Investigación Económica, vol. LIX: 228, abril-junio de 1999, pp.45-96

CAOS EN UN MODELO DINÁMICO DE DOS SECTORES*

JOSÉ RAMÓN GUZMÁN**

INTRODUCCIÓN

Es importante el comportamiento caótico en los modelos que gobiernan sistemas económicos. Esencialmente la importancia radica en que la estimación econométrica o estadística de datos iniciales en cualquier variable siempre tiene pequeños errores. Así, al "echar a andar" un sistema dinámico modelo no lineal caótico que gobierne un fenómeno económico no es posible predecir el comportamiento de las variables en el largo plazo, pues errores pequeños en las condiciones iniciales dan errores grandes en la evolución temporal de las variables.

Manuscrito recibido en abril de 1998, versión final, noviembre de 1998.

* El autor agradece a: J. Ibarra por sugerir el problema de investigación; por dedicar tiempo y paciencia a la explicación del modelo; a M. Puchet por sus observaciones y comentarios; a Mónica Sánchez por la captura del texto en Latex; a los árbitros anónimos que contribuyeron con sus valiosas opiniones y sugerencias; al proyecto: Programación y simulación de un modelo intersectorial de insumo producto dinámico para la economía mexicana, Supercómputo DGSCA SC-004896; al proyecto: Programación y simulación de un modelo intersectorial de insumo-producto dinámico para la economía mexicana, para evaluar diversos escenarios de política económica. PAPIIT IN-306596; y al proyecto: CIRCULO: Un sistema de software para el análisis visual interactivo de sistemas dinámicos en la circunferencia. PAPIIT\ IN-502096.

** Investigador del Instituto de Investigaciones Económicas. UNAM. Correo electrónico: jRGUZMAN@economiah2.torre2.unam.mx

En las siguientes secciones del trabajo investigaremos modelos de insumo producto no lineales; la principal conclusión es que el comportamiento caótico se puede presentar en este tipo de modelos.

Es típico encontrar sistemas dinámicos caóticos de tiempo discreto en varias disciplinas científicas. Véanse por ejemplo: Flaschel, P. y Franke, R. Semmler, W. (1995); Gabisch, G. y Walter, H. (1982); Terman, D. (1991); Guzmán, J.

UN MODELO SIMPLE

El objetivo de esta sección es explicar R. y Carrillo, H. (1994)y Percival, I. y Vivaldi, F. 1987). un modelo simple y que sirva para entender la siguiente sección.

Empezaremos por un ejemplo simplificado. El modelo en investigación es un esquema de insumo–producto de 2 sectores cuyas variables endógenas son los precios, cantidades y tasa promedio de ganancia. Los sectores en consideración son los que producen maquinaria y bienes de consumo, respectivamente; sector 1 y sector 2.

Los modelos sectoriales desde sus inicios han sido importantes. En el nivel estático y lineal han tenido aplicabilidad en la planificación.

Es obvio que en nuestros días y en el planeta (no sólo a nivel nacional), todos tenemos relaciones económicas con todos; relaciones directas o indirectas. Además, estas relaciones están en constante movimiento.

Los modelos de insumo producto dinámico nos proveen con algo de información cuando tratamos con compras y ventas en el tiempo y entre varios sectores.

Las cantidades se determinan a partir de las condiciones teóricas: oferta = demanda de insumos corrientes + consumo de asalariados + consumo de no asalariados; en símbolos:

$$X=MX+C^{a}+C^{na};$$

donde $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es un vector de producción, $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz de insumo producto $C^a = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{na} \end{pmatrix}$ es el vector de consumo de asalariados y $C^{na} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{na} \end{pmatrix}$ es el vector de consumo de no asalariados.

El primer supuesto es el de que los asalariados no ahorran; esto es gasto de asalariados = ingreso

$$p_2 C^a = Y$$

Obsérvese que la condición de que los asalariados no ahorran es muy significativa en el sentido de que tienen prohibido tanto el endeudamiento como el ahorro, como se quiera ver. En realidad es muy común que la gente o las naciones pidan dinero o ahorren. También, es cierto que generalmente un asalariado gasta todo lo que gana.

El ingreso se normaliza a $Y = 1$. De esta forma $p_2 = \frac{1}{c^a}$ es el precio al que vende la producción el sector 2. La dinámica importante está en el precio p_1 del sector 1 pues el precio p_2 permitirá ver el comportamiento del precio p_1.

El segundo supuesto es el de que precios = costos en crecimiento, es decir:

$$\begin{aligned} p' &= (p'M + YL')(1+\phi), \\ &= (p'M + L')(1+\phi) \end{aligned}$$

La variable ϕ es la tasa promedio de ganancia.
De la anterior relación se puede inferir:

$$\begin{aligned} p'(I-M) &= \phi(p'M + L') + L', \\ p' &= \phi(p'M + L')(I-M)^{-1} + L'(I-M)^{-1}. \end{aligned}$$

Sea $R=(I-M)^{-1}$,también se tiene:

$$p' = \phi\left(p' M + L'\right)R + L' R.$$

Si ahora se consideran las siguientes relaciones que se infieren de que los asalariados no ahorran, se tiene:

$$p_2 C^a = (p_1, p_2)\begin{pmatrix} 0 \\ c_a \end{pmatrix} = 1$$

$$p' C^a = \phi\left(p' M + L'\right)RC^a + L' RC^a = 1$$

De esta manera se puede despejar la tasa promedio de ganancia ϕ :

$$\phi = \frac{1 - L' RC^a}{\left(p' M + L'\right)RC^a}.$$

El tercer supuesto se refiere a que se puede estimar un mecanismo iterativo que gobierna la formación de precios; es decir la tasa promedio de ganancia ϕ es una función del vector de precios $p=\left(p_1, p_2\right), \phi\left(p_1, p_2\right)$; por otra parte los precios dependen de la tasa promedio de ganancia ϕ en la forma que ya vimos:

$$\left(p_1, p_2\right) = \phi\left(\left(p_1, p_2\right)M + L'\right)R + L' R.$$

Entonces:

$$\left(p_1, p_2\right) = \frac{1 - L' RC^a}{\left(\left(p_1, p_2\right)M + L'\right)RC^a}\left(\left(p_1, p_2\right)M + L'\right)R + I' R.$$

El precio de cálculo no trivial es $p_1 = x$.

Definiendo:

$$\begin{aligned}
\alpha &= (r_{11}m_{11} + r_{21}m_{12})(1 - c_a(l_1 r_{12} + l_2 r_{22})),\\
\beta &= \left(2l_1 r_{11} + 2l_2 r_{21} + \frac{1}{c_a}(r_{11}m_{21} + r_{21}m_{22})\right)(1 - c_a(l_1 r_{12} + l_2 r_{22})),\\
\gamma &= c_a(r_{12}m_{11} + r_{22}m_{12}),\\
\delta &= (r_{12}m_{21} + r_{22}m_{22} + l_1 r_{12} + l_2 r_{22}),
\end{aligned}$$

el cálculo del precio $p_1 = x$ queda definido por la relación:

$$x(k+1) = \frac{\alpha x(k) + \beta}{\gamma x(k) + \delta} = F(x(k)).$$

Para la existencia del punto fijo se debe resolver la ecuación cuadrática:

$$\gamma x^2 + (\alpha + \delta)x + \beta = 0$$

La condición para que esta ecuación tenga un punto fijo real y positivo es que los parámetros γ, y β satisfagan la desigualdad:

$$\gamma\beta < 0.$$

De acuerdo a como están definidos los parámetros, esta condición implica a su vez:

$$1 - c_a(l_1 r_{12} + l_2 r_{22}) < 0,$$

pues γ es positivo. Con lo cual se debe tener que $\alpha < 0$.

Si pedimos que existan dos puntos fijos positivos se debe tener además que $\alpha < +\delta$.

En este caso los puntos fijos estables están dados por las fórmulas

$$x_{\pm} = \frac{-(\alpha+\delta) \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4\gamma\beta}}{2\gamma}$$

Por otra parte, los puntos fijos positivos $x_{\pm}$ que resultan de resolver la ecuación cuadrática son estables si la función $F(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, es tal que

$$\lfloor F'(x_{\pm}) \rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x_{\pm} + \delta)^2} \right\rfloor < 1$$

Evaluando esta desigualdad de la derivada en los valores de los puntos fijos $x_{\pm}$, se obtiene la siguiente relación que debe satisfacer los parámetros para que los puntos fijos sean estables:

$$\left\lfloor \frac{4(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\left(-\alpha + \delta \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4\gamma\beta}\right)^2} \right\rfloor < 1.$$

Si la condición anterior se satisface para alguna elección de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ existe una cuenca de atracción para cada punto fijo estable.

A título de ejemplo dinámico consideremos una función f parecida a F que tenga dos soluciones positivas y que gobernaría la formación del precio x en la forma iterativa $x(k+1) = f(x(k))$.

Definamos:

$$f(x(k)) = \frac{x(k)-a}{x(k)-1},$$

a es un parámetro fijo pero arbitrario.

Los puntos fijos de este sistema dinámico están dados por:

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-a}.$$

Estos puntos fijos son reales y positivos si $a \in (0,1)$.

La condición suficiente de estabilidad de los puntos fijos $x_{\pm}$ es $|f'(x_{\pm})| < 1$ y no se satisface pues $|f'(x_{\pm})| = 1$; pero estos puntos fijos son estables ya que cualquier otro punto $x > 0$ es una órbita periódica de período 2 del sistema dinámico; es decir para iteraciones pares de $f : f^{2n}(x) = x$, para $x \neq 1$. Para iteraciones impares, la solución de $f^{2n+1}(x)$ son los puntos $x_{\pm}$. Por consiguiente, los puntos $x_{\pm}$ son puntos fijos estables con cuencas de atracción $(0,1)$ y $(1,\infty)$, respectivamente. Este es un caso de biestabilidad en el sistema que gobierna la formación de precios. El sistema tiene sensibilidad respecto de condiciones iniciales cerca del punto $x = 1$, donde no está definida la función f. En este caso el sistema es caótico en una vecindad de $\{1\}$ y sin incluir el 1.

El caso en el que $a \notin (0,1)$ también es simple; pues aunque el sistema no tiene puntos fijos reales, consta de una infinidad de órbitas periódicas de período 2.

Hay sistemas dinámicos en los que existe una infinidad de cuencas de atracción para cada punto fijo estable. Las cuencas de atracción de un punto fijo estable son un conjunto abierto. La frontera de las cuencas de atracción de uno y otro punto fijo estable son órbitas de periodo mayor que uno. Sobre este conjunto de órbitas periódicas el sistema dinámico que gobernaría el cálculo de precios es sensible respecto de condiciones iniciales; sobre este conjunto, resulta un sistema caótico. La dinámica de este tipo de sistemas no ha sido bien entendida y se conocen resultados parciales, véanse, por ejemplo, los intentos numéricos por entender la biestabilidad en Guzmán J. R., y Carrillo, H. y Ongay, F.(1994)y Bulajich, R.(1993).

Este ejemplo es simple porque el consumo de asalariados C^a es un vector constante.

En resumen, el paradigma que se presentó es un caso parecido del modelo cuya teoría se propone en Ibarra, J. (1995) y que en seguida presentamos. En la siguiente sección veremos el caso no constante del vector C^a.

EL MODELO DE JOSÉ IBARRA

En el modelo de José Ibarra los costos de capital no se calculan a la manera tradicional; las demandas de capital tampoco. En todos los costos y demandas se supone un efecto de tipo multiplicativo en los periodos de producción, tasas de crecimiento y de ganancia y coeficientes de reposición de capital. Por ende esta teoría es propositiva.

El cálculo de precios

Empezaremos por el subsistema de precios.

De nuevo supondremos que los asalariados no ahorran. Esto es, suponemos que C^a y $Y=1$ son el vector de consumo y salario de asalariados normalizado a 1. Entonces se tiene la relación:

$$p^t C^a = Y = 1. \qquad (P)c$$

El vector C^a se realiza como el sistema lineal de gasto propuesto por R. Stone, en 1954. Estas ecuaciones se eligen en vista de su simplicidad. Asimismo, han sido usadas para estimar demandas de varios países, véanse: Taylor, L. (1986) y Powell, Ll. C. and Williams, R. (1977). Esta ecuación aparece inicialmente para estimar sistemas de demanda de bienes en función de precios e ingreso. Esta relación dice simplemente que el gasto de asalariados se reparte en el gasto que hacen en el consumo mínimo y en el consumo excedente que depende de las propensiones a consumir y del ingreso disponible.

Así el vector de gasto de asalariados C^a se definirá.

Definamos también los siguientes vectores y matrices:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{pmatrix},$$

$$C^a = \begin{pmatrix} c_1^a \\ \vdots \\ c_n^a \end{pmatrix},$$

$$C^* = \begin{pmatrix} c_1^* \\ \vdots \\ c_n^* \end{pmatrix}, \textit{consumo mínimo}$$

$$b^a = \begin{pmatrix} b_1^a \\ \vdots \\ b_n^a \end{pmatrix},$$

es el vector de propensión a consumir y debe satisfacer la relación de que:

$$b_1^a + \ldots + b_n^a = 1$$

Entonces la ecuación es: *gasto de asalariados* = *gasto mínimo* + *gasto excedente*. La ecuación $(P)c$ se traduce en la siguiente relación:

$$\hat{p}C^a = \hat{p}c^* + b^a(Y + p'c^*).$$

En las coordenadas que se definen en cada variable y despejando C^a de la relación anterior se tiene el siguiente vector:

$$C^a = \begin{pmatrix} c_k^* + \dfrac{b_1^a\left(Y - \sum_{k=1}^{n} c_k^* p_k\right)}{p_n^1} \\ c_k^* + \dfrac{b_2^a\left(Y - \sum_{k=1}^{n} c_k^* p_k\right)}{p_2} \\ \vdots \\ c_k^* + \dfrac{b_n^a\left(Y - \sum_{k=1}^{n} c_k^* p_k\right)}{p_n} \end{pmatrix},$$

Obsérvese que este vector de demanda definido en los precios es no lineal es decir:

$$(p_1, \ldots, p_n) \to c^a(p_1, \ldots, p_n),$$

es no lineal.

Por otra parte, la condición de formación de precios será: *precios* = *costos.*

De esta forma las ecuaciones están dadas por las siguientes relaciones:

P^t = ***costos* = *costos corrientes* + *costos de capital.***

Se define $p^t = (p_1, \ldots, p_n)^t$.

Explicaremos los términos de *costos corrientes* y *costos de capital.*

Costos Corrientes

Los costos $p'M$ y YL representan, respectivamente:
$p'M$ costos de los insumos corrientes:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i m_{ij} = \cos to \quad en \quad el \quad \sec tor \quad j.$$

$$M = (m_{ij}), \qquad 0 \leq m_{ij} < 1,$$

m_{ij} representa las unidades físicas del bien i necesario para producir una unidad del bien j.

$YL' = L' \qquad \cos tos \quad del \quad trabajo:$

Pues el salario está normalizado a 1.

$$L' = (l_1, \ldots, l_n)'.$$

l_i representa las horas-hombre necesarias para producir una unidad en el sector i.

Costos de capital

$p'(K \oplus R)$ costos de la reposición de capital:

$$k_{ij} r_{ij},$$

representa la proporción de las máquinas viejas que son sustituidas en el sector j y que provienen del sector i.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i k_{ij} r_{ij},$$

es lo que cuesta esta reposición en el sector j. El término de reposición tiene implícito un tipo de depreciación de la maquinaria.

$$K = (k_{ij}), \qquad 0 \leq k_{ij} < \infty.$$

K representa una matriz de *stocks* y k_{ij} representa las unidades físicas del bien de capital i necesaria para producir una unidad en el sector j.

$$R = (r_{ij}), \qquad 0 \leq r_{ij} < 1.$$

r_{ij} es la proporción de las máquinas que se repondrán en el sector j y que provienen del sector i.

$p' M\hat{T}\hat{G}$ costos de los insumos en un crecimiento proyectado por medio de $\hat{G}$; $\hat{G}$ es una matriz de tasas de crecimiento hacia adelante:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_n \end{pmatrix},$$

g_i es la proporción a la que desea crecer el sector i en un periodo determinado.

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 & & & \\ & \tau_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau_n \end{pmatrix},$$

τ_i representa el número de años necesarios para producir una unidad en el sector i, $\hat{T}$ se define como la matriz de períodos de producción.

$$\tau_j g_j \sum_{i=1}^{n} p_i m_{ij} \, ,$$

es lo que cuesta producir en el sector j cuando se tarda τ_j años en producirse una unidad en el sector j y cuando el sector j desea crecer a una tasa g_j. Cuando aumenta la tasa g_j y el tiempo τ_j aumentan los costos por estas influencias. Se supone en este caso y en los subsecuentes un efecto en los costos de tipo multiplicativo.

$p'K\hat{G}$ costos del capital en el crecimiento.

$$g_j \sum_{i=1}^{n} p_i k_{ij} \, ,$$

son los costos del capital fijo que tiene el sector j cuando se proyecta crecer a una tasa g_j. A medida que aumenta la tasa g_j aumentan los costos del capital y viceversa.

$p'MT\hat{\rho}$ costo de insumos al mantener una sobreganancia en insumos corrientes.

Si se define una matriz de desviaciones de tasas respecto de $\bar{\phi}$;

$$\hat{\phi}_m = \begin{pmatrix} \phi_m^1 & & & \\ & \phi_m^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \phi_m^n \end{pmatrix}.$$

En condiciones de competencia perfecta cada $\phi_m^i(t) = 1$. ¿Por qué?

En referencia a la matriz $\hat{G}$ anterior se define la matriz de tasas de sobreganancia $\hat{\rho}$, que depende de la tasa promedio de ganancia de la economía $\bar{\phi}$ de la matriz de tasas de crecimiento $\hat{G}$.

$$\hat{\rho} = \bar{\phi}\hat{\phi}_m - \hat{G}.$$

En estas condiciones los componentes de la matriz $\bar{\phi}\hat{\phi}_m$ miden qué tanto se desvía en cada sector la tasa promedio de ganancia $\bar{\phi}$. Si no hay desviaciones en ningún sector se tiene la relación que aquí se entiende como de competencia perfecta: $\hat{\phi}_m(t)$ = *matriz identidad.*

En otras condiciones los coeficientes de la matriz $\hat{\phi}_m$ miden la presencia de monopolios en el sector respectivo i. Queda implícito el hecho de que en la economía que se modela en este trabajo hay ausencia de monopolios, monopsonios y de cualquier otro mecanismo de control del mercado.

$$\tau_j\left(\bar{\phi}\hat{\phi}_m^j - g_j\right)\sum_{i=1}^{n} p_i m_{ij} = \tau_j\left(\bar{\phi} - g_j\right)\sum_{i=1}^{n} p_i m_{ij},$$

representan los costos del sector j que produce en la medida de tiempo τ_j y cuando tomando en consideración la tasa global de ganancia de la economía $\bar{\phi}$, y cuando se desea crecer a la tasa g_j.

$p'K\hat{\rho}$ costo del capital al mantener una sobreganancia:

$$\left(\bar{\phi} - g_j\right)\sum_{i=1}^{n} p_i k_{ij},$$

son los costos de la inversión en capital en el sector j al sobreganar en la proporción $\bar{\phi} - g_j$.

$L\hat{T}\hat{p}$ costos que produce la inversión en trabajo en toda la economía:

$l_i\tau_i$ es el costo que tiene el sector i al producir una unidad en τ_i años. En toda la economía y con la condición de sobreganancia el costo será:

$$(\bar{\phi} - g_j)\sum_{i=1}^{n} l_i\tau_i$$

Para simplificar la escritura de la condición *precios* = *costos* se define la operación de matrices siguiente. Sea $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$, $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_{\mathrm{ij}})$ matrices de n x n definimos

$$A \oplus B = \left(a_{ij}b_{ij}\right)$$

El modelo que gobierna la formación de precios es:

$$p' = p'(M + K \oplus R) + \bar{\phi}p'C\hat{\phi}_m + L' + L'\hat{T}(\bar{\phi}\hat{\phi}_m - \hat{G}). \qquad (P)$$

En la ecuación anterior se ha definido:

$$C = M\hat{T} + K$$

Si la ecuación $(P)c$ se usa para ser sustituida en la ecuación (P) se tiene una relación para la tasa promedio de ganancia $\bar{\phi}$ y está dada por la siguiente fórmula (Φ) :

$$\bar{\phi} = \frac{1 - \lambda_m^t C^a \beta^a + L^t \hat{G} H C^a \beta^a}{\left(p^t C + L^t \hat{T}\right) \hat{\phi}_m H C^a \beta^a}. \qquad (\Phi)$$

En la ecuación Φ se han definido:

$$H = (I - M - K \oplus R)^{-1},$$

$$\lambda_m^t = L^t H,$$

λ^t_m son los llamados valores estáticos de Marx que se interpretan como: "los requisitos directos e indirectos de trabajo, por unidad de demandas finales de bienes de consumo y de inversión, sin considerar el trabajo necesario para la reposición y crecimiento de los bienes de inversión".[1]

El cálculo de cantidades

El subsistema de cantidades se define por la relación de balance
oferta = demanda = demanda corriente + demanda de capital;
El vector de oferta total esta dado por:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Demanda corriente

La demanda ordinaria está dada por:
MX demanda de insumos corrientes:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i$$

[1] J. Ibarra, 1995.

Es la cantidad de insumos corrientes que demanda el sector i-ésimo.

Demanda excedente

Demanda de asalariados y no asalariados

La demanda excedente se forma considerando la demanda de asalariados C^a, la de no asalariados C^{na} y la de capital.

La demanda de asalariados se modela igual que como en el paradigma de precios. El vector C^a se define por medio de las ecuaciones lineales de gasto de R. Stone.

La demanda de no asalariados C^{na} se considera un vector constante.

Demanda de capital

$(K \oplus R)X$ demanda de reposición de bienes de capital fijo:

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} r_{ij} x_i \, .$$

Es la cantidad que demanda el sector i para su reposición de capital.

$M \hat{T} \hat{G} X$ demanda de aumentos de insumos ante crecimiento:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} t_i g_i x_i ,$$

es la cantidad que demanda el sector i cuando proyecta crecer a una tasa g_i y cuando tiene un periodo de producción de t_i. La demanda también se ve influida por las proyecciones de crecimiento. Los efectos multiplicadores de $t_i g_i$ aumentan la demanda. Cuanto más se desea crecer o cuanto más se tarda en producir aumenta la demanda de insumos corrientes.

$K \hat{G} X$ demanda de bienes de capital fijo ante crecimiento.

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} g_i x_i$$

es la demanda de bienes de capital fijo cuando cada sector proyecta crecer a una tasa g_i.

El modelo que se propone para determinar el vector de cantidades es entonces:

$$X = MX + C^a + C^{na},$$

$$= MX + (K \oplus R)X + K\,G\,X +$$

$$= M\,TG\,X + C^a + C^{na}. \quad (OD)$$

Definiendo:

$$\mathrm{A} = M + K \oplus R + K\hat{G} + M\,T\hat{G}.$$

El modelo (OD) se resuelve, obteniéndose para cantidades la relación:

$$X = (I - \mathrm{A})^{-1}\,(C^a + C^{na}).$$

La matriz (I- A) es en este caso una matriz de Leontieff generalizada.

SOLUCIÓN DEL MODELO

El modelo a resolver es el siguiente sistema de ecuaciones,(P), (Φ), (OD):

$$p^t = p^t (M + K \oplus R) + \bar{\phi}\, p^t C\, \hat{\phi}_m$$
$$+ L^t + L^t \Upsilon \left(\bar{\phi}\hat{\phi}_m - \hat{G}\right), \qquad (P)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1 - \lambda^t_m C^a \beta^a + L^t \hat{G} H C^a \beta^a}{\left(p^t C + L^t \Upsilon\right)\hat{\phi}_m H C^a \beta^a}, (\Phi)$$

$$X = (I-A)^{-1} (C^a + C^{na}). \qquad (OD)$$

El tercer supuesto es que existe un mecanismo de ajuste de precios (una especie de *tatonnementt*) en el que las ecuaciones (*P*),(Φ), se resuelven.

Dicho de otra manera la idea es tomar un precio inicial en la relación (Φ) y calcular una tasa inicial $\bar{\phi}_O$ y sustituir esta en (*P*) para obtener otro valor en los precios. Este proceso se repite hasta converger a una tasa $\bar{\phi}_*$ y a un sistema de precios P_*, *O* hasta observar caos, en cuyo caso no se puede determinar ni una tasa de equilibrio ni un conjunto de precios de equilibrio.

El método no lineal de cálculo de precios que aquí se propone mostrará dinámicas complicadas caracterizadas por la hipersensibilidad respecto de perturbaciones en las condiciones iniciales.

Dada la no linealidad en el proceso iterativo de cálculo en el que están interactuando los precios y la tasa promedio de ganancia se pueden encontrar dinámicas caóticas (para generalidades sobre el tema, véanse Arrowsmith, D. K. y Place, C. P. (1991) y Ford, J. (1986).

La relación de precios se puede escribir:

$$p^t = \left(L^t + L^t \Upsilon \left(\bar{\phi}\hat{\phi}_m - \hat{G}\right)\right)\left(I - M - K \oplus R - \bar{\phi} C \hat{\phi}_m\right)^{-1}.$$

La forma algebraica de las ecuaciones de precios y tasa de ganancia es (véase apéndice):

$$(AL)\quad \begin{cases} p_i = \dfrac{a_0^{ij} + a_1^{ij}\bar{\phi} + a_2^{ij}\bar{\phi}^2 + \cdots + a_{n-1}^{ij}\bar{\phi}^{n-1}}{b_0 + b_1\bar{\phi} + b_2\bar{\phi}^2 + \cdots + b_n\bar{\phi}^n}, \\ \bar{\phi} = \dfrac{\xi + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{p_i} \sum^{n} \alpha_i^k p_k}{\eta + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k}. \end{cases}$$

Ahora, aplicar el método iterativo a las ecuaciones (P), (Φ) es equivalente a aplicar el método a las ecuaciones (AL).

Sustituyendo salvo cambios de constantes la ecuación (Φ)en la ecuación (P) en la forma simplificada de las ecuaciones (AL) se tienen las siguientes relaciones (véase apéndice):

$$p_l = \frac{\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in\{1,\ldots,n\}} \gamma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \dfrac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}}{\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in\{1,\ldots,n\}} \lambda_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \dfrac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}},$$

$l = 1,2,\ldots,n.$

El método iterativo aplicado al sistema de ecuaciones (ΦP) queda definido por la iteración k.

$$p_l(k+1) = \frac{\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in\{1,\ldots,n\}} \gamma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \dfrac{p_{\sigma_1}(k)p_{\sigma_2}(k)\ldots p_{\sigma_n}(k)}{p_{\nu_1}(k)p_{\nu_2}(k)\ldots p_{\nu_n}(k)}}{\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in\{1,\ldots,n\}} \lambda_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \dfrac{p_{\sigma_1}(k)p_{\sigma_2}(k)\ldots p_{\sigma_n}(k)}{p_{\nu_1}(k)p_{\nu_2}(k)\ldots p_{\nu_n}(k)}}.$$

$l = 1,2,\ldots,n; k \in N.$

Esta ecuación simplificada es de la forma

$$P_{l}(k+1) = F_l(P_l(k),\ldots,(P_l(k),$$

$$l = 1,2,\ldots,n.$$

Escrita así, esta ecuación es un sistema dinámico de tiempos discretos clásico. Dada la complejidad de las constantes y la no linealidad (véase apéndice) no queda más que estudiar el sistema dinámico ($SD\Phi P$) numéricamente.

Si en el sistema dinámico ($SD\Phi P$) existe un equilibrio estable p_*. Las cantidades de equilibrio se determinan como:

$$X = (I-A)^{-1}\,(C^{a}(p_*) + C^{na}).$$

Se ha hecho $C^a(p_*) = C^a$, pues el vector de consumo de Stone depende de los precios. Si el sistema dinámico ($SD\Phi P$) tiene sensibilidad respecto de condiciones iniciales, las cantidades también varían erráticamente.

ESPECIFICACIONES A DOS SECTORES

Los siguientes datos y cálculos son las especificaciones del modelo considerando 2 sectores de la economía y definidos en algún instante, digamos $t = 0$. Omitiremos la dependencia con respecto a este tiempo en todos los parámetros, entendiéndose que todo se refiere a este periodo de análisis; por ejemplo en lugar de escribir M(O)*o* k_{11}(O) escribiremos sencillamente M *y* k_{11}, respectivamente.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix},$$

Entonces el vector de precios P se puede interpretar como una función $R \xrightarrow{P} R^2$ de la tasa promedio de ganancia $\bar{\phi}$.

Además, también se puede calcular la tasa promedio de ganancia $\bar{\phi}$ en función de los precios p_1,p_2. Denotaremos a esta dependencia por medio de la letra F.

Véase apéndice para las fórmulas exactas de P ($\bar{\phi}$) y de F (p_1,p_2).

Dado que se pueden definir P y F como funciones:

$$R \xrightarrow{P} R^2 \quad \xrightarrow{F} R.$$

El sistema dinámico que simula el comportamiento de los precios es:

$$\begin{pmatrix} p_1 & (k+1) \\ p_2 & (k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & (p_1(k)) \\ \sigma_2 & (p_2(k)) \end{pmatrix} = (P \quad o \quad F) \begin{pmatrix} p_1 & (k) \\ p_2 & (k) \end{pmatrix}.$$

La sucesión dependiente del sistema dinámico que simula el comportamiento de la tasa promedio de ganancia $\bar{\phi}$ es:

$$\bar{\phi}\,(k)=(F\ o\ P)(k).$$

EJEMPLO CAÓTICO

Sólo consideraremos los sectores de la economía: el sector 1, de bienes durables y el sector 2 de bienes de consumo necesario.

Determinaremos un ejemplo caótico de 2 sectores al variar la demanda de asalariados.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$l = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 11 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{4}{100} & 0 \\ 0 & \frac{4}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

$$y(t)^a = \begin{pmatrix} 0 + 0.34\dfrac{(1 - 0.15p_2)}{p_2} \\ 0.15 + 0.66\dfrac{(1 - 0.15p_2)}{p_2} \end{pmatrix}.$$

La variación en la tasa promedio de ganancia es:

$$\bar{\phi}(k) = F\begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \end{pmatrix}.$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} p_1(k) \\ p_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(p_1(k-1)) \\ \sigma_2(p_2(k-1)) \end{pmatrix}.$$

La función $F(p_1, p_2)$ se puede interpretar como un filtro por donde pasa el sistema dinámico en los precios y $\bar{\phi}$ la variable como la variable de salida. La función F es de la forma:

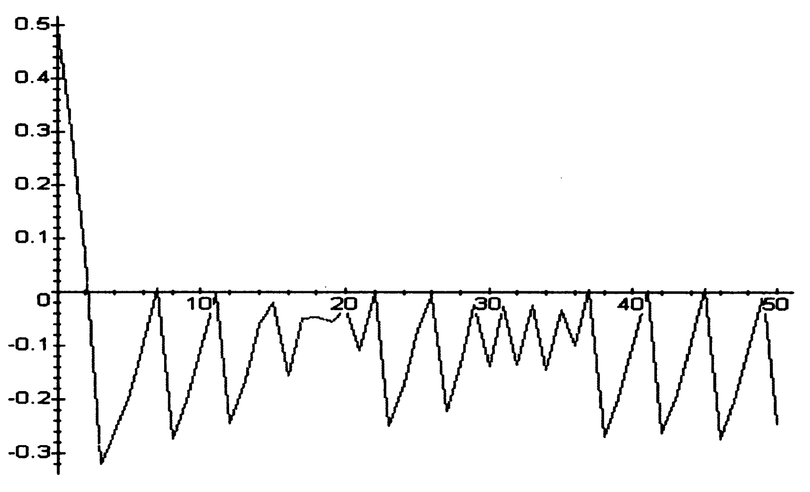
$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{b_1 p_1 + b_2 p_2 + \beta},$$

donde las constantes b_1 y b_2 dependen de las otras constantes en la fórmula para la función F.
Las siguientes gráficas muestran la relación $(k, F(p_1(k), p_2(k)))$, para

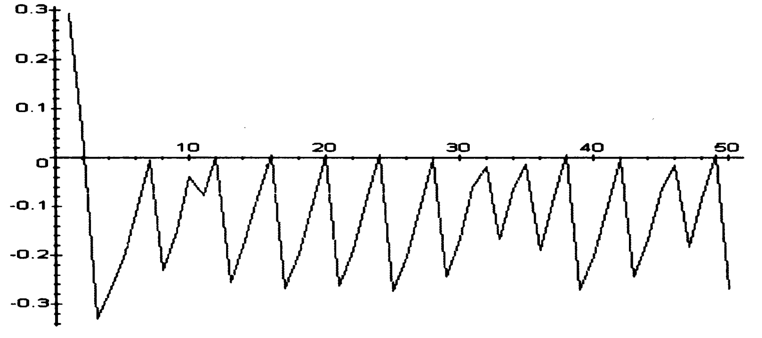
$k = 1,...50$ (gráficas 1 y 2).

Comparando las dos figuras obsérvese cómo un variación insignificante en la condición inicial (de (1.1,1) (gráfica 1) a (1,1) (gráfica 2) produce cambios drásticos en las gráficas, y conduce a la indeterminación de la tasa promedio de ganancia.

Gráfica 1



Gráfica 2

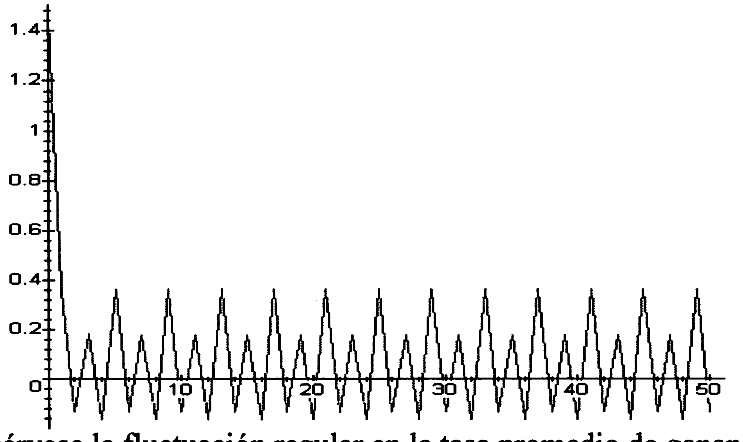


Cambiando la función de demanda a:

$$y\left(t^{a}\right)=\left(0.15+\frac{\overset{0}{(1+0.15\,p2)}}{p_{2}}\right)$$

Manteniendo todas las otras condiciones constantes se tiene el siguiente comportamiento periódico (atractor periódico de periodo 4) de la tasa promedio de ganancia. Aunque para fines prácticos no hay unicidad (punto fijo estable) de la tasa promedio de ganancia y el sistema dinámico también sería caótico. (gráficas 3 y 4). En cambio, dinámicamente este comportamiento periódico es una regularidad.

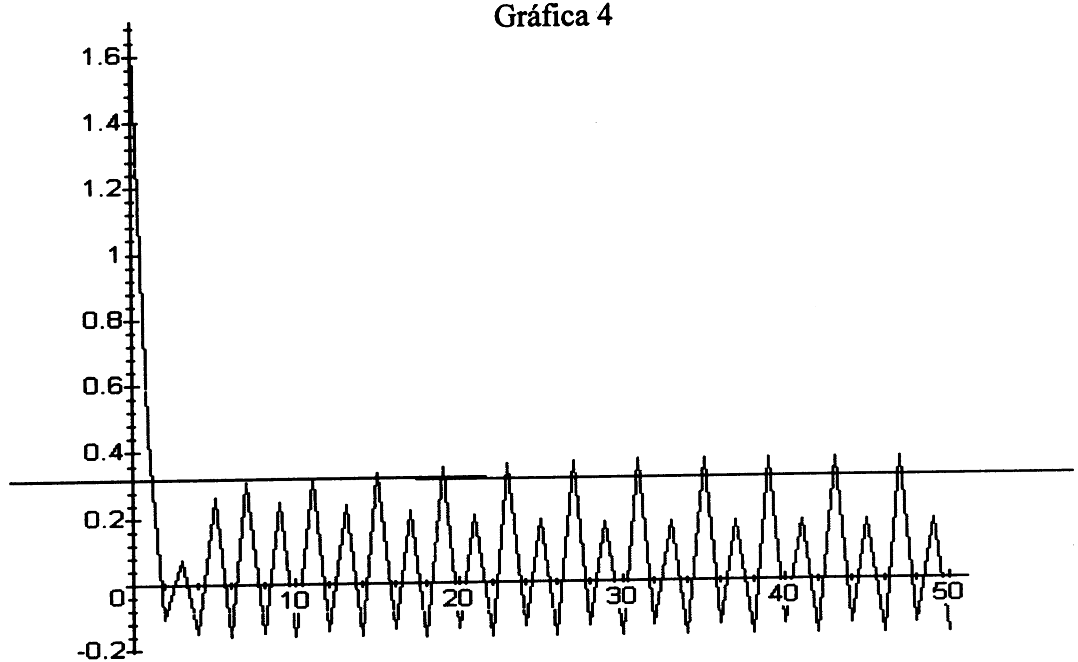
Gráfica 3



Obsérvese la fluctuación regular en la tasa promedio de ganancia.

Obsérvese la fluctuación regular en la tasa promedio de ganancia.

Gráfica 4



CONCLUSIONES

El ejemplo presentado muestra que el proceso iterativo (sistema dinámico de tiempos discretos) que se usa para determinar los precios puede producir un comportamiento de hipersensibilidad respecto de perturbaciones en las condiciones iniciales; principal elemento en los conceptos actuales de comportamiento caótico.

Las siguientes preguntas surgen naturalmente al hacer el estudio anterior.

¿Qué significa este tipo de comportamiento en un sistema dinámico que gobierna el cálculo de la formación de precios?

¿Es sorprendente este comportamiento?

No lo es en un método de cálculo no lineal. Dicha conducta caótica en modelos gobernados por sistemas dinámicos no lineales es típica.

La dificultad de manipular analíticamente los sistemas dinámicos no lineales modelados con iteraciones o con ecuaciones diferenciales y los experimentos numéricos que se han hecho muestran la complejidad de la dinámica económica no lineal.

El consenso generalizado entre los científicos sociales y naturales es que la fenomenología que se investiga tiene incluidas matemáticas no lineales. Esta es la principal complicación. Dilucidar la no linealidad y encontrar orden en el caos que proviene de los sistemas dinámicos no lineales que modelan procesos económicos es uno de los grandes problemas que tienen que resolver los economistas matemáticos del siglo XXI.

APÉNDICE

Generalidades de sistemas dinámicos de tiempos discretos

Los sistemas dinámicos no lineales de tiempos discretos son de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(k),\ldots,x_n(k)) \\ f_2(x_1(k),\ldots,x_n(k)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(k),\ldots,x_n(k)) \end{pmatrix}, \qquad [0]$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

donde

$$f_i{:}R^n \to R,$$
$$x_i{:}N \to R.$$

La dinámica de este tipo de sistemas dinámicos, aun en el caso lineal (es decir, con funciones lineales), no ha sido completamente entendida y sólo se conocen resultados parciales al respecto. De manera general estos sistemas se han estudiado numéricamente.

El problema principal en la teoría de sistemas dinámicos es: dado un sistema dinámico clasificar dinámicas: los atractores o repulsores periódicos y atractores caóticos.

En el caso de que exista una sola variable de estado, es decir n=1 en el sistema [0], no se tiene una clasificación completa de las posibles dinámicas, por lo que también en el estudio del caso de una sola variable, en general, se procede a aplicar métodos numéricos. Éstos dependen de la aritmética interna de la máquina, por lo que también el estudio numérico conlleva a problemas que aún no se han resuelto. De modo que al estudiar numéricamente un sistema dinámico como el sistema [0] sólo se puede tener una imagen aproximada de las dinámicas.

Veamos los principales elementos que intervienen al enfrentar un sistema dinámico como el sistema [0].

Sea

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_{n1}(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}.$$

Definición. La órbita hacia adelante del sistema dinámico [0] que empieza en $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es el conjunto

$$O^+(x) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ldots, f^n\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ldots \right\}.$$

Dado un sistema dinámico de tiempos discretos el problema fundamental es investigar el comportamiento de $O^+(x)$ para cualquier x.

Definición. El vector $(x_1,\ldots x_n)$ es un punto periódico de periodo n del sistema [0] sí y sólo si n es el mínimo entero positivo tal que:

$$f^n\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

f^n significa la composición n-ésima de la función f.

El conjunto

$$Per(n,f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : f^n\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

es el conjunto de puntos periódicos de periodo *n.*

Dado un $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Per(n,f)$ el conjunto:

$$ciclo(x) = ciclo\left(n, f, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ldots, f^n\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\},$$

es la órbita periódica asociada. Si el número de elementos de *ciclo* (x) es r entonces se dice que hay un r - *ciclo*.

Definición. Un subconjunto $A \subset R^n$ es un atractor del sistema dinámico [0] si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) Existe un subconjunto $U \subset R^n$, tal que $\bigcap_{t>0} f^t(U) = A$;

b) Para cualquier abierto $V \supset A$ existe una $t_0 > 0$ tal que para toda $t > t_o f^t(U) \subset V$.

c) El conjunto A es invariante: $f(A) = A$.

La cuenca de atracción asociada al atractor A es el conjunto:

$$B = \left\{ x \in R^n : \lim_{t \to \infty} \inf_{y(t) \in A} \left\| f^t(x) - y \right\| = 0 \right\} = \bigcup_{t>0} f^{-t}(U).$$

Por ejemplo si para algún x, $B = ciclo(x)$, a B se le llama atractor periódico.

$\left\| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1,\ldots,n} x_i^2}$ es la norma euclidiana en R^n.

Si la función f es diferenciable en todo R^n, un punto periódico de período n,$(x_1 \ldots, x_n)$, es estable (es un atractor periódico)sí, y sólo si para cualquier $(y_1, \ldots, y_n) \in ciclo\ (x)$ el jacobiano $Df^n(y_1, \ldots, y_n)$ tiene todos sus valores propios con módulo menor que uno.

Si la función f es diferenciable en todo R^n, un punto periódico de período es inestable (repulsor periódico) sí y sólo para cualquier $(y_1, \ldots, y_n) \in ciclo\ (x)$ el jacobiano $Df^n(y_1, \ldots, y_n)$ tiene por lo menos un valor propio con módulo mayor que uno.

Se desconoce un criterio general para determinar la existencia de otro tipo de atractores.

Más detalles sobre lo anterior se pueden ver en Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983).

Definición. Un atractor es extraño si toda órbita $O^+(x)$ con $x \in A$, es sensible respecto de condiciones iniciales, es decir

$$\exists y \in A \wedge \exists \delta > 0, \wedge t_0 > 0 \text{ tal que } \forall t > t_0 \left\| f^t(x) - f^t(y) \right\| > \delta.$$

Definición. El sistema dinámico [0] es caótico si posee un tractor extraño o si aunque A no sea atractor extraño, sobre A existe sensibilidad respecto de condiciones iniciales.

Por lo regular, los atractores extraños son objetos fractales; conjuntos a los que se les puede asociar una dimensión topológica (dimensión de Haussdorff) no entera. Por ejemplo los conjuntos de Cantor o el triángulo de Sierpinsky pertenecen a la categoría de los fractales.

Forma algebraica de la ecuación de precios y tasa promedio de ganancia

El objetivo de los siguientes párrafos es simplificar las relaciones para las ecuaciones de precios y tasa promedio de ganancia.

Con las notaciones anteriores, el término $\bar{\phi}\,\mathrm{C}\hat{\phi}_{\mathrm{m}}$ se transforma en:

$$\bar{\phi} C \hat{\phi}_m = \bar{\phi}((\ m_{ij}\ )\hat{\mathrm{T}} + (\ k_{ij}\ ))\hat{\phi}_m,$$

esto es, si definimos:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \tau_i & si \quad i = j, \\ 1 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

$$\phi_m^{ij} = \begin{cases} \phi_m^i & si \quad i = j, \\ 1 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Es decir que:

$$\bar{\phi} C \hat{\phi}_m = \bar{\phi} (m_{ij} \tau_{ij} + k_{ij}) \phi_m^{ij},$$

y tenemos para $i = 1, \ldots, n$:

$$q_i = l_i + \tau_i l_i g_i \phi_m^i \bar{\phi}.$$

Si definimos:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}^{-1t} = \left(I - M - K \oplus R - \bar{\phi} c C \hat{\phi}_M \right)^{-1t}.$$

Entonces

$$u_{ij} = \delta_{ij} - m_{ij} - k_{ij} r_{ij} - \bar{\phi} \phi_m^{ij} \left(\tau_{ij} m_{ij} + k_{ij} \right),$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

Definamos ahora las siguientes variables:

$$\zeta_{ij}^{*} = \delta_{ij} - m_{ij} - k_{ij} r_{ij},$$
$$\mu_{ij}^{*} = \phi_{m}^{ij}\left(\tau_{ij} m_{ij} + k_{ij}\right),$$
$$v_{i,}^{*} = l_{i},$$
$$\varphi_{i}^{*} = \tau_{i} l_{i} g_{i} \phi_{m}^{i}.$$

entonces:

$$u_{ij} = \zeta_{ij}^{*} + \mu_{ij}^{*}\overline{\phi},$$
$$q_{i} = v_{i}^{*} + \varphi_{i}^{*}\overline{\phi}.$$

De esta forma:

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{11}^{*} + \mu_{11}^{*}\overline{\phi} & \cdots & \zeta_{1n}^{*} + \mu_{1n1}^{*}\overline{\phi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1}^{*} + \mu_{n1}^{*}\overline{\phi} & \cdots & \zeta_{nn}^{*} + \mu_{nn}^{*}\overline{\phi} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_{1}^{*} + \varphi_{1}^{*}\overline{\phi} \\ \vdots \\ v_{n}^{*} + \varphi_{n}^{*}\overline{\phi} \end{pmatrix}.$$

Si definimos la matriz:

$$\left(\zeta_{ij}^{*} + \mu_{ij}^{*}\overline{\phi}\right)^{t} = \left(\zeta_{ij} + \mu_{ij}\overline{\phi}\right)$$

se tiene:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \left(\zeta_{ij}^{*} + \mu_{ij}^{*}\overline{\phi}\right)^{-1} \begin{pmatrix} v_1^{*} + \varphi_1^{*}\overline{\phi} \\ \vdots \\ v_n^{*} + \varphi_n^{*}\overline{\phi} \end{pmatrix}$$

Salvo cambios de constantes:

Al calcular $(\zeta_{ij} + \mu_{ij}\overline{\phi})^{-1}$, se obtiene:

$$\left(\zeta_{ij} + \mu_{ij}\overline{\phi}\right)^{-1} = \frac{c_0^{ij} + c_1^{ij}\overline{\phi} + c_2^{ij}\overline{\phi}^2 + \ldots + c_{n-1}^{ij}\overline{\phi}^{n-1}}{b_0 + b_1\overline{\phi} + b_2\overline{\phi}^2 + \ldots + b_n\overline{\phi}^n}$$

Entonces nuevamente, para $i = 1, \ldots, n,$ se tiene que:

$$p_i = \frac{a_0^i + a_1^i\overline{\phi} + a_2^i\overline{\phi}^2 + \ldots + a_n^i\overline{\phi}^n}{b_0 + b_1\overline{\phi} + \ldots + b_n\overline{\phi}^2 + \ldots + b_n\overline{\phi}^n}.$$

De esta manera la relación $\overline{\phi}$, para p_i es:

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{a_0^i + a_1^i\bar{\phi} + a_2^i\bar{\phi}^2 + \ldots + a_n^i\bar{\phi}^n}{b_0 + b_1\bar{\phi} + b_2\bar{\phi}^2 + \ldots + b_n\bar{\phi}^n}, \\ \bar{\phi} = \dfrac{\xi + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i p_k}{\eta + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k}, \end{cases}$$

$$para \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{4}$$

Ahora, si en el conjunto de relaciones (4) se sustituye el valor para $\bar{\phi}$; las relaciones (4) quedan todas en función del sistema de precios $(p_1,...p_n)$.

El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$p_l = \frac{\sum\limits_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in \{1,\ldots,n\}} \gamma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \dfrac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}}{\sum\limits_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in \{1,\ldots,n\}} \lambda_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \dfrac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}},$$

$$l = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Las cantidades en cada periodo quedan definidas (salvo cambios de constantes) por:

$$x_l = \frac{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n\in\{1,\ldots,n\}} \alpha^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}}{\displaystyle\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n\in\{1,\ldots,n\}} \beta^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n} \frac{p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\cdots p_{\sigma_n}}{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_n}}},$$

$l = 1,2,\ldots,n.$

Los coeficientes $\gamma^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}$, $\lambda^{l\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_n}$ están en función de todos los otros parámetros del modelo.

El símbolo $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n,\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n \in \{1,\ldots,n\}$ significa que:

$$\begin{gathered}
\sigma_1 \in \{1,\ldots,n\} o \\
\sigma_2 \in \{1,\ldots,n\} o \\
\vdots \\
\sigma_n \in \{1,\ldots,n\} o \\
\nu_1 \in \{1,\ldots,n\} o \\
\nu_2 \in \{1,\ldots,n\} o \\
\vdots \\
\nu_n \in \{1,\ldots,n\}
\end{gathered}$$

Por ejemplo, si se tiene $\alpha, \beta,\ \gamma \in \{i, j, k\}$ y se elige a $\alpha = i, \beta = k$, el coeficiente correspondiente en la sumatoria $\sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\{i,j,k\}} \xi_{\alpha\beta\gamma}$ será ξ_{ik}, si no se elige ningún valor para r se deja un espacio en blanco.

Cálculos en el modelo de dos sectores

$$K \oplus R = \begin{pmatrix} k_{11}r_{11} & k_{12}r_{12} \\ k_{21}r_{21} & k_{22}r_{22} \end{pmatrix},$$

$$M + K \oplus R = \begin{pmatrix} m_{11} + k_{11}r_{11} & m_{12} + k_{12}r_{12} \\ m_{21} + k_{21}r_{21} & m_{22} + k_{22}r_{22} \end{pmatrix},$$

$$MT = \begin{pmatrix} m_{11}\tau_1 & m_{12}\tau_2 \\ m_{21}\tau_1 & m_{22}\tau_2 \end{pmatrix},$$

$$MT + K = \begin{pmatrix} m_{11}\tau_1 + k_{11} & m_{12}\tau_2 + k_{12} \\ m_{21}\tau_1 + k_{21} & m_{22}\tau_2 + k_{22} \end{pmatrix},$$

$$I - M - K \oplus R - \bar{\phi} IMT + K =$$
$$\begin{pmatrix} 1 - m_{11} - k_{11}r_{11} - \bar{\phi}(m_{11}\tau_1 + k_{11}) & -m_{12} - k_{12}r_{12} - \bar{\phi}(m_{12}\tau_2 + k_{12}) \\ -m_{21} - k_{21}r_{21} - \bar{\phi}(m_{21}\tau_2 + k_{21}) & 1 - m_{22} - k_{22}r_{22} - \bar{\phi}(m_{22}\tau_2 + k_{22}) \end{pmatrix},$$

$$\left(I - M - K \oplus R - \bar{\phi} IMT + K\right)^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} -\dfrac{-1 - m_{22} - k_{22}r_{22} - \bar{\phi}(m_{22}\tau_{22} + k_{22})}{c} & \dfrac{m_{12} + k_{12}r_{12} + \bar{\phi}(m_{12}\tau_2 + k_{12})}{c} \\ \dfrac{m_{21} + k_{21}r_{21} + \bar{\phi}(m_{21}\tau_2 + k_{21})}{c} & \dfrac{\bar{\phi}\, m_{11}\tau_1 + k_{11}r_{11} + m_{11} + \phi k_{11} - 1}{c} \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
c = {} & k_{11}r_{11}k_{22}r_{22} + k_{11}r_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_{22} + k_{11}r_{11}\bar{\phi}k_{22} + \bar{\phi}m_{11}\tau_{11}k_{22}r_{22} \\
& + \bar{\phi}^2 m_{11}\tau_1 m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}^2 m_{11}\tau_1 k_{22} + \bar{\phi}k_{11}k_{22}r_{22} + \bar{\phi}^2 k_{11}m_{22}\tau_2 \\
& + m_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}m_{11}\tau_1 m_{22} - k_{12}r_{12}k_{21}r_{21} - k_{12}r_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 \\
& - k_{12}r_{12}\bar{\phi}k_{21} - \bar{\phi}m_{12}\tau_2 k_{21}r_{21} - \bar{\phi}^2 m_{12}\tau_2 m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}^2 m_{12}\tau_2 k_{21} \\
& - \bar{\phi}k_{12}k_{21}r_{21} - \bar{\phi}^2 k_{12}m_{21}\tau_1 - m_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}m_{12}\tau_2 m_{21} \\
& + \bar{\phi}^2 k_{11}k_{22} - m_{12}\bar{\phi}k_{21} - k_{12}r_{12}m_{21} + m_{11}k_{22}r_{22} - m_{12}k_{21}r_{21} \\
& - \bar{\phi}^2 k_{12}k_{21} - \bar{\phi}k_{12}m_{21} - \bar{\phi}m_{11}\tau_1 + k_{11}r_{11}m_{22} - \bar{\phi}m_{22}\tau_2 \\
& - \bar{\phi}k_{11} - \bar{\phi}k_{22} + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} + m_{11}\bar{\phi}k_{22} + \bar{\phi}k_{11}m_{22} + 1 \\
& - m_{11} - m_{22} - k_{11}r_{11} - k_{22}r_{22}.
\end{aligned}
$$

Una condición importante para la existencia de la inversa de la matriz $I - M - K \oplus R - \bar{\phi}IMT + K$ es que $c \neq 0$

$$
l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix},
$$

$$
G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},
$$

$$
l + lT(\bar{\phi}I - G) = \begin{pmatrix} l_1 + l_1\tau_1(\bar{\phi} - g) & l_2 + l_2\tau_2(\bar{\phi} - g) \end{pmatrix},
$$

$$I - M - K \oplus R - MTG - KG =$$
$$\begin{pmatrix} 1 - m_{11} - k_{11}r_{11} - m_{11}\tau_1 g - k_{11}g & -m_{12} - k_{12}r_{12} - m_{12}\tau_2 g - k_{12}g \\ -m_{21} - k_{21}r_{21} - m_{21}\tau_1 g - k_{21}g & 1 - m_{22} - k_{22}r_{22} - m_{22}\tau_2 g - k_{22}g \end{pmatrix},$$

$$M + K \oplus R + MTG + KG =$$
$$\begin{pmatrix} m_{11} + k_{11}r_{11} + m_{11}\tau_1 g + k_{11}g & m_{12} + k_{12}r_{12} + m_{12}\tau_2 g + k_{12}g \\ m_{21} + k_{21}r_{21} + m_{21}\tau_1 g + k_{21}g & m_{22} + k_{22}r_{22} + m_{22}\tau_2 g + k_{22}g \end{pmatrix},$$

$$(I - M - K \oplus R)^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} -\dfrac{-1 + m_{22} + k_{22}r_{22}}{\xi} & \dfrac{m_{12} + k_{12}r_{12}}{\xi} \\ \dfrac{m_{21} + k_{21}r_{21}}{\xi} & -\dfrac{-1 + m_{11} + k_{11}r_{11}}{\xi} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \xi = {} & 1 - m_{22} + k_{22}r_{22} - m_{11} + m_{11}m_{22} + m_{11}k_{22}r_{22} - k_{11}r_{11} \\ & + k_{11}r_{11}m_{22} + k_{11}r_{11}k_{22}r_{22} - m_{12}m_{21} - m_{12}k_{21}r_{21} - k_{12}r_{12}m_{21} \\ & - k_{12}r_{12}k_{21}r_{21}. \end{aligned}$$

Otra condición importante en lo anterior y en lo que sigue es $\xi \neq 0$.

$$l(I - M - k \oplus R) =$$
$$\begin{pmatrix} -\dfrac{l_1(-1 + m_{22} + k_{22}r_{22})}{\xi} + \dfrac{l_2(m_{21} + k_{21}r_{21})}{\xi} & \dfrac{l_1(m_{12} + k_{12}r_{12})}{\xi} - \dfrac{l_2(-1 + m_{11} + k_{11}r_{11})}{\xi} \end{pmatrix}$$

,

$$y^a = \begin{pmatrix} y_1 + \dfrac{b_1(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_1} \\ y_2 + \dfrac{b_2(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_2} \end{pmatrix}.,$$

$$(I - M - K \oplus R)y =$$

$$\begin{pmatrix} \left(-\dfrac{l_1(-1 + m_{22} + k_{22} r_{22})}{\xi} + \dfrac{l_2(m_{21} + k_{21} r_{21})}{\xi}\right)\left(y_1 - \dfrac{b_1(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_1}\right) \\ + \left(\dfrac{l_1(m_{12} + k_{12} r_{12})}{\xi} - \dfrac{l_2(-1 + m_{11} + k_{11} r_{11})}{\xi}\right)\left(y_2 + \dfrac{b_2(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_2}\right) \end{pmatrix},$$

$$lG(I - M - K \oplus R)^{-1} y =$$

$$\begin{pmatrix} \left(-\dfrac{l_1 g(-1 + m_{22} + k_{22} r_{22})}{\xi} + \dfrac{l_2 g(m_{21} + k_{21} r_{21})}{\xi}\right)\left(y_1 - \dfrac{b_1(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_1}\right) \\ + \left(\dfrac{l_1 g(m_{12} + k_{12} r_{12})}{\xi} - \dfrac{l_2 g(-1 + m_{11} + k_{11} r_{11})}{\xi}\right)\left(y_2 + \dfrac{b_2(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_2}\right) \end{pmatrix},$$

$$1-(I-M-K\oplus R)+lG(I-M-K\oplus R)^{-1}y=$$

$$\begin{pmatrix} 1-\left(-\frac{l_1(-1+m_{22}+k_{22}r_{22})}{\xi}+\frac{l_2(m_{21}+k_{21}r_{21})}{\xi}\right)\left(y_1-\frac{b_1(1-y_1p_1-y_2p_2)}{p_1}\right) \\ -\left(\frac{l_1(m_{12}+k_{12}r_{12})}{\xi}-\frac{l_2(-1+m_{11}+k_{11}r_{11})}{\xi}\right)\left(y_2+\frac{b_2(1-y_1p_1-y_2p_2)}{p_2}\right) \\ +\left(-\frac{l_1g(-1+m_{22}+k_{22}r_{22})}{\xi}+\frac{l_2g(m_{21}+k_{21}r_{21})}{\xi}\right)\left(y_1+\frac{b_1(1-y_1p_1-y_2p_2)}{p_1}\right) \\ +\left(\frac{l_1g(m_{12}+k_{12}r_{12})}{\xi}-\frac{l_2g(-1+m_{11}+k_{11}r_{11})}{\xi}\right)\left(y_2+\frac{b_2(1-y_1p_1-y_2p_2)}{p_2}\right) \end{pmatrix},$$

$$p=(p_1 \qquad p_2),$$

$$p(MT+K)=$$
$$\left(p_1(m_{11}\tau_1+k_{11})+p_2(m_{21}\tau_1+k_{21}) \qquad p_1(m_{12}\tau_2+k_{12})+p_2(m_{22}\tau_2+k_{22})\right)$$

$$l\tau=(l_1\tau_1 \qquad l_2\tau_2),$$

$$p(MT+K)+lT=$$
$$\left(p_1(m_{11}\tau_1+k_{11})+p_2(m_{21}\tau_1+k_{21})+l_1\tau_1 \qquad p_1(m_{12}\tau_2+k_{12})+p_2(m_{22}\tau_2+k_{22})+l_2\tau_2\right),$$

$$
\begin{gathered}
p[(MT+K)+LT](I-M-K\oplus R)^{-1}y= \\
\left(\begin{array}{l}
-\dfrac{(p_1(m_{11}\tau_1+k_{11})+p_2(m_{21}\tau_1+k_{21})+l_1\tau_1)(-1+m_{22}+k_{22}r_{22})}{\xi}+\dfrac{(p_1(m_{12}\tau_2+k_{12})+p_2(m_{22}\tau_2+k_{22})+l_2\tau_2)}{\xi} \\
\left(y_1+\dfrac{b_1(1-y_1p_1-y_2p_2)}{p_1}\right) \\
\dfrac{(p_1(m_{11}\tau_1+k_{11})+p_2(m_{21}\tau_1+k_{21})+l_1\tau_1)(m_{12}+k_{12}r_{12})}{\xi}-\dfrac{(p_1(m_{12}\tau_2+k_{12})+p_2(m_{22}\tau_2+k_{22})+l_2\tau_2)(-1+m_{11}+k_{11}r_{11})}{\xi} \\
\left(y_2+\dfrac{b_2(1-y_1p_1-y_2p_2)}{p_2}\right)
\end{array}\right)
\end{gathered}
$$

La tasa de ganancia es entonces una función racional de los precios (omitimos la expresión particular por ocupar tres páginas) las constantes a_{ij} dependen de las otras variables exógenas del modelo:

$$
\bar{\phi}=F(p_1,p_2)=\frac{a_{11}p_1^2+a_{12}p_1p_2+a_{22}p_2^2}{\left(a_{11}p_1^3+a_{11}p_2^3+a_{12}p_1^2p_2+a_{12}p_1p_2^2+a_{22}p_1^2+a_{22}p_2^2+a_{12}p_1p_2+a_{22}p_1+a_{22}p_2\right)}
$$

$$
\left(\left(l + l\tau\left(\bar{\phi}I - G\right)\right)\left(I - M - K \oplus R - \bar{\phi}IMT + K\right)^{-1}\right)' =
$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{\left(l_1 + l_1\tau_1\left(\bar{\phi} - g\right)\right)\left(-1 + m_{22} + k_{22}r_{22} + \bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}k_{22}\right)}{\eta} \\
+\dfrac{\left(l_2 + l_2\tau_2\left(\bar{\phi} - g\right)\right)\left(m_{21} + k_{21}r_{21} + \bar{\phi}m_{21}\tau_1 + \bar{\phi}k_{21}\right)}{\eta}, \\
+\dfrac{\left(l_1 + l_1\tau_1\left(\bar{\phi} - g\right)\right)\left(m_{12} + k_{12}r_{12} + \bar{\phi}m_{12}\tau_2 + \bar{\phi}k_{12}\right)}{\eta} \\
-\dfrac{\left(l_2 + l_2\tau_2\left(\bar{\phi} - g\right)\right)\left(-1 + k_{11}r_{11} + \bar{\phi}k_{11} + m_{11} + \bar{\phi}m_{11}\tau_1\right)}{\eta}
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta = {} & -\bar{\phi}k_{12}m_{21} + 1 - m_{11} - m_{22} - k_{12}r_{12}m_{21} + k_{11}r_{11}m_{22} - \bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}^2k_{11}k_{22} \\
& + m_{11}\bar{\phi}k_{22} + m_{11}k_{22}r_{22} - k_{11}r_{11} - k_{22}r_{22} - \bar{\phi}m_{11}\tau_1 + \bar{\phi}k_{11}m_{22} - \bar{\phi}k_{11} - \bar{\phi}k_{22} \\
& + m_{11}m_{22} + k_{11}r_{11}k_{22}r_{22} + k_{11}r_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_2 + k_{11}r_{11}\bar{\phi}k_{22} + \bar{\phi}m_{11}\tau_1k_{22}r_{22} + \bar{\phi}^2m_{11}\tau_1m_{22}\tau_2 \\
& + \bar{\phi}^2m_{11}\tau_1k_{22} + \bar{\phi}k_{11}k_{22}r_{22} + \bar{\phi}^2k_{11}m_{22}\tau_2 + m_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}m_{11}\tau_1m_{22} - m_{12}m_{21} \\
& - k_{12}r_{12}k_{21}r_{21} - k_{12}r_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 - k_{12}r_{12}\bar{\phi}k_{21} - \bar{\phi}m_{12}\tau_2k_{21}r_{21} - \bar{\phi}^2m_{12}\tau_2m_{21}\tau_1 \\
& - \bar{\phi}^2m_{12}\tau_2k_{21} - \bar{\phi}k_{12}k_{21}r_{21} - \bar{\phi}^2k_{12}m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}^2k_{12}k_{21} - m_{12}k_{21}r_{21} - m_{12}\bar{\phi}k_{21} \\
& - m_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}m_{12}\tau_2m_{21}.
\end{aligned}
$$

Por supuesto que se debe de tener $\eta \neq 0$.

La dependencia de los precios respecto de $\bar{\phi}$ es:

$$
P(\bar{\phi}) =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
-(l_1 + l_1\tau_1(\bar{\phi} - g))(-1 + m_{22} + k_{22}r_{22} + \bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}k_{22}) \\
(1 - m_{11} - m_{22} - k_{12}r_{12}m_{21} + k_{11}r_{11}m_{22} + m_{11}k_{22}r_{22} - k_{11}r_{11} - k_{22}r_{22} + m_{11}m_{22} + k_{11}r_{11}k_{22}r_{22} - m_{12}m_{21} \\
- k_{12}r_{12}k_{21}r_{21} - m_{12}k_{21}r_{21} + \bar{\phi}^2k_{11}k_{22} + m_{11}\bar{\phi}k_{22} + \bar{\phi}k_{11}m_{22} - m_{12}\bar{\phi}k_{21} - \bar{\phi}m_{22}\tau_2 - \bar{\phi}^2k_{12}k_{21} - \bar{\phi}m_{11}\tau_1 \\
- \bar{\phi}k_{12}m_{21} - \bar{\phi}k_{22} - \bar{\phi}k_{11} + k_{11}r_{11}\bar{\phi}k_{22} + k_{11}r_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}m_{11}\tau_1k_{22}r_{22} + \bar{\phi}^2m_{11}\tau_1m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}^2m_{11}\tau_1k_{22} \\
+ \bar{\phi}k_{11}k_{22}r_{22} + \bar{\phi}^2k_{11}m_{22}\tau_2 + m_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}m_{11}\tau_1m_{22} - k_{12}r_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 - k_{12}r_{12}\bar{\phi}k_{21} - \bar{\phi}m_{12}\tau_2k_{21}r_{21} \\
- \bar{\phi}^2m_{12}\tau_2m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}^2m_{12}\tau_2k_{21} - \bar{\phi}k_{12}k_{21}r_{21} - \bar{\phi}^2k_{12}m_{21}\tau_1 - m_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}m_{12}\tau_2m_{21}), \\
\\
(l_1 + l_1\tau_1(\bar{\phi} - g))(m_{12} + k_{12}r_{12} + \bar{\phi}m_{12}\tau_2 + \bar{\phi}k_{12}) \\
(1 - m_{11} - m_{22} - k_{12}r_{12}m_{21} + k_{11}r_{11}m_{22} + m_{11}k_{22}r_{22} - k_{11}r_{11} - k_{22}r_{22} + m_{11}m_{22} + k_{11}r_{11}k_{22}r_{22} - m_{12}m_{21} \\
- k_{12}r_{12}k_{21}r_{21} - m_{12}k_{21}r_{21} + \bar{\phi}^2k_{11}k_{22} + m_{11}\bar{\phi}k_{22} + \bar{\phi}k_{11}m_{22} - m_{12}\bar{\phi}k_{21} - \bar{\phi}m_{22}\tau_2 - \bar{\phi}^2k_{12}k_{21} - \bar{\phi}m_{11}\tau_1 \\
- \bar{\phi}k_{12}m_{21} - \bar{\phi}k_{22} - \bar{\phi}k_{11} + k_{11}r_{11}\bar{\phi}k_{22} + k_{11}r_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}m_{11}\tau_1k_{22}r_{22} + \bar{\phi}^2m_{11}\tau_1m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}^2m_{11}\tau_1k_{22} \\
+ \bar{\phi}k_{11}k_{22}r_{22} + \bar{\phi}^2k_{11}m_{22}\tau_2 + m_{11}\bar{\phi}m_{22}\tau_2 + \bar{\phi}m_{11}\tau_1m_{22} - k_{12}r_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 - k_{12}r_{12}\bar{\phi}k_{21} - \bar{\phi}m_{12}\tau_2k_{21}r_{21} \\
- \bar{\phi}^2m_{12}\tau_2m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}^2m_{12}\tau_2k_{21} - \bar{\phi}k_{12}k_{21}r_{21} - \bar{\phi}^2k_{12}m_{21}\tau_1 - m_{12}\bar{\phi}m_{21}\tau_1 - \bar{\phi}m_{12}\tau_2m_{21}) - (l_2 + l_2\tau_2(\bar{\phi} - g)
\end{array}\right),
$$

$$
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = P \circ F(p_1, p_2) =
$$

Los precios en función se determinan como:

$$
\begin{pmatrix}
-\dfrac{\left(l_1 + l_1\tau_1\left(\dfrac{\kappa_7}{\kappa_6} - g\right)\right)\left(-1 + m_{22} + k_{22}r_{22} + \dfrac{\kappa_7 m_{22}\tau_2}{\kappa_6} + \dfrac{\kappa_7 k_{22}}{\kappa_6}\right)}{\kappa_8} \\
+\dfrac{\left(l_2 + l_2\tau_2\left(\dfrac{\kappa_7}{\kappa_6} - g\right)\right)\left(m_{21} + k_{21}r_{21} + \dfrac{\kappa_7 m_{21}\tau_1}{\kappa_6} + \dfrac{\kappa_7 k_{21}}{\kappa_6}\right)}{\kappa_8}, \\
\dfrac{\left(l_1 + l_1\tau_1\left(\dfrac{\kappa_7}{\kappa_6} - g\right)\right)\left(m_{12} + k_{12}r_{12} + \dfrac{\kappa_7 m_{12}\tau_2}{\kappa_6} + \dfrac{\kappa_7 k_{12}}{\kappa_6}\right)}{\kappa_8} \\
-\dfrac{\left(l_2 + l_2\tau_2\left(\dfrac{\kappa_7}{\kappa_6} - g\right)\right)\left(-1 + m_{11} + k_{11}r_{11} + \dfrac{\kappa_7 m_{11}\tau_1}{\kappa_6} + \dfrac{\kappa_7 k_{11}}{\kappa_6}\right)}{\kappa_8}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sigma_1(p_1, p_2) \\ \sigma_2(p_1, p_2) \end{pmatrix},
$$

$$
\kappa_1 = y_2 + \frac{b_2(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_2},
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_2 = {} & 1 - m_{22} - k_{22}r_{22} - m_{11} + m_{11}m_{22} + m_{11}k_{22}r_{22} - k_{11}r_{11} + k_{11}r_{11}m_{22} \\
& + k_{11}r_{11}k_{22}r_{22} - m_{12}m_{21} - m_{12}k_{21}r_{21} - k_{12}r_{12}m_{21} - k_{12}r_{12}k_{21}r_{21},
\end{aligned}
$$

$$
\kappa_3 = p_1\left(m_{12}\tau_2 + k_{12}\right) + p_2\left(m_{22}\tau_2 + k_{22}\right) + l_2\tau_2,
$$

$$
\kappa_4 = p_1\left(m_{11}\tau_1 + k_{11}\right) + p_2\left(m_{21}\tau_1 + k_{21}\right) + l_1\tau_1,
$$

$$\kappa_5 = y_1 + \frac{b_1(1 - y_1 p_1 - y_2 p_2)}{p_1},$$

$$\kappa_6 = \left(-\frac{\kappa_4(-1 + m_{22} + k_{22}r_{22})}{\kappa_2} + \frac{\kappa_3(m_{21} + k_{21}r_{21})}{\kappa_2} \right)\kappa_5 + \left(\frac{\kappa_4(m_{12} + k_{12}r_{12})}{\kappa_2} - \frac{\kappa_3(-1 + m_{11} + k_{11}r_{11})}{\kappa_2} \right)\kappa_1,$$

$$\begin{aligned}\kappa_7 = 1 &- \left(-\frac{l_1(-1 + m_{22} + k_{22}r_{22})}{\kappa_2} + \frac{l_2(m_{21} + k_{21}r_{21})}{\kappa_2} \right)\kappa_5 \\ &- \left(\frac{l_1(m_{12} + k_{12}r_{12})}{\kappa_2} - \frac{l_2(-1 + m_{11} + k_{11}r_{11})}{\kappa_2} \right)\kappa_1 \\ &+ \left(-\frac{l_1 g(-1 + m_{22} + k_{22}r_{22})}{\kappa_2} + \frac{l_2 g(m_{21} + k_{21}r_{21})}{\kappa_2} \right)\kappa_5 \\ &+ \left(\frac{l_1 g(m_{12} + k_{12}r_{12})}{\kappa_2} - \frac{l_2 g(-1 + m_{11} + k_{11}r_{11})}{\kappa_2} \right)\kappa_1,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_8 = {} & 1 - m_{11} - m_{22} + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} + k_{11}r_{11}k_{22}r_{22} - k_{12}r_{12}k_{21}r_{21} - \frac{\kappa_7 k_{22}}{\kappa_6} - \frac{\kappa_7 k_{11}}{\kappa_6} \\
& - m_{12}k_{21}r_{21} - k_{12}r_{12}m_{21} + \frac{\kappa_7 m_{11}k_{22}}{\kappa_6} - \frac{\kappa_7^2 k_{12}k_{21}}{\kappa_6^2} - \frac{\kappa_7 m_{12}m_{21}\tau_1}{\kappa_6} - \frac{\kappa_7 m_{12}m_{21}\tau_2}{\kappa_6} \\
& - \frac{\kappa_7 k_{12}k_{21}r_{21}}{\kappa_6} - \frac{\kappa_7^2 k_{12}m_{21}\tau_1}{\kappa_6^2} + \frac{\kappa_7^2 m_{12}k_{21}\tau_2}{\kappa_6^2} - \frac{\kappa_7^2 m_{12}m_{21}\tau_1\tau_2}{\kappa_6^2} - \frac{\kappa_7 k_{12}k_{21}r_{12}}{\kappa_6} \\
& - \frac{\kappa_7 m_{12}k_{21}r_{21}\tau_2}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7 k_{11}k_{22}r_{22}}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7 m_{11}m_{22}\tau_2}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7 m_{11}m_{22}\tau_1}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7^2 k_{11}m_{22}\tau_2}{\kappa_6^2} \\
& + \frac{\kappa_7^2 m_{11}m_{22}\tau_1\tau_2}{\kappa_6^2} + \frac{\kappa_7 m_{11}k_{22}r_{22}\tau_1}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7 k_{11}k_{22}r_{11}}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7^2 m_{11}k_{22}\tau_1}{\kappa_6^2} - \frac{\kappa_7 m_{11}\tau_1}{\kappa_6} \\
& + \frac{\kappa_7 k_{11}r_{11}m_{22}\tau_2}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7^2 k_{11}k_{22}}{\kappa_6^2} - \frac{\kappa_7 k_{12}m_{21}}{\kappa_6} + \frac{\kappa_7 k_{11}m_{22}}{\kappa_6} + m_{11}k_{22}r_{22} + k_{11}r_{11}m_{22} \\
& - \frac{\kappa_7 m_{22}\tau_2}{\kappa_6} - \frac{\kappa_7 m_{12}k_{21}}{\kappa_6} - k_{11}r_{11} - k_{22}r_{22} - \frac{\kappa_7 k_{12}r_{12}m_{21}\tau_1}{\kappa_6}.
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAFÍA

Arrowsmith, D. K. and C. P. Place, *An Introduction to Dynamical Systems*, University Press, Oxford, 1991.

Baum, E. B, "Neural Nets for Economists. The ecconomy as an Evolving Complex System", *SFI Studies in the Sciences of Complexity*, Addison-Wesley, 1988.

Bulajich, R., *Estructura fractal de las cuencas de atracción en sistemas biestables*, Tesis doctoral, Facultad de Ciencias-UNAM, 1993.

Flaschel, P., R. Franke, y W. Semmler, *Non-linear Macrodynamics: Instability, Fluctuations and Growth in Monetary Economics*. MIT. Press, 1995.

Ford, J., "Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable", *Chaotic Dynamics and Fractals*, 1-52, 1986.

Guckenheimer, J. y P. Holmes, *Non-linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.

Guevara, M. R. and L. Glass, "Phase locking, period doubling bifurcations and chaos in a mathematical model of a periodically driven oscillator: A theory for the entrainment of biological oscillators and the generation of cardiac dysrhythmias". J. Math. Biology, 14; 1-23, 1982.

Gabisch, G. y H. Walter, *Business Cycle Theory. A Survey of Methods and Concepts. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, 1987.

Guzmán, J. R. Y H. Carrillo, "A dynamical system proof of the little fermat theorem". *Reporte de Investigación*, 94-I, Facultad de Ciencias-UNAM,1994.

Guzmán, J. R., y H. Carrillo, y F. Ongay, "Dinámica de las iteraciones de la función de Arnold". *Aportaciones Matemáticas*, 14;405-414, 1994.

Ibarra, J. "Teoría económica dinámica y planificación". *Cuadernos de Economía*, Instituto de Investigaciones Económicas-UNAM, 1995.

Leontieff, W., "Qualitative input and output relations in the economic system of the United States". *Review of Economics Statistics*, 18; 105-125. 1936.

—, *Studies in the Structure of the American Economy*, University Press Oxford, 1953.

—, *Input Output Analysis*, University Press, Oxford, 1966.

Lorenz, E. N. "Deterministic non periodic fows", J. Atmospheric Sci, 20, 130-141, 1963.

Maple V. Release 4, "Advancing mathematics", Waterloo, Maple, Inc, 1996.

Pasinetti, L., Structural Change and Economic Growth, University Press, Cambridge, 1981.

Percival, I. Y F. Vivaldi, "Arithmetical properties of chaotic motions". *Physical*, 25 D; 105-130, 1987.

Powell, Ll. C. y R. Williams, *Patterns in household Demand and Saving*. World Bank. University Press, Oxford, 1977.

Stone, R., "Linear expenditure systems and demand analysis". *The Economic Journal*, 1954.

Taylor, L., *Modelos macroeconómicos para los países en desarrollo*, FCE, 1986.

Terman, D., "Chaotic spikes arising from a model of bursting in excitable membranes", Siam J. Appl. Math., 1418-1450, 1991.