

PRUEBAS DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO EN ÍNDICES BURSÁTILES AMERICANOS*

*Franco Parisi, Christian Espinosa
y Antonino Parisi***

RESUMEN

Este artículo valida el comportamiento caótico en las Bolsas de Valores de Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Perú y México, utilizando los índices accionarios Merval, Bovespa, S&P TSX Composite, IPSA, IGPA, S&P 500, Dow Jones Industrials, Nasdaq, IGBVL e IPC, respectivamente. Los resultados de distintas técnicas y métodos, como análisis gráfico, análisis de recurrencia, entropía de espacio temporal, coeficiente de Hurst, exponente de Lyapunov y dimensión de correlación, apoyan la hipótesis de que los mercados bursátiles americanos se comportan de manera caótica, en contra de la hipótesis de mercados eficientes y la hipótesis de aleatoriedad. Esta conclusión valida el uso de instrumentos predictivos de rendimientos accionarios en los mercados de renta variable americanos. Destacable es el resultado de la técnica coeficiente de Hurst, que en promedio fue de 0.75 para los índices en estudio, lo que estaría justificando la utilización de modelos tipo Arfima, entre otros, para la predicción de dichas series.

ABSTRACT

This article validates the chaotic behavior in the Argentinean, Brazilian, Canadian, Chilean, American, Peruvian and Mexican Stock Markets using the Merval, Bovespa, S&P TSX Composite, IPSA, IGPA, S&P 500, Dow Jones Industrials, Nasdaq, IGBVL and IPC Stock Indexes respectively. The results of different techniques and methods like: Graphic Analysis, Recurrence Analysis, Temporal Space Entropy, Hurst Coefficient, Lyapunov Exponential and Correlation Dimension support the hypothesis that the stock markets behave in a chaotic way and rejected the hypothesis of randomness. Our conclusion validates the use of prediction techniques in those stock markets. It's

* *Palabras clave:* teoría de caos, análisis de recurrencia, entropía de espacio temporal, coeficiente de Hurst, exponente de Lyapunov, dimensión de correlación, prueba BDS. *Clasificación JEL:* C12, C14, G10, G14 y G15. Artículo recibido el 7 de marzo y aceptado el 14 de septiembre de 2006.

** F. y A. Parisi, profesores asistentes, Departamento de Finanzas y Administración, Universidad de Chile; Chair in Finance EuroAmerica. C. Espinosa, profesor asistente, Facultad de Economía y Negocios, Universidad Diego Portales.

remarkable the result of the Hurst Coefficient Technique, that in average was of 0.75 for the indexes of this study which would justify the use of Arfima models among others for the prediction of such series.

INTRODUCCIÓN

Albert Einstein recibió el premio Nobel por su contribución a la teoría cuántica. No obstante, nunca aceptó que el universo estuviera gobernado por el azar. Sus ideas al respecto están resumidas en su famosa frase “Dios no juega a los dados”. La mecánica cuántica no predice un único resultado para un experimento determinado sino que predice un cierto número de resultados posibles y entrega las probabilidades de ocurrencia de cada uno de ellos. Es decir, si se realizara el mismo experimento en un gran número de sistemas similares, con las mismas condiciones de partida en cada uno de ellos, se encontraría que el resultado del experimento sería “A” un cierto número de veces, “B” otro número de veces, y así sucesivamente. Se podría predecir el número aproximado de veces que obtendría el resultado “A” o el “B”, pero no se podría predecir el resultado específico de un experimento determinado. Así pues, la mecánica cuántica introduce un elemento inevitable de incapacidad de predicción, una aleatoriedad en la ciencia.¹

En finanzas la palabra aleatoriedad ha sido tema de discusión constante en torno de los precios accionarios. Desde que Fama (1970) planteara la hipótesis de mercados eficientes, muchos estudios han señalado que las fluctuaciones de los precios accionarios siguen un camino aleatorio. No obstante, trabajos posteriores² han concluido que existen pruebas de que los precios accionarios no siguen un proceso de caminata aleatoria (*random walk*) y muestran que los rendimientos accionarios pueden ser predecibles en algún grado. En síntesis, se asume que la evolución de los rendimientos accionarios futuros se puede predecir por modelos basados en series de tiempo.

El análisis de series de tiempo fue impulsado por Box y Jenkins (1970) y dio origen a la metodología del mismo nombre. Estos modelos se han empleado exitosamente en variables económicas pero no

¹ Párrafo extraído del libro de Stephen Hawking, *Historia del tiempo: del Big Bang a los agujeros negros*.

² Lo y MacKinley (1988), Conrad y Kaul (1988), Fama y French (1988), entre otros.

han tenido igual éxito en variables financieras. Como consecuencia de esto, aparecieron modelos que explican en mejor medida las variables financieras. En este contexto destacan los modelos ARCH y GARCH desarrollados por Engle y Bollerslev (1982 y 1986, respectivamente) los cuales, ocupando las bases de la metodología ARIMA, la amplían para estudiar la varianza. Por cierto que los modelos ARCH y GARCH han dado pie a numerosos modelos de la misma familia, entre los cuales se encuentran los modelos T-GARCH, E-GARCH, I-GARCH, M-GARCH, entre muchos otros.

Durante el decenio de los setenta del siglo pasado nace la teoría del caos (o análisis de series de tiempo con comportamiento caótico) gracias a los trabajos de Lorenz (1963), Takens (1981) y Mandelbrot (1982), entre otros. Pero no fue hasta 1980 cuando se amplió el análisis a las series temporales gracias a Packard, Crutchfield, Farmer y Shaw (1980) para que luego, en 1981, Takens lo formalizara matemáticamente.

La contrastación de comportamiento caótico en series económicas y financieras se inició en los años ochenta para variables macroeconómicas como el PIB y agregados monetarios. En dichas series se encontró pocas pruebas de caos; no obstante, se demostró la existencia de una estructura no lineal (Le Baron, 1994). Desde entonces se han realizado diversos estudios en la búsqueda de comportamiento caótico en las series financieras y económicas (Di Matteo, Aste y Dacorogna, 2005; Los, 2004; Los y Yu, 2005). Así, lo habitual es encontrar investigaciones que utilizan técnicas e instrumentos como el coeficiente de Hurst, el exponente de Lyapunov y la dimensión de correlación, para la contrastación de comportamiento caótico en dichas series.

En el contexto del coeficiente de Hurst estudios recientes muestran dependencia de largo plazo en las series de precios de los activos financieros. Así, por ejemplo, Kyaw, Los y Zong (2004), utilizando *wavelet multiresolution analysis* (MRA) para las series diarias de los índices bursátiles y tasas de cambio latinoamericanos (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Venezuela) encontraron un coeficiente de Hurst igual o mayor a 0.5 en todos los países, excepto en Colombia. Similares resultados encontraron Los y Yu (2005) para el mercado accionario de China. En dicho estudio, utilizando precios de cierre diarios de los índices de las bolsas de valores de Shanghai y

Shenzhen, encontraron un coeficiente de Hurst de 0.54 y 0.55, respectivamente.

De esta manera se infiere que los mercados bursátiles latinoamericanos, en general, presentan memoria de largo plazo al igual que el mercado bursátil chino. No obstante, estas pruebas no son congruentes con resultados encontrados para países europeos. Por ejemplo, Lipka y Los (2003) realizan un estudio que comprende ocho índices bursátiles europeos, correspondientes a Alemania, Austria, Dinamarca, España, Francia, Noruega y Reino Unido. Los autores, tomando muestras irregulares que van desde 435 observaciones para el índice Ibex 35 de España hasta 4 437 para el índice FTSE 100 correspondiente al Reino Unido, utilizando siete técnicas distintas para computar el coeficiente de Hurst, encontraron resultados completamente distintos, dependiendo de la técnica utilizada. Así, el cálculo del coeficiente de Hurst varía desde 0.22 a 0.56.

Para la detección de comportamiento caótico, un instrumento utilizado por lo común en diversas investigaciones es el exponente de Lyapunov. Así, por ejemplo, Rajaratnam y Weston (2004) encontraron un exponente de Lyapunov de 0.132 para la serie del tipo de cambio entre Nueva Zelanda y Estados Unidos, para el periodo comprendido entre 1985 y 2004, lo que indicaría claramente la existencia de un comportamiento caótico en dicha serie.

Como se ha visto, la dependencia de largo plazo en las series financieras fue investigada y documentada, al igual que el cómputo del exponente de Lyapunov. Sin embargo, dichos estudios se limitan a contrastar sólo esa cualidad y no abordan el análisis utilizando otros instrumentos para contrastar comportamiento caótico en las mismas series financieras, utilizando, por ejemplo, análisis de recurrencia, entropía de espacio temporal o la dimensión de correlación, entre otras. Este problema es justamente resuelto en la presente investigación.

De esta manera nuestro trabajo se centra en analizar la existencia de un comportamiento caótico en las bolsas de Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Perú y México, utilizando la evolución de los índices accionarios Merval, Bovespa, S&P TSX Composite, IPSA, IGPA, S&P 500, Dow Jones Industrials, Nasdaq, IGBVL e IPC, respectivamente. Los resultados de aplicar distintas técnicas y métodos, como el análisis gráfico, análisis de recurrencia, entropía de espacio

temporal, coeficiente de Hurst, exponente de Lyapunov y dimensión de correlación, apoyan la hipótesis de que los mercados bursátiles americanos se comportan de manera caótica, en contra de la hipótesis de aleatoriedad.

La consecuencia teórica de contrastar un comportamiento caótico en los mercados accionarios americanos radica en que, a diferencia de la hipótesis de mercados eficientes, la información (o nueva información) que se agrega a la serie de precios accionarios (cambio de directores, anuncio de aumento de dividendos, etc.) no es externa sino que es propia de la dinámica interna del mercado. Por tanto, el desafío ya no consiste en dar una explicación estadística, o de otro tipo, a variables estocásticas que ayudan a mejorar el pronóstico de la evolución futura de activos financieros, sino que radica en descubrir la dinámica propia del mercado. Es decir, reconstruir el “atractor financiero”.

Desde el punto de vista práctico, sin duda que la importancia de evidenciar un comportamiento caótico en series de activos financieros justifica la búsqueda de técnicas predictivas a la hora de invertir en los mercados accionarios americanos. A su vez, confirma la conveniencia de usar estas técnicas para lograr una mayor eficiencia en la administración de carteras de inversión. En síntesis, la principal aportación de la teoría del caos es que otorga una explicación teórica de la existencia de sistemas dinámicos con comportamientos irregulares sin la necesidad de recurrir a variables estocásticas.

Esta investigación se estructura de la siguiente manera. En la sección I se introduce los conceptos básicos de las series con comportamiento caótico por medio del análisis de los sistemas dinámicos. La sección II describe los datos y series a utilizar. La sección III corrobora el comportamiento caótico en las series analizadas. En la sección IV se aplica pruebas no paramétricas para contrastar aleatoriedad y caos. Finalmente, se resume las principales conclusiones.

I. SISTEMAS DINÁMICOS CON COMPORTAMIENTO CAÓTICO

La diferencia fundamental entre un sistema dinámico y otro estático que en el primero las variables están en función del tiempo, mientras que en un sistema estático no ocurre lo mismo. Los sistemas di-

námicos pueden ser clasificados de acuerdo con el comportamiento de sus órbitas. Dichas órbitas corresponden al movimiento en el cual evoluciona el sistema a lo largo del tiempo dentro del *espacio de fase*,³ es decir, el movimiento del vector describe el sistema.

En un sistema dinámico un vector representa una “fotografía” del sistema en un determinado momento. Para el mercado financiero el vector puede estar formado por variables que afectan el mercado (precio, volumen, etc.). De esta manera, si el sistema se mueve en un conjunto n , tal que A es subconjunto de n , entonces las órbitas podrán tener el siguiente comportamiento: *i*) sistema disipativo: si A se contrae con el paso del tiempo; *ii*) sistema expansivo: si A se expande con el paso del tiempo, *iii*) sistema conservativo: si A se mantiene con el paso del tiempo.

Un concepto asociado a los sistemas disipativos es el de atractor. Se denomina atractor a un subconjunto B hacia el que A tiende a contraerse en el tiempo. Por tanto, las órbitas que entran en un atractor no escapan sino que permanecen en él. En un sistema dinámico el atractor representa el equilibrio, ya que una vez alcanzado dicho equilibrio la órbita no tiende a separarse de él.

De acuerdo con Eckmann y Ruelle (1985) existen cuatro tipos de atractores: fijo, periódico, semiperiódico y aperiódico. Este último es un atractor en el que las órbitas no pueden clasificarse como periódicas ni como semiperiódicas. Así, un rendimiento accionario con este tipo de atractor se movería sin una pauta que lo identificase y podría parecer que los precios se mueven de manera errática. Finalmente, Ruelle y Takens (1971) denominaron a este último tipo “atractor extraño”. Así, los sistemas dinámicos que presentan atractores extraños se denominan sistemas caóticos. Un sistema caótico presenta las siguientes características:

- i) *Sensibilidad a las condiciones iniciales*. Un sistema con comportamiento caótico tendrá sensibilidad a las condiciones iniciales si el conjunto de partida no se contrae en todas direcciones sino que en algunas de ellas se expande. No obstante, el conjunto aún es limitado y, por tanto, mantiene un atractor. Si el sistema

³ Espacio vectorial en el que cada vector representa la descripción del sistema dinámico en ese instante. Cada componente del vector es una variable que determina el estado del sistema.

en algún momento se expande, las diferencias iniciales no tienden a desaparecer y, por tanto, pueden llegar a ser importantes. En resumen, la sensibilidad a las condiciones iniciales no nos dice cuál va a ser el estado final o futuro del conjunto, sin embargo, podríamos inferir cuál será su comportamiento a muy corto plazo.

- ii) *Puntos periódicos densos*. La característica de puntos periódicos densos indica que existen infinitos puntos y soluciones periódicas inestables asociadas a un atractor extraño. Es decir, las órbitas que se encuentran dentro del atractor se aproximan a los límites de estos puntos (soluciones) inestables y permanecen hasta que la naturaleza de estas soluciones (inestabilidad) haga que dicha órbita escape a los límites de otra solución inestable, cuando finalmente encuentre un equilibrio estable caótico. La manera en que se agrupan los equilibrios periódicos inestables y el equilibrio estable caótico desencadena que el atractor extraño sea denso en puntos (soluciones) periódicos.
- iii) *Transitividad*. Esta característica implica que un sistema dinámico no podrá descomponerse en dos subsistemas independientes entre sí. A pesar que la característica de sensibilidad a las condiciones iniciales indica que las órbitas que se encuentran infinitamente próximas se alejan en el tiempo, dichas órbitas a largo plazo pasarán por todas las regiones que componen el atractor extraño formando un solo sistema dinámico.

II. DATOS Y MODELOS

Los datos fueron extraídos de *Economática*. En el caso de Argentina, la serie de observaciones del índice Merval fue ampliada hasta el 25 de abril de 2005 para completar las 3 841 observaciones por índice accionario. La elección del número de datos se ajustó a los requerimientos de los diversos cálculos realizados. Los datos corresponden a los valores de cierre diarios de cada índice. Un resumen de la serie final se muestra en el cuadro 1.

Los instrumentos que permiten probar la existencia de un comportamiento caótico en las series de tiempo son sensibles a los procesos estocásticos en los cuales existen dependencias entre las variables.

CUADRO 1. *Descripción de los datos utilizados obtenidos de Economía*

<i>País</i>	<i>Índice</i>	<i>Desde</i>	<i>Hasta</i>	<i>Datos</i>
Argentina	Merval	19-10-1989	25-04-2005	3 841
Brasil	Bovespa	15-03-1989	06-10-2004	3 841
Canadá	S&P TSX Composite	29-04-1989	13-05-2005	765
Chile	IPSA	05-05-1989	06-10-2004	3 841
	IGPA	02-05-1989	06-10-2004	3 841
México	IPC	02-06-1989	06-10-2004	3 841
Perú	IGBVL	03-05-1989	06-10-2004	3 841
Estados Unidos	DJI	17-07-1989	06-10-2004	3 841
	Nasdaq	17-07-1989	06-10-2004	3 841
	S&P 500	13-07-1989	06-10-2004	3 841

Por ello es necesario aplicar un filtro para eliminar dichas dependencias, por medio de un modelo ARMA. De esta manera, luego de filtrar los rendimientos accionarios, la nueva serie es de residuos no correlacionados. Así, si el sistema era caótico, la serie de residuos continuará teniendo las características del sistema original y si era estocástico los residuos no serán más que ruido blanco.

Dado lo anterior, utilizando la prueba de Dickey-Fuller aumentada (1979) y la de Phillips y Perron (1988), se analizó si la serie es estacionaria, para luego buscar modelos del tipo ARMA (p, q). De esta manera se encontraron modelos ARMA para los índices Merval, S&P TSX Composite, IGPA, IPC y S&P 500. Para los otros índices se encontraron modelos estadísticamente significativos pero con correlación en los residuos, por este motivo se desearon dichos modelos y se buscaron otros que arrojaran residuos no correlacionados. Con esto, y luego de la inspección gráfica de las series, se estimó que los modelos GARCH (Bollerslev, 1986) eran los más adecuados para generar residuos no correlacionados. Los modelos definitivos se muestran en el cuadro 2.

III. DETECCIÓN DEL COMPORTAMIENTO CAÓTICO

Peters (1994) intenta encontrar indicios de una serie con comportamiento caótico mediante el análisis gráfico y señala que las series de

CUADRO 2. *Series seleccionadas para contrastar un comportamiento caótico*

<i>País</i>	<i>Índice</i>	<i>Serie-modelo</i>
Argentina	Merval	ARMA (6,5) GARCH (1,1)
Brasil	Bovespa	GARCH (1,1)
Canadá	S&P TSX Composite	ARMA (4,4) GARCH (1,1)
Chile	IPSA IGPA	GARCH (2,1) ARMA (2,3) GARCH (2,1)
México	IPC	ARMA (3,2) GARCH (1,1)
Perú	IGBVL	GARCH (2,1)
Estados Unidos	DJI Nasdaq S&P 500	GARCH (1,1) GARCH (3,1) ARMA (10,10) GARCH (1,1)

precios de los activos financieros tienen gráficamente la misma estructura, sea cual fuere la escala temporal estudiada. Al observar las gráficas de la evolución de los índices en análisis, no resultan diferencias entre éstas, lo que dificulta establecer cuál es el horizonte temporal al que corresponden dichas gráficas.⁴ El hecho de que estas series tengan la misma apariencia en distintas escalas de tiempo es un indicio de que estamos ante un fractal. Sin embargo, esta característica encontrada en las series de los índices bursátiles americanos no es garantía definitiva de estar ante un proceso caótico.

Una de las características de los sistemas caóticos es que tienen soluciones (puntos) periódicas densas inestables. Gilmore (1993) busca estas órbitas periódicas inestables de manera gráfica. Si estas órbitas proceden de un atractor extraño, existirán observaciones que se encuentren cercanas a una órbita periódica. Si ocurriera esto encontraríamos que las siguientes observaciones también estarían cercanas a dicha órbita, por lo menos antes de alejarse como consecuencia de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para la reconstrucción de las gráficas de recurrencia se detectan

⁴ Véase un ejemplo en la gráfica 1.

pautas y cambios estructurales ocultos en los datos o semejanzas en pautas por medio de la serie de tiempo en estudio. Así, una señal de determinismo será cuando más estructurada sea la gráfica de recurrencia. Una señal de aleatoriedad será cuando dicha gráfica sea más uniforme y no tenga una pauta identificable.⁵ Para obtener las gráficas de recurrencia es necesario calcular la dimensión de inmersión y el tiempo de retardo. Estos datos son difíciles de obtener, no obstante, existen distintos programas para su cómputo como, por ejemplo, el programa VRA⁶ que utiliza la técnica información mutua (AMI)⁷ para determinar el tiempo de retardo y el método de falsos vecinos cercanos (FNN)⁸ para la dimensión de inmersión. Los resultados de los cálculos de AMI y FNN se muestran en el cuadro 3.

La estimación del tiempo de retardo (T) mediante la función de información mutua mostró homogeneidad para los registros estudiados (como promedio $T = 18$ para las series en estudio) y la dimensión de inmersión fue relativamente alta para cada uno de los registros, con $m = 13$ en todos los casos (excepto para la serie del índice Bovespa, FNN = 8). Así, al observar las gráficas de recurrencia de los índices, se encontró que son como una serie aleatoria en la que no hay una pauta definida, lo que estaría denotando las dependencias lineales que existirían en dicha serie, a diferencia de las gráficas de

⁵ Véase las gráficas 2 y 3 para diferenciar un gráfico de recurrencia aleatorio de uno caótico y un ejemplo de las series en estudio.

⁶ *Visual Recurrence Analysis* (VRA). El VRA es un programa escrito por Eugene Kononov basándose en la definición de gráfico de recurrencia de Eckmann, Kamphorst y Ruelle (1987) y en el RQA de Zbilut y Webber (1992).

⁷ La información mutua estima el valor óptimo de tiempo de retardo (T) para la reconstrucción del espacio de fases propuesto por Fraser y Swinney (1986). La idea central de esta técnica es que un buen tiempo de retardo T es aquel que, dado un estado del sistema $X(t)$, aporte una información nueva máxima acerca del estado $X(t - T)$. Es decir, si se consideran dos mediciones $x(n) = x_n$ y $x(n - T) = x_{n - T}$, la información mutua entre la medición x_n y la medición $x_{n - T}$ es la cantidad aprendida de $x_{n - T}$ acerca de x_n para algún n (véase una descripción pormenorizada en Abarbanel, 1995).

⁸ La base teórica de este método es que, para los sistemas determinísticos, los puntos que son cercanos en el espacio de fases reconstruido permanecen de esta forma con iteraciones posteriores en espacios de mayor dimensión; esto es cierto si la dimensión de inmersión es suficientemente alta como para resolver el determinismo (Kennel, Brown y Abarbanel, 1992). En términos sencillos, este método encuentra el vecino más cercano de cada punto en una dimensión dada, luego comprueba si estos puntos aún son vecinos cercanos en una dimensión más alta. El funcionamiento de este método es el siguiente: dado un punto X_n en m dimensiones, se buscan sus puntos vecinos más cercanos X_i . Por ejemplo, al dejar que la distancia entre X_n y X_i sea d ; si la distancia entre estos puntos en el espacio de dimensión $m - 1$ es mayor que $s^* d$, en que s es un determinado factor, el punto X_i se marca como un falso vecino cercano. La fracción de falsos vecinos cercanos indica entonces si el proceso es determinístico en m dimensiones o no.

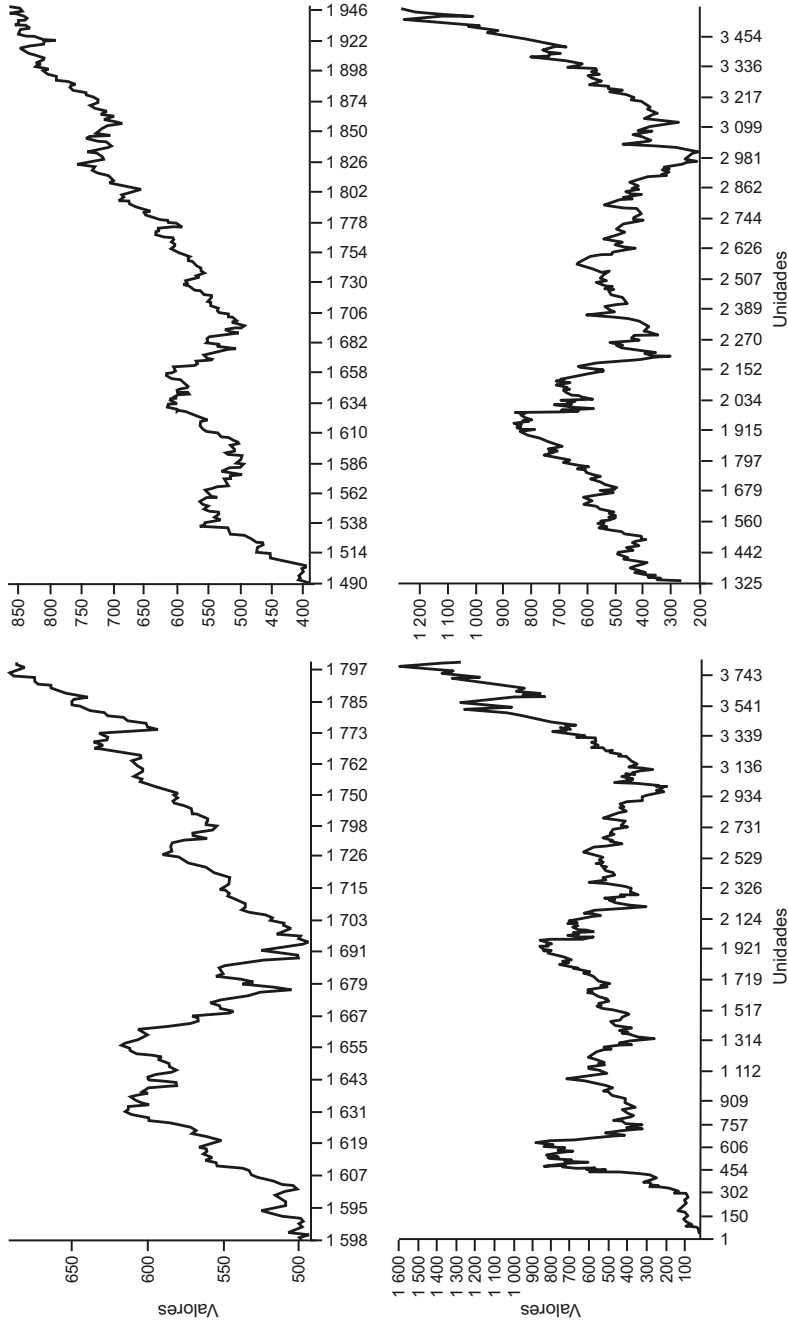
CUADRO 3. Valores óptimos para el tiempo de retardo (función de información mutua, AMI) y dimensión de inmersión (falsos vecinos cercanos, FNN) para las series originales y modelos seleccionados

País	Índice	Serie-modelo	AMI	FNN
Argentina	Merval	Original	47	29
		ARMA (6,5)	4	30
		GARCH (1,1)	21	16
Brasil	Bovespa	Original	44	8
		GARCH (1,1)	18	16
Canadá	S&P TSX Composite	Original	10	30
		ARMA (4,4)	2	13
		GARCH (1,1)	22	30
Chile	IPSA	Original	42	28
		GARCH (2,1)	32	28
	IGPA	Original	50	23
		ARMA (2,3)	4	30
México	IPC	GARCH (2,1)	21	28
		Original	35	15
		ARMA (3,2)	2	13
Perú	IGBVL	GARCH (1,1)	32	17
		Original	43	24
		GARCH (2,1)	14	29
Estados Unidos	DJI	Original	37	23
		GARCH (1,1)	36	30
	Nasdaq	Original	33	14
		GARCH (3,1)	23	22
	S&P 500	Original	44	26
		ARMA (10,10)	1	15
		GARCH (1,1)	37	25

recurrencias aplicadas a las series de los residuos de los modelos ARMA y GARCH que se asemejan al del atractor de Lorenz, indicando un comportamiento determinista. Las gráficas de recurrencia no son concluyentes dado que algunos índices presentan un comportamiento aleatorio y otros presentan uno caótico.

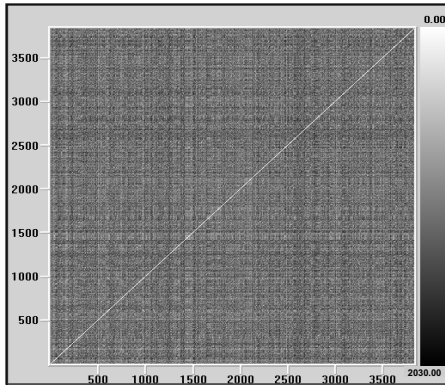
La entropía de espacio temporal (STE) compara la distribución de colores en una gráfica completa de recurrencia con la distribución de colores en cada línea diagonal de la gráfica. Cuanto más altas son las diferencias entre la distribución global y las distribuciones sobre las líneas diagonales individuales, más estructurada es la imagen. Aquí se comparan las distancias entre todos los pares de vectores en

GRÁFICA 1. Evolución diaria del índice bursátil Merval para el periodo de la muestra^a

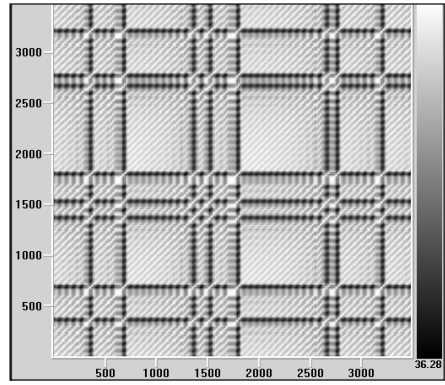


^a Las ampliaciones se muestran en el sentido de las manecillas del reloj. Los datos que comprenden las ampliaciones corresponden a las series de: 1-3 841, 1 325-3 570, 1 490-1 950 y 1 583-1 800 datos. Es decir: 3 841, 2 246, 461 y 218 datos respectivamente. En el eje vertical se encuentra el valor de cierre del índice y en el eje horizontal la cantidad de datos.

GRÁFICA 2. Recurrencia para una serie aleatoria y para el atractor de Lorenz

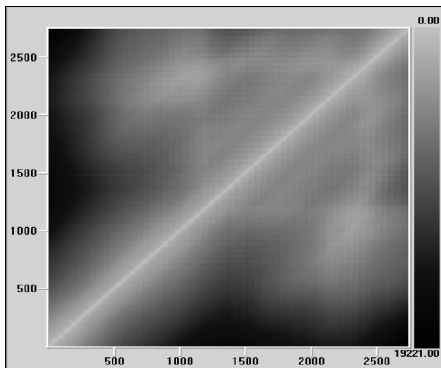


Serie aleatoria

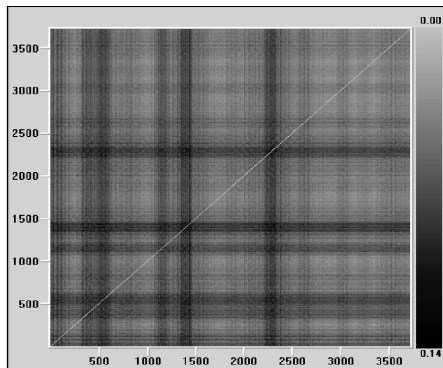


Atractor de Lorenz

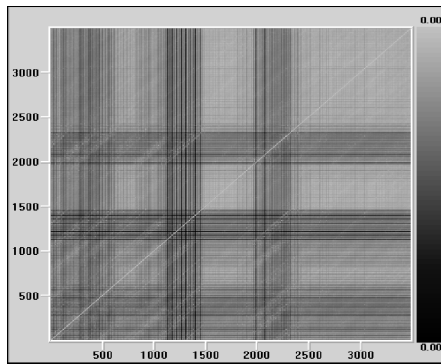
GRÁFICA 3. Recurrencia para el índice IGPA



Serie original



Modelo ARMA (2,3)



Modelo GARCH (2,1)

CUADRO 4. *Entropía de espacio temporal para las series originales y los modelos en estudio*^a

(Porcentaje)

<i>País</i>	<i>Índice</i>	<i>Serie-modelo</i>	<i>STE</i>
Argentina	Merval	Original	16
		ARMA (6,5)	71
		GARCH (1,1)	70
Brasil	Bovespa	Original	0
		GARCH (1,1)	52
Canadá	S&P TSX Composite	Original	0*
		ARMA (4,4)	69
		GARCH (1,1)	32*
Chile	IPSA	Original	0
		GARCH (2,1)	60
	IGPA	Original	0
		ARMA (2,3)	74
		GARCH (2,1)	67
México	IPC	Original	0
		ARMA (3,2)	76
		GARCH (1,1)	57
Perú	IGBVL	Original	0
		GARCH (2,1)	54
Estados Unidos	DJI	Original	0
		GARCH (1,1)	38
	Nasdaq	Original	8
		GARCH (3,1)	47
	S&P 500	Original	0
		ARMA (10,10)	77
		GARCH (1,1)	40
STE promedio series originales			2
STE promedio modelos seleccionados			59

^a Para lograr la STE sobre el índice S&P TSX Composite (*) el tiempo de retardo y la dimensión de inmersión se computó como 5 y 10 respectivamente.

el espacio reconstruido con las distancias entre las diversas órbitas que se desarrollan durante el tiempo. El resultado se normaliza y se presenta como porcentaje. Así, porcentajes cercanos a 100 indicarán aleatoriedad en la serie, mientras que porcentajes cercanos a 0 representarán series periódicas. Por último, porcentajes entre 0 y 100 indicarán series con comportamiento caótico. De los resultados del cuadro 4 se infiere un comportamiento caótico en las series de residuos de los modelos seleccionados, con un promedio de 59% para

todos los índices en contraste con 2% para las series originales, lo cual representaría periodicidad en dichas series.⁹

El coeficiente de Hurst indica la persistencia o la no persistencia en una serie temporal. De encontrarse persistencia, ésta sería una señal de que dicha serie no es ruido blanco y, por tanto, existiría algún tipo de dependencia entre los datos. Hurst (1951) estudió la capacidad de reserva de las represas del río Nilo a lo largo del tiempo y elaboró un estadístico para contrastar si el nivel de dichas reservas seguiría una caminata aleatoria o no. Si el estadístico se encuentra entre 0.5 y 1 indica persistencia en la serie (los valores tenderían a mantenerse en el tiempo), si se encuentra entre 0 y 0.5 indica no persistencia, y un valor igual a 0.5 indica ruido blanco.¹⁰

El cálculo del coeficiente de Hurst viene dado de la siguiente ley de potencia que muestra la ecuación (1):

$$R/S(N) = (a * N)^H \quad (1)$$

en la que a es una constante, N es el número de observaciones, H es el exponente o coeficiente de Hurst, $R/S(N)$ es el estadístico R/S que depende del tamaño de la serie y que se define como el rango de variación de la serie partido por su desviación característica.

El coeficiente de Hurst se utiliza para la detección de memoria a largo plazo en las series temporales. Los resultados del cuadro 5 evidencian memoria de largo plazo en los índices bursátiles americanos en estudio, con un coeficiente de Hurst promedio de 0.75.¹¹ No obstante, los modelos GARCH captan en mejor medida esta cualidad que los modelos ARMA. El coeficiente de Hurst promedio para los modelos ARMA fue de 0.57, mientras que para los modelos GARCH fue de 0.84. Con esto sabemos que una de las principales características de los modelos GARCH es que consideran la información pasada de la va-

⁹ El cómputo de la entropía de espacio temporal no es significativo para series que no sean estacionarias, por tal motivo no podríamos concluir nada acerca de los resultados de las series originales. No obstante, los resultados de las series de residuos de los modelos en estudio es un indicio claro, pero no definitorio, de estar en presencia de series con comportamiento caótico.

¹⁰ Cabe señalar que Lo (1991) plantea que, si bien es cierto que el análisis R/S detecta dependencia de largo plazo en series temporales, dicho análisis presenta sensibilidad a la dependencia de corto plazo. Para soslayar esta deficiencia plantea una modificación al rango reescalado que denomina rango reescalado modificado (RRM), este análisis no es abordado en el presente estudio y sólo se considera la estimación del coeficiente de Hurst derivado del análisis del rango reescalado.

¹¹ Hay que destacar la significación individual del coeficiente (el estadístico t es estadísticamente significativo al nivel de 5%), así como la alta bondad de ajuste (R^2) de la regresión.

CUADRO 5. *Coefficiente de Hurst para las series de residuos de los modelos en estudio*

País	Índice	Serie-modelo	Coefficiente de Hurst	Estadístico t	R^2	
Argentina	Merval	ARMA (6,5)	0.61	29.103	0.988	
		GARCH (1,1)	0.78	73.402	0.996	
Brasil	Bovespa	GARCH (1,1)	0.82	50.512	0.991	
Canadá	S&P TSX Composite	ARMA (4,4)	0.65	34.436	0.995	
		GARCH (1,1)	0.89	62.684	0.998	
Chile	IPSA	GARCH (2,1)	0.82	70.506	0.995	
		ARMA (2,3)	0.55	41.637	0.994	
		GARCH (2,1)	0.84	112.282	0.998	
México	IPC	ARMA (3,2)	0.5	40.639	0.994	
		GARCH (1,1)	0.8	78.672	0.996	
Perú	IGBVL	GARCH (2,1)	0.84	98.125	0.998	
Estados Unidos	DJI	GARCH (1,1)	0.86	70.231	0.995	
		Nasdaq	GARCH (3,1)	0.91	94.644	0.997
		S&P 500	ARMA (10,10)	0.55	28.571	0.988
			GARCH (1,1)	0.88	81.897	0.997
Promedio coeficiente de Hurst		→	0.75			

riable y su volatilidad observada como factor explicativo de su comportamiento presente y futuro, lo cual es congruente con las series con comportamiento caótico.

El exponente de Lyapunov (λ) (Eckmann y Ruelle, 1992) se utiliza para medir la sensibilidad a las condiciones iniciales y es, quizá, el método más empleado para la detección de caos en series de datos de las ciencias naturales. Puntualmente, representa la separación exponencial entre dos trayectorias, inicialmente próximas, al cabo de N pasos o iteraciones.

Ahora bien, los sistemas dinámicos que presentan atractores extraños se denominan sistemas caóticos. Para que un atractor sea extraño ha de tener al menos un exponente positivo de Lyapunov. Así, si

$\lambda < 0$ implica contracción, por lo que la serie presenta convergencia, es decir, las órbitas convergerán en el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario. Si $\lambda = 0$ las órbitas no convergen ni divergen, lo cual indica que el comportamiento es periódico o cuasi periódico. Si $\lambda > 0$ pasa de negativo a nulo de manera alternante, la serie es cíclica. Si

0 implica alejamiento de los puntos, por lo que la serie presenta una dinámica caótica.

En la práctica se determina el primer exponente que es más fácil de calcular y permite diferenciar el caos de los comportamientos periódicos y cuasi periódicos. De esta manera, la presencia de un exponente positivo es suficiente para diagnosticar caos. Existen diferentes algoritmos¹² para calcular el máximo exponente de Lyapunov. No obstante, la mayoría de estos métodos no son aplicables para series de tiempo pequeñas y son relativamente difíciles de aplicar. Rosenstein, Collins y De Luca (1993) establecieron un método que resuelve estos inconvenientes. Así, después de reconstruir la dinámica del atractor, hacen que el algoritmo localice el punto Y_n más cercano a cada punto de la trayectoria Y_n . Además, impone la restricción adicional que los puntos vecinos más cercanos deben tener una separación espacial mayor que el periodo medio de las series de tiempo. Esto permite considerar que cada par de vecinos corresponde a condiciones iniciales muy cercanas pero de diferentes trayectorias. Así, el exponente máximo de Lyapunov es aproximadamente la velocidad media de separación de los puntos vecinos más cercanos.

Los resultados del exponente de Lyapunov, que se encuentran resumidos en el cuadro 6, indican que $\lambda > 0$ para todas las series de residuos de los índices bursátiles en estudio, lo que representa una conclusión robusta de la existencia de un comportamiento caótico en los índices bursátiles americanos.¹³

Sabemos que los sistemas dinámicos que presentan atractores extraños se denominan sistemas caóticos. Ahora corresponde determinar la dimensión de dicho atractor. Lo habitual para determinar dicha dimensión es calcular la dimensión de correlación¹⁴ del sistema en estudio. La dimensión de correlación, D_c , de un sistema dinámico es una medida de su complejidad, que permite discriminar entre un sistema determinista y uno aleatorio.¹⁵ Así, si $D_c = 1$ indicaría una serie con comportamiento de oscilaciones periódicas, $D_c = 2$ oscilaciones cuasi periódicas y $D_c = 2$ comportamiento caótico.

¹² Wolf, Swift, Swinney y Vastano (1985), Sato, Sano y Sawada (1987), Casdagli (1989), entre otros.

¹³ El programa MTRCHAOS y MTRLYAP, elaborado por Rosenstein, Collins y De Luca (1993), permite calcular el máximo exponente de Lyapunov como también los parámetros necesarios para estimar dicho exponente.

¹⁴ Eckmann y Ruelle (1992), Bai Lin (1990).

¹⁵ Grassberger y Procaccia (1983).

CUADRO 6. *Máximo exponente de Lyapunov para las series en estudio utilizando el programa MTRCHAOS y MTRLYAP correspondiente al algoritmo de Rosenstein, Collins y De Luca*

<i>País</i>	<i>Índice</i>	<i>Serie-modelo</i>	<i>Max exp. Lyapunov</i>	
Argentina	Merval	ARMA (6,5)	0.134200	
		GARCH (1,1)	0.041480	
Brasil	Bovespa	GARCH (1,1)	0.009892	
Canadá	S&P TSX Composite	ARMA (4,4)	0.132200	
		GARCH (1,1)	0.032770	
Chile	IPSA	GARCH (2,1)	0.008398	
		IGPA	ARMA (2,3)	0.177400
		GARCH (2,1)	0.009125	
México	IPC	ARMA (3,2)	0.462700	
		GARCH (1,1)	0.004367	
Perú	IGBVL	GARCH (2,1)	0.052920	
Estados Unidos	DJI	GARCH (1,1)	0.003601	
		Nasdaq	GARCH (3,1)	0.032360
		S&P 500	ARMA (10,10)	0.209900
		GARCH (1,1)	0.003392	

CUADRO 7. *Dimensión de correlación para las series en estudio utilizando el programa MTRCHAOS y MTRLYAP correspondiente al algoritmo de Rosenstein, Collins y De Luca*

<i>País</i>	<i>Índice</i>	<i>Serie-modelo</i>	<i>Dim. correlación</i>	
Argentina	Merval	ARMA (6,5)	2.588	
		GARCH (1,1)	1.987	
Brasil	Bovespa	GARCH (1,1)	2.028	
Canadá	S&P TSX Composite	ARMA (4,4)	2.213	
		GARCH (1,1)	2.052	
Chile	IPSA	GARCH (2,1)	2.198	
		IGPA	ARMA (2,3)	2.021
		GARCH (2,1)	1.922	
México	IPC	ARMA (3,2)	2.019	
		GARCH (1,1)	2.311	
Perú	IGBVL	GARCH (2,1)	1.981	
Estados Unidos	DJI	GARCH (1,1)	1.954	
		Nasdaq	GARCH (3,1)	1.812
		S&P 500	ARMA (10,10)	1.977
		GARCH (1,1)	1.927	

CUADRO 8. Prueba de Wald-Wolfowitz (o de Rachas) para las series de los índices bursátiles americanos en estudio a un nivel de significación de 5 por ciento

<i>País</i>	<i>Índice</i>	<i>z calculado</i>	<i>Hipótesis nula</i>	<i>Tipo de esquema</i>
Argentina	Merval	3.6	Rechaza	Tendencia
Brasil	Bovespa	3.34	Rechaza	Tendencia
Canadá	S&P TSX Composite	0.78	Acepta	Aleatorio
Chile	IPSA	11.77	Rechaza	Tendencia
	IGPA	17.14	Rechaza	Tendencia
México	IPC	7.63	Rechaza	Tendencia
Perú	IGBVL	14.24	Rechaza	Tendencia
Estados Unidos	DJI	1.3	Acepta	Aleatorio
	Nasdaq	6.1	Rechaza	Tendencia
	S&P 500	0.03	Acepta	Aleatorio

Para calcular la dimensión de correlación Grassberger y Procaccia (1983) crearon un eficiente algoritmo en el cual plantean que $D_c = D$, en el que D es la dimensión de capacidad.¹⁶ La idea es remplazar el algoritmo para calcular $M(\epsilon)$, llamado *box-counting*, por la distancia entre puntos representando posiciones del sistema a lo largo de una órbita en el conjunto atractor. Los resultados de la dimensión de correlación están resumidos en el cuadro 7. Los valores de la dimensión de correlación son muy cercanos a 2, lo que representa oscilaciones cuasi periódicas, no obstante 8 de las 15 series presentan una dimensión mayor a 2 lo que apoya la hipótesis de que estos índices bursátiles tienen un comportamiento caótico.

IV. PRUEBAS ESTADÍSTICAS

Aunque los resultados apoyan la hipótesis fractal contra la de aleatoriedad es necesario aplicar pruebas estadísticas que confirmen estos hallazgos. En este contexto se aplicaron dos pruebas estadísticas: la

¹⁶ La dimensión de capacidad viene definida por

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log M(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

en que, en un conjunto de puntos A en un espacio euclídeo de n dimensiones, ϵ corresponde a la medida de los lados de los hipercubos luego de “mallar” dicho espacio y $M(\epsilon)$ es el número mínimo de esos hipercubos o celdas que son necesarios para cubrir el conjunto A . Así, por ejemplo, si A fuera un segmento de longitud 1, $D = 1$.

CUADRO 9. Resultados de la prueba BDS

	Dimen- sión	Estadístico BDS	Error estándar	Estadístico z	Prob.	Merval	Dimen- sión	Estadístico BDS	Error estándar	Estadístico z	Prob.		
S&P TSX Comp.													
Canadá	2	0.199307	0.001472	135.3832	0	Merval	2	0.201112	0.00154	130.6103	0		
	3	0.338869	0.002322	145.9465	0		3	0.342203	0.002446	139.8926	0		
	4	0.43608	0.002742	159.0342	0		4	0.440833	0.002912	151.3658	0		
	5	0.50346	0.002834	177.6789	0		5	0.509527	0.003035	167.8743	0		
	6	0.549951	0.002709	203.0324	0		6	0.557186	0.002927	190.3688	0		
	2	0.177438	0.004311	41.15907	0		GARCH (1,1)	2	0.181612	0.00213	85.24691	0	
Canadá	3	0.30006	0.006881	43.60468	0	3	0.307505	0.003398	90.50903	0			
	4	0.383416	0.008235	46.55929	0	4	0.392663	0.004063	96.6435	0			
	5	0.438313	0.008628	50.80082	0	5	0.448959	0.004254	105.5268	0			
	6	0.473644	0.008366	56.61674	0	6	0.485125	0.004123	117.6613	0			
	2	0.013138	0.002895	4.538462	0	ARMA (6,5)	2	1.36E-07	8.41E-06	0.016173	0.9871		
	3	0.02541	0.004593	5.531942	0	3	4.08E-07	1.88E-05	0.02171	0.9827			
Canadá	4	0.036531	0.005461	6.689411	0	4	8.17E-07	3.15E-05	0.025963	0.9793			
	5	0.042891	0.005682	7.548026	0	5	1.36E-06	4.60E-05	0.029576	0.9764			
	6	0.046798	0.005471	8.554045	0	6	2.04E-06	6.23E-05	0.032782	0.9738			
	S&P												
	Estados Unidos	2	0.204558	0.000705	290.0695	0	IGPA	2	0.205555	0.001104	186.1747	0	
		3	0.348313	0.001114	312.8044	0		3	0.349437	0.001746	200.0841	0	
4		0.449141	0.001317	341.1373	0	4		0.450026	0.002069	217.4641	0		
5		0.519724	0.001362	381.5393	0	5		0.520276	0.002146	242.4351	0		
6		0.568975	0.001304	436.414	0	6		0.569261	0.002059	276.4782	0		
2		0.183537	0.001805	101.6815	0	GARCH (2,1)		2	0.108511	0.002055	52.80437	0	
Estados Unidos	3	0.311464	0.002876	108.2857	0	3	0.185655	0.003278	56.63265	0			
	4	0.39868	0.003436	116.0355	0	4	0.23474	0.003921	59.86254	0			
	5	0.457169	0.003593	127.2361	0	5	0.262322	0.004107	63.87338	0			
	6	0.495203	0.003477	142.4165	0	6	0.275796	0.003981	69.28251	0			
	2	0.013754	0.001455	9.453695	0	ARMA (2,3)	2	0.025472	0.001446	17.61965	0		
	3	0.033161	0.002311	14.34647	0	3	0.049897	0.002299	21.70423	0			
Estados Unidos	4	0.047445	0.002752	17.23994	0	4	0.06742	0.00274	24.61003	0			
	5	0.058569	0.002868	20.42182	0	5	0.076548	0.002847	26.78846	0			
	6	0.064789	0.002765	23.42769	0	6	0.080632	0.002758	29.2381	0			

Nasdaq	GARCH (3,1)	2	0.202919	0.00137	148.1379	0	DJI	2	0.205146	0.000696	294.8739	0
		3	0.345276	0.002169	159.195	0		3	0.348746	0.001094	318.6729	0
		4	0.444851	0.002573	172.8772	0		4	0.448945	0.001289	348.2711	0
		5	0.514234	0.002672	192.4421	0		5	0.518734	0.001329	390.423	0
		6	0.562341	0.002567	219.0252	0		6	0.567127	0.001267	447.6695	0
		2	0.179049	0.002101	85.23462	0	GARCH (1,1)	2	0.187374	0.001845	101.5474	0
3	0.303146	0.003352	90.42883	0		3	0.317797	0.002941	108.0546	0		
4	0.387564	0.004012	96.61228	0		4	0.407106	0.003514	115.8437	0		
5	0.444037	0.004203	105.6426	0		5	0.467341	0.003676	127.1238	0		
6	0.480651	0.004076	117.9255	0		6	0.506979	0.003559	142.456	0		
IPSA	GARCH (2,1)	2	0.205267	0.000998	205.6025	0	Bovespa	2	0.202202	0.000824	245.4547	0
		3	0.349055	0.001578	221.1725	0		3	0.343843	0.001302	263.9928	0
		4	0.44962	0.001869	240.6079	0		4	0.442876	0.001542	287.1686	0
		5	0.51987	0.001936	268.4808	0		5	0.51208	0.001598	320.4588	0
		2	0.125917	0.001915	65.73697	0	GARCH (1,1)	2	0.178381	0.00185	94.40031	0
		3	0.213634	0.003053	69.98085	0		3	0.301656	0.002949	102.2995	0
4	0.269525	0.003648	73.89212	0		4	0.384863	0.003523	109.2534	0		
5	0.302855	0.003816	79.37132	0		4	0.439525	0.003684	119.2984	0		
6	0.31985	0.003694	86.58904	0		6	0.473794	0.003566	132.8712	0		
IPC	GARCH (1,1)	2	0.203318	0.00085	239.18	0	IGBVL	2	0.206171	0.001092	188.7899	0
		3	0.345687	0.001342	257.6761	0		3	0.349888	0.001721	203.3459	0
		4	0.445218	0.001586	280.7824	0		4	0.450038	0.002031	221.5997	0
		5	0.514622	0.00164	313.7923	0		5	0.519709	0.002098	247.7433	0
		6	0.562853	0.001569	358.6834	0		6	0.568019	0.002005	283.3346	0
		2	0.158565	0.001833	86.49217	0	GARCH (2,1)	2	0.126992	0.002345	54.16142	0
3	0.263893	0.002915	90.52396	0		3	0.217006	0.003745	57.94909	0		
4	0.330945	0.003475	95.23537	0		4	0.275051	0.004486	61.31431	0		
5	0.371615	0.003627	102.4707	0		5	0.309978	0.004706	65.8707	0		
6	0.393612	0.003502	112.3848	0		6	0.328864	0.004569	71.97319	0		
ARMA (3,2)	GARCH (3,1)	2	0.020904	0.001442	14.49526	0		2	0.020904	0.001442	14.49526	0
		3	0.039379	0.00229	17.19954	0		3	0.039379	0.00229	17.19954	0
		4	0.052974	0.002724	19.44775	0		4	0.052974	0.002724	19.44775	0
		5	0.059614	0.002837	21.01644	0		5	0.059614	0.002837	21.01644	0
		6	0.062294	0.002733	22.79227	0		6	0.062294	0.002733	22.79227	0

CUADRO 10. Resumen de las diversas técnicas aplicadas para determinar un comportamiento caótico en las series de índices bursátiles de las bolsas americanas^a

<i>País</i>	<i>Índice</i>	<i>Serie-modelo</i>	<i>Análisis gráfico</i>	<i>Gráfica de recurrencia</i>	<i>STE</i>	<i>Coefficiente Hurst</i>	<i>Exp. Lyapunov</i>	<i>Dim. correlación</i>	<i>Prueba de aleatoriedad</i>	<i>Prueba de BDS</i>
Argentina	Merval	ARMA (6,5) GARCH (1,1)								
Brasil	Bovespa	GARCH (1,1)								
Canadá	S&P TSX Composite	ARMA (4,4) GARCH (1,1)								
Chile	IPSA IGPA	GARCH (2,1) ARMA (2,3) GARCH (2,1)								
México	IPC	ARMA (3,2) GARCH (1,1)								
Perú	IGBVL	GARCH (2,1)								
Estados Unidos	DJI Nasdaq S&P	GARCH (1,1) GARCH (3,1) ARMA (10,10) GARCH (1,1)								

^a El signo (+) indica el hallazgo de un comportamiento caótico, lo contrario sucede con el signo (-). Análisis gráfico y gráfica de recurrencia: () para hallazgo de comportamiento caótico; STE: entropía de espacio temporal: () para valores entre 0 y 100; coeficiente de Hurst: () para valores 0.5; exponente de Lyapunov: () para valores 0; dimensión de correlación: () para valores 2. Prueba de aleatoriedad: () para series no aleatorias; prueba BDS: () para series no *i.i.d.*

de Rachas para carácter aleatorio (o prueba de Wald-Wolfowitz) y la BDS desarrollada por Brock, Dechert, Scheinkman y LeBaron (1996).

La prueba no paramétrica de Rachas plantea en su hipótesis nula que la serie es aleatoria. Los resultados de esta prueba confirman que las series de índices bursátiles en estudio no corresponden a una serie aleatoria y, por medio del tipo de esquema resultante, descarta que el atractor que caracteriza dichos sistemas sea de carácter periódico o cuasi periódico, para el caso de los sistemas disipativos. De esta manera podríamos estar en presencia de un atractor cuasi periódico o extraño que caracteriza a los sistemas con comportamiento caótico; los resultados se muestran en el cuadro 8.

La prueba BDS es no paramétrica con la hipótesis nula de que una determinada serie temporal es independiente e idénticamente distribuida (*i.i.d.*). Esta prueba puede ser aplicada a series de residuos estimados para evaluar si éstos son independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*). Se estimó la prueba BDS para dimensiones de correlación 2, 3, 4, 5 y 6, con el fin de maximizar la veracidad de dicha prueba. Los resultados están resumidos en el cuadro 9 y rechazan la hipótesis de independencia en las series originales y de residuos de los modelos GARCH (de acuerdo con Brock y Dechert, 1991). Sólo en la serie de residuos del modelo ARMA, correspondiente al índice Merval, se presenta independencia. Los resultados de la prueba BDS son un apoyo sólido para confirmar que las series de índices bursátiles americanos no presentan un comportamiento lineal.

CONCLUSIONES

El cuadro 10 presenta un resumen de los resultados encontrados al aplicar las diversas técnicas y métodos para detectar comportamientos caóticos en las series de índices bursátiles americanos. Los resultados presentan pruebas de no aleatoriedad en las series en estudio y son un apoyo sólido a la existencia de un comportamiento caótico en las series de índices bursátiles americanos. Esto implica que el mercado tiene memoria y que es útil el análisis de la información de empresas que operan en el mercado; por ello, es conveniente el uso de técnicas de predicción de rendimientos accionarios en estos mercados. La aleatoriedad en los mercados financieros no se sostiene, sino

que hay pruebas de una pseudoaleatoriedad, determinada por la dinámica del sistema. Es decir, se trata de una aleatoriedad intrínseca que genera un proceso pseudoaleatorio como lo es el caos determinista, el cual es generado por la dinámica del atractor que origina dicho proceso.

En los casos extremos de aleatoriedad, como son los *crash* y *boom*, la teoría del caos permite explicar dichos acontecimientos como parte de la evolución endógena del propio sistema, sin necesidad de recurrir a variables exógenas. Esta evolución endógena está determinada por la sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que mediante el efecto mariposa puede explicar un *crash* o *boom* bursátil.

El hecho de que la evolución de los rendimientos accionarios se comporte de manera aleatoria también es explicado por la teoría del caos por medio de los puntos o soluciones periódicas densas que se encuentran próximos a la evolución de dicho sistema. Así, se podrían repetir situaciones ocurridas en el pasado cuando la evolución del sistema pase nuevamente cerca de algún acontecimiento en particular. Por otra parte, en el muy corto plazo sería posible predecir la evolución de dicho sistema, lo que validaría el análisis técnico como instrumento predictivo. Con esto, la teoría del caos une las fluctuaciones rápidas y, a muy corto plazo, a las de largo plazo. Es decir, no separa sino que une los cambios de minuto a minuto o día a día a los de mes a mes o año a año.

La presencia de memoria de largo plazo en los índices accionarios americanos, determinada por el coeficiente de Hurst, valida la utilización de modelos no lineales con memoria larga, para la predicción de la evolución de dichas series. En resumen, los resultados confirman la existencia de un comportamiento caótico en las bolsas de Argentina, Brasil, Canadá, Chile, Estados Unidos, Perú y México, utilizando la evolución de los índices accionarios Merval, Bovespa, S&P TSX Composite, IPSA, IGPA, S&P 500, Dow Jones Industrials, Nasdaq, IGBVL e IPC, respectivamente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abarbanel, H. D. I., R. Brown y M. B. Kennel (1991), "Local Lyapunov Exponents Computed from Observed Data", *Journal of Nonlinear Science*, vol. 1, pp. 175-199.

- Bai Lin H. (1990), *Chaos II*, Singapur, World Scientific Publishing Company.
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autorregresive Conditional Heterocedasticity", *Journal of Econometrics*, vol. 31, pp. 307-327.
- Box, G. E. P., y G. M. Jenkins (1970), "Time Series Analysis: Forecasting and Control", San Francisco.
- Brock, W. A., D. W. Dechert y J. Scheinkman (1987), "Test for Independence Based on the Correlation Dimension", University of Wisconsin at Madison, Department of Economics, Working Paper.
- , y — (1991), "Non-linear Dynamical Systems: Instability and Chaos in Economics", W. Hildenbrand y H. Sonnenschein (comps.), *Handbook of Mathematical Economics IV*, Amsterdam, North-Holland.
- , —, J. A. Scheinkman y B. Le Baron (1996), "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *Econometric Reviews*, vol.15, núm. 3, pp. 197-235.
- Casdagli, M. (1989), "Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series", *Physica D* 35, vol. 35, pp. 335-356.
- Conrad, J., y G. Kaul (1988), "Time-Variation in Expected Returns", *Journal of Business*, vol. 61, pp. 409-425.
- , y — (1989), "Mean Reversion in Short-Horizon Expected Returns", *Review of Financial Studies* 2, p. 225-240.
- Di Matteo, Aste, y Dacorogna (2005), "Term Memories of Developed and Emerging Markets: Using the Scaling Analysis to Characterize their Stage of Development", *Journal of Banking & Finance*, vol. 29, pp. 827-851.
- Dickey, D. A., y W. A. Fuller (1979), "Distribution of the Estimators for Autorregresive Time Series with a Unit Root", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 74, pp. 427-431.
- Eckmann, J. P., y D. Ruelle (1985), "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", *Review of Modern Physics*, vol. 57, núm. 3, pp. 617-656.
- , y — (1992), "Fundamental Limitations for Estimating Dimensions and Lyapunov Exponents in Dynamical Systems", *Physica D*, vol. 56, pp. 185-187.
- Engle, R. F. (1982), "Autorregresive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the U. K. Inflation", *Econometrica*, vol. 50, núm. 4, pp. 987-1007.
- Fama, E., y K. R. French (1988), "Permanent and Temporary Components of Stock Prices", *Journal of Political Economy*, vol. 98, pp. 247-273.
- (1970), "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *Journal of Finance*, vol. 25, pp. 383-417.
- Fraser, A., y H. Swinney (1986), "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information", *Physical Review A*, vol. 33, pp. 1134-1140.
- Gilmore, Claire G. (1993), "A New Test for Chaos", *Journal of Economic Behaviour Organisations*, vol. 22, pp. 209-237.
- Grassberger, P., e I. Procaccia (1983a), "Characterization of Strange Attractors", *Physical Review Letters*, vol. 50, núm. 3, pp. 346-349.

- Grassberger, P., e I. Procaccia (1983b), "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica D* 9, pp. 189-208.
- Hawking, S. (2005), *Historia del tiempo: del Big Bang a los agujeros negros*, Barcelona, Editorial Critica.
- Hurst, H. E. (1951), "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs", Transactions of the American Society of Civil Engineers, vol. 116, pp. 770-799.
- Kennel, M. B., R. Brown y H. D. I. Abarbanel (1992), "Determining Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction", *Physica. Review A*, núm. 45, pp. 403-411.
- Kyaw, N., C. Los y S. Zong (2004), "Persistence Characteristics of Latin American Financial Markets", Economics Working Paper, Archive EconWPA, Finance núm. 0411013.
- Le Baron, B. (1994), "Chaos and Nonlinear Forecastability in Economics and Finance", Philosophical Transactions of Royal Society of London, Series A, 348, pp. 397-404.
- Lipka, J. M., y C. Los (2003), "Long-Term Dependence Characteristics of European Stock Indices", Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance núm. 0409044.
- Ljung, G., y G. Box (1979), "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models", *Biometrika*, vol. 65, pp. 297-303.
- Lo, A. W. (1991), "Long-Term Memory in Stock Market Prices", *Econometrica*, vol. 59, pp. 1279-1313.
- , y A. C. MacKinley (1988), "Stock Market Prices do Not Follow Random Walk: Evidence from a Simple Specification Test", *Review of Financial Studies*, vol. I, pp. 41-66.
- Lorenz, E. N. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130.
- Los, C. (2004), "Visualization of Chaos for Finance Majors", Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance núm. 0409035.
- , y B. Yu (2005), "Persistence Characteristics of the Chinese Stock Markets", Economics Working Paper Archive, EconWPA, Finance núm. 0508008.
- Lyapunov, A. M. (1947), "The General Problem of the Stability of Motion", Number 17 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press.
- Mandelbrot, B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco, CA, Freeman.
- Mindlin, G. B., y R. Gilmore (1992), "Topological Analysis and Synthesis of Chaotic Time Series", *Physica D*, núm. 58, pp. 229-242.
- Packard, N. H., J. P. Crutchfield, J. D. Farmer y R. S. Shaw (1980), "Geometry from a Time Series", *Physical Review Letters*, vol. 47, pp. 712-716.
- Peters, E. (1994), *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons Inc.
- (1996), *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, John Wiley & Sons Inc.

- Phillips, P. C. B., y P. Perron (1988), "Testing for a Unit Root in Time Series Regression", *Biometrika*, vol. 75, pp. 335-346.
- Rajaratnam, P., y R. Weston (2004), *A Chaotic Analysis of the New Zealand Exchange Rate*, New Zealand Association of Economists (Inc.).
- Rosenstein, M. T., J. J. Collins y C. J. de Luca (1993), "A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets", *Physica D*, vol. 65, pp. 117-134.
- Ruelle, D., y F. Takens (1971), "On the Nature of Turbulence", *Math. Phys*, vol. 20, pp. 167-192.
- Sano, M., y Y. Sawada (1985), "Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series", *Physical Review Letters*, vol. 55, núm. 10, pp. 1082-1085.
- Sato, S., M. Sano y Y. Sawada (1987), *Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems. Progress of Theoretical Physics*, vol. 77, núm. 1, pp. 1-5.
- Takens, F. (1981), "Detecting Strange Attractors in Turbulence", *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics 898, primavera, Berlín, pp. 366-381.
- Wolf, A., J. B., Swift, H. L. Swinney y J. A. Vastano (1985), "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica D*, vol. 16, pp. 285-317.