 https://doi.org/10.24844/EM3401.09

Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería

Contributing to the transition from the dynamic conception to the metric conception of the limit of a function of single real variable in engineering students

José David Morante Rodríguez,[1]
Lidia Aurora Hernández Rebollar,[2]
Honoria Ruiz Estrada[3]

Resumen: Este trabajo informa el resultado de haber aplicado un diseño instruccional basado en la teoría APOE, mediante el cual se buscó que estudiantes de ingeniería comprendieran la definición formal de límite de una función de una variable real, conocida como definición épsilon-delta (ε-δ). Se presentan las producciones de algunos estudiantes que participaron en la aplicación de las actividades, las cuales se consideraron representativas de las estructuras mentales exhibidas por el total del grupo. El análisis de las respuestas aporta a la validación de la descomposición genética en la que se basó el diseño y muestra que con este diseño instruccional es posible que los estudiantes transiten de la concepción dinámica (en términos de aproximaciones o informal) a una concepción métrica (relacionada con la definición formal o ε-δ) del límite de una función de una variable real.

Fecha de recepción: 15 de julio de 2020. **Fecha de aceptación:** 10 de junio de 2021.

[1] Universidad Politécnica de Puebla, México, jose.morante496@uppuebla.edu.mx, orcid.org/0000-0002-8089-0386.

[2] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, lhernan@fcfm.buap.mx, orcid.org/0000-0003-0658-4396.

[3] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, hruiz@fcfm.buap.mx, orcid.org/0000-0001-7734-2736.

Palabras clave: *límite de una función de una variable real, comprensión, teoría APOE.*

Abstract: This work reports the result of having applied an instructional design based on APOS theory, through which it was sought that engineering students understood the formal definition of the limit of a function of single real variable, also known as the epsilon-delta definition (ε-δ). The productions of some students who participated in the application of the activities are presented, which were considered representative of the mental structures exhibited by the whole group. The analysis of the responses contributes to the validation of the genetic decomposition on which the design was based and shows that with this instructional design it is possible for students to move from the dynamic conception (in terms of approximations or informal) to a metric conception (related to the formal or ε-δ definition) of the limit of a function of a single real variable.

Keywords: *limit of a function of single real variable, understanding, APOS theory.*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre los fenómenos asociados a la enseñanza-aprendizaje del límite de una función de una variable real, ponen de manifiesto la relevancia de este concepto al mostrar abundantes dificultades (Blázquez y Ortega, 2001; Cornu, 1983, 1991; Juter, 2006; Kidron, 2008; Monaghan, 1991; Nagle, 2013; Sierpinska, 1987; Tall y Vinner, 1981 y Williams, 1991). Esto no resulta sorpresivo si se considera que el desarrollo y naturaleza propia del concepto acarrea obstáculos epistemológicos y conflictos con las distintas representaciones de este (Blázquez, 1999; Blázquez y Ortega, 2001; Cornu, 1983, 1991; Monaghan, 1991; Sierpinska, 1987; Tall y Vinner, 1981; Tomàs, 2014 y Williams, 1991). Dichos rasgos constituyen elementos que ubican al concepto de límite de una función de una variable real dentro del llamado *Advanced Mathematical Thinking* (Edwards *et al.*, 2005 y Harel *et al.*, 2006), siendo esta una de las líneas de investigación de mayor desarrollo sobre este concepto (Nagle 2013). A pesar de que existe una amplia documentación en torno a las caracterizaciones de esas dificultades (Cornu, 1983, 1991; Juter, 2006; Kidron, 2008; Monaghan, 1991; Sierpinska, 1987; Tall y Vinner, 1981 y Williams, 1991) poco se ha indagado sobre la perspectiva del qué hacer para que los estudiantes comprendan este concepto (Swinyard y Larsen, 2012). El vacío investigativo es mayor cuando se trata de favorecer la transición de la concepción dinámica (en términos de aproximaciones), a la concepción métrica (en términos de intervalos y valor absoluto) del concepto de límite de una función en una variable real. Para mayor precisión, las definiciones de concepción, concepción dinámica y concepción métrica se exponen en la sección de marco teórico de este artículo.

Con base en la teoría APOE y la selección de una descomposición genética del límite de una función de una variable real, se conformó un diseño instruccional que permitiera dar respuesta a la pregunta: ¿en qué medida la implementación de actividades basadas en la descomposición genética del concepto de límite de una función de una variable real propuesta por Swinyard y Larsen (2012) contribuye a la construcción de este concepto en estudiantes de ingeniería?

El diseño de actividades guiado por una descomposición genética (DG) ha sido un reto para investigadores y docentes, "estudios realizados con la Teoría APOE han demostrado que las tareas diseñadas (de esta forma) no solo son originales sino también poderosas para ayudar a los estudiantes en la construcción de los conceptos y métodos pretendidos" (Trigueros y Oktaç, 2019, p. 51).

Antecedentes

Swinyard y Lockwood (2007), clasifican las investigaciones del concepto de límite de una función en una variable real, en dos vertientes generales. La primera clase de estudios la constituyen los acercamientos que se asocian con la noción del límite como aproximación. Esta clase de estudios reporta con frecuencia que los estudiantes desarrollan conceptos erróneos de límite (Tall y Vinner, 1981; Monaghan, 1991; Williams, 1991, Cornu, 1991; Kidron, 2008), como el de creer, por ejemplo, que el límite es "inalcanzable". La segunda clase de estudios, cuya perspectiva es investigar los razonamientos relacionados a la definición ε-δ, reportan que los tratamientos han resultado infructuosos (Oehrtman, 2003), debido a que la carga simbólica del concepto requiere de una exigencia cognitiva mayor para su entendimiento.

Partiendo de esta problemática, algunos autores como Cottrill *et al.* (1996), Blázquez (1999), Blázquez y Ortega (2001) y Fernández (2004) se centraron en averiguar cómo los estudiantes podrían llegar a comprender este concepto a partir de la definición ε-δ.

Cottrill *et al.* (1996) utilizaron la teoría APOE para proponer una DG del concepto de límite de una función en una variable real. También aplicaron ciertas actividades para validar su DG. Sin embargo, sus resultados únicamente proporcionan evidencia empírica de la noción de límite de una función de una variable real como concepción dinámica (en términos de aproximaciones). Las estructuras mentales relacionadas con la concepción métrica (relacionada con la definición ε-δ) no llegaron a ser construidas por los estudiantes. Ante esta información, Swinyard y Larsen (2012) se propusieron obtener evidencia empírica de las construcciones mentales requeridas para la concepción métrica descritas por Cottrill *et al.* (1996). Su estudio les permitió proponer un refinamiento de la DG de estos autores, que describe de forma más detallada el proceso de construcción asociado a esta concepción.

En su propuesta, Swinyard y Larsen (2012) identificaron dos problemas medulares en la comprensión del concepto de límite de una función de una variable real. Por una parte, al determinar el límite, los estudiantes tienden a centrar su atención en los valores de entrada de la función, perspectiva que se contrapone con el proceso descrito en la definición ε-δ, véase el orden de los cuantificadores. Por otra parte, los estudiantes luchan, constantemente para entender lo que significa estar infinitamente cerca de un valor.

Sobre estas ideas se cimienta el refinamiento de la DG, el cual marca la diferencia entre dos procesos mentales de construcción independientes: la búsqueda de candidatos a límite y la verificación de si alguno de esos candidatos son el límite solicitado.

Un aspecto a destacar es que la DG de Swinyard y Larsen (2012) tuvo su origen en la investigación de cómo dos parejas de alumnos construyeron la definición ε-δ en el contexto de la reinvención guiada (confrontación del entendimiento) del concepto. Por lo que, estos autores plantearon la necesidad de obtener evidencia empírica de su DG más allá del contexto controlado que ellos usaron, por ejemplo, en entornos escolares, diseñando experimentos de enseñanza basados en sus resultados. En consecuencia, en el presente estudio se decidió abordar esta tarea pendiente.

Otro factor importante en la comprensión del límite de una función en una variable real es el papel de las distintas representaciones semióticas. Autores como Blázquez (1999), Blázquez y Ortega (2001), y Tomàs (2014) han resaltado este aspecto. Por ejemplo, Blázquez (1999) concluye que el uso excesivo de cualquiera de las representaciones de límite generará deficiencias interpretativas por parte de los estudiantes, razón por la cual afirma que, la utilización de distintos registros (algebraico, numérico, tabular y verbal) mejoraría la comprensión del concepto.

Atendiendo a esta idea, Blázquez y Ortega (2001) utilizaron como marco de referencia la teoría de representaciones semióticas de Duval (1993) y concluyeron que, siendo el concepto de función parte medular del concepto de límite, este debe enseñarse en las distintas representaciones del concepto de función.

Por su parte, Tomàs (2014) reporta un análisis de la comprensión del concepto límite de una función de una variable real en estudiantes de 16 a 18 años, guiado por la construcción de esquemas de la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas, que él denomina "modos de representación". Entre sus conclusiones menciona que, "la concepción dinámica de límite es una idea vinculada a los modos de representación" (p. 210) y que una de las características del nivel Trans es que el sujeto es capaz de coordinar las aproximaciones, en el dominio y en el rango, "tanto cuando coinciden como cuando no, en los diferentes modos de representación: gráfico, algebraico-numérico y numérico" (p. 211).

MARCO TEÓRICO

Este trabajo se fundamenta en la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas para diseñar una secuencia didáctica que favorezca la comprensión del límite de una función de una variable real.

La Teoría APOE

APOE es una teoría constructivista que modela lo que sucede en la mente de un individuo cuando aprende un concepto matemático. Su nombre se toma del acrónimo de las estructuras principales que la teoría define para caracterizar el pensamiento de los individuos: acción, proceso, objeto y esquema (Arnon *et al*, 2014).

La edificación de estas estructuras se realiza a través del pensamiento contemplativo y organizativo que Piaget denominó abstracción reflexiva. Esencialmente, la teoría APOE se apoya en los siguientes mecanismos de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y desencapsulación.

De forma más detallada, una acción debe ser interiorizada en un proceso mental que puede ser coordinado y revertido para construir otros procesos. La clave en esta transición consiste en propiciar que el individuo prescinda de estímulos externos guiados para ejercer el control de esas transformaciones, sin la necesidad de atender a instrucciones específicas. En este sentido, el proceso realiza la misma tarea que las acciones, en una etapa de autonomía, en el que un individuo es capaz de imaginar la acción sin la necesidad de realizarla explícitamente. Posteriormente, un proceso se encapsula en un objeto cognitivo por medio de acciones que transforman el proceso en un ente estático y permite tratarlo como una unidad para derivar propiedades o nuevas acciones. Además, un objeto puede desencapsularse para generar nuevos procesos coordinados que den origen a otros objetos. Una vez que se posee una colección coherente de acciones, procesos, objetos e inclusive otros esquemas se conforma un esquema del concepto matemático cuya reconstrucción es permanente y determinada por una situación matemática particular, a la que un individuo se enfrenta.

La teoría APOE describe las estructuras y mecanismos mentales que un sujeto podría necesitar construir para comprender un concepto matemático. A esta descripción teórica se le denomina DG del concepto en estudio.

Una DG es el resultado de la experiencia del investigador, de un análisis epistemológico del concepto matemático y de la evidencia empírica, por tal razón no es única. Sin embargo, una vez propuesta, la DG debe ser probada, con la finalidad de mostrar que las estructuras y mecanismos descritos en ella se corresponden con los que exhiben los estudiantes al intentar aprender el concepto en estudio. En este sentido, una DG puede ser usada como referencia para diseñar cuestionarios que permitan recolectar datos para su validación o refinación y proponer diseños instruccionales susceptibles de ser aplicados en el aula.

La teoría APOE también sugiere, como marco para la enseñanza, el denominado ciclo ACE (acrónimo de las palabras inglesas *Activities, Classroom Discussion, Exercises*) el cual consta de tres componentes: Actividades (A), Discusión en el aula, (C) y Ejercicios (E). Los estudiantes trabajan en equipos en Actividades diseñadas para estimular el desarrollo de las construcciones mentales sugeridas por la DG. La Discusión en clase propicia el intercambio de ideas y la reflexión. Finalmente, la tercera parte del ciclo la constituyen los Ejercicios de tarea, diseñados para reforzar las Actividades y Discusiones realizadas en el aula.

La teoría de Representaciones Semióticas

La otra perspectiva teórica adoptada es la teoría de representaciones semióticas. Se entiende, según Duval (2006), que la comprensión matemática de un concepto depende de la coordinación de distintas representaciones de éste.

Para Duval (1993), la apropiación de un objeto matemático tiene que tomar en cuenta: el uso de más de un registro de representación semiótica y la creación (o desarrollo) de nuevos registros del objeto. Por tal motivo, la enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático no puede limitarse a una única representación, sino que debe fomentar la capacidad de interpretar la información de un registro a otro (Duval, 2004).

En este trabajo se asume que ambos marcos teóricos complementan y nutren el diseño instruccional para la comprensión y análisis de este concepto matemático, lo cual coincide con lo afirmado por Trigueros y Matínez-Planell (2010). Sin embargo, se aclara que el papel principal de este marco teórico dentro de nuestro trabajo fue el de incorporarlo en la fundamentación del diseño de las actividades que conforman la secuencia didáctica y no como parte del análisis de resultados.

Concepción dinámica y concepción métrica

En correspondencia con la teoría APOE, entenderemos por concepción "la idea o comprensión del individuo" acerca de un concepto y que, para un conocimiento matemático, se desarrolla una concepción como consecuencia de una actividad reflexiva (Arnon *et al*, 2014, p. 18).

La concepción dinámica del límite de una función de una variable real es aquella que se caracteriza por "un conocimiento informal del concepto, es decir, los valores de una función se acercan a un valor límite cuando los valores en el dominio se acercan a alguna cantidad" (Arnon *et al.*, 2014, p. 45).

Entenderemos por concepción métrica del límite de una función de una variable real a la comprensión formal del concepto que se identifica típicamente con la definición (ε-δ) (Arnon *et al.*, 2014).

La definición $\boldsymbol{\varepsilon}$-$\boldsymbol{\delta}$ del límite de una función de una variable real es la siguiente: "La función f tiende hacia el límite L en α significa: para todo $\varepsilon < 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - \alpha| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$" (Spivack, 1996, p. 118).

METODOLOGÍA

En este trabajo se adopta la metodología propuesta por la teoría APOE en su ciclo de investigación de tres componentes: análisis teórico, aplicación de un diseño instruccional, recolección y análisis de los datos.

El análisis teórico permite proponer la DG del concepto matemático al cuestionarse cómo un individuo lo construye. En la siguiente etapa se procede al diseño instruccional que permita la construcción de las estructuras mentales propuestas en la DG. Finalmente, los datos que se obtienen de la aplicación del diseño instruccional se analizan en el contexto de la teoría APOE y, en su caso, son utilizados para determinar si es necesario reiniciar el ciclo con el propósito de refinar la DG o el diseño instruccional.

En Morante (2020), se reporta el diseño y la aplicación de una secuencia didáctica basada en la DG de Swinyard y Larsen (2012). Aquí, se presentan cinco de las 25 actividades que conforman la secuencia propuesta por Morante y un análisis de contenido de estas, para mostrar su correspondencia con las estructuras y los mecanismos mentales que se proponen en la DG antes citada. También se presentan las estructuras y mecanismos mentales logrados por el grupo de 25 estudiantes y, se ilustran estos con las producciones de 5 participantes que se consideraron representativos. El tipo de estudio es interpretativo y de corte cualitativo.

La descomposición genética

Swinyard y Larsen (2012) presentaron un refinamiento de la DG de Contrill *et al.* (1996) que conserva los tres primeros pasos y modifica los subsecuentes. Cabe mencionar que ni en el trabajo de Contrill *et al.* (1996) ni en el de Swinyard y Larsen (2012) se reportan los conocimientos previos necesarios para la construcción del concepto. Sin embargo, en este trabajo de investigación se plantean los siguientes conocimientos previos: el concepto de función de una variable real como proceso; el concepto de desigualdad como proceso, el concepto de orden en los números reales como proceso, el concepto de intervalo como objeto y un esquema de cuantificación de dos niveles.

A continuación, se resume la DG de Swinyard y Larsen (2012) del límite de una función de una variable real en $x = a$:

5. La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a. (PASO DG1)
6. La acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor a que el anterior. (PASO DG2)
7. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:
   a) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a. (PASO DG3(A))
   b) Construcción de un proceso en el rango en el que $y = f(x)$ se aproxima al valor L. (PASO DG3(B))
   c) Coordinación de (a), (b) a través de f, es decir, la función f se aplica al proceso de x aproximándose al valor a para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L. (PASO DG3(C))
8. Construir un proceso mental en el cual uno prueba si un candidato es un límite:
   a) Elegir una medida de proximidad al valor límite L a lo largo del eje y (PASO DG4(A))
   b) Determinar si hay un intervalo alrededor del valor en el cual uno está conjeturando el límite (es decir, a), donde el valor de la función está lo suficientemente cerca de L. (PASO DG4(B))
   c) Repetir los pasos (a) y (b) para medidas de cercanía cada vez más pequeñas. (PASO DG4(C))
9. Asociar la existencia de un límite con la capacidad de continuar (teóricamente) este proceso para siempre, sin dejar de producir el intervalo deseado centrado en a, o de manera equivalente, con la observación de que no hay un caso en el que será imposible encontrar dicho intervalo. (PASO DG5)
10. Encapsular este proceso a través de la noción de cercanía arbitraria. Esto implica darse cuenta de que se puede establecer que el proceso en el paso 4 funcionará para todas las medidas de cercanía demostrando que funcionará para una medida de cercanía arbitraria. (PASO DG6)

Grupo de estudio

El grupo al que se aplicó la secuencia de actividades estuvo conformado por 25 alumnos de entre 18 y 19 años de edad del primer año de ingeniería en biotecnología que cursaban la materia de cálculo diferencial por primera vez, en el periodo mayo-agosto de 2019 en una universidad pública del estado de Puebla, México.

Instrumento de investigación y modo de implementación

De las 25 actividades, 2 fueron diseñadas en el registro numérico, 3 en el registro algebraico, 9 en el registro gráfico y 11 incluyeron más de un registro. Las actividades de la 1 a la 9 se diseñaron para promover la construcción de la concepción dinámica del límite de una función (pasos DG1, DG2 y DG3) y están asociadas al proceso de proponer un valor límite. Las actividades de la 10 a la 20 buscan propiciar la construcción gradual de la concepción métrica (pasos DG4, DG5, DG6) y están asociadas a la validación del candidato a límite. Finalmente, las actividades de la 21 a la 25 refuerzan las estructuras mentales construidas hasta este punto.

Para la aplicación de las actividades se siguió el ciclo de enseñanza ACE. En el primer paso del ciclo, los estudiantes trabajaron en binas, pero cada uno registró sus respuestas de manera independiente. El primer autor de este trabajo fue el titular del curso, quien orientó las discusiones grupales que permitieron convenir los resultados que se iban obteniendo (segundo paso del ciclo). Todas las producciones estudiantiles eran recogidas al término de las sesiones y se analizaron ampliamente para identificar las estructuras y mecanismos mentales de manera objetiva. La instrucción constó de dos sesiones por semana de dos horas cada una, durante tres semanas y en cada sesión se dejaron ejercicios similares para el trabajo fuera del aula (tercer paso del ciclo).

Las actividades

A continuación, se presentan cinco actividades (1, 6, 11, 12 y 15) de la secuencia didáctica, así como su análisis de contenido en términos de la DG. Estas cinco actividades permiten mostrar las estructuras y mecanismos que se describen en la DG. Las restantes son variantes de las que aquí se muestran, las cuales utilizan diferentes instrucciones para otras funciones matemáticas de una variable real representadas en otros registros. La secuencia completa se puede consultar en Morante (2020).

Tabla 1. Actividad 1

Actividad 1

Considera la función $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ y el valor $x = 0$.

a) Evalúa la función f en los valores x que se presentan en la primera fila de la siguiente tabla y anota sus correspondientes valores $f(x)$.

x	-1	-0.5	-0.25	...	0	...	0.02	0.6	0.98
$f(x)$				...		...			

b) Describe el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = 0$.

c) Describe el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(0)$.

d) Describe qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

La actividad 1 (tabla 1) tiene como propósito que los estudiantes construyan los primeros 3 pasos de la DG. Swinyard y Larsen (2012) llaman a este primer bloque de la DG como el proceso para proponer un candidato a límite. Una vez que el estudiante ha conformado el esquema de aproximación, puede deducir un valor L al que converge $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor a que no necesariamente pertenece al dominio de f.

Cuando se realiza la acción de evaluar la función f, como es solicitada en el inciso (a), el estudiante establece el primer contacto con el concepto de límite de una función. Por lo que, si es capaz de realizar la evaluación en un único valor x, es posible que pueda repetir la misma acción para el resto de los valores proporcionados. De esta forma se estimula la evaluación sucesiva de valores en torno al valor $x = 0$. Un estudiante que logre completar la tabla de forma correcta con los valores $f(x)$ correspondientes, exhibiría la construcción de la estructura acción en correspondencia con los pasos DG1 y DG2.

Una vez que el estudiante ha realizado acciones sobre la función, se plantean las preguntas de los incisos (b), (c) y (d) para provocar la reflexión en el estudiante y lograr la interiorización de las acciones realizadas.

Cuando un estudiante centra su atención en el dominio de la función y es capaz de notar que la sucesión de valores de x se aproxima cada vez más al valor de interés $x = 0$ en términos de la aproximación en ambas direcciones interioriza las acciones de los pasos DG1 y DG2. Por consiguiente, dicho estudiante será capaz de explicar que los valores de x se aproximan a cero y con ello manifestará la construcción de la estructura proceso de aproximación en el dominio de la función, relacionada con el paso DG3(A).

De manera análoga, el inciso (c) busca la construcción del proceso de aproximación en el rango de la función. En este caso, el estudiante debe interiorizar las acciones de evaluación de $f(x)$ para ver en su mente que estos se aproximan cada vez más a $f(0)$. De exhibirse este pensamiento, podremos afirmar que el estudiante ha construido una estructura proceso de aproximación en el rango de la función, relacionada con el paso DG3(B), ya que es capaz de intuir el valor al cual confluyen los valores $f(x)$.

El inciso (d) busca que el estudiante coordine los procesos de los pasos DG3(A) y DG3(B), esto es que asocie la causalidad de que el proceso de aproximación en el dominio produce el proceso de aproximación en el rango a través de la aplicación de la función f.

Cuando un estudiante argumente en su respuesta al inciso (d), que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a $f(0)$ a medida que los valores de x se aproximan a $x = 0$, mostrará evidencia de haber coordinado correctamente los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, paso DG3(C). De manera más precisa, la función f se aplica al proceso de x aproximándose a $x = 0$ para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a $f(0)$.

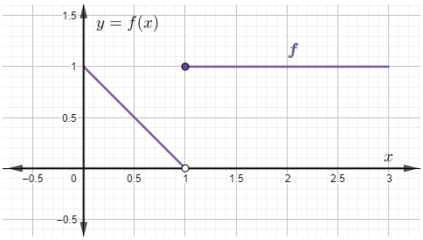
Sin embargo, un estudiante puede no identificar la relación de causalidad entre los procesos de aproximación en el dominio y el rango a través de f. En este caso, se dirá que el estudiante no muestra la construcción de la estructura proceso de aproximación. Esto es, el individuo percibe los procesos de aproximación en el dominio y en el rango de manera independiente pero no es capaz de coordinarlos para inferir el comportamiento de los valores $f(x)$ y x.

La actividad 6 (tabla 2) se presenta como un ejemplo del rol de las representaciones semióticas en la construcción de las estructuras mentales que se pretenden construir por medio de esta actividad y, otras que se diseñaron de manera similar.

Tabla 2. Actividad 6

Actividad 6

Considera la siguiente representación gráfica de la función f y la tabla que se te presenta para responder lo que se te pide.



x tiende al valor

x	0.9	0.99	0.999	0.9999		¿?		1.0001	1.001	1.01	1.1

¿A qué número se aproximan los valores de x? (Utiliza la tabla).
Si los valores de x se aproximan a 1 desde la izquierda, es decir, con valores menores que 1 ¿a qué número se aproximan los valores $f(x)$? (Utiliza la gráfica).
Si los valores de x se aproximan a 1 desde la derecha, es decir, con valores mayores que 1 ¿a qué número se aproximan los valores $f(x)$? (Utiliza la gráfica).
Describe qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

El propósito de esta actividad es promover la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y rango en la representación gráfica, a través de conversiones entre los registros gráfico y tabular de una función dada (paso DG3(C)). Para ello, se invita al estudiante a responder las preguntas usando la tabla, en el caso del inciso (a), y luego, usando la gráfica de la función, en el caso de los incisos (b) y (c).

De acuerdo con Duval (1993), la coordinación de registros de representación es esencial para explorar las variantes posibles en una representación. En este sentido, un estudiante que obtiene conclusiones a partir de la exploración de las representaciones tabular y gráfica de la función, pone en juego la coordinación de ambos registros y la identificación de aspectos propios de cada uno que, en conjunto, complementan la comprensión del objeto matemático de aprendizaje.

Con fundamento en lo anterior, se presenta la actividad 11, la cual fomenta la construcción del proceso métrico (paso DG4) en el registro gráfico. En este caso (vea el inciso (a) de la actividad 11), el estudiante debe realizar la acción de proponer el valor del radio δ para el intervalo centrado en $a = 1$ cuando se le proporcionan distintas longitudes de radio ε del intervalo centrado en L, pasos DG4(B) y DG4(C). El estímulo externo es proporcionado a través del recuadro con diferentes valores de ε (vea la tabla 3) y la representación gráfica de la función f, de modo que el estudiante coordine ambos registros para producir sus respuestas. Un estudiante que obtenga el valor correcto del radio δ para cada valor particular del radio ε exhibirá la construcción de la estructura acción del paso DG4(B).

En el inciso (b) se explora si el estudiante es capaz de concebir la continuación de este proceso, proponiendo intervalos centrados en $L = 1$ de radios cada vez más pequeños. Esta actividad requiere prescindir del registro gráfico (inciso (a)), dada la "imposibilidad práctica" de visualizar los intervalos en la gráfica de la función f. Por lo que, si un estudiante puede interiorizar la acción de construir un intervalo de radio δ centrado en a para un valor de interés en el dominio de f, con la propiedad de que las imágenes de los valores de x contenidos en ese intervalo, se mantengan dentro del intervalo de radio ε propuesto, centrado en L diremos que exhibe la estructura proceso (paso DG4(C)).

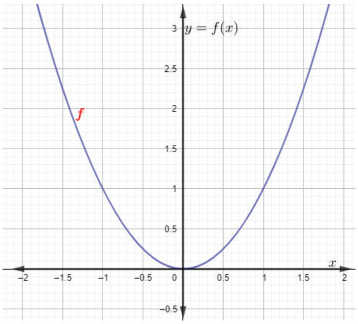
Finalmente, el inciso (c) promueve la reflexión del estudiante para asociar el proceso construido en el paso DG4 con la validación del candidato a límite.

Tabla 3. Actividad 11

Actividad 11

Para la siguiente representación gráfica y los datos proporcionados responde ¿cuál debería ser el radio δ del intervalo abierto, centrado en a para estar seguros de que los valores $f(x)$ se mantengan dentro del intervalo abierto de radio ε centrado en L?

a)



Para:			El intervalo abierto centrado en a debe tener longitud
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\delta =$
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.4$	$\delta =$
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.3$	$\delta =$
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.2$	$\delta =$
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.1$	$\delta =$

b) Si se te proporcionara un intervalo de radio menor centrado en L ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en a cuyas imágenes de los valores de x contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo propuesto centrado en L? Argumenta tu respuesta.

c) Apoyándote en tu respuesta a los incisos anteriores, establece si la función del inciso (a) tiene como límite $L = 1$ en el valor $a = 1$. Argumenta tu respuesta.

La actividad 12 (tabla 4) motiva un primer acercamiento a la construcción de la concepción métrica de límite asociada con el proceso de validación del candidato a límite de la función.

Tabla 4. Actividad 12

Actividad 12.

La siguiente tabla muestra la evaluación sucesiva de valores x próximos a un valor a para la función $f(x) = 2x + 1$.

x tiende al valor

x	0.4	0.49	0.499	0.4999	...	¿a?	...	0.5001	0.501	0.51	0.6
$f = 2x + 1$	1.8	1.98	1.998	1.9998	...	¿L?	...	2.0002	2.002	2.02	2.2

$f(x)$ tiende al valor

Utiliza la tabla para responder lo que se te pide.

a) ¿A qué número a se aproximan los valores de x?

b) ¿A qué número L se aproximan los valores $f(x)$?

c) Si se ha elegido un intervalo abierto centrado en L de radio $\varepsilon = 0.2$, apoyándote en la tabla determina los valores $f(x)$ que conforman los extremos de ese intervalo y anótalo.

d) ¿Cuál debería ser el radio δ, del intervalo abierto centrado en $a = 0.5$ para estar seguros de que las imágenes de los valores de x contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en L?

e) Si ahora se propone un intervalo centrado en L de radio $\varepsilon = 0.02$, ¿cuál debería ser el radio δ, del intervalo centrado en $a = 0.5$ para estar seguros de que las imágenes de los valores de x contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en L? Argumenta tu respuesta.

f) ¿Puedes proponer más de un intervalo abierto centrado en a que posea la misma propiedad que se solicitó en el inciso (d)?

g) Si la respuesta a la pregunta anterior es sí. ¿Describe qué característica debe cumplir ese intervalo para que cumpla la propiedad enunciada en el inciso (d)?

h) Un intervalo centrado en L tiene radio $\varepsilon = 0.0002$, ¿cuál debería ser el radio δ, del intervalo abierto centrado en $a = 0.5$ para estar seguros de que las imágenes de los valores de x contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en L? Argumenta tu respuesta.

i) Si se te proporcionara un intervalo de menor radio centrado en L ¿consideras posible continuar construyendo intervalos centrados en a cuyas imágenes de los valores de x contenidas en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en L? Argumenta tu respuesta.

j) ¿Existirá un intervalo de radio ε centrado en L, a partir del cual ya no sea posible construir un intervalo de radio δ centrado en a que cumpla la propiedad del inciso (d)? Argumenta tu respuesta.

k) Apoyándote en tu respuesta a la pregunta anterior, establece si el siguiente enunciado es verdadero y argumenta tu respuesta. Para la función $f(x) = 2x + 1$, $\boldsymbol{L}$ es el límite de la función en el valor $\boldsymbol{a}$.

Los incisos (a) y (b) sirven para verificar que el estudiante manifiesta la estructura proceso descrita en el paso DG3, de acuerdo a lo analizado en la actividad 1.

Los incisos (c) y (d) pretenden favorecer la construcción de los pasos DG4(A) y DG4(B). Si un estudiante realiza las actividades propuestas de forma acertada, habrá logrado la construcción de la estructura acción de validación de un candidato a límite, esto es, el estudiante puede realizar la construcción del intervalo de radio δ centrado en el valor a de manera que se cumpla la propiedad métrica de la definición ε-δ.

Los incisos (e), (f), (g) y (h), buscan motivar la reflexión necesaria para construir el paso DG4(C). En esta situación, un estudiante que responda afirmativamente sobre la posibilidad de seguir construyendo el intervalo deseado, de forma que se cumpla la propiedad métrica de la definición ε-δ, aportará evidencia de la estructura proceso de validación de un candidato a límite. Concretamente, el estudiante debe ser capaz de interiorizar las acciones de calcular δ y de compararlo con el valor del radio ε, por ejemplo, argumentar que $\delta < \varepsilon$ y, en etapas más consolidadas de la estructura proceso, un estudiante podría concluir que δ depende del valor de ε. En cambio, un estudiante puede responder afirmativamente a la posibilidad de realizar la construcción solicitada (inciso f) pero no mostrar argumentos sobre porqué o cómo es que se haría (inciso g). Por lo que se concluiría que el estudiante no ha interiorizado las acciones, lo cual mostraría que no ha desarrollado la estructura proceso de la concepción métrica de límite.

Los incisos (i), (j) y (k) dirigen la reflexión del estudiante para construir el paso DG5. Si un estudiante relaciona la posibilidad de continuar produciendo el intervalo de radio δ, cada vez que se proponga un valor de ε con la existencia del valor límite, diremos que ha coordinado este proceso (paso DG4) con la validación del candidato a límite y que ha conseguido construir el paso DG5. En otras palabras, un estudiante que argumente que el límite propuesto lo es, debe deducir que no hay un valor de ε para el cual sea imposible construir el intervalo δ que cumpla la propiedad métrica de la definición ε-δ.

Cabe mencionar que el inciso (j) busca que el estudiante perciba la posibilidad de que no siempre podrá lograrse la construcción de los intervalos con las condiciones dadas. Un estudiante que muestre dificultades en la construcción del paso DG5 puede encontrar un andamio cognitivo si se enfrenta a casos en los cuales tal propiedad de contención no siempre se logra. Este aspecto fue abordado en actividades subsecuentes de la secuencia didáctica.

La actividad 15 (tabla 5) se presenta para ejemplificar el tipo de trabajo realizado con la concepción métrica de límite.

Tabla 5. Actividad 15

Actividad 15 Considera la función $f(x) = 8x - 2$, el valor $a = 4$ en el dominio de f para responder lo que se te pide.
a) Propón un valor L, como límite de la función f en el punto $a = 4$ y represéntalo simbólicamente.
b) Considera un intervalo de radio $\varepsilon = 0.02$ centrado en L determina un intervalo centrado en $a = 4$, en el cual se cumpla la desigualdad $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$.
Proporciona un valor $\delta > 0$ que permita construir un intervalo centrado en $a = 4$ que cumpla que, para todos los valores x que satisfacen $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$, se cumpla la desigualdad $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$.
c) Si se genera un intervalo de radio $\varepsilon > 0$ centrado en L, ¿cuál debería ser el valor de $\delta > 0$ necesario para construir un intervalo centrado de $a = 4$ que cumpla la propiedad solicitada en el inciso (c)?
d) Usando como argumento tu respuesta al inciso anterior responde si la función $f(x) = 8x - 2$ tiene límite L en el valor $a = 4$.

En el caso del inciso (a), si un alumno genera una representación tabular con una sucesión de valores cada vez más próximos al valor de interés del dominio, realiza las evaluaciones correspondientes bajo f y propone un valor $L = 30$ como candidato a límite, mostrará evidencia de haber construido la estructura proceso de aproximación (pasos DG1, DG2 y DG3). En resumen, puede proponer un candidato a límite.

Los incisos (b) y (c) evalúan la construcción de la estructura acción del paso DG4(B). Si el estudiante exhibe un valor adecuado para δ (inciso c), diremos que ha relacionado la acción de construir la medida de proximidad al valor a con su representación estática, la cual es, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ para valores particulares de ε. Lo anterior se logra en el instante en que el estudiante, partiendo del trabajo algebraico con la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon = 0.02$, construye la desigualdad $|x - a| < \delta$.

El inciso (d) evalúa la estructura proceso del paso DG4. La construcción del estudiante debe ser llevada al caso general de la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$

equiparable al paso DG4(C), es decir, el estudiante debe pensar en una medida de proximidad arbitraria en torno al valor límite propuesto.

Finalmente, el inciso (e) busca que el estudiante encapsule el paso DG5, para lograrlo, necesita realizar la coordinación de los procesos construidos y encapsularlos a través del tratamiento analítico de las condiciones de la definición de límite, a saber: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Un estudiante puede responder en dos sentidos, afirmando directamente que el límite es $L = 30$ o bien utilizando la notación $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 30$ sin hacer hincapié en las condiciones estáticas de los procesos recogidos en la definición. Por otra parte, si un estudiante es capaz de confirmar la veracidad del límite propuesto y argumentar su respuesta en términos de la definición ε-δ de límite (versión estática del concepto) exhibirá la encapsulación del paso DG5, con lo que habrá construido la estructura objeto de la concepción métrica de límite.

RESULTADOS

En la tabla 6 se muestran los porcentajes, del total de 25 estudiantes que evidenciaron las estructuras mentales que se buscó construir con la secuencia de 25 actividades. La evidencia de cada una de estas estructuras se reporta con detalle en Morante (2020).

Tabla 6. Porcentajes de los estudiantes que evidenciaron las estructuras mentales

	Concepción dinámica de límite		Concepción métrica de límite		
Estructura mental	acción	proceso	acción	proceso	objeto
Total, de estudiantes	25	25	25	25	1
Porcentaje del total de estudiantes	100%	100%	100%	100%	4%

En este trabajo ejemplificamos la construcción de esas estructuras mentales con las producciones de 5 de los 25 estudiantes los cuales se seleccionaron porque se consideró que ilustraban adecuadamente cada estructura mental.

Estructura acción relativa a la concepción dinámica de límite

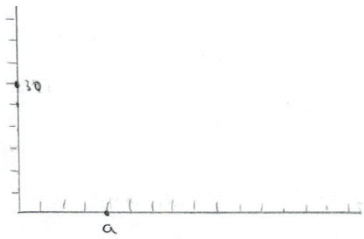
El 100% logró evaluar la función correctamente en puntos cada vez más próximos al valor de interés, por lo que se considera que los estudiantes fueron capaces de construir la estructura mental acción, esto es, los estudiantes lograron evaluar una función f para valores de x considerados cercanos o incluso igual a un valor a, lo cual se corresponde con los dos primeros pasos de la DG.

Estructura proceso relativa a la concepción dinámica de límite

Un estudiante que exhibe la estructura proceso de aproximación es aquel que es capaz de proponer un candidato a valor límite, después de haber construido los pasos DG1, DG2, DG3.

Por ejemplo, en la actividad 15(a), el 92% propuso una serie de valores cada vez más próximos al valor $a = 4$, calculó correctamente las imágenes de dicha sucesión bajo la función f proporcionada y, coordinó correctamente ambos procesos para proponer el candidato a valor límite, $L = 30$. Por lo que, se afirma que estos estudiantes lograron construir la estructura proceso de límite como aproximación dinámica.

Destaca el hecho de que 36% de los estudiantes, además del registro tabular, realizó la representación gráfica de la situación parcial o total. En la figura 1 se presenta la solución de E25 a la actividad 15(a), donde se observa una representación gráfica incompleta del proceso de acercamiento al valor $a = 4$ en el dominio de la función f y a $L = 30$ en el codominio. Lo anterior refleja la capacidad de interpretación del estudiante E25 de las acciones realizadas en ambos registros, lo cual se promovió en las actividades de la 1 a la 9.



a

3.9	3.99	3.999	3.9999	4	4.0001	4.001	4.01	4.1
29.2	29.92	29.992	29.9992	30	30.0008	30.008	30.08	30.8

L

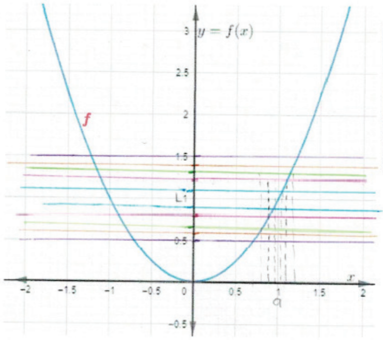
Figura 1. Respuesta a la actividad 15 (a) del estudiante E25

Por otra parte, 8% de los estudiantes propusieron el valor $L = 30$ pero no justificaron cómo es que obtuvieron dicha conclusión. En su caso, no se cuenta con evidencia para afirmar que ellos construyeron la estructura proceso de límite como aproximación dinámica a partir de la actividad 15 (a).

Estructura acción relativa a la concepción métrica de límite

Para construir la concepción métrica, un estudiante debe realizar las acciones que evidencian el uso de una medida de proximidad al valor límite L propuesto (DG4(A)) y determina, para un valor particular de ε si existe un intervalo alrededor del valor a que cumpla la propiedad métrica: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, paso DG4(B).

Un estudiante que manifiesta la estructura acción de la concepción métrica de límite realiza dicha tarea para valores particulares de ε, como se solicitó en la actividad 11 inciso (a). En este caso, 100% de los estudiantes logró calcular valores $\delta > 0$ para valores particulares de $\varepsilon > 0$ para una función representada en el registro gráfico. En la figura 2 se presenta la solución del estudiante E17. Si bien su representación gráfica de los intervalos ε y δ no es del todo clara, proporciona valores de δ que cumplen la propiedad métrica para los valores de ε proporcionados.



Para:			El intervalo abierto centrado en a debe tener longitud
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.5$	$\delta =$ 0.4
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.4$	$\delta =$ 0.3
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.3$	$\delta =$ 0.2
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.2$	$\delta =$ 0.1
$L = 1$	$a = 1$	$\varepsilon = 0.1$	$\delta =$ 0.01

Figura 2. Respuesta a la actividad 11 (a) del estudiante E17

Estructura proceso relativa a la concepción métrica de límite

En una segunda etapa, un estudiante debe reflexionar sobre las acciones del paso DG4(A) y DG4(B), de modo que pueda interiorizar estas acciones y replicar esta tarea para valores de ε cada vez más pequeños, paso DG4(C). Posteriormente, debe asociar la posibilidad de continuar la producción del intervalo deseado (para cada $\varepsilon > 0$ dado) con la validación del candidato a límite, lo cual corresponde al paso DG5.

Como evidencia de la construcción de esta estructura, en la figura 3 mostramos la respuesta del estudiante E6 a la actividad 11(b), quien manifestó la relación de dependencia del valor δ con relación al valor ε que examinó. Su discurso se basa en el supuesto que existe el límite de la función involucrada en esta actividad. Esto no se asegura en la redacción de esta actividad y el alumno tampoco lo justifica. Observe que no usa el comportamiento gráfico de la función en su análisis. Sin embargo, relaciona el intervalo de radio ε centrado en $L = 1$ con el intervalo de radio δ con centro en $a = 1$. Por consiguiente, puede afirmarse que el estudiante ha interiorizado las acciones de la concepción métrica para constituir la estructura mental proceso de esta concepción al asociar la posibilidad de continuar, teóricamente, con el proceso de construcción de los intervalos.

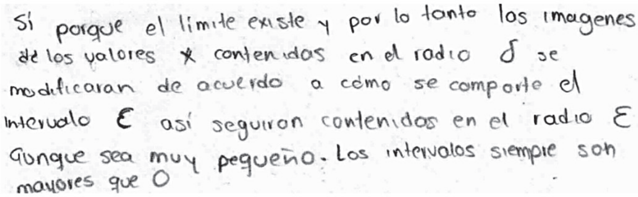

Sí porque el limite existe y por lo tanto las imagenes
de los valores x contenidos en el radio δ se
modificaran de acuerdo a cómo se comporte el
intervalo ε así seguiran contenidos en el radio ε
aunque sea muy pequeño. Los intervalos siempre son
mayores que 0

Figura 3. Respuesta a la actividad 11 (b) del estudiante E6

Más aun, al conducir la reflexión de la relación que guarda el proceso construido con la validación del candidato a límite, por medio de la pregunta de la Actividad 11 inciso (c), el estudiante E6 (vea figura 4) manifestó haber asociado este proceso de construcción métrica, con la validación del candidato a límite, con lo que se puede afirmar que el estudiante logró construir el paso DG5.

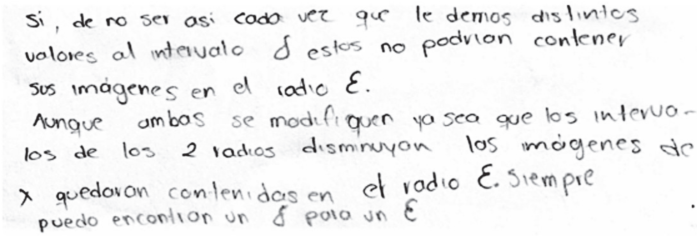

Si, de no ser asi cada vez que le demos distintos
valores al intervalo δ estos no podrian contener
sus imágenes en el radio ε.
Aunque ambas se modifiquen ya sea que los intervalos de los 2 radios disminuyan las imágenes de
x quedaron contenidas en el radio ε. Siempre
puedo encontrar un δ para un ε

Figura 4. Respuesta a la actividad 11 (c) estudiante E6

Aunque 100% de los estudiantes lograron evidenciar la estructura proceso de la concepción métrica del límite de una función de una variable real, es preciso mencionar que 40% lo manifestó en actividades posteriores a la aquí presentada.

Estructura objeto del concepto de límite

Cuando un estudiante encapsula el proceso de la concepción métrica a través de la noción de cercanía arbitraria, es decir, cuando establece que la propiedad del paso DG4 funcionará para cualquier medida de proximidad dada, usando la concepción métrica (*para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, si* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$) habrá exhibido la construcción mental objeto del concepto de límite de una función de una variable real. Note que lo anterior requiere que el estudiante dé sentido al rol que desempeñan los cuantificadores en la definición de límite.

Para transformar el proceso en un objeto, el rol dinámico característico del proceso de aproximación métrica debe permitir un tratamiento estático que resuelva el obstáculo dinámico de la producción perpetua del intervalo con la característica métrica deseada.

Por ejemplo, el estudiante E21, en la Actividad 15 inciso (b) determina el radio del intervalo δ que satisface la concepción métrica para un valor particular $\varepsilon = 0.2$, a través del tratamiento estático del proceso métrico del paso DG4 (vea la figura 5). Más allá del tratamiento algebraico correcto y de la deducción correcta del valor de δ, esta tarea permite que el estudiante dé sentido al simbolismo de la definición a través de aplicar una acción sobre el proceso métrico.

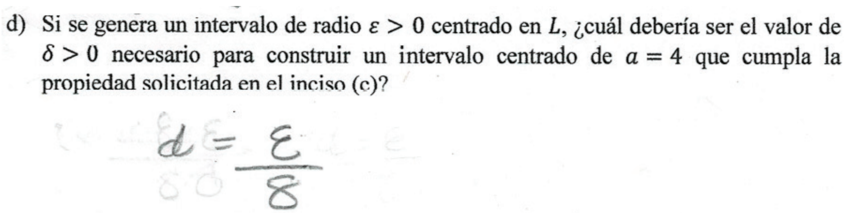
$$|F(x) - L| < \varepsilon$$
$$|8x - 2 - 30| < 0.02$$
$$|8x - 32| < 0.02$$
$$|8(x-4)| < 0.02$$

$$8|x-4| < 0.02$$
$$|x-4| < \frac{0.02}{8}$$
$$d = \frac{0.02}{8} = 0.0025$$

Figura 5. Respuesta a la actividad 15 (b) del estudiante E21

Establecido este primer contacto se explora la posibilidad de continuar produciendo intervalos adecuados de forma genérica a través del inciso (c) de la actividad 15, donde se pide determinar el valor de δ para un $\varepsilon > 0$, para lo cual es posible valerse del inciso (b) de la misma actividad.

Aunque la solución del estudiante E21 es correcta (vea la figura 5), reconocemos que esta podría estar condicionada por la "comodidad" operatoria que involucra la tarea. Por lo que, la respuesta al inciso (d) de la actividad 15, permite reforzar la conclusión de que el estudiante es capaz de asociar estas acciones con la concepción métrica (vea la figura 6).


d) Si se genera un intervalo de radio $\varepsilon > 0$ centrado en L, ¿cuál debería ser el valor de $\delta > 0$ necesario para construir un intervalo centrado de $a = 4$ que cumpla la propiedad solicitada en el inciso (c)?

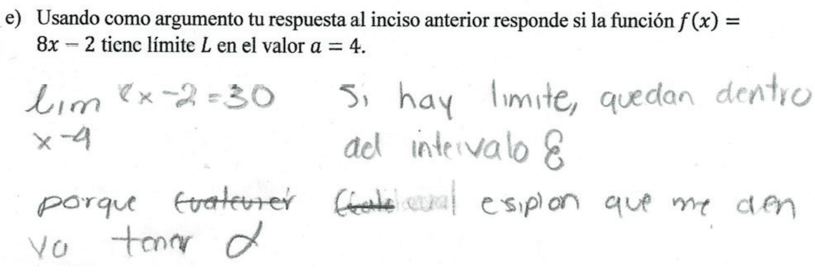
$\delta = \dfrac{\varepsilon}{8}$

Figura 6. Respuesta a la actividad 15 (d) del estudiante E21

La respuesta del estudiante E21 arroja una primera idea de cómo es que relaciona las acciones realizadas sobre el proceso de aproximación métrico una vez que ejecuta un tratamiento estático sobre dicho proceso. En este caso, el estudiante logra deducir que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario es posible construir un valor de δ genérico.

Asegurada esta propiedad se explora, a través del inciso (e) de la actividad 15, si el estudiante logra asociar las acciones realizadas con la validación del valor límite propuesto.

La respuesta que el estudiante E21 proporciona (vea la figura 7), aunque incompleta, hace notar que está pensando en que, el tratamiento estático (algebraico), desarrollado para asegurar la validez del límite (inciso (a) de la actividad 15) se corresponde con el proceso métrico. En otras palabras, E21 ha transformado un proceso en un ente estático, que bajo un tratamiento específico permite superar la barrera práctica de construir los intervalos deseados para un valor de $\varepsilon > 0$ arbitrario.


e) Usando como argumento tu respuesta al inciso anterior responde si la función $f(x) = 8x - 2$ tienc límite L en el valor $a = 4$.

$\lim_{x \to 4} 8x-2 = 30$ Si hay limite, quedan dentro del intervalo ε

porque ~~cualquier~~ ~~(cual~~ cual esiplon que me den yo tener δ

Figura 7. Respuesta a la actividad 15 (e) del estudiante E21

Otra evidencia que permite sustentar la afirmación anterior se encuentra en la representación gráfica que hace el estudiante E21, vea la figura 8 (sin haberse solicitado en la actividad) de los valores calculados para el caso particular $\varepsilon = 1$ y en el cual deduce, correctamente, el valor de $\delta = \frac{1}{8}$.

Aunque su representación no es congruente en los valores extremos que conforman los intervalos correspondientes en torno al valor $L = 30$ y $a = 4$, el estudiante muestra nuevamente que puede realizar acciones sobre el proceso estático de la concepción métrica sin dejar de asociar su operabilidad con la propiedad que le permite deducir la veracidad del candidato a valor límite.

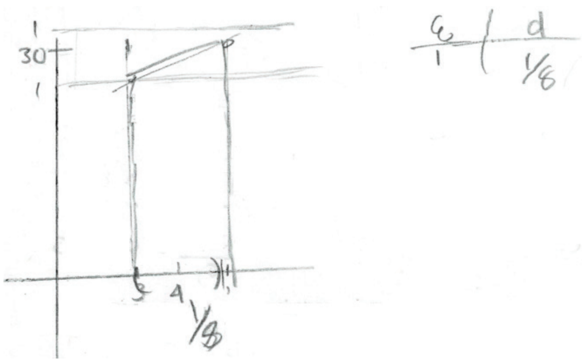


Figura 8. Respuesta a la actividad 15 del estudiante E21

Aunque se observa que, el rol de los cuantificadores no se manifiesta de forma clara como condición fundamental en el proceso de validación del candidato a límite, destaca el hecho que el estudiante E21, inicialmente, escribe "cualquier" pero después tacha la expresión (vea la figura 7). Por este motivo, no podemos afirmar que el estudiante ha construido el objeto límite en su totalidad (hasta este punto de la instrucción didáctica).

Sin embargo, sí ha encapsulado el proceso métrico en un objeto límite en el registro algebraico (ha realizado acciones considerando al proceso en su forma estática). Si bien no incluye todos los aspectos necesarios y suficientes de la definición ε-δ de límite, la estructura mental objeto de límite que el estudiante manifiesta, le permite que la desencapsulación del mismo le lleve a deducir que el candidato a valor límite propuesto, en efecto lo es.

En este contexto, conviene hacer notar que la forma en que un individuo aprende un concepto no se da de forma lineal, por lo tanto, puede transitar de una estructura a otra sin estar consolidadas del todo (Arnon *et al.* 2014, p. 29).

En síntesis, podemos argumentar que el estudiante E21 manifiesta una estructura mental objeto del concepto de límite que le permite establecer no solo un candidato a límite sino también validar dicho candidato en términos de la concepción métrica. La condicionante identificada para manifestar que ha construido el concepto de límite se encuentra en el manejo no tan evidente de los cuantificadores en la condición de la validación del candidato a límite.

Sin embargo, creemos que la construcción lograda hasta aquí por el estudiante E21, muestra la pertinencia del diseño instruccional, la concordancia con la DG de límite usada como referencia y la viabilidad de avanzar más allá de la concepción dinámica de límite.

Estructuras mentales logradas por los estudiantes

En esta serie de ideas, reportamos que, al término de la instrucción didáctica, 100% de los estudiantes logró desarrollar la estructura mental proceso, tanto para la concepción dinámica como métrica del límite de una función de una variable real, lo cual corresponde a los primeros 4 pasos de la DG en el registro algebraico y en el registro gráfico.

El 68% de los estudiantes logró avanzar hasta la construcción del paso DG5, al conectar la concepción métrica del paso DG4 con la validación del límite propuesto y argumentar que el candidato a límite realmente lo es porque se satisface la condición métrica, como puede observarse en la respuesta del estudiante E8 (vea la figura 9). El 32% restante no expuso este argumento por lo que no hay evidencia concluyente de la construcción de este paso en estos estudiantes. Sin embargo, se observó que la redacción del inciso (e) de la actividad 15 pudo haber provocado la falta de este argumento.

e) Usando como argumento tu respuesta al inciso anterior responde si la función $f(x) = 8x - 2$ tiene límite L en el valor $a = 4$.

Si tiene limite. por que para cualquier
ε que me de va a existir δ

Figura 9. Respuesta a la actividad 15(e) del estudiante E8

No obstante, aunque lo que restaba era encapsular el paso DG5 a través de la noción de proximidad arbitraria, únicamente 4% de los estudiantes logró hacerlo y dar evidencia de avanzar hacia la construcción de la estructura objeto.

CONCLUSIONES

Sobre la DG y las estructuras mentales construidas

Las actividades diseñadas y la instrucción didáctica favorecieron que, los estudiantes construyeran el concepto de límite más allá de la concepción dinámica, como se observó en las construcciones mentales analizadas.

Se constató que el 100% logró construir la estructura proceso de las concepciones dinámica y métrica del concepto en los registros gráfico, numérico y algebraico. Después de esto, los estudiantes debían encapsular el proceso de la concepción métrica en el objeto límite, al establecer que el proceso funciona para medidas de proximidad arbitrarias en torno al valor límite propuesto. Sin embargo, solo 4% de los estudiantes mostraron evidencia de empezar a conformar tal estructura mental.

Lo anterior se afirma porque los estudiantes no reflejaron el rol de los cuantificadores en sus producciones (∀ *"para todo"* y ∃ *"existe"*). Ellos lograron ir más allá de la concepción dinámica y comprender que la propuesta de un candidato a límite y la validación de su existencia son dos procesos que se deben llevar a cabo para establecer si un candidato a límite en efecto, lo es.

En síntesis, podemos afirmar que la estructura mental objeto del concepto de límite es susceptible de ser construida a través de actividades diseñadas bajo la DG de Swinyard y Larsen (2012). Nuestros resultados ofrecen evidencia de que es viable avanzar en la comprensión de la definición ε-δ de límite de manera que la estructura objeto pueda ser construida por un mayor número de estudiantes.

Derivado de lo expuesto, afirmamos que el objetivo del trabajo de investigación se logró, ya que se obtuvo evidencia empírica de las estructuras y mecanismos mentales que describe la DG de Swinyard y Larsen (2012) en un entorno de clase habitual.

La ampliación o mejora de las actividades que constituyeron la instrucción didáctica queda abierta para que en otro ciclo de implementación se consolide de mejor manera la estructura mental objeto descrita en la DG. En este sentido, se contempla la necesidad de proponer actividades para la comprensión del papel de los cuantificadores, lo cual constituye un esquema a desarrollar como mencionan Cottrill *et al.* (1996).

El papel de los registros de representación en la instrucción didáctica

Otro aspecto teórico que se consideró en esta investigación fue el papel de las representaciones del concepto de límite en el diseño de las actividades, de tal forma que se favoreciera la construcción de las estructuras mentales deseadas.

La serie de actividades propuesta siguió la recomendación de Blázquez y Ortega (2001) al promover, con la representación numérica de límite, las características asociadas al concepto, para posteriormente complementar los aspectos estáticos de la definición por medio de la representación gráfica y, de este modo, dotar de sentido al simbolismo de la representación algebraica del concepto.

En su implementación se constató el efecto benéfico de trabajar con los distintos registros, ya que permitió a los estudiantes acceder a la concepción métrica de límite. Por ejemplo, 68% de los estudiantes que avanzó hasta la construcción del paso DG5 utilizaron el registro gráfico en actividades donde no se les solicitaba, dando evidencia de que podían transitar entre los registros algebraico y gráfico. Lo anterior les permitió dar sentido a la definición ε-δ de límite.

Aclaramos que, aunque las producciones estudiantiles carecen del uso de los cuantificadores (situación reflejada en la construcción mental objeto), sí manifiestan los elementos esenciales de la definición ε-δ del límite de una función de una variable real. Por lo tanto, consideramos que el éxito en el desarrollo de la concepción métrica de límite se debe, en gran medida, a que las actividades aplicadas ofrecieron la posibilidad de trabajar en los distintos registros.

Si bien el efecto benéfico de las representaciones semióticas en el desarrollo del concepto de límite ya había sido observado con anterioridad por Blázquez y Ortega (2001) y Tomàs (2014), este trabajo aporta también actividades que podrían favorecer la construcción de la concepción métrica del límite como la describe la DG de Swinyard y Larsen (2012).

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. *Actas del III SEIEM: Valladolid, 1999* (pp. 167-184). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4(3)*, 219-236.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 4*, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Press.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15(2)*, 167-192.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de la matemática:* Escuela Francesa, 118-144.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1)*, 143-168.

Edwards, B. S., Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and learning, 7(1),* 15-25.

Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 14(1)*, 43-54.

Harel, G., Selden, A., y Selden, J. O. H. N. (2006). Advanced mathematical thinking: Some PME perspectives. En *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 147-172). Brill Sense.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical thinking and learning, 8(4)*, 407-431.

Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: The complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics, 69(3)*, 197-216.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the learning of mathematics, 11(3)*, 20-24.

Morante, J. D. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* (Tesis de maestría inédita). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Nagle, C. (2013). Transitioning from introductory calculus to formal limit conceptions. *For the Learning of Mathematics, 33(2)*, 2-10.

Oehrtman, M. C. (2003). Strong and Weak Metaphors for Limits. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 397-404.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics, 18(4),* 371-397.

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. Reverté.

Swinyard, C., y Lockwood, E. (2007). Research on students' reasoning about the formal definition of limit: An evolving conceptual analysis. *Proceedings of the 10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, USA*, CRUME, 2007.

Swinyard, C., y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43(4)*, 465-493.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2)*, 151-169.

Tomàs, J. P. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Alicante, España.

Trigueros, M., y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73(1)*, 3-19.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task desing in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 15, 43-55.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education*, *22(3)*, 219-236.

José David Morante Rodríguez

Dirección: Universidad Autónoma de Puebla
Prol. 24 Sur, Cd Universitaria, 72570 Puebla, Pue.
jose.morante496@uppuebla.edu.mx