621	0.07381184	-0.60401415	0.36692006
$\varepsilon^{kg} = 0.02$	3.20266844	-0.58818046	0.24206602	-0.61357104	0.30714721
$\varepsilon^{\mu} = 0.00$	3.00458759	-0.53062060	0.24075857	-0.65964795	0.30367364

[16] Las condiciones iniciales utilizadas para resolver estas simulaciones siempre fueron las de la solución original.

Efecto del capital público

Por último, presentamos el efecto que tiene sobre las variables endógenas de nuestra economía artificial modificaciones en el parámetro asociado a la productividad del capital público. Existe una gran polémica sobre el verdadero valor que tiene este parámetro para distintas economías y durante diversas épocas, por lo que sería importante destacar su impacto para motivar un estudio empírico más profundo.

CUADRO 3

$\gamma = 0.1$

Variable	Media	Des. St.	t-1	t	t+1
Y	0.561	0.048	0.971	1	0.971
C	0.456	0.04035	0.956	0.961	0.929
I	0.064	0.023	0.422	0.469	0.467
K	2.577	0.217	0.884	0.862	0.831
G	0.041	0.017	-0.013	-0.007	-0.011
Kg	1.6485	0.025	-0.011	-0.004	-0.001

CUADRO 4

$\gamma = 0.15$

Variable	Media	Des. St.	t-1	t	t+1
Y	0.582	0.0498	0.072	1	0.972
C	0.475	0.0417	0.957	0.961	0.93
I	0.0662	0.0233	0.432	0.481	0.475
K	2.6679	0.2241	0.889	0.866	0.835
G	0.0412	0.0173	-0.016	-0.011	-0.008
Kg	1.6485	0.0247	-0.0054	0.004	0.011

CUADRO 5

$\gamma = .25$

Variable	Media	Des. St.	t-1	t	t+1
Y	0.62625	0.0537	0.972	1	0.972
C	0.51536	0.0448	0.958	0.961	0.929
I	0.07122	0.0245	0.453	0.507	0.49
K	2.8657	0.2402	0.897	0.873	0.841
G	0.0412	0.0174	-0.021	-0.017	-0.001
Kg	1.6485	0.0272	-0.006	-0.02	0.033

CUADRO 6

$\gamma = 0.4$

Variable	Media	Des. St.	t-1	t	t+1
Y	0.70024	0.0605	0.972	1	0.972
C	0.57865	0.0502	0.958	0.958	0.927
I	0.0801	0.0269	0.481	0.542	0.512
K	3.214	0.2719	0.904	0.879	0.846
G	0.04121	0.0174	-0.029	-0.028	0.009
Kg	1.6485	0.0247	0.023	0.043	0.064

Discusión de los resultados

El Cuadro 1 presenta las propiedades estadísticas del modelo para el caso en que el coeficiente del capital público es 0.33. Hay que destacar que estas propiedades dependen de los parámetros y funciones utilizadas.

En el Cuadro 2 se presenta la solución al modelo para distintos valores de los parámetros. En este caso sólo presentamos como cambia la función de política simulada con el PEA. Como se puede apreciar, la identificación de estos parámetros es muy importante para hacer un juicio certero sobre la función de política. Parámetros como el factor de descuento o los asociados a la productividad del capital privado y el público son fundamentales para entender el comportamiento estocástico de la economía. Uno de los parámetros relevantes en la discusión de política económica, sobre todo en materia de gasto público, es el asociado a la productividad del capital público. Los Cuadros 3-6 presentan la solución al modelo para distintos valores del coeficiente del capital público y manteniendo constantes los demás parámetros.

Las simulaciones presentadas indican que un gasto público más productivo propiciará un aumento en el bienestar de la sociedad. Como puede apreciarse, el nivel del consumo aumenta para las distintas simulaciones, así como la producción y la acumulación de capital privado.

También se puede apreciar que la desviación estándar del consumo, la producción y la inversión aumentan a medida que aumenta el valor del coeficiente del capital público. Esto obedece a que una mayor productividad del capital público ocasiona una respuesta más acusada de las variables endógenas ante *shocks* en la economía. Hay que destacar que el comportamiento del capital publico se realizó sin que estuviera correlacionado con la producción para resaltar exclusivamente el efecto del parámetro en el capital público.

De esta manera, podemos resaltar el efecto que tiene la inversión pública en el bienestar y las características estocásticas de nuestra economía. Una correcta identificación de los parámetros asociados a la función de producción nos permitirá un mejor diseño de la política de gasto público y apreciar sus efectos sobre el comportamiento de corto plazo. Sin embargo hay que hacer notar que este ejercicio de ninguna manera es completo, ya que se debería tomar en cuenta las posibilidades de financiamiento del gasto público. De esta manera, una política de gasto productivo –como el capital público– puede ver minado su alcance si las externalidades negativas provenientes de una mayor imposición, al no disponerse de impuestos *lump-sum*, ocasionan una reducción en la acumulación de capital.

V. CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue resolver un modelo de equilibrio general neoclásico en donde los agentes toman decisiones optimas en un entorno de incertidumbre. Una de las características del modelo es que existe un bien público que toma la forma de capital público. Éste aumenta las posibilidades de producción de la economía, en función de la productividad de dicho capital, y se financia con un impuesto del tipo *lump-sum*. Debido a que no se puede encontrar una solución analítica del modelo, tenemos que utilizar métodos numéricos. Ahora bien, el modelo consiste de cuatro variables de estado: el capital privado, el capital público y dos procesos estocásticos. En consecuencia, es muy costoso utilizar métodos que iteran en la función de valor ya que estamos frente a lo que se conoce como "*course of dimensionality*".[17] En consecuencia utilizamos un método, el de Parametrización de Expectativas (PEA), que nos permite resolver de una manera sencilla y poco costosa este modelo.

Una vez que resolvemos el modelo, especificando los parámetros, las formas funcionales, los *shocks* estocásticos y las condiciones iniciales, presentamos un análisis de sensibilidad en el cual se estudia el efecto que tienen distintos valores de los parámetros sobre la solución del modelo. El efecto de estos nuevos valores sobre el comportamiento de las variables endógenas reproduce, de manera cualitativa, los resultados teóricos que se conocen en este tipo de modelos.[18]

La solución de este modelo también nos permite estudiar el efecto de otras variables que no han sido discutidas ampliamente en el modelo neoclásico. Tal es el caso del capital publico, el cual ha sido poco estu-

---

[17] Este término se refiere a que para resolver problemas que utilizan parrillas, como el método de iteración en la función de valor, la parrilla consta de 4 dimensiones, por lo que la búsqueda crece exponencialmente, ocasionando que sea muy costoso (una verdadera maldición) instrumentar dichos métodos.

[18] Véase Blanchard y Fischer (1990) cap. 1, Azariadis (1993), cap. 13 y Romer (1995) cap. 2 y 4.

diado en este tipo de modelos. A pesar de que el presente artículo no tiene por objetivo estudiar los distintos aspectos alrededor de la importancia del capital publico en la economía,[19] se puede observar en el cuadro 2 que una mayor productividad del capital público (medido como cambios en γ) ocasiona una mayor acumulación de capital privado y un mayor consumo. Sin embargo, hay que señalar que estos resultados deben tomarse con cierta precaución, ya que estamos suponiendo que la única forma de financiar la inversión publica es a través de un impuesto *lump-sum*. Por otra parte, la economía presenta una mayor volatilidad entre más productivo es el capital público.

En conclusión, el desarrollo de la macroeconomía moderna en los últimos anos se ha centrado en la profundización del modelo neoclásico como herramienta analítica fundamental. La extensión de este modelo para poder incorporar incertidumbre, heterogeneidad, mercados incompletos, sistema financiero, externalidades, etc. ha sido un gran avance teórico. La implementación de métodos como el PEA nos permite pensar que podemos utilizarlos para el diseño de la política económica. Poco a poco, si se quiere, pero cada vez contamos con mas herramientas para un buen hacer de política económica.

---

[19] El interés deberia ir desde estudios empíricos sobre el papel de capital público en distintas economías para distintos periodos de tiempo. Entre los pocos estudios serios se encuentra el de Easterly y Rebelo (1993), el cual encuentra una correlación positiva entre la inversión publica y la privada para un panel de datos. Para la economía norteamericana hay distintos estudios sobre capital público, pero con resultados contrapuestos. Véase Rojas (1994) para una revisión de la literatura. Para México no hay estudios, quizá porque no hay series confiables sobre inversión pública.

BIBLIOGRAFÍA

Aschauer, D. A., (1989), "Is Public Expenditure Productive?", *Journal of Monetary Economics*, 23.

Azariadis, C. (1993), *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell.

Arrow, K. J. y Kurz, M., (1975), *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, The Johns Hopkins Press.

Blanchard, O. y Fischer, S. (1990), *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press.

Cooley, T. (editor) (1995) *New Frontiers in Bussines Cycles Research*, Princeton.

Den Haan, Wouter J., (1990), "The Optimal Inflation Path in a Sidrauski-Type Model with Uncertainty", *Journal of Monetary Economics*, Junio, v. 25, núm. 3, pp. 389-409.

Den Haan, Wouter J. y Marcet Albert, (1990), "Solving the Stochastic Growth Model by Parametrizing Expectations", *Journal of Business & Economic Statistics*, January, vol. 8, núm. 1.

Easterly, W. and Rebelo, S. (1993), "Fiscal Policy and Economic Growth: An Empirical Investigation", *Journal of Monetary Economics*, vol. 32, núm. 3.

Garcia-Mila, Teresa, (1987), "Government Purchases and Real Output: an Empirical Analysis and Equilibrium Model with Public Capital", *Documents of Discussion*, Instituto de Análisis Económico.

Ketterer, Joan y Marcet Albert, (1989), "Introduction of Derivative Securities: a General Equilibrium Approach", *Working Paper*, Universitat Pompeu Fabra.

Kydland, F. y Prescott E. (1990), "Business Cycles: Real Facts and a Monetary Myth", en *Quarterly Review*, Spring.

Marcet, Albert, (1989), "Solving Non Linear Stochastic Models by Parametrizing Expectations", *GSIA*, Carnegie Mellon University, preliminary draft.

Otker, Inci, (1989), "How Far Are We Away From the Ricardian Equivalence with Distortionary Taxation: A Numerical Analysis", *GSIA*, Carnegie Mellon University, Working Paper.

Press, W.H., Teukolsky S.A., Vettering, W.T. and Flannery B.P. (1992) *Numerical Recipes in FORTRAN. The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press.

Pindick, R.S., y Rubinfeld, D.L., (1981), *Econometric Models and Economic Forecast*, Mcgraw-Hill.

Rojas, German, (1994), "Optimal Taxation in a Stochastic Growth Model with Public Capital", *Working paper*, Universitat Pompeu Fabra.

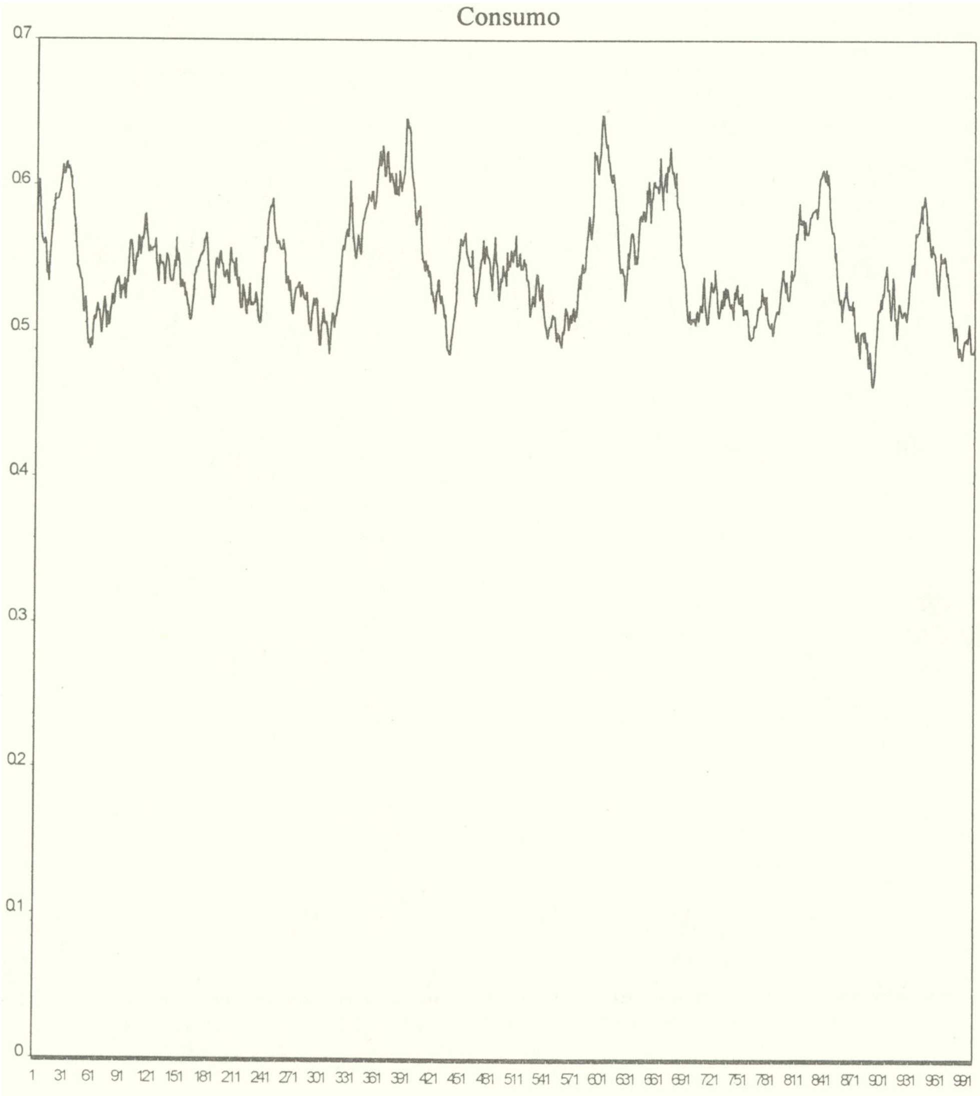
Rojas, German, (1997), "Métodos de Simulación en Modelos Dinámicos", en el libro *Temas de Economía Matemática y Econometría*, UAM.

Romer, D., (1996), *Advandec Macroeconomics*, Ed. Mcgraw-Hill.

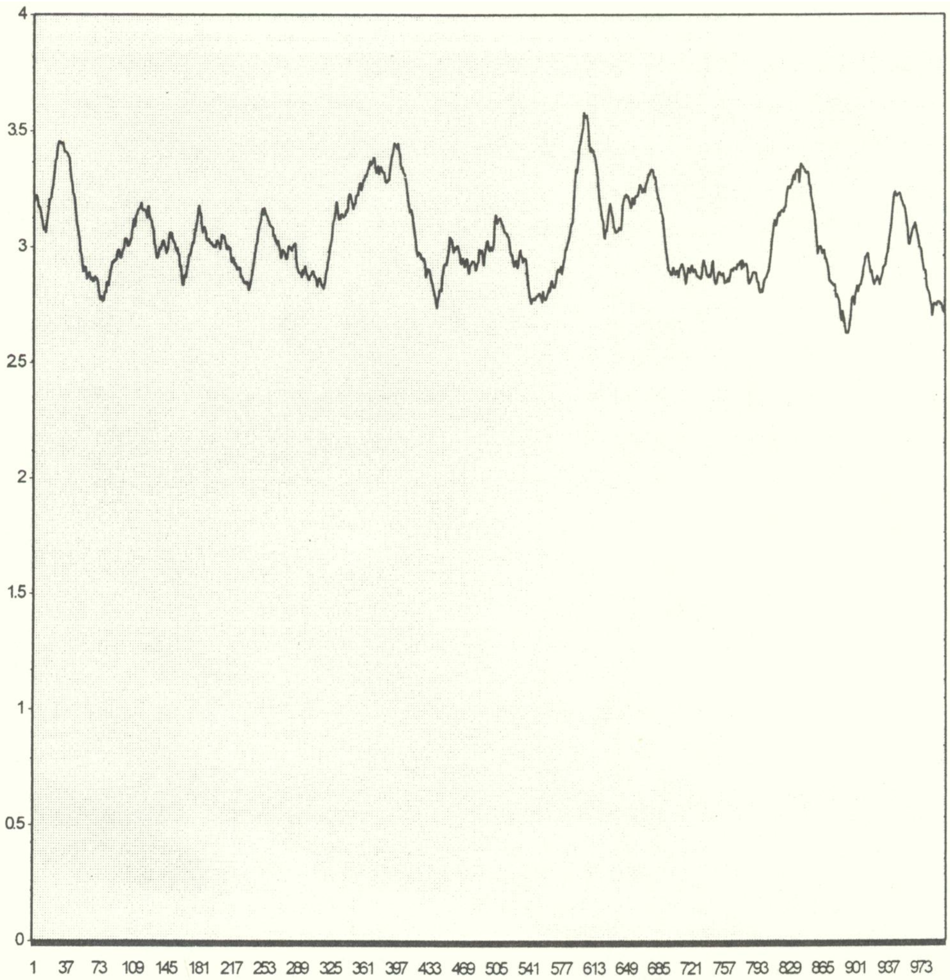
Sims, Ch., (1985), "Solving Nonlinear Stochastic Equilibrium Models' Backwards", *Center for Economic Research*, University of Minnesota, Working Paper.

Taylor, John y Uhlig, Harald, (1990), "Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: a Comparision of Alternative Solution Methods", *Journal of Business & Economic Statistics*, January, vol. 8, núm. 1.

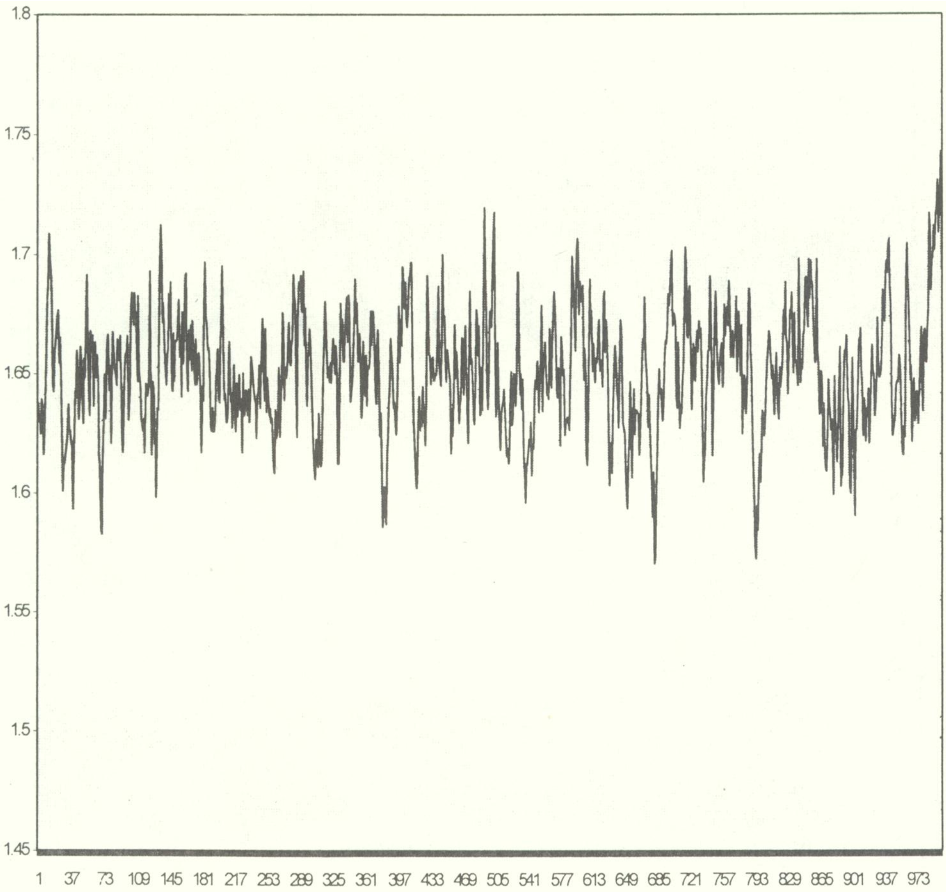
Gráfica 1


Consumo
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1 31 61 91 121 151 181 211 241 271 301 331 361 391 421 451 481 511 541 571 601 631 661 691 721 751 781 811 841 871 901 931 961 991

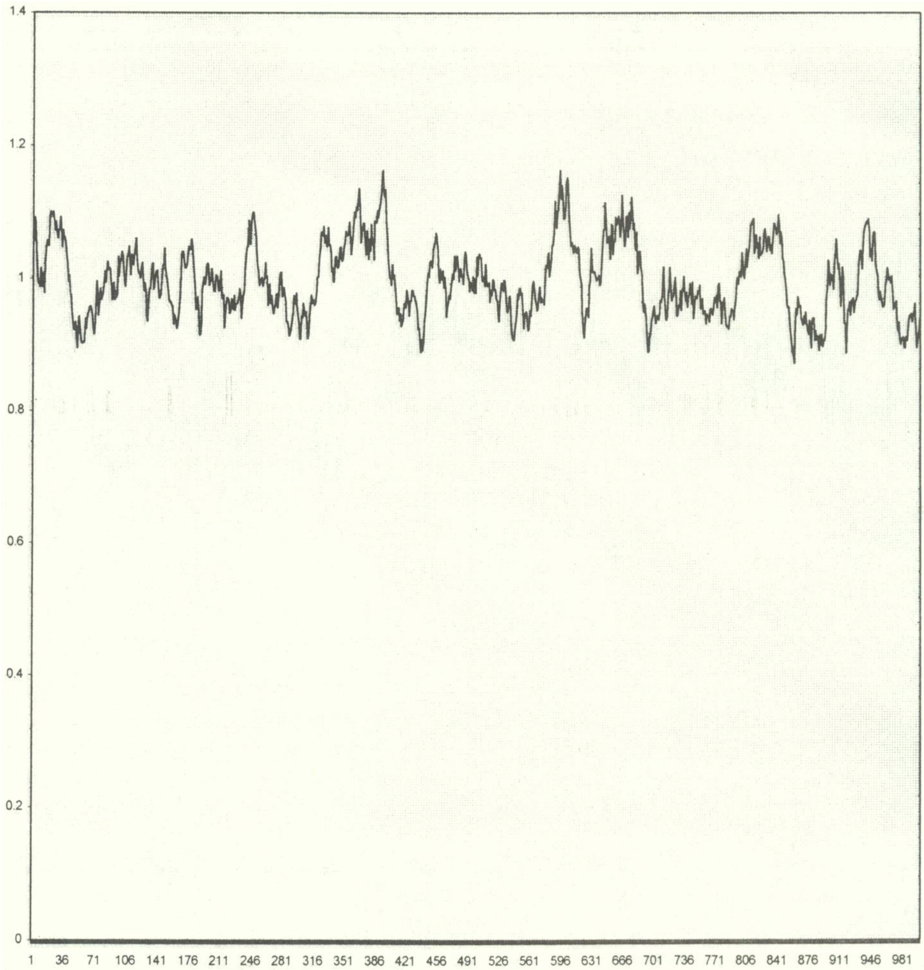
Gráfica 2
Capital Privado



Gráfica 3
Capital Público



Gráfica 4
Shock Productivo



Gráfica 5
Shock en las Preferencias