EL TRIMESTRE ECONÓMICO, vol. LXXII (4), núm. 288, octubre-diciembre de 2005, pp. 877-912

VALUACIÓN ACTUARIAL DE BONOS CATASTRÓFICOS PARA DESASTRES NATURALES EN MÉXICO*

Juan José Fernández-Durán
y *M. Mercedes Gregorio-Domínguez***

RESUMEN

México es un país donde ocurren distintos fenómenos naturales, como inundaciones, huracanes y terremotos, que pueden convertirse en desastres que requieren grandes sumas de dinero para mitigar su efecto económico en la población afectada. Generalmente, estas grandes sumas de dinero suelen ser aportadas por el gobierno federal y/o local. El objetivo del presente trabajo es el desarrollo de una metodología actuarial para el cálculo de bonos catastróficos para desastres naturales en México, de manera que, en caso de que el evento catastrófico ocurra durante la vigencia del bono, el gobierno cuente con fondos adicionales y, en caso de que no ocurra, los inversionistas que hayan comprado el bono obtengan tasas de interés superiores a la tasa libre de riesgo del mercado. Los bonos tienen la particularidad, a diferencia de bonos similares emitidos en otros países, que en caso de que ocurra el evento catastrófico el inversionista no pierde el total de su inversión sino sólo una parte o se le difiere su capital total o parte de éste a una fecha posterior a la de la finalización del contrato del bono catastrófico, esto con el fin de hacerlos más atractivos para el inversionista.

ABSTRACT

Floods, hurricanes and earthquakes occur every year in Mexico. These natural phenomena can be considered as catastrophes if they produce large economic damages in the affected areas. In these cases it is required a huge amount of money to provide relief to the catastrophe victims and areas. Usually, in Mexico it is the local and/or federal governments that are responsible to provide these funds. The main objective of this article is to develop

* *Palabras clave*: evento catastrófico, bonos emitidos por el gobierno, valuación actuarial, procesos de Poisson sin memoria y con memoria, fuerza de interés. *Clasificación JEL*: G13, G22. Los autores agradecen el apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura A.C. para realizar esta investigación y los comentarios de un dictaminador anónimo de EL TRIMESTRE ECONÓMICO. Artículo recibido el 4 de febrero de 2004 y aceptado el 18 de mayo de 2005.

** Ambos autores pertenecen a la División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM).

an actuarial methodology for the pricing of CAT bonds in Mexico in order to allow the government to have additional funds to provide relief to the affected victims and areas in case that the catastrophic event occurs during the CAT bond period. If the catastrophic event does not occur during the CAT bond period then the CAT bondholders will get a higher interest rate than the (risk-free) reference interest rate in the market. To make the CAT bond more attractive to investors, the CAT bonds considered in this work have the additional characteristic that the CAT bondholders do not necessarily lose all their initial investment if the catastrophic event occurs. Instead, a percentage of the CAT bond principal is lost or their initial investment is paid in a date after the end of the CAT bond period.

Introducción

Una gran cantidad de fenómenos naturales ocurren cada año en México, entre los que se encuentran terremotos, huracanes, inundaciones, sequías, etc. (Meli *et al*, 2001; Medina Martínez, 1997; Lugo Hubp, 2002; García Acosta y Suárez Reynoso, 1996; García Acosta, 2001, y Lugo Hubp e Inbar, 2002). Algunos de estos fenómenos naturales son clasificados como desastres (catástrofes) debido al efecto económico que producen en las poblaciones afectadas. Por ejemplo, según el Centro Nacional para Prevención de Desastres (Cenapred) un terremoto se clasifica como desastre si causa cien o más pérdidas de vidas humanas o pérdidas económicas significativas a nivel nacional (Gutiérrez Martínez *et al*, 2001). A nivel mundial, de 1970 a 2001, según SwissRe (2002), los cinco desastres naturales más caros en pérdidas para el sector asegurador fueron (en dólares de 2001): el huracán Andrew que en los Estados Unidos y Bahamas ocasionó pérdidas en daños asegurados por 20 185 millones de dólares en agosto de 1992, el terremoto de Northridge que en los Estados Unidos ocasionó pérdidas en daños asegurados por 16 720 millones de dólares el 17 de enero de 1994, el tifón Mireille que en Japón ocasionó pérdidas en daños asegurados por 7 338 millones de dólares en septiembre de 1991, la tempestad Daria que en Francia, el Reino Unido y otros países ocasionó pérdidas en daños asegurados por 6 221 millones de dólares en enero de 1990 y la tempestad Lothar que en la Europa Occidental ocasionó pérdidas en daños asegurados por 6 164 millones de dólares en diciembre de 1999.

En cuanto a pérdidas de vidas humanas las cinco catástrofes más grandes de 1970 a 2001 fueron: las tempestades e inundaciones en Bangladesh con 300 mil víctimas en noviembre de 1970, el terremoto de Tangshan (8.2 en la escala de Richter) en China con 250 mil víctimas el 28 de julio de 1976, el tifón tropical Gorky en Bangladesh con 138 mil víctimas en abril de 1991, el terremoto en Perú (7.7 en la escala de Richter) con 60 mil víctimas el 31 de mayo de 1970 y el terremoto de Gilan en Irán con 50 mil víctimas el 21 de junio de 1990. El terremoto del 19 de septiembre de 1985 en México (8.1 en la escala de Richter) ocupa el decimocuarto lugar en número de víctimas con 15 mil (SwissRe, 2002).

En México, según Bitrán Bitrán (2001), de 1980 a 1999, los principales desastres en cuanto al número de damnificados fueron: *i*) tipo meteorológico: el huracán Paul en 1982 con 257 mil damnificados, las inundaciones de 1982 con 285 511 damnificados y el huracán Paulina en 1997 con 202 mil damnificados; *ii*) tipo geológico: erupción del volcán Chichonal en 1982 con 150 mil damnificados y el terremoto del 19 de septiembre de 1985 con 150 mil damnificados.

La necesidad de contar con instrumentos financieros que le permitan al gobierno federal y/o local obtener fondos adicionales para afrontar dichos desastres, mediante la transferencia del riesgo a inversionistas, es una necesidad urgente en México.

Un bono catastrófico es equivalente a un bono ordinario pero con la peculiaridad de que el pago de los cupones o hasta el principal al inversionista es contingente a la ocurrencia del hecho catastrófico. En caso de que el evento catastrófico ocurra, el emisor del bono cuenta con los fondos derivados de no pagar a los inversionistas alguna parte o hasta el total de su inversión. Generalmente, la ocurrencia o no ocurrencia del evento catastrófico se especifica mediante cierta medida objetiva o índice relacionado con la magnitud del evento que rebase cierto umbral. Así, por ejemplo, un bono catastrófico para inundaciones provocadas por tormentas puede estar referido a la cantidad de agua descargada por la tormenta durante cierto tiempo en cierta región o un bono catastrófico para terremotos a la magnitud en escala Richter en el epicentro. Si el bono catastrófico es emitido por alguna aseguradora la ocurrencia del evento catastrófico puede estar referida a que el monto de las pérdidas entre los asegurados de la compañía rebase determinado umbral. La utilización de estas medidas objetivas o índices es necesaria para no dejar duda alguna respecto a la ocurrencia o no del evento y, por tanto, de los beneficios que deben recibir los inversionistas con el bono catastrófico. Por supuesto, estas medidas objetivas o índices deben reflejar o estar muy correlacionadas con la magnitud de la pérdida económica que ocasionaría el evento.

El primer bono catastrófico fue emitido, según Cox y Pedersen (2000), en 1984 por la compañía Svensk Exportkredit que lo vendió a compañías de seguros que aceptaban una tasa de interés menor en intercambio de redimir sus bonos en valor nominal si un terremoto sacudía Japón. En los Estados Unidos, los primeros bonos catastróficos fueron conocidos como bonos "Act of God" y fueron utilizados para cubrir el evento de huracanes severos en Florida y emitidos por la compañía de seguros USAA. La ocurrencia del evento catastrófico se definió como un huracán que ocasionara pérdidas superiores a mil millones de dólares para USAA. Dichos bonos pagaban una tasa superior en tres puntos a la tasa LIBOR mensual en caso de no ocurrir el evento catastrófico. El primer bono catastrófico emitido por un gobierno fue el California Earthquake Authority (CEA) Bond en 1996 (Nowak, 1999).

Actualmente, en los mercados de bonos catastróficos de diferentes países se emiten miles de millones de bonos para diferentes eventos, como terremotos, inundaciones y huracanes. Entre los bonos catastróficos más populares se encuentran el USAA Hurricane Bond, el California Earthquake Authority (CEA) Bond y el Winterthur Windstorm Bond. Desafortunadamente, en México no existe un mercado formal para estos instrumentos. En caso de ocurrir un desastre natural el gobierno federal hace uso del Fondo de Desastres Naturales (Fonden), cuyas reglas de operación fueron publicadas en el *Diario Oficial de la Federación* del 23 de mayo de 2003.

Los bonos catastróficos presentan las siguientes ventajas sobre seguros o reaseguros tradicionales que el gobierno pudiera adquirir (Croson y Kunreuther, 1999): *i*) en el bono catastrófico no existe riesgo de crédito, es decir, la posibilidad de que el asegurador o reasegurador no pague al gobierno no existe ya que el dinero para el pago de las pérdidas fue entregado por el inversionista al comprar el bono; *ii*) en caso de ocurrir el evento catastrófico el gobierno cuenta inmediatemente con fondos para hacer frente al desastre y no tiene que esperar el pago por parte del asegurador y/o reasegurador; *iii*) el costo para el gobierno del bono puede ser inferior a la prima del seguro si existiera alguna compañía de seguros dispuesta a asegurar los daños ocasionados por el evento catastrófico; *iv*) el bono catastrófico no está correlacionado con el mercado financiero por lo que es útil en la diversificación de carteras de inversión, *v*) la emisión de estos bonos puede evitar grandes desajustes en el presupuesto del gobierno debido a la ocurrencia de eventos catastróficos que pudieran hacer necesario un incremento en los impuestos o un impuesto especial para financiar el gasto del gobierno en reparar los daños ocasionados por el evento.

En el artículo de Jaffee y Russell (1997) se presentan las ventajas de que sea el gobierno el proveedor de seguros para eventos catastróficos al señalar los problemas que las aseguradoras privadas tienen para ofrecer este tipo de seguros en los Estados Unidos. También, Lewis y Murdock (1996) presentan un esquema de seguro para eventos catastróficos en el que el gobierno federal de los Estados Unidos participa con la emisión de opciones para exceso de pérdida en estos eventos en el mercado del reaseguro.

En el presente artículo se calcula el precio de un bono catastrófico desde un enfoque actuarial. Existen otros enfoques para el cálculo de un bono catastrófico y otros tipos de instrumentos que ofrecen protección contra eventos catastróficos como opciones u otros derivados financieros. Como señala Aase (2001), entre los enfoques que se utilizan para el cálculo del precio de estos instrumentos se encuentran el uso del principio de no arbitraje (Cummins y Geman, 1994 y 1995), la utilización de la ecuación de Feynman-Kac (Chang, Chang y Yu, 1996) y la bursatilización de contratos de reaseguro (Kielholz y Durres, 1997, y Smith, Canelo y Di Dio, 1997). Otro enfoque empleado para el cálculo de seguros contra estos eventos es el uso de la teoría de opciones reales (Boulatov y Jaffee, 2003). Cox y Pedersen (2000) utilizan un enfoque de mercados incompletos para calcular el precio de un bono catastrófico, ya que consideran que no existe ninguna cartera de acciones que sea capaz de reiterar el bono catastrófico; además, utilizan un procedimiento en dos etapas para el cálculo del bono: *i*) seleccionan un modelo para la estructura de tasas de interés y *ii*) estiman la probabilidad de ocurrencia del evento catastrófico. Cox y Pedersen (2000) consideran la independencia entre los hechos del mercado financiero que determinan la estructura de tasas de interés y el hecho que define la ocurrencia del evento catastrófico. Por tanto, las medidas de probabilidad asignadas a la estructura de tasas de interés y a la ocurrencia del evento catastrófico se consideran independientes y el precio del bono catastrófico es el valor esperado, utilizando estas dos medidas de probabilidad, de los beneficios que otorga el bono.

A diferencia de Cox y Pedersen (2000), en este trabajo se considera que al ser el gobierno el emisor del bono catastrófico no existe necesidad de asignar una medida de probabilidad a la estructura de tasas de interés ya que la tasa de referencia que utilizamos es la que proviene de la utilizada por el gobierno para emitir deuda pública (Certificados de la Tesorería, Cetes) y que puede fijarla al momento de vender el bono para toda la vigencia de éste. Otra diferencia entre el presente trabajo y el de Cox y Pedersen (2000) es que únicamente se consideran bonos que no ofrecen el pago de cupones al final de ciertos periodos. Aase (2001) deriva el precio de futuros y opciones contra eventos catastróficos a partir de modelar el proceso del cociente de pérdidas ocasionadas por eventos catastróficos entre el total de primas cobradas como un proceso de saltos en el que el tamaño del salto está dado por el monto de las reclamaciones a las compañías aseguradoras ocasionadas por el evento catastrófico en puntos en el tiempo determinados por la ocurrencia de ese evento y considerando un mercado de futuros utilizando funciones de utilidad con agentes con aversión al riesgo. El monto de las reclamaciones ocasionadas por el evento catastrófico se modela como una cadena de Markov. A diferencia de Aase (2001), en este artículo no se modelan las pérdidas ocasionadas por el evento catastrófico como un proceso estocástico, ya que el monto de los fondos con los que contará el gobierno para hacer frente al evento dependerá de la cantidad y precio de los bonos catastróficos que el gobierno sea capaz de vender. En este sentido, en el presente trabajo se determinan cotas al disponible que tendrá el gobierno en caso de ocurrir el evento. Tampoco se utilizan conceptos relacionados con la teoría de utilidad ya que se considera que la aversión o no aversión de un agente al riesgo, como señalan Cox y Pedersen (2000), p. 77, quedará implícita en el precio del bono catastrófico.

El presente trabajo se divide en tres secciones. En la sección I se desarrolla el cálculo actuarial del precio de emisión del bono catastrófico en el caso general de un proceso de Poisson con memoria, en el que la tasa de ocurrencia del evento catastrófico puede variar en el tiempo. En la sección II se incluye un resumen de los precios de emisión y restricciones de los diferentes tipos de bonos considerados en este trabajo además de algunas consideraciones adicionales respecto al cálculo del bono catastrófico en el caso especial de un proceso de Poisson sin memoria (homogéneo), es decir, en el que la tasa de ocurrencia del evento es constante en el tiempo (Cox y Miller, 1965). La aplicación de la metodología propuesta se ejemplifica en la sección III al caso especial de un proceso de Poisson sin memoria. Por último, se presenta las conclusiones del presente trabajo.

I. Cálculo actuarial del bono catastrófico

Desde un punto de vista actuarial el precio de un bono catastrófico puede definirse como la cantidad de dinero que el inversionista debería aportar por participar en una apuesta. Dicha apuesta se basa en dos posibles resultados: *i*) el evento catastrófico ocurre durante la vigencia del bono o *ii*) no ocurre durante la vigencia del bono.

En caso de que el evento catastrófico no ocurra el inversionista se hace acreedor a ciertos beneficios, los cuales deben ser superiores a los que otorga un bono ordinario con las mismas condiciones y calculado con la tasa de referencia libre de riesgo del mercado. En caso de que el evento ocurra, el emisor del bono tendrá el derecho de adjudicarse cierta parte o el total de la inversión especificada en el contrato del bono catastrófico.

Por otra parte, si ocurre el evento catastrófico, en este trabajo se propone diferir el pago de beneficios (inferiores a los beneficios pagados en caso de que el evento no ocurra) a la fecha de la finalización del contrato del bono catastrófico o a una fecha posterior a la de la finalización del contrato, de manera que el emisor del bono pueda dividir el total del dinero recaudado por la venta de los bonos en dos fondos: *i*) uno destinado a crear la reserva necesaria para hacer frente al pago de los beneficios futuros para los inversionistas y *ii*) otro destinado para mitigar el efecto económico del evento catastrófico inmediatamente después de la ocurrencia de éste.

De esta manera la apuesta resulta atractiva tanto al inversionista como al emisor, ya que el inversionista puede obtener, con una alta probabilidad, puesto que los eventos catastróficos ocurren con una frecuencia muy baja, rendimientos superiores a los ofrecidos por la tasa libre de riesgo, mientras que el emisor obtiene un seguro contra el evento catastrófico a un precio que puede ser inferior al que le ofrecería una compañía de seguros, suponiendo que existiera una dispuesta a ofrecerle este seguro.

Para obtener el precio de esta apuesta se emplea un enfoque actuarial en el que se supone que en promedio el valor presente de los beneficios y pérdidas del emisor del bono deben ser iguales, es decir, en el largo plazo, al vender el bono catastrófico una gran cantidad de periodos, los beneficios acumulados y pérdidas acumuladas del emisor deben ser iguales, en promedio. Para el cálculo del bono se definen las siguientes variables y notación:

- t variable que indica el tiempo transcurrido en años desde el inicio de la vigencia del bono catastrófico.
- T_u tiempo en años que ha transcurrido desde la última ocurrencia del evento catastrófico de interés, al momento de la emisión del bono ($t \quad 0$).
- R duración del contrato del bono en años (vigencia del bono catastrófico).
- T tiempo aleatorio de espera para la ocurrencia del evento catastrófico. Este tiempo está medido en años a partir de la fecha de emisión (venta) del bono. En caso de que el evento no ocurra dentro del periodo establecido en el contrato del bono, $T \quad R$.
- S diferimiento en años para el otorgamiento de beneficios a los inversionistas en caso de que el evento ocurra dentro del periodo establecido en el contrato del bono, $T \quad R$.
- V_0 variable aleatoria que representa el valor presente, al inicio del contrato del bono ($t \quad 0$), del beneficio del emisor en caso de que el evento ocurra durante la vigencia del bono ($T \quad R$)

y la cantidad adicional, sobre la tasa libre de riesgo, que el emisor del bono debe aportar para el pago del beneficio al inversionista en caso de que el evento no ocurra durante la vigencia del bono.

$_{E0}$ tasa instantánea de interés (fuerza de interés) anual prometida al inversionista, en caso de que el evento ocurra, desde la compra del bono hasta el momento de la ocurrencia del evento (t $[0, T]$). Es decir, si i_{E0} representa la tasa de interés efectiva anual entonces, $_{E0}$ $\ln(1$ $i_{E0})$.

$_{E1}$ tasa instantánea de interés (fuerza de interés) anual prometida al inversionista, en caso de que el evento ocurra, desde el momento en que se presenta hasta el momento en el cual se realiza el pago de los beneficios al inversionista (t $[T, T$ $S]$ o t $[T, R]$). Es decir, si i_{E1} representa la tasa de interés efectiva anual entonces, $_{E1}$ $\ln(1$ $i_{E1})$.

$_{NE}$ tasa instantánea de interés (fuerza de interés) anual prometida al inversionista en caso de que el evento no ocurra. Es decir, si i_{NE} representa la tasa de interés efectiva anual entonces, $_{NE}$ $\ln(1$ $i_{NE})$.

$_{Cetes}$ tasa instantánea de interés (fuerza de interés) anual de Certificados de la Tesorería (Cetes), la cual se considera como la tasa libre de riesgo del mercado. Es decir, si i_{Cetes} representa la tasa de interés efectiva anual entonces, $_{Cetes}$ $\ln(1$ $i_{Cetes})$.

D_T cantidad disponible para el emisor (gobierno) al momento de la ocurrencia del evento (T), si éste ocurre durante la vigencia del bono (T R). Esta cantidad aleatoria (función de la variable aleatoria T) es el beneficio del emisor.

B_T beneficio del inversionista al momento de la ocurrencia del evento (T) en caso de que ocurra durante la vigencia del bono (T R).

B_{NE} beneficio del inversionista en caso de que el evento no ocurra durante la vigencia del bono (T R).

P_0 precio de emisión del bono catastrófico.

N_0 valor nominal del bono.

$_E$ porción del valor nominal del bono, N_0, que el emisor retiene en caso de que el evento ocurra durante la vigencia del bono (0 $_E$ 1).

A continuación se desarrolla el cálculo actuarial del precio de emisión del bono catastrófico en las siguientes dos situaciones: *i*) periodo de diferimiento con duración fija (S): en caso de ocurrir el evento los beneficios al inversionista se pagan *S* años después del momento de la ocurrencia del evento (en $T \quad S$), y *ii*) duración del periodo de diferimiento aleatorio: en caso de ocurrir el evento los beneficios al inversionista se pagan al final de la vigencia del bono (en *R*). En ambos casos, al no ocurrir el evento catastrófico los beneficios al inversionista se pagan al final de la vigencia del bono.

1. *Periodo de diferimiento con duración fija* (S)

En este caso, la variable aleatoria V_0 está definida de la siguiente forma:

$$V_0 \quad \begin{array}{ll} D_T e^{\quad _{Cetes}T} & \text{si} \quad T \quad R \\ P_0 \quad B_{NE} e^{\quad _{Cetes}R} & \text{si} \quad T \quad R \end{array} \tag{1}$$

Nótese que en la definición de V_0 el valor presente de cualquier cantidad se obtiene utilizando $_{Cetes}$, la tasa de interés instantánea anual de Cetes al momento de la emisión del bono catastrófico. El disponible para el emisor y los beneficios al inversionista se definen como

$D_T \quad P_0 e^{\quad _{Cetes}T} \quad B_T e^{\quad _{Cetes}S} \quad P_0 e^{\quad _{Cetes}T} \quad (1 \quad _E) N_0 e^{\quad _{E0}T} e^{\quad _{E1}S} e^{\quad _{Cetes}S}$, es decir, el emisor (gobierno) al momento de la ocurrencia del evento catastrófico obtiene un beneficio que es igual a la diferencia entre el monto acumulado del precio de emisión del bono ($P_0 e^{\quad _{Cetes}T}$) menos el valor presente al momento de la ocurrencia del evento del beneficio prometido al inversionista en caso de que aquel ocurra, $B_T e^{\quad _{Cetes}S}$.

$B_T \quad (1 \quad _E) N_0 e^{\quad _{E0}T} e^{\quad _{E1}S}$, es decir, en caso de ocurrir el evento durante la vigencia del bono catastrófico ($T \quad R$) al inversionista se le promete que el beneficio que recibirá *S* años después del momento de la ocurrencia del evento será igual a un porcentaje del valor nominal del bono, $(1 \quad _E) N_0$, cantidad sobre la que se pagarán intereses a una fuerza de interés instantánea anual $_{E0}$ desde el inicio del bono hasta el momento de la ocurrencia del evento y, a una fuerza de interés instantánea anual $_{E1}$, del momento de la ocurrencia del evento hasta el final de S años.

B_{NE} $N_0 e^{\;_{NE}R}$, es decir, en caso de no ocurrir el evento durante la vigencia del bono (T R) al inversionista se le promete que el beneficio que recibirá al final de la vigencia del bono (R) será igual al valor acumulado del valor nominal del bono, N_0, más los intereses generados sobre el valor nominal a una fuerza de interés instantánea anual $_{NE}$ desde el inicio del bono hasta el final de su vigencia.

Para obtener el valor del precio de emisión del bono catastrófico, P_0, se especifica la siguiente ecuación de equilibrio:

$$E(V_0) \quad 0 \tag{2}$$

de manera que el valor presente actuarial del beneficio del emisor sea igual al valor presente actuarial de la cantidad adicional que el emisor del bono debe aportar, sobre la tasa libre de riesgo, para el pago del beneficio del inversionista. Esto implica que al emitir el bono durante un gran número de periodos, los valores presentes, al momento de la emisión del bono, de las ganancias obtenidas por el emisor sean iguales a las pérdidas sobre la tasa libre de riesgo del emisor, en promedio.

Para calcular $E(V_0)$, el valor esperado de V_0, se supone que la variable aleatoria del tiempo de espera para la ocurrencia del evento catastrófico, T, tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{T_u}(t) \qquad (T_u \quad t)e^{\;\;_{T_u}^{T_u \quad t} \;(v)\,dv} \tag{3}$$

para t 0 y T_u que denota el tiempo que ha transcurrido desde la última ocurrencia del evento, T_u 0. A la función positiva $(T_u \quad t)$ se le conoce como la función del riesgo de ocurrencia del evento (Cox y Miller, 1965) y representa la probabilidad condicional de que éste ocurrirá en el intervalo $(T_u \quad t, T_u \quad t \quad dt)$ condicional a que el evento no ha ocurrido aún (dt denota un infinitesimal de tiempo). Para terremotos, Pinedo y Shpilberg (1981) consideran funciones de riesgo crecientes y, en particular lineales, lo que les permite modelar procesos con memoria del tiempo que ha transcurrido desde la última ocurrencia del evento catastrófico. En este caso, el proceso de ocurrencias del evento corresponde a un proceso de Poisson con memoria (no homogéneo). También, para el caso de terremotos, Kramer (1995), pp. 128-129, señala que en general los procesos de Poisson son adecuados para el análisis práctico del riesgo de ocurrencia y presenta una extensa referencia bibliográfica de otros modelos de los procesos de Poisson homogéneos y no homogéneos.

Si $(T_u \quad t) \quad (\quad 0)$, es decir, la función del riesgo de ocurrencia del evento catastrófico es constante, entonces $f_{T_u}(t) \quad e^{\quad t}$ corresponde a una función de densidad exponencial y el proceso de ocurrencias del evento corresponde a un proceso de Poisson sin memoria (homogéneo) que es el utilizado en el cálculo del precio de un bono catastrófico por Aase (2001). Por tanto, en el caso general en el que $(T_u \quad t)$ es una función positiva y, generalmente, creciente,

$$E(V_0) \quad {}_0^R D_t e^{\quad Cetes\, t} \quad (T_u \quad t) e^{\quad {}_{T_u}^{T_u \quad t} \quad (v)\, dv} dt$$
$$\quad {}_R (P_0 \quad B_{NE} e^{\quad Cetes\, t}) \quad (T_u \quad t) e^{\quad {}_{T_u}^{T_u \quad t} \quad (v)\, dv} dt \qquad (4)$$

que es equivalente a

$$E(V_0) \quad {}_0^R (P_0 \quad (1 \quad {}_E) N_0 e^{\quad E0\, t} e^{\quad E1\, S} e^{\quad Cetes (t \quad S)}) \quad (T_u \quad t) e^{\quad {}_{T_u}^{T_u \quad t} \quad (v)\, dv} dt$$
$$\quad {}_R (P_0 \quad N_0 e^{\quad NE\, R} e^{\quad Cetes\, R}) \quad (T_u \quad t) e^{\quad {}_{T_u}^{T_u \quad t} \quad (v)\, dv} dt \qquad (5)$$

Al resolver la ecuación $E(V_0) \quad 0$ para P_0 se obtiene el valor del precio de emisión del bono como función de $(T_u \quad t)$, R, S, N_0, ${}_E$, ${}_{E0}$, ${}_{E1}$, ${}_{NE}$ y ${}_{Cetes}$:

$$P_0 \quad (1 \quad {}_E) N_0 e^{(\quad Cetes \quad E1) S} \quad {}_0^R e^{(\quad Cetes \quad E0) t} \quad (T_u \quad t) e^{\quad {}_{T_u}^{T_u \quad t} \quad (v)\, dv} dt$$
$$N_0 e^{(\quad Cetes \quad NE) R \quad {}_{T_u}^{T_u \quad R} \quad (v) dv} \qquad (6)$$

Con este bono, en caso de ocurrir el evento catastrófico durante la vigencia de aquel, el emisor (gobierno) tiene disponible, al momento de la ocurrencia del evento, D_T pesos por cada bono que haya vendido.

Si $S \quad 0$ entonces, en caso de ocurrir el evento catastrófico, el beneficio del inversionista se paga al momento de la ocurrencia del evento. En este caso,

$$P_0 \quad (1 \quad {}_E)N_0 \ {}^{R}_{0}e^{(\ Cetes \quad E0)t} \quad (T_u \quad t)e^{\ {}^{T_u \ t}_{T_u} \ (v)\,dv}dt$$
$$N_0 e^{(\ Cetes \quad NE)R \quad {}^{T_u \ R}_{T_u} \ (v)dv} \tag{7}$$

a) *Restricciones en los valores de* $_{E0}$, $_{E1}$ *y* $_E$. Denótese por D_T el disponible que posee el emisor (gobierno) en caso de ocurrir el evento catastrófico al tiempo T para mitigar los efectos de este evento. El disponible es igual a la diferencia entre el valor acumulado al tiempo T, a tasa libre de riesgo, del capital recibido por la venta del bono catastrófico y el valor presente al tiempo T de los beneficios prometidos al inversionista en caso de que el evento ocurra:

$$D_T \quad \begin{matrix} P_0 e^{\ Cetes T} \quad (1 \quad {}_E)N_0 e^{\ E0 T} e^{\ E1 S} e^{\ Cetes S} & \text{si} \quad T \quad R \\ 0 & \text{si} \quad T \quad R \end{matrix} \tag{8}$$

Si se desea que $D_T \quad 0$ para toda T en el intervalo $[0, R]$ entonces se debe satisfacer que

$$({}_{E0} \quad {}_{Cetes})T \quad ({}_{E1} \quad {}_{Cetes})S \quad \ln \frac{P_0}{N_0} \ \frac{1}{1 \quad {}_E} \tag{9}$$

Una posible manera de garantizar que esta desigualdad se cumpla para cualquier valor no negativo de S y T es aplicando las siguientes restricciones:

i) $_{E0} \quad _{Cetes}$,
ii) $_{E1} \quad _{Cetes}$ y
iii) $P_0 \quad (1 \quad {}_E)N_0$.

En términos de los beneficios al inversionista estas restricciones implican que, en caso de ocurrir el evento, el inversionista debe recibir beneficios a fuerzas de interés inferiores a la fuerza de interés de Cetes y el precio de emisión del bono catastrófico (P_0) debe ser superior a la cantidad que retiene el inversionista $(1 \quad {}_E)N_0$. Si $_E \quad 0$ entonces el precio de emisión del bono debe ser mayor o igual a su valor nominal $P_0 \quad N_0$.

La última restricción $P_0 \quad (1 \quad {}_E)N_0$ es equivalente a $_E \quad 1 \quad (P_0/N_0)$, que utilizando la ecuación 6 implica

$$_{E} \quad 1 \qquad \frac{e^{(\ _{Cetes} \quad _{NE})R \quad \int_{T_u}^{T_u \ R} \ (v)dv}}{1 \quad e^{(\ _{Cetes} \quad _{E1})S} \int_0^R e^{(\ _{Cetes} \quad _{E0})t} \ (T_u \quad t)e^{\int_{T_u}^{T_u \ t} \ (v)dv} dt} \tag{10}$$

b) *Determinación de* $_{E0}$ *y* $_{E1}$. Los valores a utilizar de $_{E0}$ y $_{E1}$ se pueden determinar mediante la especificación de una cota inferior y otra superior al disponible D_T considerando $_{E0} \quad _{Cetes}$, $_{E1} \quad _{Cetes}$ y $_{E} \quad 1 \quad (P_0/N_0)$. Si se desea que el disponible al momento de la ocurrencia del evento sea al menos cierta porción del precio de emisión, es decir,

$$D_T \quad rP_0 \tag{11}$$

para toda T en el intervalo $[0, R]$ y $0 \quad r \quad 1$ se requiere que

$$e^{\ _{Cetes}T} \quad (1 \quad _{E}) \frac{N_0}{P_0} e^{\ _{E0}T \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})S} \quad r \tag{12}$$

La función $g(T)$ definida como

$$g(T) \quad e^{\ _{Cetes}T} \quad (1 \quad _{E}) \frac{N_0}{P_0} e^{\ _{E0}T \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})S} \tag{13}$$

es una función creciente de T, para T en el intervalo $[0, R]$ y $S \quad 0$, ya que su derivada con respecto a T,

$$\frac{dg}{dT} \quad _{Cetes} e^{\ _{Cetes}T} \quad _{E0}(1 \quad _{E}) \frac{N_0}{P_0} e^{\ _{E0}t \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})S} \tag{14}$$

es positiva dado que se cumple que

$$\frac{_{Cetes}}{_{E0}} \quad (1 \quad _{E}) \frac{N_0}{P_0} e^{(\ _{E0} \quad _{Cetes})T \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})S} \tag{15}$$

si $_{E0} \quad _{Cetes}$, $_{E1} \quad _{Cetes}$ y $_{E} \quad 1 \quad (P_0/N_0)$. Por tanto, $g(T)$ y D_T toman su mínimo valor en $T \quad 0$ y su máximo valor en $T \quad R$ en el intervalo $[0, R]$.

Si el emisor del bono catastrófico (gobierno) requiere un disponible mínimo de $\ P_0$ (que se da en $T \quad 0$) y un disponible máximo de $\ P_0$ (que se da en $T \quad R$) para $0 \qquad 1$ y $\qquad$ entonces se debe satisfacer el siguiente par de ecuaciones

$$D_0 \quad P_0 \tag{16}$$

y

$$D_R \quad P_0 \tag{17}$$

que son equivalentes a

$$1 \quad (1 \quad {}_E)\ \frac{N_0}{P_0}\ e^{(\ {}_{E1} \quad {}_{Cetes})\,S} \tag{18}$$

y

$$e^{\ {}_{Cetes}R} \quad (1 \quad {}_E)\ \frac{N_0}{P_0}\ e^{\ {}_{E0}R}e^{(\ {}_{E1} \quad {}_{Cetes})\,S} \tag{19}$$

Al resolver la ecuación (18) para ${}_{E1}$ se obtiene

$${}_{E1} \quad {}_{Cetes} \quad \frac{1}{S}\ln \frac{1}{(1 \quad {}_E)\ \dfrac{N_0}{P_0}} \tag{20}$$

La fuerza de interés ${}_{E1}$ satisface las siguientes restricciones: ${}_{E1} \quad 0$ y ${}_{E1} \quad {}_{Cetes}$. La restricción ${}_{E1} \quad 0$ implica que a partir de la ecuación (20) se debe satisfacer:

$$\frac{1}{(1 \quad {}_E)\ \dfrac{N_0}{P_0}} \quad e^{\ {}_{Cetes}S} \tag{21}$$

la cual es equivalente a

$$1 \quad (1 \quad {}_E)\ \frac{N_0}{P_0} \quad e^{\ {}_{Cetes}S} \tag{22}$$

Dada la restricción ${}_{E1} \quad {}_{Cetes}$ se requiere, a partir de la ecuación (20), que

$$\frac{1}{S}\ln \frac{1}{(1 \quad {}_E)\ \dfrac{N_0}{P_0}} \quad 0 \tag{23}$$

la cual implica que

$$1 \quad (1 \quad {}_{E}) \ \frac{N_0}{P_0} \tag{24}$$

Al conjuntar las desigualdades (22) y (24) se tiene que

$$1 \quad (1 \quad {}_{E}) \ \frac{N_0}{P_0} \qquad 1 \quad (1 \quad {}_{E}) \ \frac{N_0}{P_0} \ e^{\ {}_{Cetes} S} \tag{25}$$

Nótese que la cota superior de es una función creciente de $_{E}$ y S como se esperaba, es decir, al aumentar la porción del valor nominal que retiene el emisor en caso de ocurrir el evento catastrófico y/o el periodo de diferimiento, aumenta el disponible mínimo al que tendrá acceso el emisor en caso de ocurrir el evento.

Ahora, remplazando el valor de $_{E1}$ de la ecuación (20) en la ecuación (19) se tiene

$$e^{\ {}_{Cetes} R} \quad (1 \quad) e^{\ {}_{E0} R} \tag{26}$$

la cual al resolverse para $_{E0}$ implica que

$$_{E0} \quad \frac{1}{R} \ln \ \frac{e^{\ {}_{Cetes} R}}{1} \tag{27}$$

La fuerza de interés $_{E0}$ satisface las siguientes restricciones: $_{E0} \quad 0$ y $_{E0} \quad {}_{Cetes}$. Dada la restricción $_{E0} \quad 0$ y utilizando la ecuación (27) se tiene que

$$\frac{1}{R} \ln \ \frac{e^{\ {}_{Cetes} R}}{1} \qquad 0 \tag{28}$$

la cual implica

$$e^{\ {}_{Cetes} R} \qquad 1 \tag{29}$$

Dada la restricción $_{E0} \quad {}_{Cetes}$ se requiere que

$$e^{\ {}_{Cetes} R} \qquad (1 \quad) e^{\ {}_{Cetes} R} \tag{30}$$

la cual implica que

$$e^{\ {}_{Cetes} R} \tag{31}$$

y, por tanto,

$$e^{\ {}_{Cetes} R} \qquad e^{\ {}_{Cetes} R} \qquad 1 \tag{32}$$

La cota superior a , como es de esperarse, es una función creciente de $_{Cetes}$ y R.

En el caso en el cual el pago de los beneficios al inversionista, si el evento ocurre dentro de la vigencia del contrato del bono catastrófico, se haga en el momento de la ocurrencia del evento, es decir, $S \quad 0$, el precio de emisión del bono es igual a

$$P_0 \quad (1 \quad {}_E)N_0 \; {}_0^R e^{(\ Cetes \quad E0)t} \quad (T_u \quad t)e^{\ {}_{T_u}^{T_u \quad t} \quad (v)\,dv} dt$$
$$N_0 e^{(\ Cetes \quad NE)R \quad {}_{T_u}^{T_u \quad R} \quad (v)dv} \tag{33}$$

con las restricciones ${}_{E0} \quad {}_{Cetes}$ y ${}_E \quad 1 \quad (P_0/N_0)$. La restricción sobre ${}_E$ es equivalente a

$$_E \quad 1 \quad \frac{e^{(\ Cetes \quad NE)R \quad {}_{T_u}^{T_u \quad R} \quad (v)dv}}{1 \quad {}_0^R e^{(\ Cetes \quad E0)t} \quad (T_u \quad t)e^{\ {}_{T_u}^{T_u \quad t} \quad (v)dv} dt} \tag{34}$$

La ecuaciones (18) y (19) se convierten en

$$1 \quad (1 \quad {}_E) \frac{N_0}{P_0} \tag{35}$$

y

$$e^{\ Cetes R} \quad (1 \quad {}_E) \frac{N_0}{P_0} \; e^{\ E0 R} \quad , \tag{36}$$

respectivamente. La primera ecuación implica que se puede escribir como una función creciente de ${}_E$. En el caso extremo que se desee $\quad 1$ se necesita ${}_E \quad 1$, es decir, en caso de ocurrir el evento catastrófico el inversionista no recibe beneficio alguno. Remplazando el valor de de la ecuación (35) en la ecuación (36) y resolviendo para ${}_{E0}$ se obtiene

$$_{E0} \quad \frac{1}{R} \ln \frac{e^{\ Cetes R}}{1} \tag{37}$$

La fuerza de interés ${}_{E0}$ satisface las restricciones ${}_{E0} \quad 0$ y ${}_{E0} \quad {}_{Cetes}$. Dada la restricción ${}_{E0} \quad 0$ y utilizando la ecuación (37) se tiene que

$$\frac{e^{\ Cetes R}}{1} \quad 1 \tag{38}$$

la cual es equivalente a

$$e^{\quad Cetes R} \qquad 1 \tag{39}$$

Dada la restricción $_{E0} \qquad _{Cetes}$ y utilizando la ecuación (37) se tiene que

$$\frac{e^{\quad Cetes R}}{1} \qquad e^{\quad Cetes R} \tag{40}$$

lo que implica

$$e^{\quad Cetes R} \tag{41}$$

Al conjuntar las desigualdades (39) y (41) se obtiene

$$e^{\quad Cetes R} \qquad e^{\quad Cetes R} \qquad 1 \tag{42}$$

con $\quad 1 \quad (1 \quad _{E})(N_0/P_0)$.

2. *Periodo de diferimiento con duración aleatoria* (R T). *Pago al final del contrato del bono catastrófico*

Es posible que se desee efectuar todos los pagos de beneficios al inversionista al final de la vigencia del bono. En este caso, el periodo durante el cual se aplica la fuerza de interés anual $_{E1}$, el intervalo $(T, R]$, resulta tener una duración aleatoria $R \quad T$ en vez de fija e igual a S. En este caso, la variable aleatoria V_0 está definida como

$$V_0 \qquad \begin{matrix} D_T e^{\quad Cetes T} & \text{si} \quad T \quad R \\ P_0 \quad B_{NE} e^{\quad Cetes R} & \text{si} \quad T \quad R \end{matrix} \tag{43}$$

Pero a diferencia del caso con periodo de diferimiento con duración fija:

i) $D_T \quad P_0 e^{\ Cetes T} \quad B_T e^{\quad Cetes (R \quad T)}$ es equivalente a $D_T \quad P_0 e^{\ Cetes T} \quad (1 \quad _E) N_0 e^{\ E0 T} e^{\ E1 (R \quad T)} e^{\quad Cetes (R \quad T)}$, es decir, el emisor (gobierno), al momento de la ocurrencia del evento obtiene un beneficio que es igual a la diferencia entre el monto acumulado del precio de emisión del bono ($P_0 e^{\ Cetes T}$) menos el valor presente al momento de la ocurrencia del evento del beneficio prometido al inversionista en caso de ocurrir el evento, $B_T e^{\quad Cetes (R \quad T)}$.

ii) $B_T \quad (1 \quad _E) N_0 e^{\ E0 T} e^{\ E1 (R \quad T)}$, es decir, en caso de ocurrir el evento durante la vigencia del bono catastrófico ($T \quad R$), al inversionista se le promete que el beneficio que recibirá al final de la vigencia del bono será igual a una porción del valor nominal del bono, $(1 \quad _{E})N_0$, cantidad a la que se le pagará una fuerza de interés instantánea anual $_{E0}$ desde el inicio del bono hasta la ocurrencia del evento, y del momento de la ocurrencia del evento hasta el final de la vigencia del bono a una fuerza de interés instantánea anual $_{E1}$.

iii) $B_{NE} \quad N_0 e^{\ _{NE} R}$, es decir, en caso de no ocurrir el evento durante la vigencia del bono $(T \quad R)$, al inversionista se le promete que el beneficio que recibirá al final de la vigencia del bono (R) será el valor acumulado del valor nominal del bono, N_0, más los intereses generados a una fuerza de interés instantánea anual $_{NE}$ desde el inicio del bono hasta el final de su vigencia.

Al resolver la ecuación $E(V_0) \quad 0$ par P_0 se obtiene

$$P_0 \quad (1 \quad _E)N_0 e^{(\ _{Cetes} \quad _{E1})R} \int_0^R e^{(\ _{E1} \quad _{E0})t} \quad (T_u \quad t) e^{\ _{T_u}^{T_u \quad t} (v)\, dv} dt$$
$$N_0 e^{(\ _{Cetes} \quad _{NE})R \quad _{T_u}^{T_u \quad R} (v) dv} \tag{44}$$

a) *Restricciones en los valores en* $_{E0}$, $_{E1}$ *y* $_{E}$. En el caso de un periodo de diferimiento con duración aleatoria $(R \quad T)$:

$$D_T \quad \begin{matrix} P_0 e^{\ _{Cetes} T} \quad (1 \quad _E) N_0 e^{\ _{E0} T} e^{\ _{E1}(R \quad T)} e^{\ _{Cetes}(R \quad T)} & \text{si} \quad T \quad R \\ 0 & \text{si} \quad T \quad R \end{matrix} \tag{45}$$

Si se desea que $D_T \quad 0$ para toda T en el intervalo $[0, R]$ entonces se debe satisfacer que

$$(\ _{E0} \quad _{E1})T \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})R \quad \ln \frac{1}{(1 \quad _E) \dfrac{N_0}{P_0}} \tag{46}$$

Una posible manera de garantizar esta desigualdad para cualquier valor no negativo de R y T es tomando:

i) $_{E0} \quad _{E1}$,
ii) $_{E1} \quad _{Cetes}$ y
iii) $P_0 \quad (1 \quad _E)N_0$.

La última ecuación es equivalente a $_{E} \quad 1 \quad (P_0/N_0)$, la cual al utilizar la ecuación (45) implica

$$_{E} \quad 1 \quad \frac{e^{(\ _{Cetes} \quad _{NE})R \quad \ ^{T_u}_{T_u} \ ^{R} \ (v)dv}}{1 \quad e^{(\ _{Cetes} \quad _{E1})R} \ ^{R}_{0} e^{(\ _{E1} \quad _{E0})t} \ (T_u \quad t)e^{\ ^{T_u}_{T_u} \ ^{t} \ (v)dv} dt} \tag{47}$$

En términos de los beneficios al inversionista en el bono catastrófico estas restricciones implican que, en caso de ocurrir el evento, el inversionista debe recibir beneficios a tasas de interés inferiores a la tasa de Cetes. Además, la tasa de interés que recibe el inversionista del inicio de la vigencia del bono al momento de la ocurrencia del evento debe ser inferior a la tasa de interés que se le paga al inversionista en el momento de la ocurrencia del evento hasta el final de la vigencia del bono.

b) *Determinación de* $_{E0}$ *y* $_{E1}$. Los valores a utilizar de $_{E0}$ y $_{E1}$ se pueden determinar mediante la especificación de una cota inferior y otra superior al disponible D_T considerando $_{E0} \quad _{E1}$, $_{E1} \quad _{Cetes}$ y $_{E} \quad 1 \quad (P_0/N_0)$. Si se desea que el disponible al tiempo de ocurrencia del evento catastrófico sea al menos cierta porción del precio de emisión, es decir,

$$D_T \quad rP_0 \tag{48}$$

para toda T en el intervalo $[0, T]$ y $0 \quad r \quad 1$ esto implica que

$$e^{\ _{Cetes}T} \quad (1 \quad _{E}) \ \frac{N_0}{P_0} \ e^{(\ _{E0} \quad _{E1} \quad _{Cetes})T \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})R} \quad r \tag{49}$$

La función $g(T)$ definida como

$$g(T) \quad e^{\ _{Cetes}T} \quad (1 \quad _{E}) \ \frac{N_0}{P_0} \ e^{(\ _{E0} \quad _{E1} \quad _{Cetes})T \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})R} \tag{50}$$

es una función creciente de T, para T en el intervalo $[0, R]$, ya que su derivada con respecto a T,

$$\frac{dg}{dT} \quad _{Cetes} e^{\ _{Cetes}T} \\ (\ _{E0} \quad _{E1} \quad _{Cetes})(1 \quad _{E}) \ \frac{N_0}{P_0} \ e^{(\ _{E0} \quad _{E1} \quad _{Cetes})T \quad (\ _{E1} \quad _{Cetes})R} \tag{51}$$

es positiva ya que

$$\frac{{}_{Cetes}}{{}_{Cetes}\quad {}_{E0}\quad {}_{E1}}\quad (1\quad {}_{E})\ \frac{N_0}{P_0}\ e^{(\ {}_{E0}\quad {}_{E1})T\ \ (\ {}_{E1}\quad {}_{Cetes})R} \tag{52}$$

para toda T en $[0, R]$ y R 0 si ${}_{E0}$ ${}_{E1}$; ${}_{E1}$ ${}_{Cetes}$ y ${}_{E}$ 1 (P_0/N_0). Por tanto, $g(T)$ y D_T toman su mínimo valor en T 0 y su máximo valor en T R en el intervalo $[0, R]$.

Si el emisor del bono catastrófico (gobierno) requiere un disponible mínimo de P_0 (que se da en T 0) y un disponible máximo de P_0 (que se da en T R) para 0 1 y entonces se debe satisfacer el siguiente par de ecuaciones

$$D_0 \qquad P_0 \tag{53}$$

y

$$D_R \qquad P_0 \tag{54}$$

que son equivalentes a

$$1\quad (1\quad {}_{E})\ \frac{N_0}{P_0}\ e^{(\ {}_{E1}\quad {}_{Cetes})R} \tag{55}$$

y

$$e^{\ {}_{Cetes}R}\quad (1\quad {}_{E})\ \frac{N_0}{P_0}\ e^{\ {}_{E0}R} \tag{56}$$

Al resolver la ecuación (55) para ${}_{E1}$ se obtiene

$${}_{E1}\qquad {}_{Cetes}\quad \frac{1}{R}\ln\ \frac{1}{(1\quad {}_{E})\ \frac{N_0}{P_0}} \tag{57}$$

La fuerza de interés ${}_{E1}$ satisface las restricciones ${}_{E1}$ 0 y ${}_{E1}$ ${}_{Cetes}$. Dada la restricción ${}_{E1}$ 0 y utilizando la ecuación (57) se tiene

$$\frac{1}{(1\quad {}_{E})\ \frac{N_0}{P_0}}\qquad e^{\ {}_{Cetes}R} \tag{58}$$

la cual implica

$$1 \quad (1 \quad {}_{E}) \frac{N_0}{P_0} \quad e^{\quad Cetes R} \tag{59}$$

Dada la restricción ${}_{E1} \quad {}_{Cetes}$ se requiere que

$$\frac{1}{R} \ln \frac{1}{(1 \quad {}_{E}) \dfrac{N_0}{P_0}} \quad 0 \tag{60}$$

la cual implica que

$$1 \quad (1 \quad {}_{E}) \frac{N_0}{P_0} \tag{61}$$

Al conjuntar las restricciones (59) y (61)

$$1 \quad (1 \quad {}_{E}) \frac{N_0}{P_0} \qquad 1 \quad (1 \quad {}_{E}) \frac{N_0}{P_0} \quad e^{\quad Cetes R} \tag{62}$$

Ahora, al resolver la ecuación (56) para ${}_{E0}$ se tiene que

$${}_{E0} \quad \frac{1}{R} \ln \frac{e^{\quad Cetes R}}{(1 \quad {}_{E}) \dfrac{N_0}{P_0}} \tag{63}$$

La fuerza de interés ${}_{E0}$ satisface ${}_{E0} \quad 0$ y ${}_{E0} \quad {}_{E1}$. Dada la restricción ${}_{E0} \quad 0$ y la ecuación (63)

$$\frac{e^{\quad Cetes R}}{(1 \quad {}_{E}) \dfrac{N_0}{P_0}} \quad 1 \tag{64}$$

lo cual implica

$$e^{\quad Cetes R} \quad (1 \quad {}_{E}) \frac{N_0}{P_0} \tag{65}$$

Dada la restricción ${}_{E0} \quad {}_{E1}$ se requiere que

$$\frac{1}{R}\ln\frac{e^{\ \ Cetes R}}{(1 \quad _{E})\ \frac{N_0}{P_0}} \qquad _{Cetes} \quad \frac{1}{R}\ln\frac{1}{(1 \quad _{E})\ \frac{N_0}{P_0}} \tag{66}$$

la cual implica que

$$e^{\ \ Cetes R} \tag{67}$$

Al conjuntar las desigualdades (65) y (67) se concluye

$$e^{\ \ Cetes R} \qquad e^{\ \ Cetes R} \quad (1 \quad _{E})\ \frac{N_0}{P_0} \tag{68}$$

En la siguiente sección se presenta un resumen de los diferentes tipos de bonos catastróficos considerados en este trabajo para el caso del proceso de Poisson sin memoria (homogéneo), es decir, con función del riesgo de ocurrencia del evento constante ($(T_u \quad t)$). La extensión para funciones del riesgo de ocurrencia del evento no constantes es directa aunque en la mayoría de los casos se necesita llevar a cabo las integrales en la fórmula para el precio de emisión del bono, P_0, numéricamente.

II. Resumen de los tipos de bonos catastróficos considerados para el caso de un proceso de Poisson sin memoria

Como puede deducirse de la sección anterior, el precio de emisión de un bono catastrófico es una función de T, el tiempo de espera aleatorio para la ocurrencia del evento catastrófico a partir del inicio de la vigencia del bono, R, la duración de la vigencia del contrato del bono, S, el periodo de diferimiento para el pago de beneficios al inversionista en caso de ocurrencia del evento, $_{E}$, la porción del valor nominal del bono que el emisor (gobierno) retiene para mitigar los efectos del evento, $_{E0}$ y $_{E1}$, las fuerzas de interés anual que se pagan al inversionista en caso de que el evento ocurra ($_{E0}$ es la fuerza de interés vigente del inicio de la vigencia del bono al momento de la ocurrencia del evento, es decir, en el intervalo $[0, T]$ con $T \quad R$ y, $_{E1}$, es la fuerza de interés vigente del momento de la ocurrencia del evento al final de la vigencia del contrato del bono catastrófico, es decir, en el intervalo $[T, R]$ o $[T, T \quad S]$ con $T \quad R$), $_{NE}$, la fuerza de interés anual que se paga al inversionista del inicio de la vigencia del contrato del bono hasta el final de éste, es decir, en el intervalo $[0, R]$, en caso de que el evento no ocurra, de $_{Cetes}$, la fuerza de interés anual de Cetes y del valor nominal del bono N_0. Es decir,

$$P_0 \quad P_0(T, R, S, \ _E, \ _{E0}, \ _{E1}, \ _{NE}, \ _{Cetes}, N_0) \tag{69}$$

A continuación se detalla los diferentes tipos de bonos considerados en este trabajo y las restricciones en las variables S, $_E$, $_{E0}$, $_{E1}$, $_{NE}$, $_{Cetes}$ y N_0 para cada uno de ellos dada la siguiente clasificación:

i) Tipo 1a: bono catastrófico con duración del periodo de diferimiento fijo y positivo ($S \quad 0$).
ii) Tipo 1b: bono catastrófico con duración del periodo de diferimiento igual a 0 ($S \quad 0$) o bono catastrófico con pago de beneficios al inversionista, en caso de que el evento catastrófico ocurra, al momento de la ocurrencia del evento.
iii) Tipo 2: bono catastrófico con duración del periodo de diferimiento aleatorio ($R \quad T$) o bono catastrófico con pago de beneficios al inversionista al final de la vigencia del contrato del bono catastrófico (en caso de que el evento ocurra o no).
iv) Tipo 3: bono catastrófico en el cual en caso de ocurrir el evento el inversionista no recibe beneficio alguno ($_E \quad 1$).

1. *Bono catastrófico tipo 1a*

Este bono catastrófico otorga los siguientes beneficios al inversionista: *i*) en caso de ocurrencia del evento durante la vigencia del bono: al inversionista se le retiene $_E N_0$ y el restante $(1 \quad _E)N_0$ obtiene una fuerza de interés anual $_{E0}$ del inicio de la vigencia del bono al momento de la ocurrencia del evento y una fuerza de interés anual de $_{E1}$ del momento de la ocurrencia del evento al final de un periodo de diferimiento de $S \quad 0$ años, después de la ocurrencia del evento, cuando se hace el pago de beneficios al inversionista, y *ii*) en caso de que el evento no ocurra durante la vigencia del bono catastrófico: el inversionista recibe el valor nominal del bono, N_0, más los intereses generados a una fuerza de interés anual $_{NE}$ durante la vigencia del bono. El pago de los beneficios al inversionista se efectúa al final de la vigencia del bono.

El emisor del bono (gobierno), en caso de que el evento catastrófico ocurra, recibe un disponible al momento de la ocurrencia del evento, D_T, que satisface

$$P_0 \quad D_T \quad P_0$$

para T en el intervalo $[0, R]$, 0 1 y .

El precio de emisión, P_0, la fuerza de interés en caso de no ocurrir el evento, $_{NE}$, y el disponible para el emisor en caso de ocurrir el evento, D_T, son:

$$P_0 \quad (1 \quad _E) N_0 e^{(\ Cetes \quad E1) S} \frac{\quad}{Cetes \quad E0} (1 \quad e^{(\quad Cetes \quad E0) R})$$

$$N_0 e^{(\quad Cetes \quad NE) R},$$

$$NE \qquad Cetes$$

$$\frac{1}{R} \ln \frac{P_0}{N_0} \quad (1 \quad _E) e^{(\ Cetes \quad E1) S} \frac{\quad}{Cetes \quad E0} (1 \quad e^{(\quad Cetes \quad E0) R}$$

y

$$D_T \quad P_0 e^{\ Cetes T} \quad (1 \quad _E) N_0 e^{\ E0 T} e^{\ E1 S} e^{\quad Cetes S}$$

Restricciones:

i) $S \quad 0,$

ii) $1 \quad \frac{e^{(\quad Cetes \quad NE) R}}{1 \quad e^{(\ Cetes \quad E1) S} \frac{\quad}{Cetes \quad E0} (1 \quad e^{(\quad Cetes \quad E0) R})} \quad _E \quad 1,$

iii) $0 \quad _{E0} \quad Cetes,$

iv) $0 \quad _{E1} \quad Cetes,$

v) $_{E0} \quad \frac{1}{R} \ln \frac{e^{\ Cetes R}}{1} \quad ,$

vi) $_{E1} \quad Cetes \quad \frac{1}{s} \ln \frac{1}{(1 \quad _E) \dfrac{N_0}{P_0}} \quad ,$

vii) $1 \quad (1 \quad {}_{E}) \dfrac{N_0}{P_0} \qquad 1 \quad (1 \quad {}_{E}) \dfrac{N_0}{P_0} \; e^{\quad Cetes S}$ y

viii) $e^{\quad Cetes R} \qquad e^{\quad Cetes R} \qquad 1.$

2. *Bono catastrófico tipo 1b*

Este bono otorga los siguientes beneficios al inversionista: *i*) en caso de ocurrencia del evento catastrófico durante la vigencia del bono: al inversionista se le retiene ${}_{E}N_0$ y el restante $(1 \quad {}_{E})N_0$ obtiene una fuerza de interés anual ${}_{E0}$ del inicio de la vigencia del bono al momento de la ocurrencia del evento en el cual se hace el pago de beneficios al inversionista, y *ii*) en caso de que el evento no ocurra durante la vigencia del bono: el inversionista recibe el valor nominal del bono, N_0, más los intereses generados a una fuerza de interés anual ${}_{NE}$ durante la vigencia del bono. El pago de los beneficios al inversionista se efectúa al final de la vigencia del bono.

El emisor del bono (gobierno), en caso de que el evento catastrófico ocurra, recibe un disponible al momento de la ocurrencia del evento, D_T, que satisface

$$P_0 \quad D_T \qquad P_0$$

para T en el intervalo $[0, R]$, 0 1 y .

El precio de emisión, P_0, la fuerza de interés en caso de no ocurrir el evento catastrófico, ${}_{NE}$, y el disponible para el emisor en caso de ocurrir el evento, D_T, son:

$$P_0 \quad (1 \quad {}_{E})N_0 \frac{\qquad}{Cetes \qquad E0} (1 \quad e^{(\quad Cetes \quad E0)R})$$

$$N_0 e^{(\quad Cetes \quad NE)R},$$

$$NE \qquad Cetes$$

$$\frac{1}{R} \ln \frac{P_0}{N_0} \quad (1 \quad {}_{E}) \frac{\qquad}{Cetes \qquad E0} (1 \quad e^{(\quad Cetes \quad E0)R})$$

y

$$D_T \quad P_0 e^{\quad Cetes T} \quad (1 \quad {}_{E}) N_0 e^{\quad E0 T}$$

Restricciones:

i) $S \quad 0,$

ii) $0 \quad {}_{E0} \quad {}_{Cetes},$

iii) $1 \quad \dfrac{e^{(\quad Cetes \quad NE)R}}{1 \quad \dfrac{}{Cetes \quad E0} \quad (1 \quad e^{(\quad Cetes \quad E0)R})} \quad {}_{E} \quad 1,$

iv) ${}_{E0} \quad \dfrac{1}{R} \ln \dfrac{e^{\quad CetesR}}{1},$

v) $\quad 1 \quad (1 \quad {}_{E}) \dfrac{N_0}{P_0}$ y

vi) $e^{\quad CetesR} \quad e^{\quad CetesR} \quad 1.$

3. *Bono catastrófico tipo 2*

Este bono otorga los siguientes beneficios al inversionista: *i*) en caso de ocurrencia del evento catastrófico durante la vigencia del bono: al inversionista se le retiene ${}_{E}N_0$ y el restante $(1 \quad {}_{E})N_0$ obtiene una fuerza de interés anual ${}_{E0}$ del inicio del bono al momento de la ocurrencia del evento y una fuerza de interés anual ${}_{E1}$ del momento de la ocurrencia del evento al final de la vigencia del bono cuando se hace el pago de beneficios al inversionista; *ii*) en caso de que el evento no ocurra durante la vigencia del bono: el inversionista recibe el valor nominal del bono, N_0, más los intereses generados a una fuerza de interés anual ${}_{NE}$ durante la vigencia del bono. El pago de los beneficios al inversionista se efectúa al final de la vigencia del bono.

El emisor del bono (gobierno), en caso de que el evento catastrófico ocurra, recibe un disponible al momento de la ocurrencia del evento, D_T, que satisface

$$P_0 \quad D_T \quad P_0$$

para T en el intervalo $[0, R]$, $0 \quad 1$ y $\quad .$

El precio de emisión, P_0, la fuerza de interés en caso de no ocurrir el evento, ${}_{NE}$, y el disponible para el emisor en caso de ocurrir el evento, D_T, son:

$$P_0 \quad (1 \quad {}_E) N_0 e^{(\quad Cetes \quad E1)R} \; \frac{\qquad}{E1 \quad E0} \; (1 \quad e^{(\quad E1 \quad E0)R})$$

$$N_0 e^{(\quad Cetes \quad NE)R},$$

$$NE \qquad Cetes$$

$$\frac{1}{R} \ln \frac{P_0}{N_0} \quad (1 \quad {}_E) e^{(\quad Cetes \quad E1)R} \; \frac{\qquad}{E1 \quad E0} \; (1 \quad e^{(\quad E1 \quad E0)R})$$

y

$$D_T \quad P_0 e^{\quad Cetes T} \quad (1 \quad {}_E) N_0 e^{\quad E0 T} e^{\quad E1(R \quad T)} e^{\quad Cetes(R \quad T)}$$

Restricciones:

i) $$1 \quad \frac{e^{(\quad Cetes \quad NE)R}}{1 \quad e^{(\quad Cetes \quad E1)R} \; \frac{\qquad}{E1 \quad E0} \; (1 \quad e^{(\quad E1 \quad E0)R})} \quad {}_E \quad 1,$$

ii) $0 \quad E0 \quad E1$,

iii) $0 \quad E1 \quad Cetes$,

iv) $$E0 \quad \frac{1}{R} \ln \frac{e^{\quad Cetes R}}{(1 \quad {}_E) \frac{N_0}{P_0}},$$

v) $$E1 \quad Cetes \quad \frac{1}{R} \ln \frac{1}{(1 \quad {}_E) \frac{N_0}{P_0}},$$

vi) $1 \quad (1 \quad {}_E) \frac{N_0}{P_0} \qquad 1 \quad (1 \quad {}_E) \frac{N_0}{P_0} \quad e^{\quad Cetes R}$ y

vii) $e^{\quad Cetes R} \qquad e^{\quad Cetes R} \quad (1 \quad {}_E) \frac{N_0}{P_0}$.

4. *Bono catastrófico tipo 3*

Los bonos tipo 1a, 1b y 2 son equivalentes al bono tipo 3 cuando $_E$ 1. En el bono tipo 3 se puede tener la máxima fuerza de interés posible en caso de no ocurrir el evento,

$$_{NE} \qquad _{Cetes} \quad \frac{1}{R}\ln \frac{P_0}{N_0}$$

Este bono catastrófico otorga los siguientes beneficios al inversionista: *i*) en caso de ocurrencia del evento durante la vigencia del bono catastrófico: el inversionista no recibe beneficio alguno, es decir, el emisor retiene la totalidad de la inversión inicial ($_{E}$ 1), y *ii*) en caso de que el evento no ocurra durante la vigencia del bono catastrófico: el inversionista recibe el valor nominal del bono, N_0, más los intereses generados a una fuerza de interés anual $_{NE}$ durante la vigencia del bono. El pago de los beneficios al inversionista se efectúa al final de la vigencia del bono.

Precio de emisión, P_0, fuerza de interés en caso de no ocurrir el evento, $_{NE}$, y disponible para el emisor en caso de ocurrir el evento, D_T, son:

$$P_0 \quad N_0 e^{\;(\quad _{Cetes} \quad _{NE})R},$$

$$_{NE} \qquad _{Cetes} \quad \frac{1}{R}\ln \frac{P_0}{N_0}$$

y

$$D_T \quad P_0 e^{\;\;_{Cetes}T}$$

para T en el intervalo [0, R].

Restricciones:

i) $_{E}$ 1,
ii) 1,
iii) $e^{\;\;_{Cetes}R}$ y
iv) $_{NE} \qquad _{Cetes} \quad \frac{1}{R}\ln \frac{P_0}{N_0}$.

Algunas consideraciones adicionales respecto al cálculo actuarial de un bono catastrófico en el supuesto de un proceso de Poisson sin memoria: i) precio del bono catastrófico en el mercado secundario: dada la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial que se utiliza para el tiempo aleatorio de espera para la ocurrencia del evento, el valor del bono en el mercado secundario W años después de emitirse el bono (W R) es igual al valor de un bono con duración R W calculado con la tasa de interés de Cetes vigente al tiempo W; *ii*) valor a utilizar de : para la determinación del valor de a utilizar, $\hat{}$, se puede derivar a partir de la probabilidad estimada de que el evento catastrófico ocurra durante la vigencia del bono, $\hat{p}_E$, ya que

$$\hat{p}_E \quad 1 \quad e^{\ \hat{}\ R}$$

y, por tanto,

$$\hat{} \quad \frac{1}{R} \ln \frac{1}{1 \quad \hat{p}_E} \ ;$$

iii) número total de bonos catastróficos por vender: el emisor del bono (gobierno) por cada bono que vende tiene al menos, en caso de ocurrir el evento, P_0 pesos. El número total de bonos por vender debe estar determinado por la cantidad promedio de dinero que representarán los daños ocasionados por el evento. Así, si el gobierno estima que el evento tendrá un costo promedio igual a C, entonces el gobierno deberá vender $C/\ P_0$ bonos catastróficos. En caso de que no se llegara a vender esta cantidad de bonos el gobierno sólo cubrirá una porción del daño esperado y, en caso de vender una cantidad superior, tendrá dinero sobre el daño esperado que puede llegar a cubrir desviaciones positivas en el daño esperado.

En la siguiente sección se presenta ejemplos numéricos del precio de emisión y beneficios del bono catastrófico para los diferentes tipos de bonos considerados y combinaciones de valores de , R, S, $_E$, $_{E0}$, $_{E1}$, $_{NE}$ y $_{Cetes}$.

III. Ejemplos numéricos

En el cuadro 1 se presenta los valores numéricos del precio de emisión del bono catastrófico, P_0, y de las cotas del disponible para el emisor (gobierno) en caso de que el evento ocurra durante la vigencia del bono, P_0 y P_0. En el cuadro se utiliza el valor de 0.05, es decir, en promedio el evento ocurre 5 veces cada 100 años, R 1, es decir, una duración de la vigencia del bono de un año y, una tasa de interés efectiva anual de Cetes igual a 5% de manera que $_{Cetes}$ ln(1.05) 0.048790. El valor nominal del bono se fija en 100 pesos. En cuanto a la porción del valor nominal que se retiene al inversionista, en caso de que el evento ocurra durante la vigencia del bono, $_E$, se utilizan los valores de 0, 0.1, 0.25, 0.50, 0.75 y 0.90. Los valores de y utilizados son los puntos medios entre sus cotas inferiores y superiores.

Como resultados en el cuadro 1 se presenta $B_{R/2}$ en $S \quad (R/2)$ que representa el valor al tiempo $S \quad (R/2)$ del beneficio que recibe el inversionista en caso de ocurrir el evento catastrófico después de $R/2$ años de la emisión del bono (a la mitad de la vigencia del bono). Este beneficio se calcula al tiempo $S \quad (R/2)$ para poder hacer comparables los beneficios de los bonos tipos 1b y 2 con los del bono tipo 1a: para el bono tipo 1b, que paga beneficios al inversionista en caso de ocurrir el evento catastrófico al momento de su ocurrencia, este beneficio se lleva S años hacia adelante considerando la misma tasa de Cetes utilizada en el cálculo de emisión del bono. Similarmente, para el bono tipo 2, en el cual el pago del beneficio por ocurrencia del evento se hace al final de la vigencia del bono, este beneficio se lleva $S \quad (R/2)$ años hacia adelante con la misma tasa de Cetes con la cual se calculó el precio de emisión del bono para hacerlo comparable con el beneficio en caso de ocurrencia del evento del bono tipo 1a en el cual el beneficio se paga $S \quad (R/2)$ años después de la emisión del bono. Se fijó el valor del precio de emisión del bono en

$$P_0 \quad N_0 e^{\quad _{Cetes} R} \quad 100 e^{\quad _{Cetes} R}$$

de manera que el valor de P_0 es la cantidad que tendría que aportar el inversionista a tasa de interés de Cetes para que al final de R años (la vigencia del bono catastrófico) recibiera $N_0 \quad 100$. Con la tasa de interés de Cetes de 5% utilizada $P_0 \quad 95.24$ para los bonos tipo 1a, 1b, 2 y 3 y, por tanto, $P_0 \quad N_0$.

También se incluye el valor de B_{NE}, el beneficio al final de la vigencia del bono que recibe el inversionista si no ocurre el evento catastrófico, e i^*_{NE}, la tasa de interés efectiva anual que recibe el inversionista sobre su inversión inicial, P_0, en caso de no ocurrir el evento

$$i^*_{NE} \quad e^{\quad ^*_{NE} R} \quad 1$$

en la que

$$^*_{NE} \qquad _{NE} \quad \frac{1}{R} \ln \frac{N_0}{P_0}$$

CUADRO 1. *Ejemplos numéricos de los distintos tipos de bonos catastróficos (1a, 1b y 2)*[a]

Tipo	*Caso*	*S*		i_{Cetes}	E	$B_{R/2}$ *en S* $\frac{R}{2}$	B_{NE}	i^{*}_{NE} *(porcentaje)*	P_0	P_0	*A*
1a	1	1	0.05	0.05	0.00	103.77	99.93	4.9308	2.38	0.06	
	2				0.10	93.40	100.45	5.4761	7.38	9.95	0.43
	3				0.25	77.83	101.23	6.2940	22.02	24.96	1.17
	4				0.50	51.89	102.53	7.6571	46.43	49.97	2.46
	5				0.75	25.94	103.83	9.0203	70.83	74.99	3.72
	6				0.90	10.38	104.61	9.8382	85.48	89.99	4.39
1b	1	1	0.05	0.05	0.00	106.30	99.81	4.6863	4.76	3.63	
	2				0.10	95.67	100.34	5.3564	5.24	7.75	0.32
	3				0.25	79.73	101.14	6.1942	20.24	23.13	1.09
	4				0.50	53.15	102.47	7.5906	45.24	48.75	2.35
	5				0.75	26.58	103.80	8.9871	70.24	74.38	3.62
	6				0.90	10.63	104.60	9.8249	85.24	89.75	4.38
2	1		0.05	0.05	0.00	104.39	99.90	4.8988	2.38	1.25	
	2				0.10	93.95	100.43	5.4473	7.38	8.88	0.41
	3				0.25	78.29	101.21	6.2700	22.02	24.06	1.15
	4				0.50	52.19	102.52	7.6412	46.43	49.38	2.40
	5				0.75	26.10	103.82	9.0123	70.83	74.69	3.64
	6				0.90	10.44	104.60	9.8350	85.48	89.88	4.38
3	1		0.05	0.05	1.00	0.00	105.13	10.3835	95.24	100.00	4.89

[a] Con P_0 95.94, N_0 100 y y seleccionadas como el promedio de sus cotas inferiores y superiores. La tasa i^{*}_{NE} es la tasa de interés efectiva anual en caso de no ocurrir el evento catastrófico, $B_{R/2}$ en S $(R/2)$ representa el beneficio del inversionista en S $(R/2)$ en caso de que el evento ocurra a la mitad de la vigencia del bono y B_{NE} representa el beneficio al final de la vigencia del bono en caso de no ocurrir el evento. A representa la diferencia entre el valor presente, al inicio del bono, del beneficio al inversionista en caso de no ocurrir el evento B_{NE} y el precio de emisión del bono, P_0.

Respecto al beneficio del emisor (gobierno) en caso de ocurrir el evento catastrófico se incluyen los valores de las cotas al disponible, D_T, siendo la cota inferior $\quad P_0$ y la cota superior $\quad P_0$. En el cuadro 1 se nota que en los casos de los bonos 1a-1, 1b-1 y 2-1, en los que, por ejemplo, 1b-1 representa el primer caso del bono tipo 1b, los valores de las cotas inferior y superior al disponible son negativas ya que no se satisface la restricción $P_0 \quad N_0(1 \quad {}_E)$. Para los bonos tipo 1 y 2 los valores de la cota inferior al disponible, $\quad P_0$, son iguales ya que los valores de R y S son iguales ($R \quad S \quad 1$).

En caso de ocurrir el evento catastrófico el bono que ofrece el mejor beneficio al inversionista, para cualquiera de los distintos valores de ${}_E$ considerados, es el bono tipo 2, seguido del tipo 1b, tipo 1a y al final el tipo 3 como se esperaba, ya que en el bono tipo 1b el inversionista recibe su beneficio al momento de la ocurrencia del evento catastrófico, y suponiendo que lo puede reinvertir a la misma tasa de Cetes con la que se calculó el precio de emisión del bono o superior, obtendrá intereses mayores a los del inversionista en el bono tipo 2 al cual se le retiene su inversión hasta el final de la vigencia del bono obteniendo una fuerza de interés anual, del momento de la ocurrencia del evento hasta el momento del pago del beneficio, igual a ${}_{E1} \quad {}_{Cetes}$. Similarmente, para el inversionista en el bono tipo 1a, si $S \quad R$, en caso de ocurrir el evento, el inversionista obtendrá una tasa inferior a Cetes (${}_{E1} \quad {}_{Cetes}$) durante un periodo más largo que en el bono tipo 2. Finalmente, en el bono tipo 3 el inversionista pierde toda su inversión. Es obvio que el valor del beneficio al inversionista disminuye, en todos los tipos de bonos, conforme aumenta el valor de ${}_E$. Respecto al emisor, la cota inferior al disponible, $\quad P_0$, más grande, para cualquier valor de ${}_E$, se obtiene para el bono tipo 3, seguido de los bonos tipo 1a y 2 y, en el último lugar, el 1b. La misma pauta se observa para la cota superior al disponible, $\quad P_0$.

En caso de no ocurrir el evento catastrófico: el bono que ofrece el mejor beneficio, para distintos valores de ${}_E$, es el tipo 3, seguido del tipo 1a, el tipo 2 y, finalmente, el tipo 1b. Esta pauta es de esperarse ya que en el bono tipo 3 el inversionista corre el mayor riesgo (perder toda su inversión) seguido del tipo 1a en el que el riesgo del inversionista consiste en el diferimiento del pago y del bono tipo 2, en el que el diferimiento de pago es menor que en el tipo 1a y, por último, en el 1b, en el que el pago se hace inmediatamente al momento de la ocurrencia del evento catastrófico.

Lo más importante es que, a excepción de los casos 1a-1, 1b-1 y 2-1, el inversionista siempre recibe tasas efectivas anuales, i^*_{NE}, mayores a la tasa de Cetes, i_{Cetes}, y como es de esperarse i^*_{NE} aumenta conforme aumenta $\quad_E$ hasta el límite que es el bono tipo 3 el que obtiene el máximo valor de $i^*_{NE} \quad 10.3835\%$ que es superior a la tasa Cetes en 5.3835% y que puede ser muy atractiva para un inversionista aun sabiendo que, en caso de ocurrir el evento catastrófico, perderá toda su inversión inicial, P_0.

La cantidad $A \quad (B_{NE} e^{\quad_{Cetes}R} \quad P_0)$ representa el valor de la cantidad que el emisor del bono debe aportar al momento de su emisión para que, a tasa de Cetes, logre tener, al final de la vigencia del bono, la cantidad de dinero suficiente para pagar el beneficio B_{NE} al inversionista. Si al emisor del bono se le ofrece un seguro con suma asegurada igual a $\quad P_0$, cuya prima se representa por PS, entonces el bono catastrófico será más barato que el seguro para el emisor si $E(A) \quad Prima$, en el que $E(A)$ representa el valor esperado de A. En la última columna del cuadro 1 se incluye el valor de A para los bonos para los cuales $\quad P_0 \quad 0$.

Conclusiones

Se presenta el cálculo actuarial de bonos catastróficos para desastres naturales en México. Los bonos catastróficos propuestos en este trabajo tienen la peculiaridad, a diferencia de otros bonos catastróficos actualmente ofrecidos en el mercado, de que el inversionista puede recibir beneficios a pesar de que el evento catastrófico ocurra. Las relaciones entre las distintas variables que determinan el precio de emisión del bono permiten garantizar un valor mínimo y máximo para el disponible del emisor en caso de que ocurra el evento y una tasa atractiva, que se puede ajustar de acuerdo con el grado de riesgo que el inversionista quiera asumir, en caso de que el evento no ocurra.

Referencias bibliográficas

Aase, K. K. (2001), "A Markov Model for the Pricing of Catastrophe Insurance Futures and Spreads", *The Journal of Risk and Insurance*, 68-1, pp. 25-50.

Bitrán Bitrán, D. (2001), Características del impacto socioeconómico de los principales desastres ocurridos en México en el periodo 1980-1999, Serie Impacto Socioeconómico de los Desastres en México, vol. 1, México, Cenapred.

Boulatov, A., y D. Jaffee (2003), "The Response of Catastrophe Insurance Markets to Extreme Events: A Real Option Approach", Working Paper, Haas School of Business, UC Berkeley.

Chang, C. W., J. S. K. Chang y Min-teh Yu (1996), "Pricing Catastrophe Insurance Futures Call Spreads: A Randomized Operational Time Approach", *Journal of Risk and Insurance*, 63-4, pp. 599-617.

Cox, D. R., y H. D. Miller (1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall.

Cox, S. H., y H. W. Pedersen (2000), "Catastrophe Risk Bonds", *North American Actuarial Journal*, 4-4, pp. 56-82.

Croson, D. C., y H. C. Kunreuther (1999), "Customizing Reinsurance and Cat Bonds for Natural Hazard Risks", trabajo presentado en *Conference on Global Change and Catastrophic Risk Management*, Laxenburg, Austria, 6 al 9 de junio de 1999.

Cummins, J. D., y H. Geman (1994), "An Asian Option Approach to the Valuation of Insurance Future Contracts", *Review of Future Markets*, 13-2, pp. 517-557.

——, y —— (1995), "Pricing Catastrophe Futures and Call Spreads: an Arbitrage Approach", *The Journal of Fixed Income*, 4-4, pp. 46-57.

García Acosta, V., y G. Suárez Reynoso (1996), *Los sismos en la historia de México (tomo I)*, Ediciones Científicas Universitarias: Serie Texto Científico Universitario, Universidad Nacional Autónoma de México-Centro de Investigaciones y Estudios Superiores en Antropología Social-Fondo de Cultura Económica.

—— (2001), *Los sismos en la historia de México (tomo II: El análisis social)*, Ediciones Científicas Universitarias: Serie Texto Científico Universitario, Universidad Nacional Autónoma de México-Centro de Investigaciones y Estudios Superiores en Antropología Social-Fondo de Cultura Económica.

Gutiérrez Martínez, C., R. Quaas Weppen, M. Ordaz Schroeder, E. Guevara Ortiz, D. Muriá Vilá y S. K. Singh (2001), *Sismos* (Serie Fascículos) 4a. edición, México, Cenapred.

Jaffee, D. M., y T. Russell (1997), "Catastrophe Insurance, Capital Markets, and Uninsurable Risks", *The Journal of Risk and Insurance*, 64-2, páginas 205-230.

Kielholz, W., y A. Durrer (1997), "Insurance Derivatives and Securization: New Hedging Perspectives for the US Cat Insurance Market", *The Geneva Papers on Risk and Insurance- Issues and Practice*, 22, pp. 3-16.

Kramer, S. L. (1995), *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall.

Lewis, C. M., y K. C. Murdock (1996), "The Role of Government Contracts in Discretionary Reinsurance Markets for Natural Disasters", *The Journal of Risk and Insurance*, 63-4, pp. 567-597.

Lugo Hubp, J. (2002), *La superficie de la Tierra II. Procesos catastróficos, mapas, el relieve mexicano*, México, Serie: La Ciencia para Todos, vol. 101, tercera edición, Fondo de Cultura Económica.
——, y M. Inbar (comps.) (2002), *Desastres naturales en América Latina*, México, Fondo de Cultura Económica.
Medina Martínez, F. (1997), *Sismicidad y volcanismo en México*, México, Serie: La Ciencia para Todos, vol. 151, Fondo de Cultura Económica.
Meli, R., C. Gutiérrez, S. Farreras, A. Echavarría, H. Eslava, T. Vázquez, M. A. Salas, F. García, G. Fernández y M. E. Alcántara (2001), *Diagnóstico de Peligros e Identificación de Riesgos de Desastres en México (Atlas Nacional de Riesgos de la República Mexicana)*, México, SEGOB, Sistema Nacional de Protección Civil y Cenapred.
Nowak, P. (1999), "Analysis of Applications of Some Ex-ante Instruments for the Transfer of Catastrophic Risks", *International Institute for Applied Systems Analysis*, Interim Report IR-99-075.
Pinedo, M., y D. Shpilberg (1981), "Stochastic Models with Memory for Seismic Risk Evaluation", *The Journal of Risk and Insurance*, 48-1, pp. 46-58.
Smith, R. E., E. A. Canelo y A. M. Di Dio (1997), "Reinventing Insurance Using the Capital Markets", *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 22, pp. 26-37.
SwissRe (2002), "Catástrofes de la naturaleza y catástrofes antropógenas en 2001: Los siniestros antropógenos cobran una nueva dimensión", *Sigma*, 1-2002.