

Algunas extensiones dinámicas del modelo de ordenamiento espacial de von Thünen (1826)*

Some Dynamic Extensions of von Thünen's Spatial Arrangement Model (1826)

*Jaime Glaría***, *Raúl Fuentes**** y *Oscar Orellana*****

RESUMEN

Este artículo introduce una evolución dinámica con una caída brusca del costo de transporte, al modelo estacionario y monótono de von Thünen (1826). Explorando diferentes escenarios por medio de simulaciones numéricas, revela una falta de robustez del modelo en el largo plazo, la que se expresa en la aparición de rentabilidades negativas para algunos centros de producción ubicados lejos de los de consumo. Las simulaciones, que suponen un centro de consumo o dos, predicen la coexistencia de ganadores y perdedores cuando la localización es conducida por la mano invisible de Adam Smith (sin regulación). Además, muestran que la etapa de transición hacia el estado estacionario no es monótonica, lo cual abre oportunidades para explorar dicha etapa y su relación con las complejidades del desarrollo espacial de las economías.

Palabras clave: Ordenamiento espacial dinámico, costo de transporte, rentabilidad.

Clasificación JEL: F10, L11, L23, R12 y R14.

ABSTRACT

This paper introduces a dynamic evolution with an abrupt fall of transportation cost to the steady and monotonic von Thünen model (1826). Exploring different scenarios by means of numerical simulations, it reveals a lack of robustness of such model in the long run, which is expressed by the emergence of negative profitability for some production centers located far from the consumption centers. Simulations, which assume either one consumption center or two, predict the coexistence of winners and losers when localization is driven by Adam Smith's invisible hand (without regulation). Moreover, they show that the transition stage toward the steady state is not monotonic, which opens up opportunities for the exploration of that stage and its relation to the complexities of spatial development of economies.

Keywords: Dynamic spatial ordering, transportation cost, cost effectiveness

JEL classification: F10, L11, L23, R12, R14

* Fecha de recepción: 22/07/2019. Fecha de aceptación: 08/12/2021.

** Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. E-mail: jaime.glaria@gmail.com. ORCID: 0000-0003-3989-6951.

*** Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. E-mail: raul.fuentes@usm.cl. ORCID: 0000-0003-1195-8401.

**** Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. E-mail: oscar.orellana@usm.cl. ORCID: 0000-0003-1993-1684.

INTRODUCCIÓN

La pregunta de cómo una economía asigna el uso de su espacio para organizar su actividad económica —léase cómo decide dónde producir, dónde consumir y dónde conciliar esas otras dos actividades—, ha sido escasamente abordada por la disciplina económica pese a su importancia intuitiva.¹ La búsqueda de las razones de tal silencio va más allá del alcance de este escrito. Nuestro esfuerzo pretende, más bien, contribuir a responder dicha pregunta inspirándonos, como es habitual para la literatura relacionada, en el modelo seminal de von Thünen (1826).²

Como es sabido, este autor teorizó acerca del ordenamiento espacial de una economía descentralizada en la cual los productores (agricultores) decidían las producciones de sus terrenos (agrícolas). En particular, él supuso que cada productor sopesaba las productividades, los precios, los costos de producción y los costos de transporte de los diferentes cultivos potenciales hasta decidir qué productos producía y ofrecía efectivamente a la ciudad que abastecía, tratando de maximizar la rentabilidad de lo producido en su terreno. Para el supuesto de una ciudad única abastecida por terrenos de un territorio circundante homogéneo y aislado de lo demás, von Thünen dedujo que la economía tendía a un patrón de anillos concéntricos de producción, con un gradiente espacial de rentas de los terrenos en descenso monótonico desde las inmediaciones de la ciudad hasta la periferia del territorio.

Formalmente, la teoría de von Thünen se refiere a la rentabilidad de producir en un centro de producción (un terreno) y transportar lo producido a un centro de consumo (una ciudad), afirmando que tal rentabilidad (u) depende de la productividad del terreno para lo producido (r), del precio de lo producido (p), de su costo de producción en el terreno (c), de su tasa de transporte desde el terreno hasta la ciudad (C), y de la distancia entre ambos centros (x), según:

$$u = r \cdot (p - c - C \cdot x)$$

El argumento medular de la teoría es que, desagregando lo producido en productos diversos, el costo de transporte según la tasa de transporte y la distancia necesita balancearse si se quiere maximizar la rentabilidad estacionariamente. Esta necesidad de balance dicta, por ejemplo, que los productos para los cuales la tasa de transporte es mayor se puedan producir sólo donde la distancia es suficien-

¹ Según Mills, el porcentaje de artículos acerca de la economía geográfica que fueron publicados en la revista *Journal of Urban Economics*, por ejemplo, bajó de 30.8 en 1978 a 8.7 por ciento en 1998.

² En este artículo abordamos desde una perspectiva cuantitativa una pequeña parte de la gran obra de este autor que tiene un alcance mucho más extenso que lo tratado aquí. Harvey (2001) ofrece un análisis más completo de esta obra en la que se ofrece, en uno de sus capítulos, un diálogo entre las ideas de Hegel, von Thünen y Marx. Transformar varias de sus ideas interesantes y las de otros autores hacia una estructura basada en el modelamiento matemático es una tarea difícil que sólo puede hacerse progresivamente.

temente menor (más cerca de la ciudad, donde los precios de los terrenos son mayores); pero el costo de producción, el precio y la productividad también intervienen. A la postre, el balance se resuelve decidiendo que en x se debe producir exclusivamente los productos de la especie cuya rentabilidad ahí es la máxima entre las de todos los productos potenciales.

Según Fujita, Krugman y Venables (1999), la teoría de von Thünen se soterró en un largo anonimato hasta que Alonso (1964) la hizo rebrotar sustituyendo a los agricultores por viajeros y a la ciudad por un distrito de negocios. Ese llamado “modelo mono-céntrico” dio como resultado los mismos anillos concéntricos para el uso del territorio que el de von Thünen, y se ha convertido en una pieza clave de la literatura empírica y teórica relacionada. Sin embargo, tanto el escrito de von Thünen como el de Alonso adolecen al menos de dos limitaciones importantes. Una es que ambos escritos suponen la existencia exógena de un centro —ya sea una ciudad o un distrito de negocios—, sin considerar un surgimiento endógeno de ese centro, a la par con el uso del territorio. Y la otra es que ambos describen las propiedades de la economía en estado estacionario, sin mostrar cómo se tendería a ese estado con el tiempo, y en qué condiciones. Respecto a la segunda limitación, Day y Tinney (1969) plantearon un modelo dinámico en el cual los agricultores desconocen las demandas y los precios estacionarios, y ofrecen sus productos agrícolas intermitente y sincrónicamente, una vez cada año, de manera que hasta las demandas y los precios momentáneos son difíciles de conocer cabalmente antes de que caduquen. Los autores resolvieron el modelo mediante simulaciones numéricas según las cuales, aún en las condiciones descritas, las rentas de los terrenos decaen desde la ciudad hasta la periferia del territorio, como predijo von Thünen. Más tarde, Okabe y Kune (1983) plantearon otro modelo dinámico parecido, que resolvieron mediante maniobras analíticas a base de representaciones gráficas, y mostraron la estabilidad del modelo en un escenario, su periodicidad en otro y su inestabilidad en varios otros. Más recientemente, y desde una óptica más cualitativa que cuantitativa, Harvey (2001) revisó la solución espacial de von Thünen considerando las diferencias entre productores y trabajadores, la relación entre clases sociales, los salarios, la moral y otras nociones. La lectura de este autor ofrece nuevas dimensiones de la obra de von Thünen muy poco consideradas hasta ahora por la economía cuantitativa.³

Este escrito aborda la teoría de von Thünen desde una perspectiva cuantitativa y dinámica. Con ello afronta una de las limitaciones del escrito de von Thünen (1826): la perspectiva estacionaria.

Puesto que superar una perspectiva estacionaria con un modelo dinámico no es tarea fácil y sólo puede cumplirse progresivamente, *el objetivo de este escrito es*

³ Muchas de las ideas expresadas y discutidas en Harvey (2001) en relación con la obra de von Thünen fueron tomadas de Dempsey (1960).

extender el modelo estacionario de von Thünen planteando un modelo dinámico simple y resoluble mediante simulaciones numéricas simples, que entregue como primer resultado la evolución del ordenamiento espacial de una economía descentralizada en un escenario básico, donde las rentabilidades u son relativas y dependen, no sólo de las productividades r , de los precios p , de los costos de producción c y de los costos de transporte $C \cdot x$, sino también de la tasa de interés del dinero (i) y del dinero implícito en el precio del terreno (p_T), según:

$$u = r \cdot (p - c - C \cdot x) - i \cdot p_T$$

El escenario dispone, además, que la tasa C varía de manera exógena y abrupta, mientras el precio p_T del terreno varía de manera endógena y paulatina, movido por la rentabilidad u relativa.

Las disposiciones, ajenas a von Thünen (1826), podrían servir para afrontar, *a posteriori*, la otra limitación del escrito de aquel autor: su desconsideración del surgimiento endógeno de la ciudad junto con el uso del territorio. Pero, *el escrito actual sólo intenta avanzar explorando algunos escenarios un poco más complejos que el primero: uno donde también varían las productividades; otro donde también varían los precios de los productos —pero no las productividades—; y otro donde existen dos ciudades, en lugar de una —pero no varían las productividades ni los precios.*

Las operaciones matemáticas involucradas en el modelo dinámico actual y en su simulación numérica son bastante conocidas. La más sofisticada es la integración temporal, pero en las simulaciones es aproximada según Euler, mediante dos o tres de las cuatro operaciones escolares.

Una conclusión incómoda a la que conducen las simulaciones del modelo actual es la aparición de rentabilidades relativas negativas; vale decir, de terrenos “perdedores”, donde la rentabilidad bruta $r(p - c - Cx)$ de la producción es menor que el interés $i p_T$ del dinero implícito en el precio del terreno. Ciertamente, esa conclusión insinúa un problema macroeconómico, algo acerca del surgimiento de la ciudad, y la conveniencia de una investigación económica mayor, que incluya, al menos, relaciones entre el interés del dinero y el re-ordenamiento espacial. Otra conclusión a la que conducen las simulaciones del modelo actual y luego sus gemelas del modelo de von Thünen, es que el de von Thünen (1826) es poco estable ante las variaciones. Esto también insinúa la conveniencia de una investigación futura mayor. La sección I de este escrito presenta el modelo, sus escenarios y su desempeño; y la sección II clausura las conclusiones.

I. EL MODELO

Como fue dicho, nuestro modelo es una versión extendida del modelo de von Thünen (1826) con varios escenarios. Concordamos con von Thünen en todos ellos, suponiendo simplistamente que los terrenos del territorio son muchos y continuos. Sin embargo, nos referimos a rentabilidades relativas, con descuento del interés del dinero implícito en el precio del terreno respectivo, como más realistas que las de von Thünen. Además, en todos los escenarios consideramos que el precio del terreno varía endógena y paulatinamente, movido por las rentabilidades en una realimentación ajena a dicho autor: los aumentos de las rentabilidades relativas causan un aumento del precio del terreno, que causa un aumento del interés del dinero implícito en tal precio, que causa disminuciones de las rentabilidades relativas. Adicionalmente, suponemos en todos los escenarios que la tasa de transporte disminuye exógena y abruptamente, replicando una propensión actual insólita para von Thünen. E incluimos variaciones circunstanciales en los escenarios: en uno, variaciones de las productividades; en otro, variaciones de precios de los productos; y en otro, coexistencia de dos centros de consumo que compiten entre sí para ser abastecidos por los productores.

I.1. *Escenario básico: Inclusión de costo variable del terreno y de tasa variable de transporte*

Imaginemos un centro de consumo único (una ciudad), centros de producción múltiples (terrenos) distanciados del centro de consumo contiguamente a lo largo de un territorio (un valle, aislado de lo demás), y productos de al menos tres especies posibles (verduras, frutas y cereales, por ejemplo) producidos (cultivados) en cada uno de los centros de producción.

Imaginemos también que interesa predecir, primordialmente, la evolución de la rentabilidad de la producción en cada terreno.

Consecuentemente, digamos que x es la distancia entre un centro de producción (terreno) y el centro de consumo (ciudad), medida en [km]; y t es el tiempo transcurrido, medido en [semana].

u es la rentabilidad de la producción en un terreno, (medida) en [U\$ semana⁻¹ km⁻²].

$$u(x, t) = \sum_{n \in \{1,2,3\}} u_n(x, t) \cdot s_{T,n}(x, t) \quad (1)$$

u_n es la rentabilidad de producir el producto de la especie n (para $n = 1$, $n = 2$ o $n = 3$, como si fuese el único producido), (medida) en [U\$ semana⁻¹ km⁻²]; $s_{T,n}$ es la fracción del terreno dedicada efectivamente a ese producto, en [km² km⁻²].

$$u_n(x, t) = r_n \cdot (p_n - c_n - C_n(t) \cdot x) - i \cdot p_T(x, t) \quad \forall n \in \{1, 2, 3\} \quad (2)^4$$

$$s_{T,n}(x, t) = s_{T,n}(x, 0) + \int_0^t \left(\sum_{m \in \{1, 2, 3\}, m \neq n} q_{T,m,n}(x, \tau) - \sum_{m \in \{1, 2, 3\}, m \neq n} q_{T,n,m}(x, \tau) \right) \cdot d\tau \quad \forall n \in \{1, 2, 3\} \quad (3)$$

r_n es la productividad para el producto de la especie n , en [tonelada semana⁻¹ km⁻²]; p_n es el precio de ese producto, en [U\$ tonelada⁻¹]; c_n es su costo (incluyendo insumos y salarios), en [U\$ tonelada⁻¹]; C_n es su tasa de transporte (incluyendo daños), en [U\$ tonelada⁻¹ km⁻¹]; i es la tasa de interés del dinero, en [U\$ U\$⁻¹ semana⁻¹]; p_T es el precio del terreno, en [U\$ km⁻²]; $q_{T,m,n}$ es la intensidad con que el terreno pasa de la producción del producto de la especie m a la del producto de la especie n en [km² semana⁻¹ km⁻²].

$$C_n(t) = \begin{cases} C_{n,\#} & \forall t \leq \alpha \\ C_{n,\#} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{-(t-\alpha)/(\beta \cdot dt)}) & \forall t > \alpha \end{cases} \quad \forall n \in \{1, 2, 3\} \quad (4)^5$$

$$p_T(x, t) = p_T(x, 0) + \int_0^t C_{T,1} \cdot \frac{u(x, \tau)}{p_T(x, \tau)} \cdot d\tau \quad (5)^6$$

$$q_{T,m,n}(x, t) = C_{T,2} \cdot \frac{1 + \text{sgn}(u_n(x, t) - u_m(x, t))}{2} \cdot \frac{(u_n(x, t) - u_m(x, t)) \cdot s_{T,m}(x, t)}{p_T(x, \tau)} \quad \forall m, n \in \{1, 2, 3\}, m \neq n \quad (6)^7$$

$C_{T,1}$ es la tasa de variación del precio del terreno, en [U\$ km⁻²]; $C_{T,2}$ es la tasa de traspaso de la producción de unos productos a otros, en [-].

⁴ La ecuación (2) compacta en una sola fórmula general —que dice “ $n \in \{1, 2, 3\}$ ”— el conjunto de las n para los productos de las distintas especies. Compactaciones así se repiten luego, haciendo parecer que la matemática no es tan simple como enuncia la introducción; pero las des-compactaciones son fáciles y recuperan la simpleza. (2) añade a los costos los dineros gastados en arrendar terrenos o en comprarlos, suponiendo que la tasa de arriendo y el interés del dinero son (casi) iguales. Esto relativiza las rentabilidades u_n de los productos, y también la rentabilidad u de la producción, puesto que: considerando (1), insertando (2) y maniobrando algebraicamente muy poco: $u(x, t) = \sum_{n \in \{1, 2, 3\}} (r_n \cdot (p_n - c_n - C_n(t) \cdot x)) \cdot s_{T,n}(x, t) - i \cdot p_T(x, t)$ (si $\sum_{n \in \{1, 2, 3\}} s_{T,n}(x, t) = 1$).

⁵ La ecuación (4) elige como tasa de transporte una función discontinua del tiempo. Su primera parte se mantiene constante —para evidenciar los comportamientos dinámicos si la tasa no varía—, y su segunda parte se reduce rápida y exponencialmente a la mitad —para destacar los efectos de la reducción de la tasa en medio de comportamientos que pueden ser influidos por varias causas—. El carácter exponencial de la reducción fue elegido por ser bastante habitual en muchas evoluciones.

⁶ La ecuación (5) se puede entender haciendo su derivada temporal. Así se nota que la rapidez de variación del precio del terreno es directamente proporcional al cociente entre la rentabilidad de la producción y el precio del terreno. supone que esa rentabilidad y ese precio son visibles públicamente; si las rentabilidades de los productos fuesen visibles en detalle, la ecuación podría ser: $p_T(x, t) = p_T(x, 0) + \int_0^t C_{T,1} \cdot \frac{\max(u_1(x, \tau), u_2(x, \tau), u_3(x, \tau))}{p_T(x, \tau)} \cdot d\tau$.

⁷ (6) supone que los trasposos de terreno se vuelven más difíciles a medida que las fracciones dedicadas a los productos en retirada disminuyen, por reticencia a clausurar las producciones; “sgn” es la función signo: para cualquier número α real: $\text{sgn}(\alpha) = -1$ si $\alpha < 0$, $\text{sgn}(\alpha) = 0$ si $\alpha = 0$ y $\text{sgn}(\alpha) = 1$ si $0 < \alpha$.

Para atender adicionalmente a la oferta de productos en el centro de consumo, se puede añadir $q_{n,o}$ como el flujo del producto de la especie n ofrecido a la ciudad por la totalidad de los productores, en [tonelada semana⁻¹].

$$q_{n,o}(t) = \int_0^\infty r_n(\chi, t) \cdot s_{T,n}(\chi, t) \cdot a \cdot d\chi \quad \forall n \in \{1,2,3\} \quad (7)$$

donde a es el ancho del territorio, en [km].

Los datos siguientes, por ejemplo, completan lo necesario para hacer la simulación:

$$\begin{array}{llll} r_1 = 17 & p_1 = 1000 & c_1 = 700 & s_{T,1}(x, 0) = 1/3 \quad C_{1,\#} = 30 \\ r_2 = 15 & p_2 = 900 & c_2 = 700 & i = 0.001 \quad s_{T,2}(x, 0) = 1/3 \quad C_{2,\#} = 10 \quad \alpha = 250 \\ r_3 = 5 & p_3 = 1000 & c_3 = 800 & s_{T,3}(x, 0) = 1/3 \quad C_{3,\#} = 5 \quad \beta = 1.44 \\ p_T(x, 0) = 100000 & C_{T,1} = 2500000 & & \\ & C_{T,2} = 0.5 & & \end{array}$$

I.1.1. Dinámica

Claramente, las ecuaciones (1)-(7) es un sistema de ecuaciones no-lineal, resoluble mediante una simulación numérica bastante simple. Usando en ella la aproximación de Euler con paso temporal $dt = 1$ hacia el futuro para las integrales temporales de (3) y (5), y con paso espacial $dx = 1$ para la integral espacial de (7), se obtiene los gráficos de las figuras 1-8.⁸

Figure 1. Rentabilidad $u(x,t)$ de la producción, en el terreno.

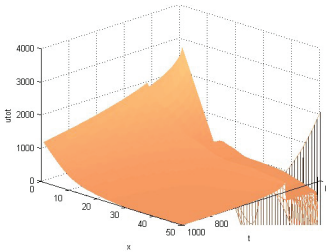
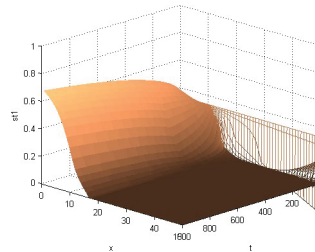


Figura 2. Fracción $s_{r,1}(x,t)$ del terreno, dedicada al producto 1.



⁸ Estamos suponiendo $q_{n,o}(t) = \int_0^{50} r_n(\chi, t) \cdot s_{T,n}(\chi, t) \cdot a \cdot d\chi \quad \forall n \in \{1,2,3\}$, como si el territorio del que provienen los flujos ofrecidos acabase —o dejase de producir— junto con $0 < x < 50$. El uso de aproximaciones de Euler en las simulaciones, puede ocasionar algunos problemas numéricos. En parte para evitarlos, y en parte para reflejar que cualquier terreno tiene algún valor económico positivo (no nulo), restringimos tácitamente el método de computación de manera que $100000 < p_T$.

Figura 3. Fracción $s_{T,2}(x,t)$
 del terreno, dedicada al producto 2.

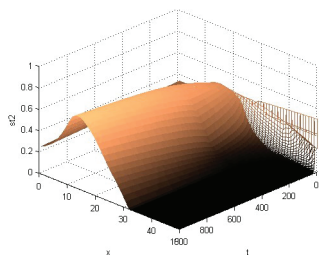


Figura 4. Fracción $s_{T,3}(x,t)$
 del terreno, dedicada al producto 3.

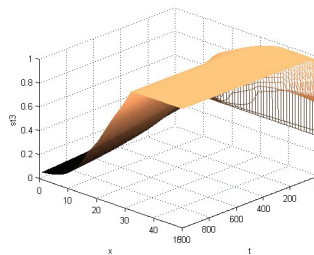
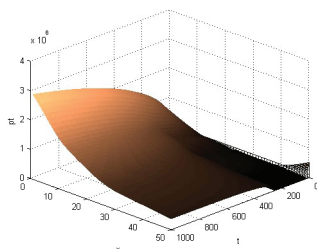


Figura 5. Precio $p_T(x,t)$
 del terreno.



La figura 1 muestra que la rentabilidad u de la producción evoluciona deca-
 yendo, pero manteniéndose casi en cualquier momento como alta cerca del centro
 del consumo y tendiente a cero lejos de él. La figura 2 muestra que la fracción $s_{T,1}$
 del terreno, dedicada al producto 1, evoluciona afianzándose como alta cerca del
 centro de consumo y tendiente a cero lejos de él. La figura 3 muestra que la fracción $s_{T,2}$,
 dedicada al producto 2, evoluciona afianzándose como baja cerca del centro de con-
 sumo, alta en una posición algo alejada de ese centro y tendiente a cero lejos de él.
 La figura 4 muestra que la fracción $s_{T,3}$ evoluciona afianzándose como baja cerca
 del centro de consumo y alta lejos de él. Cabe destacar que las figuras 2-4 tam-
 bién muestran que las fracciones $s_{T,n}$ no se igualan del todo a 1 ni a 0 con la distan-
 cia x . Económicamente, se puede justificar eso diciendo que así los productores
 pueden moderar los imprevistos del modelo, o satisfacer el consumo local. La fi-
 gura 5 muestra que el precio p_T del terreno evoluciona creciendo, y manteniéndose
 casi en cualquier momento como alto cerca del centro de consumo y tendiente
 hacia el precio mínimo lejos de él. Y las figuras 1-5, miradas atentamente, dejan
 entrever los efectos de las disminuciones exógenas y abruptamente discontinuas
 cuando $t = 250$, de las tasas de transporte C_T .

Figura 6. Rentabilidades $u_n(x)$ de los productos 1, 2 y 3, cuando $t=999$.

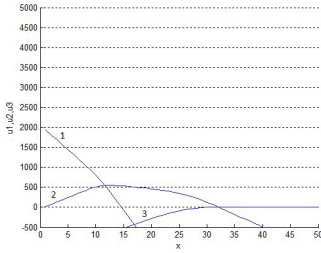
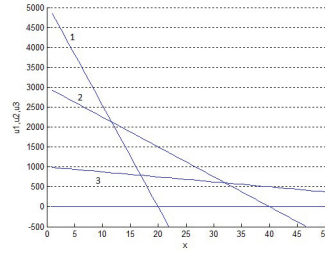
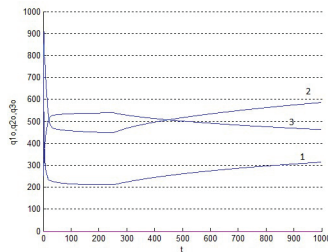


Figura 7. Rentabilidades según von Thünen de los productos 1, 2 y 3, cuando $t=999$.



La figura 6 superpone tres cortes transversales de los gráficos anteriores, de manera que muestra las rentabilidades u_n de los tres productos al cabo de 999 semanas de evoluciones. Después, las rentabilidades u_n tienden paulatinamente a hacerse negativas, aunque las figuras actuales no lo muestren. La figura 7 grafica las rentabilidades según von Thünen (sin descuento del interés del dinero implícito en el precio del terreno). Al comparar ambas figuras, es oportuno recordar que, según von Thünen, en x se debe producir exclusivamente los productos de la especie cuya rentabilidad es ahí la máxima entre las de todos los productos potenciales. Así, a primera vista, la figura 7 exige producir sólo el producto 1 si $0 < x < 12$, el 2 si $12 < x < 32$ o el 3 si $32 < x$. Y si fuese por von Thünen, la figura 6 exigiría lo mismo; sin embargo, según las figuras 2-4, las fracciones $s_{T,n}$ no se igualan del todo a 1 ni a 0 con la distancia x : discrepan... suavizándose.

Figura 8. Flujos $q_{n,o}(t)$ ofrecidos por la totalidad de los productores.



La figura 8 muestra los flujos $q_{n,o}$ de los productos ofrecidos por la totalidad de los productores a los consumidores de la ciudad, lo cual invita a diversificar la atención puesta hasta ahora, preferentemente, en los terrenos.

I.1.2. Condiciones para el estado estacionario

Las evoluciones son promovidas por las integraciones expuestas en las ecuaciones anteriores, y allí están las claves con que dichas evoluciones cesan; esto es, las condiciones para el estado estacionario, que son inmediatamente cuatro:

$$\sum_{m \in \{1,2,3\}, m \neq n} q_{T,m,n}(x) - \sum_{m \in \{1,2,3\}, m \neq n} q_{T,n,m}(x) = 0 \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

$$C_{T,1} \cdot \frac{u(x)}{p_T(x)} = 0$$

Considerando la cuarta condición, suponiendo $C_{T,1} \neq 0$ y $p_T(x) \neq 0$, y maniobrando algebraicamente muy poco; y considerando las tres primeras condiciones, insertando (6), resolviendo (para todos los casos en que $0 \leq q_{T,m,n}(x)$), insertando (1) y la ecuación resultante de lo anterior, y maniobrando otro poco:

$$u(x) = 0$$

$$u_n(x) = u(x) = 0 \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

Considerando lo último, insertando (2), suponiendo $i \neq 0$, y maniobrando:

$$p_T(x) = \frac{r_n \cdot (p_n - c_n - C_n \cdot x)}{i} \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

Finalmente:

$$u_n(x) = 0 \wedge q_{T,m,n}(x) = 0 \wedge p_T(x) = \frac{r_n \cdot (p_n - c_n - C_n \cdot x)}{i} \quad \forall m, n \in \{1,2,3\}$$

I.2. Escenario 1: Inclusión circunstancial de productividades variables, por deterioro

Imaginemos ahora que las productividades para los productos varían, dependiendo del deterioro de la calidad de la tierra a medida que se la usa para producirlos.

Imaginemos también lo demás del escenario básico.

Aunque se repiten (1)-(7), ahora los datos para las productividades r_n cambian:

$$r_n(x,t) = R_n \cdot (1 - d_n(x,t)) \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

R_n es la productividad sin deterioro para el producto de la especie n , en [tonelada semana⁻¹ km⁻²]; d_n es el deterioro de la productividad para el producto de la especie n , en [-]:

$$d_n(x, t) = d_n(x, 0) + \int_0^t \frac{s_{T,n}(x, \tau) - d_n(x, \tau)}{T_n} \cdot d\tau \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

T_n es un coeficiente de deterioro, en [semana]⁹

Los datos siguientes, por ejemplo, completan lo necesario para hacer la simulación:

$$\begin{array}{llll} p_1 = 1000 & c_1 = 700 & s_{T,1}(x, 0) = 1/3 & C_{1,\#} = 30 \\ p_2 = 900 & c_2 = 700 & i = 0.001 & s_{T,2}(x, 0) = 1/3 & C_{2,\#} = 10 & \alpha = 250 \\ p_3 = 1000 & c_3 = 800 & & s_{T,3}(x, 0) = 1/3 & C_{3,\#} = 5 & \beta = 1.44 \\ \\ p_T(x, 0) = 100000 & C_{T,1} = 2500000 & R_1 = 17 & d_1(x, 0) = 0 & T_1 = 1000 \\ & C_{T,2} = 0.5 & R_2 = 15 & d_2(x, 0) = 0 & T_2 = 1200 \\ & & R_3 = 5 & d_3(x, 0) = 0 & T_3 = 1500 \end{array}$$

I.2.1. Dinámica¹⁰

Usando la aproximación de Euler con $dt = 1$ para las integrales temporales y $dx = 1$ para la espacial, se obtiene los gráficos de las figuras 9-18 mostrados en el Apéndice 2.

En lo grueso, la rentabilidad u de la producción, las fracciones $s_{T,n}$ del terreno dedicadas a los diversos productos, y el precio p_T del terreno, repiten los patrones dinámicos del escenario básico. En lo fino, dejan entrever los efectos de las disminuciones exógenas y abruptas (cuando $t = 250$) de las tasas de transporte C_T .

Los flujos $q_{n,o}$ de los productos ofrecidos por los productores ya no tienden a estacionarse invulnerablemente como en el escenario básico; ellos tienden a variar afectados por los deterioros esperables del uso de la tierra según las fracciones $s_{T,n}$ (dos ascendiendo a costa del tercero, que decae). Los patrones de las productividades r_n son, obviamente, dinámicos y no estacionarios como los de aquel otro escenario sin deterioros.

⁹ Se puede entender T_n como coeficiente de deterioro, suponiendo circunstancialmente que $d_n(x,0) = 0$ y $s_{T,n} = 1$ en la ecuación previa, y notando que entonces T_n indica el número de semanas en que el deterioro $d_n(x,t)$ aumenta de 0 a 0.62; vale decir, aumenta el 62 por ciento de su aumento total. T_n sigue indicando algo así en otras circunstancias.

¹⁰ Siguiendo la recomendación de uno de los árbitros anónimos, hemos presentado en el Apéndice todas las figuras asociadas a los escenarios distintos al escenario base.

I.3. Escenario 2: Inclusión circunstancial de precios variables de los productos, por oferta y demanda

Imaginemos ahora que los precios de los productos dependen de sus existencias en el centro de consumo, y éstas dependen tanto de los flujos ofrecidos por los productores (sin productividades variables) como de los flujos demandados por los consumidores.

Imaginemos también lo demás del escenario básico.

Aunque se repiten (1)-(7), ahora los datos para los precios p_n cambian:

$$p_n(t) = P_{n,1} - P_{n,2} \cdot s_n(t) \quad \forall n \in \{1,2,3\}^{11}$$

$P_{n,1}$ es un coeficiente para el precio del producto de la especie n , en [US tonelada⁻¹]; $P_{n,2}$ es otro coeficiente para el precio de ese producto, en [US tonelada⁻²]; s_n es su existencia (o inventario) en el centro de consumo, en [tonelada]:

$$s_n(t) = s_n(0) + \int_0^t (q_{n,o}(\tau) - q_{n,d}(\tau)) \cdot d\tau \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

$q_{n,d}$ es el flujo del producto de la especie n demandado en la ciudad por la totalidad de los consumidores, en [tonelada semana⁻¹]:

$$q_{n,d}(t) = \max\left(0, Q_{n,1} - Q_{n,2} \cdot p_n(t)\right) \quad \forall n \in \{1,2,3\}^{12}$$

$Q_{n,1}$ es un coeficiente de la demanda del producto de la especie n , en [tonelada semana⁻¹]; $Q_{n,2}$ es otro coeficiente de esa demanda, en [tonelada² semana⁻¹ US⁻¹].

Los datos siguientes, por ejemplo, completan lo necesario para una simulación:

$$\begin{array}{llllllll} r_1 = 17 & c_1 = 700 & & s_{T,1}(x, 0) = 1/3 & C_{1,\#} = 30 & & & \\ r_2 = 15 & c_2 = 700 & i = 0.001 & s_{T,2}(x, 0) = 1/3 & C_{2,\#} = 10 & \alpha = 250 & p_T(x, 0) = 100000 & \\ r_3 = 5 & c_3 = 800 & & s_{T,3}(x, 0) = 1/3 & C_{3,\#} = 5 & \beta = 1.44 & & \\ C_{T,1} = 2500000 & P_{1,1}(t) = 1500 & P_{1,2}(t) = 0.50 & s_1(0) = 500 & & Q_{1,1} = 600 & Q_{1,2} = 0.30 & \\ C_{T,2} = 0.5 & P_{2,1}(t) = 1350 & P_{2,2}(t) = 0.25 & s_2(0) = 400 & a = 3 & Q_{2,1} = 900 & Q_{2,2} = 0.50 & \\ & P_{3,1}(t) = 1500 & P_{3,2}(t) = 0.15 & s_3(0) = 800 & & Q_{3,1} = 750 & Q_{3,2} = 0.20 & \end{array}$$

¹¹ Estamos suponiendo que $0 \leq s_n \leq \frac{P_{n,1}}{P_{n,2}}$, que p_n depende muy simplemente de s_n , y que $0 \leq p_n \leq P_{n,1}$.

¹² Para la aproximación de Euler, sería más sano imponer:
 $q_{n,d}(t) = \min\left(\max\left(0, Q_{n,1} - Q_{n,2} \cdot p_n(t)\right), \left(q_{n,d}(t) + \frac{s_n(t)}{dt}\right)\right) \quad \forall n \in \{1,2,3\}$

I.3.1. Dinámica

Usando la aproximación de Euler con $dt = 1$ para las integrales temporales y $dx = 1$ para la espacial, se obtiene los gráficos de las figuras 20-30 del Apéndice 2.

En lo grueso, la rentabilidad u , las fracciones $s_{T,n}$ y el precio p_T repiten patrones dinámicos parecidos a los del escenario básico. En lo fino, se dejan entrever los efectos de las disminuciones exógenas y abruptas de las tasas de transporte C_T . Los flujos $q_{n,o}$ de los productos ofrecidos por los productores, supuestamente liberados de los deterioros, tienden a estacionarse aparentando invulnerabilidad, como en el escenario básico. Los flujos $q_{n,d}$ de los productos demandados por los consumidores también tienden a estacionarse, y lo hacen buscando coincidir con los flujos $q_{n,o}$ de los productos ofrecidos, endógenamente.

Las existencias s_n de los productos y sus precios p_n se ajustan endógenamente.

I.3.2. Condiciones para el estado estacionario

A partir de las ecuaciones anteriores, las condiciones para el estado estacionario ahora son siete:

$$\sum_{m \in \{1,2,3\}, m \neq n} q_{T,m,n}(x) - \sum_{m \in \{1,2,3\}, m \neq n} q_{T,n,m}(x) = 0 \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

$$C_{T,1} \cdot \frac{u(x)}{p_T(x)} = 0$$

$$q_{n,o} - q_{n,d} = 0 \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

Maniobrando algebraicamente, esas condiciones se traducen en:

$$u_n(x) = 0 \wedge q_{T,m,n}(x) = 0 \wedge p_T(x) = \frac{r_n \cdot (p_n - c_n - C_n \cdot x)}{i} \quad \forall m, n \in \{1,2,3\}$$

$$\wedge \int_0^\infty r_n(\chi) \cdot s_{T,n}(\chi) \cdot a \cdot d\chi = \max(0, Q_{n,1} - Q_{n,2} \cdot p_n) \quad \forall n \in \{1,2,3\}$$

I.4. Escenario 3: Dos centros de consumo

Imaginemos ahora dos centros de consumo (dos ciudades, sin vaivenes de oferta y demanda) en ambos extremos de un territorio (un valle, aislado de lo demás), centros de producción múltiples (terrenos, sin deterioro de productividad) distanciados contiguamente a lo largo del territorio, y productos de varias especies posibles en cada uno de los centros de producción, con una taxonomía doble: tanto por

naturaleza (verduras, frutas o cereales) como por destino (una ciudad u otra), de manera que las especies resulten seis, en número, por multiplicación (verduras para la primera ciudad, verduras para la segunda, frutas para la primera, frutas para la segunda, cereales para la primera o cereales para la segunda).

Imaginemos también que interesa predecir, primordialmente, la evolución de la rentabilidad de la producción en cada terreno.

Consecuentemente, digamos que x es la distancia entre un centro de producción (terreno) y uno de los centros de consumo (una de las ciudades), en [km]; y t es el tiempo transcurrido, en [semana].

u es la rentabilidad de la producción en un terreno, en [U\$ semana⁻¹ km⁻²].

$$u(x, t) = \sum_{n \in \{11,12,21,22,31,32\}} u_n(x, t) \cdot s_{T,n}(x, t)^{13}$$

u_n es la rentabilidad de producir el producto de la especie n (para $n = 11, n = 12, n = 21, n = 22, n = 31$ o $n = 32$, como si fuese el único producido), en [U\$ semana⁻¹ km⁻²]; y $s_{T,n}$ es la fracción del terreno dedicada efectivamente a ese producto, en [km² km⁻²]:

$$u_n(x, t) = r_n \cdot (p_n - c_n - C_n(t) \cdot x_n) - i \cdot p_T(x, t) \quad \forall n \in \{11,12,21,22,31,32\}$$

$$s_{T,n}(x, t) = s_{T,n}(x, 0) + \int_0^t (\sum_{m \in \{11,12,21,22,31,32\}, m \neq n} q_{T,m,n}(x, \tau) - \sum_{m \in \{11,12,21,22,31,32\}, m \neq n} q_{T,m,m}(x, \tau)) \cdot d\tau \quad \forall n \in \{11,12,21,22,31,32\}$$

r_n es la productividad para el producto de la especie n , en [tonelada semana⁻¹ km⁻²]; p_n es el precio de ese producto, en [U\$ tonelada⁻¹]; c_n es su costo (incluyendo insumos y salarios), en [U\$ tonelada⁻¹]; C_n es su tasa de transporte, en [U\$ tonelada⁻¹ km⁻¹]; x_n es la distancia entre un centro de producción y el de consumo correspondiente, en [km]; i es la tasa de interés del dinero, en [U\$ U\$⁻¹ semana⁻¹]; p_T es el precio del terreno, en [U\$ km⁻²]; y $q_{T,m,n}$ es la intensidad con que el terreno pasa de la producción del producto de la especie m a la del producto de la especie n , en [km² semana⁻¹].

$$C_n(t) = \begin{cases} C_{n,\#} & \forall t \leq \alpha \\ C_{n,\#} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{-(t-\alpha)/(\beta \cdot dt)}) & \forall t > \alpha \end{cases} \quad \forall n \in \{11,12,21,22,31,32\}$$

$$p_T(x, t) = p_T(x, 0) + \int_0^t C_{T,1} \cdot \frac{u(x,\tau)}{p_T(x,\tau)} \cdot d\tau$$

¹³ Ahora, el primer dígito en cada elemento de {11,12,21,22,31,32} delata de qué especie es el producto, y el segundo delata a qué ciudad abastece; por ejemplo, 31 delata al producto de la especie 3 con destino a la ciudad 1.

$$q_{T,m,n}(x,t) = C_{T,2} \cdot \frac{1+\text{sgn}(u_n(x,t)-u_m(x,t))}{2} \cdot \frac{(u_n(x,t)-u_m(x,t)) \cdot s_{T,m}(x,t)}{p_T(x,t)}$$

$$\forall m, n \in \{11,12,21,22,31,32\}, m \neq n$$

Los datos siguientes, por ejemplo, completan lo necesario para hacer la simulación:

$r_{11} = 17$	$p_{11} = 950$	$c_{11} = 700$		$s_{T,11}(x, 0) = 1/6$	$C_{11,\#} = 30$	$x_{11} = x$
$r_{12} = 17$	$p_{12} = 1000$	$c_{12} = 700$		$s_{T,12}(x, 0) = 1/6$	$C_{12,\#} = 30$	$x_{12} = 60 - x$
$r_{21} = 15$	$p_{21} = 900$	$c_{21} = 700$	$i = 0.001$	$s_{T,21}(x, 0) = 1/6$	$C_{21,\#} = 10$	$x_{21} = x$
$r_{22} = 15$	$p_{22} = 900$	$c_{22} = 700$		$s_{T,22}(x, 0) = 1/6$	$C_{22,\#} = 10$	$x_{22} = 60 - x$
$r_{31} = 5$	$p_{31} = 1050$	$c_{31} = 800$		$s_{T,31}(x, 0) = 1/6$	$C_{31,\#} = 5$	$x_{31} = x$
$r_{32} = 5$	$p_{32} = 1100$	$c_{32} = 800$		$s_{T,32}(x, 0) = 1/6$	$C_{32,\#} = 5$	$x_{32} = 60 - x$

$$\alpha = 250 \quad \beta = 1.44 \quad p_T(x, 0) = 100000 \quad C_{T,1} = 2500000$$

$$C_{T,2} = 0.5$$

I.4.1. Dinámica

Usando la aproximación de Euler con $dt = 1$ para las integrales temporales, se obtiene los gráficos de las figuras 31-37 del Apéndice 2.

La presencia de dos centros de consumo no modifica mayormente los patrones dinámicos del escenario básico. Sólo expande las opciones del comercio involucrado. Anecdóticamente, en línea con lo pensado por von Thünen, las figuras 36 y 37 mostradas en el Anexo 2 exigirían que los productos de la especie 31 (cereales para la ciudad 1) no se produzcan.

CONCLUSIONES

En este escrito hemos afrontado la limitación estacionaria de von Thünen (1826) que predice un patrón de anillos concéntricos de mono-cultivos con un gradiente espacial de rentas (máximas) en descenso monótonico desde las inmediaciones de una ciudad (un centro de consumo, $x = 0$) hasta un horizonte lejano. Tal gradiente puede explicarse sumariamente apelando a la figura A.1 y los comentarios del Apéndice que expone esta exigencia primordial de dicho autor.

Es sabido que algunas culturas nativas de América Latina, muy anteriores a von Thünen (1826), ordenaron sus cultivos con un patrón de anillos circulares de forma similar a la solución del autor. Pero no parece saberse si acaso esas culturas ordenaron así sus cultivos urdiendo una maximización de rentas que decrecen hacia la periferia, como la solución de von Thünen sugiere.

Al dinamizar el modelo estático de von Thünen (1826), las rentas descendentes hacia la periferia que aparecen en su escrito también aparecen en el nuestro, aunque aquí evolucionando sin el mismo carácter monotónico. Sin embargo, los anillos de producciones únicas no aparecen en nuestras soluciones (o simulaciones).

En efecto, en nuestro modelo dinámico los productores buscan maximizar sus rentas sin ponerse a pensar en líneas rectas de figuras como las mostradas en el Apéndice A.1; a elegir las líneas de más arriba en los tramos pertinentes, y a producir exclusivamente los productos de las especies que corresponden a las líneas elegidas. Sin embargo, ellos no son irracionales: ensayan variaciones de producción menos complejas; toman en cuenta los efectos favorables o adversos que tienen esas variaciones en sus rentas, y vuelven a ensayar, repetidamente. Por supuesto, no pueden empatar prontamente las rentas de los agricultores de von Thünen si de pronto se dan condiciones acordes con las supuestas por él; y, como los agricultores presentes en su modelo, tampoco pueden “ganar” donde les toca “perder” con rentas negativas. Pero las condiciones actuales no son las de von Thünen, y las figuras actuales no son de líneas rectas.

Por un lado, entre las condiciones actuales hay rentabilidades relativas que dependen, no sólo de las productividades, de los precios de los productos, de los costos de producción y de los costos de transporte, sino también de la tasa de interés del dinero y de los dineros implícitos en los precios de los terrenos. Adicionalmente, los precios de los terrenos varían de manera endógena y paulatina, movidos por las rentabilidades, y las tasas de transporte varían de manera exógena y abrupta. Además, alternativamente, las productividades o los precios de los productos varían de manera endógena y paulatina, afectados por los deterioros de los terrenos o por las existencias de productos en el centro de consumo; y todavía, en vez de un centro de consumo puede haber dos.

Por el otro lado, las figuras 6, 14, 25 y 36 sugieren que nuestra aproximación dinámica al problema de von Thünen (1826) no arroja líneas rectas y monotónicas como las de este autor, sino de líneas curvas cuyas cúspides no se ubican necesariamente en las inmediaciones de la ciudad: son líneas de rentabilidades con descuento por el interés de los dineros implícitos en los precios de los terrenos, que tienden a ser mayores cerca de $x = 0$.

Aún ante esas líneas curvas, nuestros productores podrían elegir la producción exclusiva de los productos que corresponden a las líneas de más arriba en los tramos pertinentes de las figuras; pero no lo hacen: van dosificando las producciones según fracciones que tienden a ser mayores para los productos correspondientes a las líneas de más arriba en dichas figuras, sin que sean nulas para otros productos. Eso se aprecia, por ejemplo, en las figuras 2, 3 y 4, 10, 11 y 12, 21, 22 y 23, y 32, 33 y 34.

El modelo actual, con sus producciones inclusivas, titubea poco ante las variaciones de los escenarios; en cambio, el modelo de von Thünen, con sus producciones exclusivas tras haber sido resueltas mediante una perspectiva estacionaria se vuelve inestable: varias otras simulaciones numéricas no incluidas en este escrito muestran que el modelo estacionario de ese autor no es fácil de defender al introducir una visión dinámica. Analizar en profundidad este comportamiento es parte de nuestra actual agenda de investigación.

En el modelo actual, la aparición incómoda de terrenos “perdedores”, con rentabilidades brutas menores que el interés del dinero implícito en los precios de los terrenos insinúa un problema macroeconómico o de economía política y hace pertinente una investigación futura mayor que incluya, al menos, relaciones entre el interés del dinero y el re-ordenamiento espacial, y algo acerca del surgimiento de ciudades. Ahora sólo parece caber un comentario breve y quizás simplista al respecto: las rentabilidades aludidas son de las producciones; los terrenos “perdedores” podrían dedicarse a otras actividades económicas (por ejemplo, turísticas; o inmobiliarias, con la consiguiente siembra de ciudades); y/o podrían ser compensados mediante subsidios, si las demandas de los productos son agobiantes en las ciudades.

Considerar que las rentabilidades dependen (también) de los dineros implícitos en los precios de los terrenos, y que éstos varían movidos por las rentabilidades, podría servir para afrontar, *a posteriori*, la otra limitación del escrito de von Thünen: su desconsideración del surgimiento endógeno de la ciudad, junto con el uso del territorio. Esto también forma parte de nuestra actual agenda de investigación. Finalmente, otra línea de investigación futura tiene el ambicioso, pero desafiante objetivo, de introducir progresivamente en nuestro modelo algunas de las ideas de Harvey (2001); el concepto de *conflicto* entre productores y trabajadores aparece por ahora en nuestro horizonte cercano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alonso, William (1964), *Location and Land Use*, Harvard University Press, Cambridge, doi: 10.4159/harvard.9780674730854.
- Day, Richard y Tinney, E. Herbert (1969), “A Dynamic von Thünen Model”, *Geographical Analysis*, vol. 1, núm. 1, pp. 137-151, doi:10.1111/j.1538-4632.1969.tb00612.x.
- Dempsey, Bernard (1960), *The Frontier Wage*, Loyola Univeristy Press, Chicago, <https://www.worldcat.org/title/frontier-wage-the-economic-organization-of-free-agents/oclc/1231457802?referer=di&ht=edition>.
- Fujita, Masahisa; Krugman, Paul y Venables, Anthony (1999), *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, MIT Press, Cambridge, doi: 10.7551/mitpress/6389.001.0001.

- Harvey, David (2001), *Spaces of Capital. Towards a Critical Geography*, Edinburgh University Press, Edinburgh, doi: 10.4324/9780203821695.
- Mills, Edwin (2000), "A Thematic History of Urban Economic Analysis", *Brookings-Wharton Papers on Urban Economics*, pp. 1-52, doi: 10.1353/urb.2000.0008.
- Okabe, Atsuyuki y Kume, Yoshiaki (1983), "A Dynamic von Thünen Model with a Demand Function", *Journal of Urban Economics*, vol. 14, pp. 355-369, doi:10.1016/0094-1190(83)90015-3.
- Thünen, Johann von (1826), *Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie*, Perthes, Hamburg (trad.: Wartenberg, Carla (1966), *Von Thünen's Isolated State*, Pergamon Press, Oxford).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los comentarios y cambios propuestos por los árbitros anónimos que revisaron este escrito. Orellana y Fuentes agradecen también el soporte financiero que les fue otorgado a través del proyecto Fondecyt 1181414 "Análisis Crítico de Algunos Modelos Matemáticos en Economía" de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile. Además, agradecen el auspicio de la Dirección General de Investigación, Innovación y Posgrado, y los Departamentos de Matemáticas e Industrias de la Universidad Técnica Federico Santa María.

APÉNDICE 1

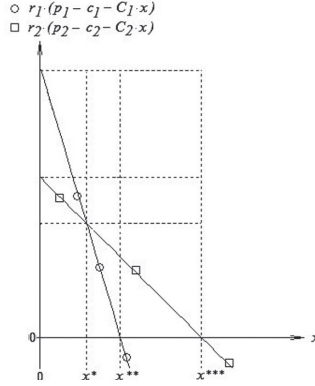
Imaginemos productos de dos especies con destino a un centro de consumo, según von Thünen, lo cual implica:

$$u_1 = r_1 \cdot (p_1 - c_1 - C_1 \cdot x)$$

$$u_2 = r_2 \cdot (p_2 - c_2 - C_2 \cdot x)$$

que es un sistema de dos ecuaciones representables gráficamente, por ejemplo, mediante la figura A1.

Figura A1. Un escenario de von Thünen.



De acuerdo con la figura:

$$r_1 \cdot (p_1 - c_1 - C_1 \cdot x^*) = r_2 \cdot (p_2 - c_2 - C_2 \cdot x^*) \rightarrow x^* = \frac{r_1 \cdot (p_1 - c_1) - r_2 \cdot (p_2 - c_2)}{r_1 \cdot C_1 - r_2 \cdot C_2}$$

$$r_1 \cdot (p_1 - c_1 - C_1 \cdot x^{**}) = 0 \rightarrow x^{**} = \frac{p_1 - c_1}{C_1}$$

$$r_2 \cdot (p_2 - c_2 - C_2 \cdot x^{***}) = 0 \rightarrow x^{***} = \frac{p_2 - c_2}{C_2}$$

lo cual implica, según von Thünen:

$$0 < x < x^* \rightarrow (s_{T,1} = 1 \wedge s_{T,2} = 0)$$

$$x^* < x < x^{**} \rightarrow (s_{T,1} = 0 \wedge s_{T,2} = 1)$$

Eso implica, a su vez:

$$q_{1,o} = r_1 \cdot a \cdot (x^* - 0) = r_1 \cdot a \cdot \frac{r_1 \cdot (p_1 - c_1) - r_2 \cdot (p_2 - c_2)}{r_1 \cdot C_1 - r_2 \cdot C_2} = \frac{r_1 \cdot a \cdot (r_1 \cdot p_1 - r_2 \cdot p_2 + r_2 \cdot c_2 - r_1 \cdot c_1)}{r_1 \cdot C_1 - r_2 \cdot C_2}$$

$$q_{2,o} = r_2 \cdot a \cdot (x^{***} - x^*) = r_2 \cdot a \cdot \left(\frac{p_2 - c_2}{C_2} - \frac{r_1 \cdot (p_1 - c_1) - r_2 \cdot (p_2 - c_2)}{r_1 \cdot C_1 - r_2 \cdot C_2} \right) = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot a \cdot (C_1 \cdot p_2 - C_2 \cdot p_1 + c_1 \cdot C_2 - c_2 \cdot C_1)}{C_2 \cdot (r_1 \cdot C_1 - r_2 \cdot C_2)}$$

y, para la visión estacionaria de von Thünen:

$$q_{1,o} = \frac{r_1 \cdot a \cdot (r_1 \cdot p_1 - r_2 \cdot p_2 + r_2 \cdot c_2 - r_1 \cdot c_1)}{r_1 \cdot C_1 - r_2 \cdot C_2} = q_{1,d} = \max(0, Q_{11} - Q_{12} \cdot p_1)$$

$$q_{2,o} = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot a \cdot (C_1 \cdot p_2 - C_2 \cdot p_1 + c_1 \cdot C_2 - c_2 \cdot C_1)}{C_2 \cdot (r_1 \cdot C_1 - r_2 \cdot C_2)} = q_{2,d} = \max(0, Q_{21} - Q_{22} \cdot p_2)$$

Suponiendo que $0 < Q_{11} - Q_{12} \cdot p_1 \wedge 0 < Q_{21} - Q_{22} \cdot p_2$, el último sistema de ecuaciones es resoluble algebraicamente para p_1 y p_2 .

A partir de esta estructura,

- a) si un terreno dista de la ciudad de manera que $0 < x < x^*$, en dicho terreno debe producirse el producto de la especie 1¹⁴ y no el producto de la especie 2;
- b) si el terreno dista de la ciudad de manera que $x^* < x$, en él debe producirse el producto de la especie 2 (el de la línea de más arriba en ese otro tramo: la con cuadrados), y no el de la especie 1.

Cumpliendo a) y b), en cada terreno se logra la renta máxima obtenible de la producción de los productos 1 y 2. Además, la figura A.1 muestra líneas de rentabilidades que son rectas y descendentes hacia la derecha, y como debe irse eligiendo la de más arriba, por tramos, para ir maximizando las rentas, lo que resulta es un gradiente espacial de rentas en descenso monótonico a medida que x crece hacia la periferia, hasta que las rentas se vuelven negativas.

APÉNDICE 2: FIGURAS

A2.1. Figuras Escenario 1.

Figura 9. Rentabilidad $u(x,t)$ de la producción, en el terreno.

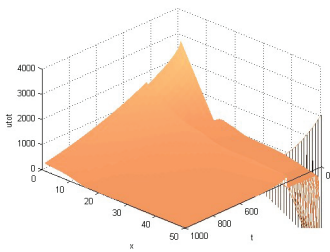


Figura 10. Fracción $s_{T,1}(x,t)$ del terreno, dedicada al producto 1.

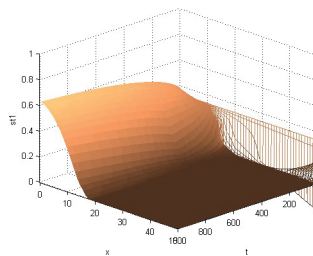


Figura 11. Fracción $s_{T,2}(x,t)$ del terreno, dedicada al producto 2.

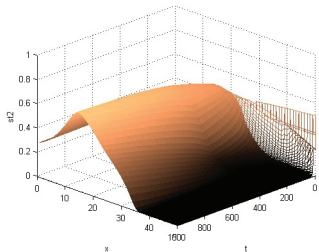
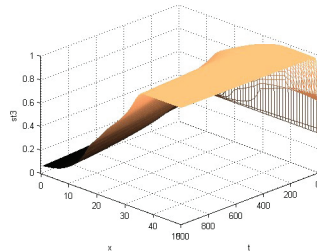


Figura 12. Fracción $s_{T,3}(x,t)$ del terreno, dedicada al producto 3.



¹⁴ El de la línea de más arriba en ese tramo: la con círculos.

Figura 13. Precio $p_r(x,t)$ del terreno.

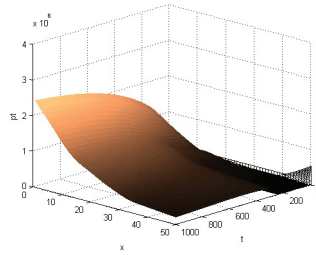


Figura 14. Rentabilidades $u_n(x)$ de los productos 1, 2 y 3, cuando $t=999$.

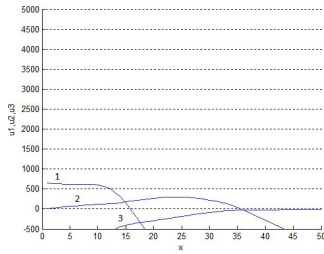


Figura 15. Rentabilidades según von Thünen de los productos 1, 2 y 3, cuando $t=999$.

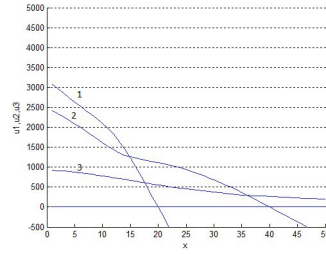


Figura 16. Flujos $q_{n,o}(t)$ ofrecidos por la totalidad de los productores.

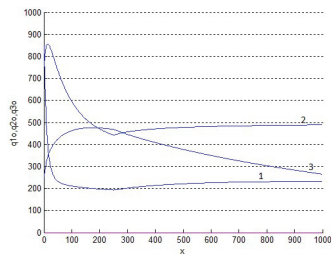


Figura 17. Productividad $r_1(x,t)$ para el producto 1.

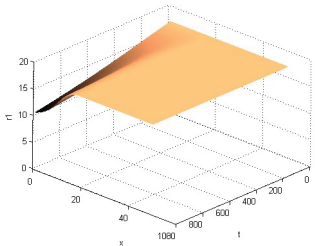


Figura 18. Productividad $r_2(x,t)$ para el producto 2.

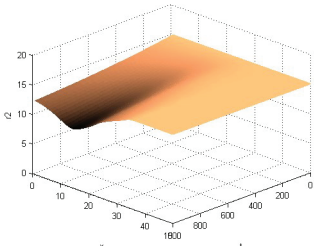
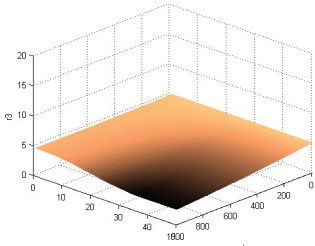


Figura 19. Productividad $r_3(x,t)$ para el producto 3.



A2.2. Figuras Escenario 2.

Figura 20. Rentabilidad $u(x,t)$ de la producción, en el terreno.

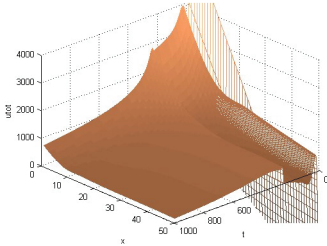


Figura 21. Fracción $s_{T,1}(x,t)$ del terreno, dedicada al producto 1.

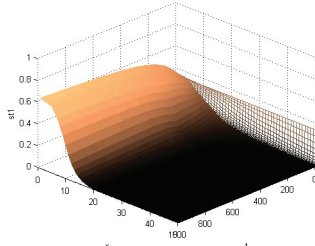


Figura 22. Fracción $s_{T,2}(x,t)$
del terreno, dedicada al producto 2.

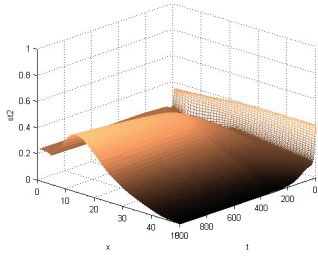


Figura 23. Fracción $s_{T,3}(x,t)$
del terreno, dedicada al producto 3.

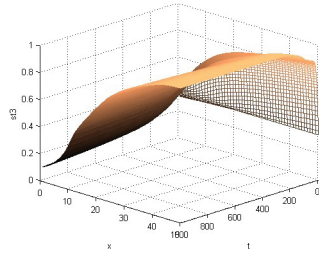


Figura 24. Precio $p_T(x,t)$
del terreno.

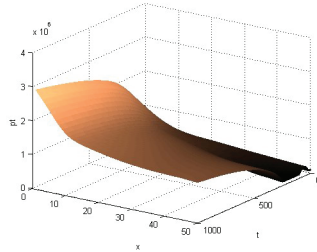


Figura 25. Rentabilidades $u_n(x)$
de los productos 1, 2 y 3, cuando $t=999$.

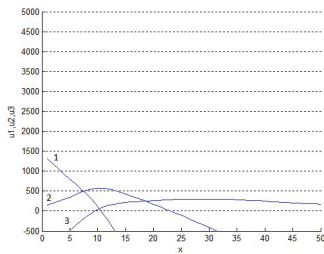


Figura 26. Rentabilidades según von Thünen
de los productos 1, 2 y 3, cuando $t=999$.

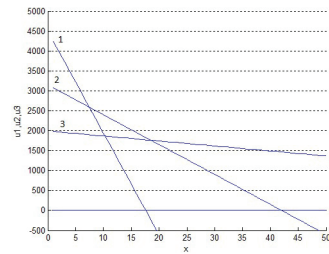


Figura 27. Flujos $q_{n,o}(t)$ ofrecidos por la totalidad de los productores.

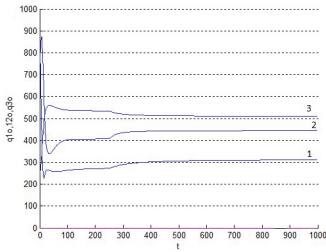


Figura 28. Flujos $q_{n,d}(t)$ demandados por la totalidad de los consumidores.

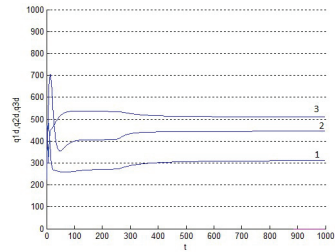


Figura 29. Existencias $s_n(t)$ de los productos, en la ciudad.

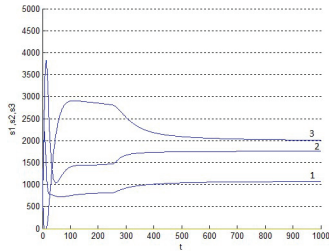
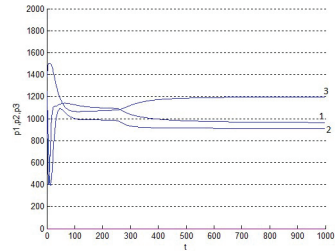


Figura 30. Precios $p_n(t)$ de los productos.



A2.3. Figuras Escenario 3.

Figura 31. Rentabilidad $u(x,t)$ de la producción, en el terreno.

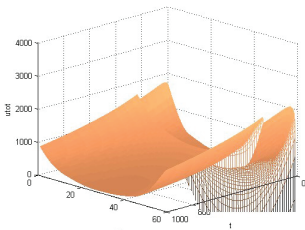


Figura 32. Fracciones $s_{T,11}(x,t)$ y $s_{T,12}(x,t)$ del terreno, dedicadas a los productos 11 y 12.

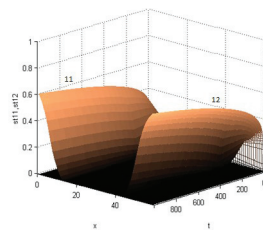


Figura 33. Fracciones $s_{T,21}(x,t)$ y $s_{T,22}(x,t)$ del terreno, dedicadas a los productos 21 y 22.

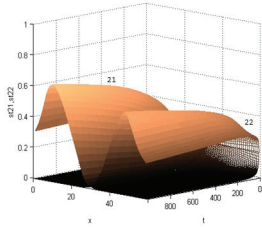


Figura 34. Fracciones $s_{T,31}(x,t)$ y $s_{T,32}(x,t)$ del terreno, dedicadas a los productos 31 y 32.

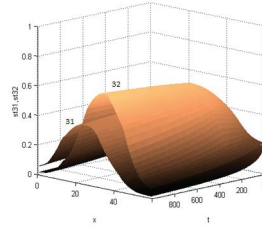


Figura 35. Precio $p_T(x,t)$ del terreno.

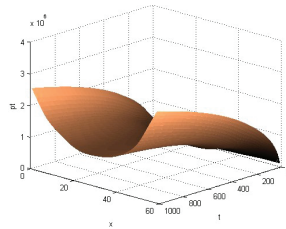


Figura 36. Rentabilidades $u_n(x)$ de los productos 11, 12, 21, 22, 31 y 32, cuando $t=999$.

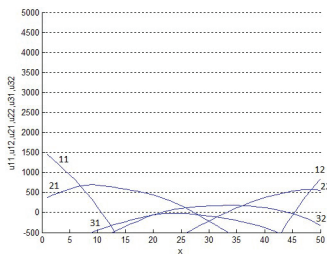


Figura 37. Rentabilidades según von Thünen de los productos 11, 12, 21, 22, 31 y 32, cuando $t=999$.

