

# La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas

Substantial Argumentation. An Experience with High School Level Students in Math Classes

Alma Alicia Benítez Pérez<sup>1</sup>

Héctor Benítez Pérez<sup>2</sup>

Martha Leticia García Rodríguez<sup>3</sup>

**Resumen:** El presente artículo analiza la argumentación sustancial realizada por estudiantes de 15 a 17 años de Nivel Medio Superior en problemas contextualizados evocados desde un enfoque cognitivo, en las unidades de aprendizaje de Álgebra y Cálculo Diferencial. Este enfoque se adopta, desde el análisis funcional y estructural del razonamiento, que permite evidenciar mecanismos discursivos por medio de los cuales un razonamiento puede cambiar la certeza y validez de las proposiciones. Como resultado, se identificaron elementos que caracterizan a la argumentación sustancial en problemas contextualizados evocados y la presencia de conectivos organizativos para mostrar la fuerza de los argumentos y su orientación hacia el enunciado-objeto. En términos generales los alumnos desarrollaron procesos intuitivos para establecer conjeturas y la posibilidad de construir proposiciones para emitir afirmaciones razonadas. La etnografía, modelo particular de la investigación cualitativa, se utilizó para

---

**Fecha de recepción:** 5 de agosto de 2015. **Fecha de aceptación:** 23 de agosto de 2016.

<sup>1</sup> Instituto Politécnico Nacional-Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 11 "Wilfrido Massieu". abenitez@ipn.mx

<sup>2</sup> Universidad Nacional Autónoma de México-Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas. hector.benitez@iimas.unam.mx

<sup>3</sup> Instituto Politécnico Nacional-Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. martha.garcia@gmail.com

el análisis de registros y transcripciones de las clases. Es relevante hacer mención que en el presente escrito sólo se analiza un problema contextualizado.

**Palabras clave:** *Argumentación sustancial, análisis funcional, análisis estructural, representaciones, problemas contextualizados evocados.*

**Abstract:** This paper presents an analysis on the substantial argumentation on application problems evoked from a cognitive approach from Algebra and Differential Calculus produced by high school students. The cognitive approach is followed in this paper, based of the functional and structural analysis of reasoning allowing the discursive mechanisms through which reasoning can change the certainty and validity of the propositions. As a result, it is identified the characteristic elements of substantial argument in evoked contextualized problems and organizational presence of connective elements towards the statement-object, were identified. A particular model based upon Ethnography of the qualitative research was used for analyzing class records and transcripts. It's important that in this paper only one contextualized problem is analyzed.

**Keywords:** *Substantial argument, functional analysis, structural analysis, representations, contextualized problems evoked.*

## INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la matemática desarrolla en el estudiante habilidades y destrezas, para fortalecer un pensamiento creativo y crítico que, además, le permiten impulsar y robustecer la formulación de conjeturas, explicaciones, argumentaciones y razonamientos, de esta forma explora caminos alternos de solución y discusión de la pertinencia de sus conclusiones.

La argumentación es esencial para fortalecer el pensamiento matemático en estudiantes de Nivel Medio Superior (NMS), pues abona a la producción de razones para justificar las afirmaciones generadas durante la discusión, cuya validación se basa en la aceptación entre los dialogantes.

En este escenario, los estudiantes transitan por diversos procesos cognitivos (Duval, 1999) para valorar la veracidad o falsedad de la conclusión a la que llegaron, después de la disertación de un tema relevante para los miembros de la comunidad. Duval (1999) da cuenta del funcionamiento cognitivo en la argumentación y la aceptabilidad de la misma, subraya que para lograr esta

aceptación, deben ocurrir dos operaciones necesarias: pertinencia y fuerza. Duval basa el estudio del funcionamiento cognitivo del razonamiento en el análisis funcional y estructural del razonamiento, revela los mecanismos discursivos a través de los cuales un razonamiento emitido por un sujeto puede cambiar su experiencia en relación con su proposición. Para la presente investigación es fundamental el funcionamiento cognitivo del razonamiento, en el que se describirá el análisis estructural buscando dar un marco de factibilidad al análisis funcional; sin embargo el proceso de pensamiento que se siguió es relativo al análisis funcional para después desarrollar el análisis estructural. Entendiendo que el análisis funcional y el análisis estructural son procesos de retroalimentación constante para la aproximación didáctica.

En este orden de ideas, es posible hablar de tipos de argumentaciones, tal como lo plantean Krummheuer (1995), Duval (1999) y Godino, J. y Recio A. (2001), quienes identifican tipos de argumentación en las aulas, específicamente la presente investigación retoma lo expuesto por Krummheuer (1995), quien distingue entre argumentos analíticos y sustanciales; el primero, se caracteriza por deducciones lógicas, mientras que los argumentos sustanciales se orientan a la extensión del significado de las proposiciones en la medida que se relacionan adecuadamente con éstas, a través de la actualización, modificación o aplicación.

Estas formas argumentativas sustanciales se presentan en las fases de búsqueda y formulación de conjeturas, en las cuales se produce una relación de justificaciones de naturaleza semántica, durante la resolución de problemas, empleando la inducción empírica como método para enunciar las proposiciones.

Si bien la resolución de problemas es un espacio propicio para incentivar y enriquecer la argumentación sustancial, particularmente los problemas contextualizados evocados (D'Amore, Fandiño y Marazzani, 2003) facilitan la argumentación en el aula. Al inicio de una unidad de aprendizaje, los problemas contextualizados sirven de plataforma para la construcción de los objetos matemáticos que se van a estudiar. En esta investigación, se presentó una situación simulada del contexto real. La finalidad de la propuesta se orientó a la exploración, por parte del estudiante, a partir de sus conocimientos previos, para examinar el contenido del problema e iniciar la búsqueda y formulación de conjeturas, empleando analogías, intuiciones, etcétera, como un proceso desarrollado de manera individual y colectiva en el aula.

El objetivo de este trabajo es caracterizar la argumentación sustancial que produce un estudiante de NMS, así como sus interpretaciones, cuando enfrenta problemas contextualizados evocados, desde un enfoque funcional y estructural

del razonamiento. Este artículo presenta el análisis de dicha argumentación, a partir del acopio y análisis de la información que se generó durante la discusión establecida entre dos equipos de primer semestre (15 - 16 años) y cuarto semestre (16 - 17 años). La pregunta de investigación fue: ¿Cuáles son los elementos pertinentes para caracterizar a la argumentación sustancial desde la cognición en estudiantes de NMS?

Se utilizó el método etnográfico, modelo particular de la investigación cualitativa, donde las observaciones juegan un papel importante, entendidas como una técnica de registro, y que ayudan a caracterizar procesos discursivos del estudiante, de esta forma es posible analizar la argumentación de tipo sustancial que el alumno del NMS articula en su discurso.

El acopio de datos se realizó por medio de la conformación de dos equipos, integrados por alumnos de grupos que cursaban Álgebra y Cálculo Diferencial; por esta razón, se determinaron dos escenarios: el primero, referido a la discusión al interior de los equipos, para identificar los argumentos emitidos que justifiquen las afirmaciones expuestas y, el segundo, a la discusión en forma plenaria entre los equipos para identificar los argumentos empleados y, en consecuencia, su pertinencia, o bien el rechazo de las afirmaciones, en un momento y tiempo determinados. Esta decisión ocurre entre el objeto del debate y su significancia precisando un sistema de validación compartido entre los equipos.

## MARCO TEÓRICO

***La argumentación desde una mirada cognitiva.*** La argumentación es un pensamiento estratégico, que encadena afirmaciones sustentadas en saberes científicos. De acuerdo con Marmolejo y Solano (2005) sus objetivos son: la reflexión, justificación y transmisión de una afirmación, y cuyas reglas tienen su base en la experimentación, los procedimientos y las intuiciones, pero también en los saberes científicos, en el campo semántico del alumno, en tanto la demostración, se basa en las reglas de la lógica. Corredor y Calderón (2001) precisan que argumentar es intentar convencer o persuadir, en forma razonada a otros, de las tesis emitidas como ciertas, de lo anterior, se desprende la práctica comunicativa, fundamental en la argumentación, en la que se exponen una variedad de argumentos o razones para discutir las justificaciones de las afirmaciones generadas, con el propósito de obtener coherencia y pertinencia sobre una

cuestión. Por su parte Goizueta y Planas (2013) consideran que una argumentación es el acto de producir razones.

Duval (1999) precisa que la pertinencia de un argumento se basa en los contenidos que lo constituyen. Para que un argumento sea pertinente tiene que compartir campo semántico con la tesis que pretende favorecer. La fuerza depende de que el argumento acepte o no objeciones y de que su valor epistémico sea positivo (evidente, necesario, auténtico...) o negativo (absurdo, posible, inverosímil...). Las razones debatidas intentan comunicar fuerza a la tesis, modificar su valor epistémico para ser positivo. El argumento que soporta réplicas y tiene un valor epistémico positivo es un argumento fuerte, que implica la adhesión a la tesis.

En este orden de ideas, Duval (1999) señala la relevancia que adquiere el análisis estructural del razonamiento para la argumentación en general y, en particular en matemáticas, a través de los elementos que constituye el modelo expuesto en la figura 1, donde las relaciones entre premisa y término medio se basan en los términos del contenido de las proposiciones, movilizándolo una red semántica para interpretar relaciones de oposición, o bien de inclusión entre los términos. Respecto a la conclusión, el modelo expone la posibilidad de afirmar una postura diferente de lo que se menciona en el término medio (flecha con puntas opuestas), pues las proposiciones que evidencian atributos son consideradas como términos medios, los cuales están ligados al contenido de las proposiciones y en consecuencia a los valores epistémicos, por lo que varían de un individuo a otro.

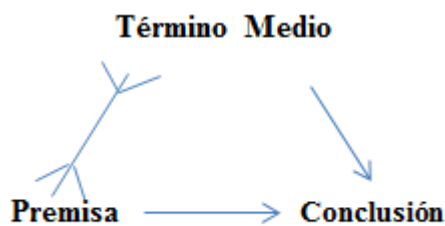


Figura 1. Esquema del modelo de Duval.

En la argumentación el encadenamiento constituye un elemento clave, pues articula bloques de proposiciones organizadas entre sí, asegurando la continuidad

entre las conclusiones expuestas en cada uno de los pasos hacia el enunciado-objeto, cuyo valor epistémico trata de cambiar la expansión discursiva mediante las proposiciones de apoyo, que son generadas de la discusión y no del enunciado del problema.

Para asegurar la continuidad del discurso en la argumentación, Duval (1999) menciona la similitud semántica, como un criterio de coherencia discursiva, es decir, se tiene referencia común a los mismos objetos, cuyo encadenamiento se produce por conexión extrínseca, donde las proposiciones se acumulan en función de las relaciones del contenido y del enunciado-objeto, presentando coherencia temática con la tesis discutida, para ello es necesario que la fuerza de los argumentos entre sí y su orientación sean explícitamente señalados a través de los conectivos argumentativos.

El análisis estructural en la argumentación expuesto por Duval (1999, 2007) es pertinente para la presente investigación, principalmente referido al valor epistémico, pues es el valor que permite incorporar las diversas interpretaciones de una proposición, dependiendo de los conocimientos previos, a partir de los cuales se producirá la comprensión del contenido.

Cuando se argumenta, se desea modificar el valor epistémico de un enunciado-objeto, para fijar su valor positivo. Lo cual se subordina a la selección de datos iniciales y a diversas proposiciones que contribuyen a su modificación. La expansión discursiva impulsa la organización discursiva para el razonamiento.

Además, el aspecto estructural del razonamiento fundamenta el análisis, especialmente útil en la recolección de los datos, que incluye argumentaciones completas e incompletas, para la identificación de los conectivos organizativos, los cuales explicaron la fuerza de los argumentos entre sí y su orientación, que robustecen la continuidad discursiva para mantener la coherencia temática, en un escenario donde el alumno mantiene discusión constante con sus compañeros, al participar en la vivencia de resolver problemas contextualizados evocados.

***Argumentación sustancial.*** En la argumentación, (objeto de estudio del presente trabajo) se propone convencer a sí mismo o a un interlocutor sobre una cuestión, obedeciendo a criterios de pertinencia. Para Krummheuer (1995), siguiendo a Toulmin, la argumentación crea espacios donde se desarrollan debates para ser discutidos en un ambiente social, y cuyas razones se basan en hechos, verificaciones y predicciones, utilizando como recursos los procedimientos heurísticos durante el proceso de estructuración de conjeturas por vía inductiva. La

argumentación sustancial depende del sujeto quien la realiza, con base en la construcción de conjeturas, mediando procesos que transcurren de manera inductiva a partir de la generación de argumentos, desde hechos específicos hasta la construcción de proposiciones, evaluando su pertinencia, para la extensión de sus significados en la medida que se relacionan adecuadamente por medio de la actualización, modificación o aplicación, perfeccionando los argumentos hasta la estructuración y fortalecimiento de la conclusión.

La argumentación sustancial es el eje para la presente investigación, por su implementación en las aulas, pues desde edades tempranas al educando se le debe proporcionar espacios de reflexión, para fomentar discusiones que generen analogías, conjeturas y posibles generalizaciones, en cuyo escenario emerja la argumentación sustancial y coadyuve a la construcción de afirmaciones sólidas.

En este orden de ideas, es necesario tomar una postura sobre la importancia del razonamiento en el proceso de la argumentación sustancial para la presente investigación. Desde un enfoque cognitivo el razonamiento y la argumentación (en este caso sustancial) se encuentran estrechamente ligados; como lo mencionan Godino y Recio (2001), el razonamiento es una actividad intelectual que la mayor parte del tiempo es implícita, que se ve iniciada en el análisis de una realidad o de un hecho, revisa información para generar nuevos hallazgos, dando origen a prácticas argumentativas (o argumentos) en ambientes comunales: dichas prácticas argumentativas generan el razonamiento.

Por su parte, Duval (1999) establece que el razonamiento está ligado a la producción de argumentos y al examen de aceptabilidad de las razones expuestas; es decir, en un escenario de discusión donde se confrontan diversos argumentos para justificar posturas diferentes sobre una cuestión no es relevante la producción de argumentos, sino el análisis de cada uno de ellos para determinar cuál de las tesis son aceptables o bien susceptibles a ser modificadas antes de ser consideradas, es decir, se habla en parte de modificación del valor epistémico de la persona que explica el enunciado y de quien lo escucha, y en parte también del valor lógico, el cual resulta de procedimientos específicos de verificación del contenido de la proposición, para dar continuidad a la expansión discursiva orientada hacia el enunciado-objeto.

Cuando se presentan en el discurso los valores epistémicos y lógicos orientados hacia el enunciado-objeto, Duval considera que se está frente al análisis funcional del razonamiento, y afirma la presencia de un razonamiento.

Para la presente investigación el análisis funcional del razonamiento se reestructuró con base en la argumentación sustancial (figura 2), para lo cual

se consideraron los valores epistémicos y lógicos de las proposiciones impulsando la continuidad en el discurso, el cual se enfocó hacia el enunciado-objeto.

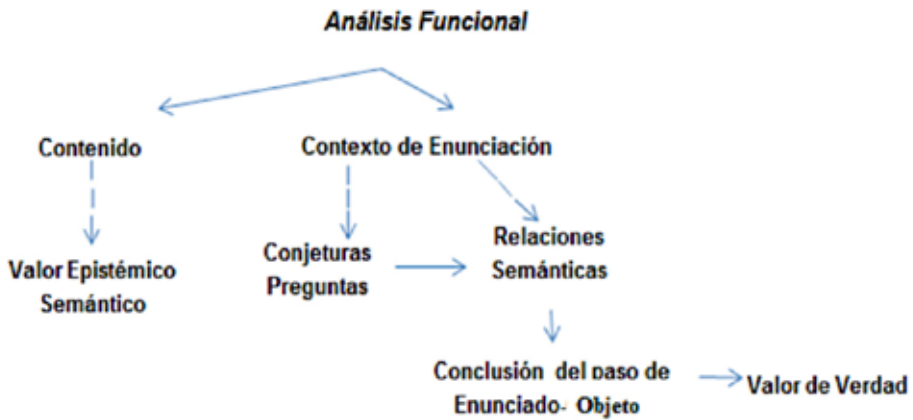


Figura 2. Análisis funcional del razonamiento en la argumentación sustancial (adaptado a partir de Duval, 1999).

El análisis funcional del razonamiento en la argumentación sustancial considera el valor epistémico, quien centra su atención en el contenido del enunciado (valor epistémico semántico), mientras que el contexto de enunciación centra su atención en las proposiciones que se generan durante la discusión (conjeturas, preguntas), para establecer relaciones semánticas que coadyuven en la producción de conclusiones hacia el enunciado-objeto y externar el valor lógico del enunciado.

La presente investigación está de acuerdo con lo que indica Godino y Recio (2001), referente al razonamiento, y en consecuencia a la producción de argumentos, no obstante la postura que expone Duval es pertinente para el estudio, pues su enfoque está dirigido al análisis de los argumentos generados en un ambiente que impulse las discusiones, para determinar la aceptabilidad o bien para establecer reflexiones y originar nueva información que contribuya al enriquecimiento de la situación que se analiza. Esta investigación analiza las características de la argumentación sustancial desde el enfoque funcional y estructural del razonamiento en problemas contextualizados evocados, generados por estudiantes de NMS.



Para caracterizar a la argumentación sustancial durante la experiencia educativa, se consideró el análisis estructural y funcional, del cual emergieron las características discursivas expuestas por Duval, siendo los elementos representativos de la argumentación sustancial los siguientes: *a)* focalización del discurso, *b)* resultados que se buscan en la producción del discurso, *c)* aspectos de las proposiciones que se toman en consideración en el discurso, *d)* consideración de las relaciones de oposición, intención o extensión entre las proposiciones, *e)* indicaciones de las relaciones entre las proposiciones y *e)* continuidad del discurso; no obstante, algunas de las características discursivas fueron re-interpretadas debido al desarrollo argumentativo que presentó el estudiante durante la experiencia.

Las características discursivas fueron la plataforma para el estudio de la argumentación sustancial en el aula cuando justificaron sus afirmaciones durante la formulación y modificación de proposiciones generadas en los problemas contextualizados evocados, para lo cual se enfocó en la producción de argumentos, atendiendo, por un lado, su pertinencia respecto al contenido de las afirmaciones y, por otro, al valor epistémico de las proposiciones. Escenario que contribuyó a identificar las diferentes organizaciones de las proposiciones empleadas para orientar la discusión hacia el enunciado-objeto.

**Representaciones.** Desde una visión cognitiva las representaciones semióticas adquieren un papel fundamental en el proceso de aprendizaje, porque benefician la comunicación consigo mismo o bien con el interlocutor, y permiten el tratamiento del contenido de la representación, sobre la base de reglas propias para obtener otra representación que contribuye con aportes diferentes a la representación inicial (Duval, 2000); además las representaciones semióticas pertenecen a un sistema particular de signos, y pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, aunque Duval (2000) menciona la posibilidad de adquirir significaciones diferentes a la inicial, todo depende del sujeto que la emplea, para expandir su significado.

De manera contextual, podemos decir que dicha transformación al interior de la representación enriquece su contenido con respecto a la primera representación, siempre que este proceso se apegue a las reglas del sistema semiótico al cual pertenece, se habla entonces de una de las propiedades fundamentales de los registros de representación: Tratamiento. La segunda propiedad fundamental es la denominada Conversión, consiste en transformar la representación en un sistema a otro, de tal suerte que esta última permita exponer otros significados del objeto matemático.

Dicha transformación al interior de la representación, o bien su transformación en otras representaciones, presuponen el empleo de reglas de congruencia; es decir, se habla de las unidades significantes que integran a cada una de las representaciones para establecer la correspondencia semántica entre ellas, cuya organización contribuye a establecer la coordinación de las representaciones para fortalecer la arquitectura cognitiva del estudiante.

Las representaciones semióticas adquieren relevancia en la argumentación para modificar el valor epistémico de las proposiciones, pues dependen de la arquitectura cognitiva de los interlocutores, en relación con las reglas de producción para la expansión discursiva, así como las reglas de similitud referidas a la identificación de expresiones equivalentes en el discurso, que permiten la denominada “asociación de ideas” y, por consecuencia, su coherencia temática hacia la veracidad o refutación del enunciado-objeto.

***Problemas contextualizados evocados.*** El marco curricular común para el Nivel Medio Superior, establece ejes para abordar las nociones necesarias del campo disciplinar en matemáticas, una de las competencias disciplinares básicas es la argumentación a la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, entre otras competencias. Desde este marco se han organizado los planes y programas de estudio de Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (IPN), los cuales mencionan la importancia para desarrollar habilidades y destrezas matemáticas, empleando la resolución de problemas relacionados con situaciones los ámbitos académico, social y global, lo que conlleva a la necesidad de impulsar en el alumno estrategias para fortalecer la argumentación en escenarios que contribuyan a: reflexionar, explorar, analizar, interpretar, discutir y justificar sus diferentes posturas frente a situaciones problemáticas.

En este marco, un aspecto relevante es el papel que juega el contexto de la situación problemática, es decir, el término “contexto” en el ambiente del aprendizaje de la matemática permite que el alumno pueda aplicar las matemáticas escolares a contextos extra matemáticos de la vida real; se habla entonces de “problemas contextualizados”, en los cuales la problemática que se aborda y la solución se generan simultáneamente.

La presente investigación empleó los problemas contextualizados de tipo evocado, D'Amore, Fandiño y Marazzani (2003) mencionan su importancia en la consolidación de saberes matemáticos adquiridos durante el proceso enseñanza aprendizaje, esenciales para explorar el contenido y posible solución de

problemas. En este sentido Ramos y Font (2006) han caracterizado los problemas contextualizados evocados en dos tipos de aplicaciones: sencillos y consolidados, éste último es complejo durante su desarrollo, para ambos su objetivo es la aplicación de los conocimientos previamente adquiridos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además señalan la posibilidad de ser propuestos al inicio de una unidad de aprendizaje, para ser discutidos desde los conocimientos previos del estudiante, cuyo propósito es facilitar la construcción de los conceptos matemáticos por parte de los alumnos en ambientes comunitarios, robusteciendo la construcción de conceptos matemáticos que serán analizados durante el proceso instruccional. Los problemas contextualizados evocados introductorios serán el marco para desarrollar la experiencia con los alumnos de NMS.

La elección y diseño de las actividades, para la presente investigación, se orientó a la presentación de situaciones contextualizadas, cuyo origen o fuente está enmarcado en un contexto real y reproduce una parte de sus características. La propuesta tuvo como propósito explorar, por parte del estudiante y desde sus conocimientos previos, el contenido de la situación para iniciar la búsqueda y formulación de conjeturas, empleando analogías, intuiciones, etcétera, como un proceso desarrollado de manera individual y colectiva, lo cual propició diversos escenarios para generar la discusión y reflexión en problemas contextualizados evocados introductorios, donde el alumno se encontraba involucrado cognitiva, emocional y socialmente. Escenario que fue la plataforma para la generación de discusiones, en las que se expusieron diversos argumentos para justificar sus afirmaciones, en un ambiente consensuado en el que se cuestionaba su aceptabilidad o bien la reflexión para identificar los elementos que serán modificados antes de su aceptación.

## METODOLOGÍA

La presente investigación pretende identificar las diversas interpretaciones de los alumnos de NMS durante las prácticas argumentativas de tipo sustancial desde un enfoque cognitivo, cuando han tenido la vivencia de explorar problemas contextualizados evocados, es importante mencionar que en el presente trabajo se mostrará uno de los problemas contextualizados evocados para las unidades de aprendizaje de Álgebra y Cálculo Diferencial. Para tal fin se diseñó e implementó la experiencia educativa con dos grupos de 40 y 45 alumnos, respectivamente, de NMS, del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos 11 (CECyT 11).

Los grupos fueron: 1IM6 (Álgebra) y 4IM10 (Cálculo Diferencial), cuyas edades fluctúan entre 15-17 años. La duración de la experiencia fue de 2 horas, sin embargo la preparación de la discusión en los grupos fue de 18 semanas. Cabe señalar que tradicionalmente los estudiantes no están preparados para dicha argumentación, por lo que fue necesario contextualizarlos en esta dinámica de trabajo.

La investigación se ubica en un paradigma de investigación cualitativo de corte etnográfico. Este enfoque permitió organizar información relevante en un contexto de aulas escolares. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos sirvieron como ejes para diseñar y aplicar actividades, en las que los estudiantes argumentaron cada una de sus afirmaciones, para justificar la pertinencia de sus planteamientos durante la resolución de problemas contextualizados.

Durante la preparación de los estudiantes se analizaron y discutieron problemas contextualizados evocados en un semestre escolar. En cuyo escenario se realizaron observaciones en dos niveles: global y específico. El primer nivel se orientó a registrar los siguientes eventos:

- *Bitácora del curso.* Al término de cada clase, los investigadores anotaron los hechos y procesos más relevantes durante la sesión; posteriormente se analizaron las fortalezas o debilidades que se presentaron, para ser consideradas en la siguiente sesión. En particular, se daba especial atención a las actividades que presentaron dificultad durante su desarrollo, las cuales se utilizaron como base para la discusión en las sesiones plenarias.
- *Proceso cualitativo de las observaciones.* Especialmente se consideraron los siguientes momentos: observación, descripción, selección, análisis, refocalización.
- *Grabaciones.* Se realizaron en dos momentos: durante la discusión al interior de los equipos y en forma plenaria, para analizar los argumentos generados durante la actividad e identificar las modificaciones del valor epistémico de las proposiciones.

## REPORTES ESCRITOS Y TAREAS EXTRAMURO.

A nivel específico, la triangulación de la información se llevó a cabo desde distintas fuentes, para fortalecer la credibilidad y pertinencia de los resultados: fuente A (reporte escrito individual), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes

escritos de los equipos), fuente D (discusión en equipo) y fuente E (observaciones en clase), información que contribuyó a la discusión y análisis de la argumentación sustancial desde la cognición.

## DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA EDUCATIVA EN EL AULA

Los problemas contextualizados evocados se presentaron al inicio de cada unidad de aprendizaje de los programas de Álgebra y Cálculo Diferencial, respectivamente, cuyo propósito fue exponer situaciones significativas para los alumnos, los cuales sirvieron como plataforma para la construcción de los objetos matemáticos que se estudiarían en cada una de las unidades de aprendizaje; para Álgebra el estudio de la línea recta y para Cálculo Diferencial una primera aproximación a la razón de cambio, tópicos que serán abordados en los siguientes apartados para analizar la argumentación sustancial. En este caso los alumnos iniciaron el abordaje de la situación desde sus conocimientos previos, promoviendo las fases de búsqueda y formulación de conjeturas, empleando analogías, intuiciones etcétera, partiendo de la inducción como método para enunciar las proposiciones en escenarios que impulsaron la discusión continua, espacio que benefició el desarrollo y fortalecimiento de la argumentación sustancial, como un proceso desarrollado de manera individual y colectiva.

La clase se organizó en equipos de cinco integrantes, formando un total de ocho a nueve equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada y adaptada por el profesor, para trabajarla de manera individual en la construcción de sus primeros argumentos; posteriormente se conformaron los equipos para el estudio de las soluciones, que se cristalizaron en los argumentos de transición y en el establecimiento de las conclusiones finales. Durante esta dinámica, un integrante del equipo fue el encargado de recolectar toda la información que se obtuvo durante el proceso de solución, así como las conclusiones. Una vez terminada la actividad, los equipos presentaron un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionó uno para exponer las conclusiones finales y establecer los argumentos que justifiquen las afirmaciones, lo cual fue evaluado por el pleno, para establecer la aceptabilidad del argumento y su validez.

**Acopio de datos.** Con base en la vivencia que los alumnos experimentaron y la información recolectada sobre el tema de la investigación, así como para exponer

puntualmente las prácticas argumentativas desarrolladas en los estudiantes, se invitó a un equipo por cada grupo (Álgebra y Cálculo Diferencial) fuera de clase, los equipos se seleccionaron por el compromiso y disposición de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades. Es deseable incorporar a los grupos enteros a dichas actividades tal y como lo marca el proceso educativo de la institución; sin embargo, para efectos de este proceso de investigación se decidió hacerlo con un conjunto de estudiantes que nos permitiera entender la experiencia de la argumentación sustantiva. Dicha convocatoria tuvo el propósito de analizar la pertinencia de los argumentos generados en una discusión, lo cual permitió examinar el contenido semántico y las representaciones exploradas por los estudiantes para establecer los argumentos (o razones) que justificaran sus afirmaciones o bien su modificación. El estudio se enfocó para modificar el valor epistémico del enunciado-objeto para sí mismo o para un interlocutor, los conectivos argumentativos empleados para dar continuidad al discurso y la coherencia de la temática. Elementos que contribuyeron en la caracterización de la argumentación sustancial.

La presente investigación da cuenta del estudio de caso de dos equipos de estudiantes de primero y cuarto semestre cuando abordan un problema contextualizado evocado, para ser discutido inicialmente al interior de los equipos (Álgebra y Cálculo Diferencial) y posteriormente en forma plenaria. En dicho ejercicio deben haber desarrollado la vivencia de explorar, analizar, discutir y conjeturar situaciones que contribuyen a generar escenarios, en los que se exponen las diferentes posturas frente a la problemática planteada, empleando argumentos que emergen de las reflexiones vía inductiva, es decir, la argumentación sustancial.

Es importante mencionar que las referencias del marco teórico y las acciones de investigación son pertinentes; es decir, están relacionadas y son útiles en la consecución de los objetivos de la investigación y en la aproximación a la cuestión planteada. Para llevar a cabo el acopio de los datos, se consideró la discusión de los equipos en Álgebra y Cálculo Diferencial, tratamientos en las representaciones y sus posibles conversiones, lo que contribuyó para identificar las proposiciones que surgieron en el proceso, así como el discurso referido a la forma verbal del alumno durante la exposición del proceso realizado, con la finalidad de ganar la aceptación del grupo.

Es importante enfatizar que el discurso es por necesidad un proceso. El expositor generalmente tiene claro de qué va a hablar, de acuerdo con sus decisiones estratégicas previas y, mientras, el que escucha, que por lo regular

desconoce el tema, va construyendo sus propias representaciones en el proceso de enunciación, de acuerdo con su conocimiento previo y los recursos provenientes del propio discurso: coherencia semántica

Durante la discusión, se identificaron representaciones de tipo pictórico, gráfico, algebraico y numérico, exploradas por el estudiante para mostrar la comprensión del problema y su enriquecimiento a lo largo de la discusión, situación que favoreció la justificación de sus afirmaciones, así como el discurso verbal para exponer el proceso, con la finalidad de ganar la aceptación de un grupo. Ello permitió identificar elementos de análisis con base en el marco teórico y durante la experiencia; a continuación se exponen las características identificadas, así como su explicación.

En este trabajo se presentará el problema contextualizado evocado denominado “Los ciclistas” (Fridman, 1995), que se enuncia.

De los puntos A y B que se encuentran separados a una distancia de 105 km, salieron simultáneamente con velocidad constante, los dos ciclistas al encuentro uno de otro. Se encontraron 1 hora 45 minutos después de iniciado el recorrido. Cada uno siguió su camino sin detenerse. Después de 3 minutos del encuentro, el primer ciclista que llevaba una velocidad de 40 km/h, se encontró con otro ciclista que venía hacia él por el mismo camino. El tercer ciclista, luego de encontrarse con el primero, continuó su camino sin detenerse y alcanzó al segundo ciclista en el punto C, en el cual se hubieran encontrado el primer y el segundo ciclista, si la velocidad del primero hubiera sido 20 km/h menos y la del segundo 2 km/h menos.

- a) ¿Cuáles son las distancias que recorren los ciclistas 1 y 2 durante 1h 45min?
- b) ¿Cuál es la distancia entre el punto donde se encuentran el primer ciclista con el segundo, y el punto donde se encuentra el primer ciclista con el tercero?
- c) ¿Cuáles son sus velocidades?
- d) ¿Cuál es la distancia recorrida en 3 minutos por el segundo ciclista?
- e) ¿Cuál es la distancia recorrida por el segundo ciclista para llegar al punto C?
- f) ¿A qué velocidad iba el tercer ciclista?

El problema “Los ciclistas” es del tipo contextualizado evocado; se abordó a partir de las ideas previas de los estudiantes, para iniciar el análisis y establecer la escritura esquemática de la situación y en consecuencia la búsqueda del plan

de resolución. Respecto al conocimiento que emerge del problema seleccionado para el programa de álgebra se les orientó a funciones y ecuaciones lineales en la solución de problemas que se presentan en su entorno académico, personal y social, así mismo el conocimiento que subyace en este problema para el programa de cálculo diferencial se ubica en la interpretación de la razón de cambio. Cabe aclarar que los equipos estuvieron constituidos por estudiantes de diferentes semestres (primero y cuarto semestre). La elección del problema se realizó considerando el acervo matemático de los estudiantes. El análisis se centró en evidenciar el abordaje que cada uno de los equipos desarrolló durante el proceso de resolución, y la riqueza de la argumentación durante la discusión en forma plenaria, pues cada uno de los equipos expusieron sus argumentos, los cuales fueron aceptados o refutados con base en la aceptabilidad de sus razones.

**Procedimientos de análisis.** Las videograbaciones, el trabajo escrito por los equipos, así como las notas escritas por los investigadores, son la evidencia de las prácticas argumentativas de tipo sustancial que los estudiantes emplearon para explorar los diferentes escenarios en el problema contextualizado. Para el análisis de los datos se exploraron dos acercamientos; el primero fue el análisis funcional de la argumentación sustancial y el segundo se orientó al análisis estructural.

En relación con el análisis funcional se identificaron valores epistémicos semánticos y lógicos, relaciones semánticas, preguntas, conclusiones y representaciones empleadas durante el proceso seguido en la discusión, las cuales son explicitadas en el análisis de los episodios. Para precisar los valores epistémicos semánticos se caracterizaron (Duval, 1999) algunos términos modales para su análisis durante el trabajo de los estudiantes (tabla 1).

**Tabla 1.** Caracterización de los valores epistémicos semánticos.

Valor Epistémico Semántico	Caracterización
Evidente	Es el valor inducido por la comprensión del contenido de la proposición; este valor será tanto más fuerte cuanto corresponda a una evidencia perceptiva de una figura o dibujo (Valor lógico verdadero).
Posible	Es el valor epistémico que puede tener la necesidad de convencimiento de la proposición. (Valor lógico indeterminado).



Valor Epistémico Semántico	Caracterización
Necesario	Es el valor epistémico propio del seguimiento para dar continuidad a una proposición en relación con otras. (Valor lógico verdadero).
Neutro	Es el valor epistémico imparcial, donde se trata de proposiciones cuyo contenido no se comprende sea por el vocabulario o bien porque falta conocimientos previos (Valor lógico indeterminado).
Absurdo	El valor epistémico de la proposición es imposible, se rechaza su pertinencia (Valor lógico falso).

El análisis estructural se enfocó a la identificación de los conectivos argumentativos para analizar su fuerza y orientación en relación con el enunciado-objeto.

Para el análisis funcional se presenta el episodio 1 y para el análisis estructural el episodio 2. Se consideró la distribución anterior para evidenciar la discusión en cada uno ellos, Los episodios corresponden al trabajo del equipo 1 formado por estudiantes de primer semestre: Jovanni, Martín y Uriel; y del equipo 2 formado por estudiantes de cuarto semestre: Mirel, Job y Fernando. El criterio de selección tomó en cuenta la disposición y compromiso de los estudiantes durante la experiencia educativa.

**Episodio 1.** Análisis funcional en la argumentación sustancial. Caso Martín (equipo 1) en la sesión plenaria.

Martín describe la situación que se plantea desde el contenido, dado que sólo reproduce el contenido que se enuncia, del cual identifica información presuponiendo la pertinencia del enunciado del texto. Plantea estrategias para identificar la velocidad de lo que denomina ciclista B. Además de hacer explícito el enunciado-objeto en la situación: determinar la velocidad de lo que denomina ciclista C. El equipo decidió renombrar al primer, segundo y tercer ciclista como ciclista A, B y C, respectivamente.

- (1) *El problema nos da un dato, que sería del primer ciclista A, quien parte de un punto 0 con velocidad de 40 km/h, sin embargo, nos pregunta: ¿Cuál es la velocidad del ciclista C?, pero para determinar esto, tuvimos que leer todas las demás preguntas y darnos a la tarea de realizarlas. Observamos que sería más conveniente obtener la velocidad del ciclista B; se nos dice que se encontraron después de que cada uno saliera de cierto punto, es decir, después de 1 hora*

45 minutos. Además, se nos dice que el ciclista B salió del punto B, a una distancia de 105 km.

Martín explica apoyándose en la gráfica que dibuja, el comportamiento del primero y segundo ciclista. De la explicación emanan relaciones semánticas, como “Los ciclistas A y B, van a coincidir en algún punto en el tiempo 1.75 horas, determinamos que coinciden a la altura de 70 km del recorrido del ciclista A; donde ambos se encuentran”. Estas relaciones les permitieron determinar la distancia recorrida por el primer ciclista en el tiempo 1.75 horas, y con esto identificar en la gráfica, el punto que corresponde al encuentro de ambos ciclistas (primero y segundo). Con esto es posible afirmar que Martín establece el valor epistémico evidente, a través de los datos percibidos y constatados visualmente (figura episodio 1).

(2) Los ciclistas A y B, van a coincidir en algún punto en el tiempo 1.75 horas, determinamos que coinciden a la altura de 70 km del recorrido del ciclista A. Trazamos una gráfica, una línea verde (recta ascendente) y una línea azul (recta descendente) donde ambos se encuentran. Pero trazamos unas gráficas y nos dieron unas figuras como éstas, como la línea verde y la línea azul; esto, ¿qué nos representa? Que la distancia recorrida del ciclista A es hacia arriba, en cambio la distancia del ciclista B disminuye para encontrarse aquí (en el punto (1.75,70)), cada uno iba en sentido contrario y se encontraron a los 70 km y con un tiempo de 1.75 horas, después de haber iniciado su recorrido.

Esta afirmación permite suponer que aun cuando los estudiantes lo hacen explícito, toman como el origen del sistema de coordenadas el punto A, de donde parte el primer ciclista.

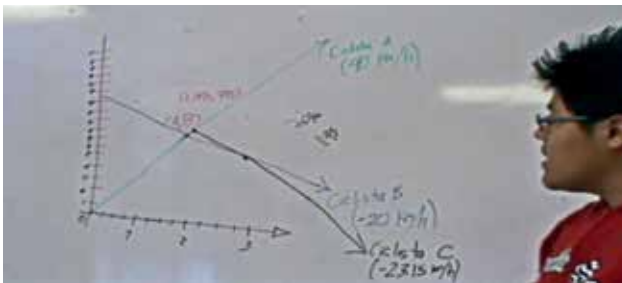


Figura: Episodio 1. Representación gráfica.

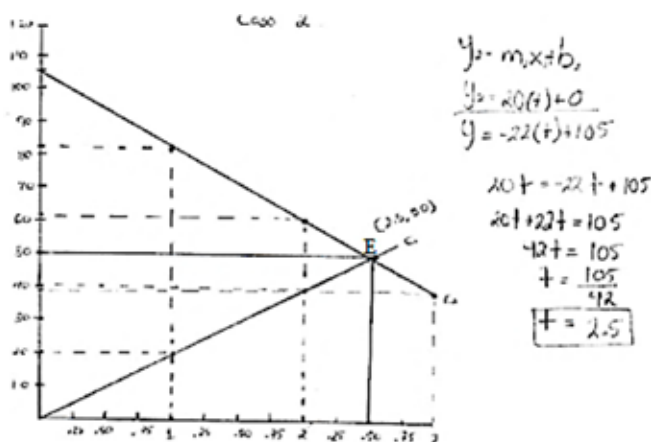
El equipo identificó información de la situación para plantear la siguiente pregunta que les permitió establecer relaciones semánticas.

- (3) *¿qué pasaría si el ciclista A hubiera tenido 20 km/h menos de su velocidad y el ciclista B, 2 km/h menos que la original?*

Martín explicó que el equipo 1 dibujó dos rectas para representar las distancias recorridas por el primero y segundo ciclista, considerando las condiciones:

- (4) *“se hubieran encontrado el primero y segundo ciclista, si la velocidad de primero hubiera sido de 20 km/h menos y la del segundo 2 km/h menos que la original”*

también señaló que ubicaron puntos en el plano cartesiano y determinaron las ecuaciones de las rectas que representan el movimiento de los ciclistas; primer ciclista  $y_2 = 20(t) + 0$  y segundo  $y_1 = -22(t) + 105$  (gráfica 1).



**Gráfica 1.** Representación gráfica del comportamiento del primero y segundo ciclistas si se hubieran encontrado en el punto E.

Los estudiantes del equipo 1, determinaron el valor de  $t$  para el punto de intersección de las dos rectas. Sin embargo, aun cuando el procedimiento que

utilizan es correcto, cometen el error de considerar el valor de  $t = 2.5$  como 2 horas 50 minutos, en lugar de 2 horas 30 minutos (gráfica 1) y con este valor calculan la distancia recorrida por el primer ciclista.

(5) Esto nos indica que tanto el ciclista A como el ciclista B no hubieran coincidido aquí [señala el punto (1.75, 70) en la figura episodio1], hubieran coincidido a las 2 horas con 50 minutos, a los 50 km, esto es un punto hipotético que lo denominaremos E (gráfica 1).

Los estudiantes del equipo 1 representaron las distancias recorridas por los ciclistas en el eje y, consideraron la dirección en que los ciclistas realizaron el recorrido, esto se pudo constatar con el valor negativo que le otorgan a la pendiente de la recta que representa el movimiento del segundo ciclista (gráfica 1).

El equipo 1 calculó la distancia recorrida por los ciclistas considerando la dirección en que se movían (gráfica 1). Las velocidades que habían determinado, les permitieron interpretar que al cabo de una hora de recorrido, el segundo ciclista se aproximó 22 km al punto A, teniendo una distancia de 83 km por recorrer al punto A; mientras que el primer ciclista en ese mismo tiempo se alejó 20 km del punto A. Los investigadores representaron esta situación en la figura 3.



Figura 3. La dirección del movimiento de los ciclistas y el punto E en el que se encuentran.

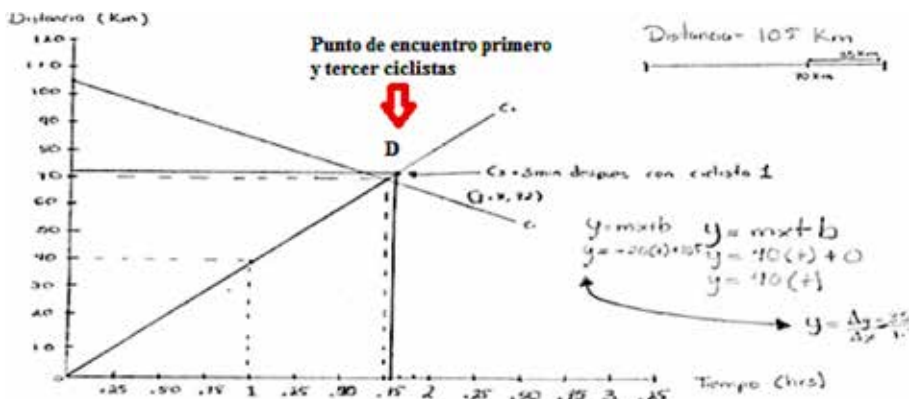
Siguiendo con el supuesto (4) y una vez que habían determinado el valor de  $t$ , el equipo 1 calculó la distancia recorrida por cada ciclista en el punto de encuentro E. El primer ciclista recorrió una distancia de 50 km desde el punto A, el segundo ciclista recorrió una distancia de 55 km desde el punto B. Es importante observar que, aunque el equipo de Martín parecía que había comprendido la situación, en su reporte olvidaron que la nueva velocidad para el segundo ciclista era negativa (figura 4). Dicho evento no fue cuestionado por los investigadores durante la discusión, para no alterar la dinámica entre los equipos.

$$\begin{array}{l}
 1h = 20\text{Km} \\
 2.5 - x = 50\text{Km} \\
 \\
 1h = 22\text{Km} \\
 2.5 = x
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{Velocidades} \\
 C_1 = 20 \frac{\text{Km}}{h} \\
 C_2 = 22 \frac{\text{Km}}{h}
 \end{array}$$

Figura 4. Cálculos para el punto de encuentro E entre el primero y segundo ciclista.

En lo expuesto en los párrafos anteriores se pueden apreciar las relaciones semánticas establecidas a partir de las posiciones del primer ciclista y el segundo ciclista, que llevaron al equipo 1 a emitir la afirmación del encuentro entre ambos ciclistas en el tiempo *2 horas con 50 minutos a los 50 km*, lo cual les permitió identificar las coordenadas del punto E denominado punto hipotético, que derivó de la comprensión del enunciado para producir el valor epistémico “necesario”.

Martín empleó la gráfica para justificar sus afirmaciones, las cuales surgieron de las proposiciones expuestas anteriormente. En un momento posterior estableció otro supuesto para identificar el punto D (gráfica 2), en el que, deberían coincidir el primer ciclista y el tercero, con base en la condición (4). Afirmación que derivó de la comprensión del enunciado y de las representaciones construidas, para producir el valor epistémico “posible”.



Gráfica 2. Encuentro entre el primer ciclista y tercer ciclista.

(6) El punto D, es donde tendría que coincidir el ciclista B con el ciclista C, que sería lo que podemos observar aquí [Martín señala el punto de encuentro D].

Martín explicó que regresaron al texto original para considerar la información relacionada con el primer ciclista y el tercer ciclista; es decir, se considera la posición del tercer ciclista, quién sale del encuentro con el primer ciclista y alcanza al segundo ciclista.

(7) También el mismo problema nos dice que el ciclista A coincide con el ciclista C después de 3 minutos, esto sería en el tiempo 1.8 horas y exactamente a los 72 km, solamente con 2 km de diferencia.

En la gráfica 2 se identifica el punto de encuentro del primer ciclista y el tercer ciclista (punto D). Para determinarlo, el equipo 1 procedió a calcular el tiempo y la distancia recorrida por el primer ciclista (figura 5). El equipo empleó la fórmula de  $v = \frac{d}{t}$  para determinar la distancia recorrida por el primer ciclista después de 3 min del encuentro con el segundo ciclista.

El equipo 1 estableció relaciones semánticas (representación gráfica) para determinar que el tiempo de encuentro entre ambos ciclistas (primero y tercero) era de 1.8 horas, y la distancia de 72 km recorrida por el primer ciclista.

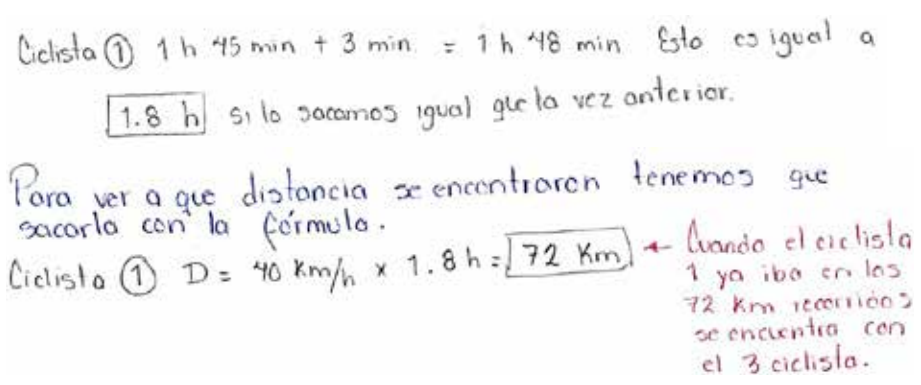


Figura 5. Cálculo del tiempo y la distancia recorrida por el primer ciclista para encontrarse con el tercer ciclista.

Con base en el análisis expuesto en la gráfica 2, Martín identificó el tiempo y la distancia de encuentro entre el primero y tercer ciclista, cuyo valor epistémico es evidente, siendo entonces el valor lógico “verdadero”, lo que permite establecer la conclusión del tiempo y la distancia recorrida entre ambos ciclistas.

- (8) *Posteriormente nos dimos cuenta que a las 2 horas 50 minutos no podían coincidir el ciclista B y el ciclista C, ¿por qué?*
- (9) *Porque esto implicaría que hubiera una disminución de su velocidad y que de algún modo tuviera que cruzar otra vez por aquí, en un caso podría resultar;*

De acuerdo con el resultado obtenido que es la posición de encuentro, el estudiante expone la justificación y emite elementos para evidenciar que el valor epistémico “necesario”, antes enunciado adquiere ahora un nuevo valor epistémico “posible”, ya que de acuerdo con la proposición enunciada (9).

- (10) *sin embargo nosotros hallamos que se encontraron exactamente a las 2.75 horas o a las 2 horas con 45 minutos, a una distancia de 50 km.*

Martín explica el procedimiento que realizó para determinar el tiempo en el que se encontraron el primer y el tercer ciclista (figura 6).

$$\begin{aligned}d_2 &= -20t + 105 \\20t &= 105 - d \\20t &= 105 - 50 \\20t &= 55 \\t &= \frac{55}{20} \\t &= 2.75\end{aligned}$$

**Figura 6.** Desarrollo realizado para determinar el tiempo de encuentro del primer y tercer ciclista.

La conclusión del estudiante para identificar la distancia y el tiempo de encuentro del segundo ciclista y el tercer ciclista, la establece considerando la distancia del primer ciclista, con el supuesto de una velocidad de 40 km/h. Con

esto Martín otorga el valor epistémico evidente apoyado en la gráfica 2 y establece procedimientos específicos de verificación para determinar el valor de lógico de verdad, lo que es respaldado por los integrantes de su equipo.

- (11) *Dados estos resultados lo que tuvimos que hacer fue una división; primeramente entre el número mayor de horas que sería el 2.75 horas y el menor que fue donde coincidiera con el anterior, que sería alrededor de 1.8 horas, hicimos una resta que sería 2.75 horas - 1.8 horas y en la parte superior tendríamos que restar la distancia, esto con base en la fórmula de  $v = \frac{d}{t}$ . Basándonos en esta fórmula nuestra distancia sería 72km - 50km restado contra el tiempo que tardó en recorrerlo, que sería 2.75 horas - 1.8 horas.*
- (12) *Hechos los cálculos se obtuvo que recorrió una velocidad de -23.15 km/h, por lo cual determinamos que sería la velocidad del ciclista C.*

Las relaciones semánticas surgen de las proposiciones anteriores, y permiten establecer la conclusión a partir de la interpretación de la gráfica, lo que posibilita establecer la inferencia de la velocidad del tercer ciclista. El desarrollo realizado por el equipo se presenta en la figura 7.

Pero ahora para saber a que velocidad iba el tercer ciclista es igual a  $v = \frac{d}{t}$

Ciclista ① →  $\frac{72 \text{ Kms (donde se encontraron)} - 50 \text{ Km}}{1.8 \text{ h (tiempo que tardaron en encontrarse)}} = \frac{22}{.95} = \boxed{23.15 \text{ Km/h}}$

Ciclista ②

Velocidad del tercer ciclista

Figura 7. Cálculo de la velocidad del tercer ciclista.

El equipo identificó la velocidad del tercer ciclista, no obstante, no lo explicitó. Martín sí evidenció la velocidad negativa tanto del segundo ciclista como del tercer ciclista, la evidencia se encuentra en la construcción de las rectas.

El alumno concluye la exposición, externando la veracidad de los resultados expuestos, y las proposiciones que argumentan las afirmaciones durante su discurso. Finalmente determina la velocidad del tercer ciclista considerando el



valor epistémico de la proposición (12), como evidente, lo cual fue apoyado por su equipo, con lo que se otorgó el valor lógico verdadero, y la evidencia se encuentra en la gráfica.

El análisis funcional del razonamiento del estudiante contribuyó a la identificación y análisis de los elementos que conforman el funcionamiento del razonamiento del estudiante, desde la visión de Duval (1999), en la que se puntualiza la relevancia del enunciado-objeto. Es decir, la proposición se quiere justificar, así como las proposiciones que emergen del análisis expuesto por Martín, centradas en los valores epistémicos lógicos y del contenido semántico de las proposiciones.

Las reflexiones que Martín expuso, como representante del equipo 1, muestran los diversos matices de la argumentación sustancial, y permiten establecer el razonamiento del equipo; la exposición de las proposiciones que utilizan para justificar cada una de sus afirmaciones. De la exposición emanan diferentes momentos:

El primero fue la identificación de información relevante en la situación: la distancia que separa al primer ciclista del segundo ciclista, así como el tiempo de encuentro.

El segundo y tercer momentos se enfocaron al contexto de enunciación, el paso de las premisas a una conclusión. El segundo momento, conjunta los discursos previos en relación con los que se organiza el discurso: (5). En este segundo momento el equipo establece premisas y una conclusión, de donde surge como conjetura el punto hipotético E, proposición que fue establecida cuando se examinó el contenido del enunciado en la situación problemática, y de la que emerge el valor epistémico “necesario” asociado al valor de verdad “verdadero”.

Lo anterior permite establecer relaciones semánticas entre sus contenidos, siendo éste el tercer momento, en el que se estructura la organización propia del discurso: (8), (9) y (10).

La exposición muestra las relaciones semánticas, mediante la argumentación, para refutar la proposición y establecer la conclusión, con base en las relaciones entre las proposiciones que surgieron del análisis de las gráficas, que fueron construidas para tal fin.

El cuarto momento establece la necesidad de un razonamiento válido orientado al valor lógico del enunciado-objeto, que es, determinar la velocidad del tercer ciclista, para ello se expone: (11) y (12).

El razonamiento del equipo 1 muestra el valor lógico de verdad del enunciado-objeto. Esto es porque el equipo calculó el resultado de la velocidad para

el tercer ciclista, a partir de la distancia entre el primer ciclista y el segundo ciclista, lo cual evidencia que el equipo realizó una inferencia a partir de la posición y el tiempo.

Referente a las representaciones semióticas, el equipo 1 construyó y exploró las representaciones gráfica y algebraica para analizar y discutir el contenido del texto. La representación gráfica (gráfica 1) acuñó información para llevar a cabo tratamientos, los cuales se enfocaron de tipo cualitativo y cuantitativo, el primero permitió identificar las variables visuales del sentido de inclinación del trazo y la posición del trazo respecto al origen del eje vertical, en cuanto al tratamiento cuantitativo el equipo determinó la escala en ambos ejes, concediendo la identificación de puntos en el plano cartesiano, así como el nombramiento de los ejes: eje "y" las distancias recorridas por los ciclista y eje "x" tiempo transcurrido, lo que contribuyó para llevar a cabo desplazamientos en las ordenadas coordinados con desplazamiento en las abscisas  $\left(m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ , información que fue transformada para establecer la conversión en la representación algebraica y con ello la construcción de las expresiones algebraicas, específicamente la articulación se estableció entre las variables visuales (representación gráfica) y las variables categóricas (representación algebraica), así como el contenido numérico, lo que benefició para determinar el comportamiento de la pendiente y el valor de la ordenada al origen, y con ello la construcción de las expresiones algebraicas:  $y_2 = 20(t) + 0$  y  $y_1 = -22t + 105$ .

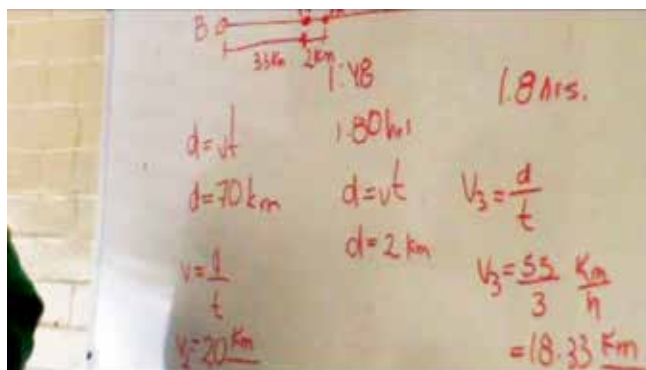
En este orden de ideas y continuando con la disertación del equipo 1, los estudiantes establecieron nuevas posturas para identificar el punto de encuentro entre el primer ciclista y el tercero, para ello emplearon la representación gráfica (gráfica 2), con base en la condición expuestas en el texto (4) y cuyo tratamiento fue cualitativo y cuantitativo, pues ubicó la orientación de los ciclistas en el plano cartesiano, así como su ubicación de acuerdo con la escala establecida, lo que derivó en la determinación del punto de encuentro, para explorar en la representación algebraica  $\left(v = \frac{d}{t}\right)$  tratamientos cuantitativos que permitieron determinar tiempo y distancia recorrida por el primer ciclista, y generar parejas ordenadas en la representación gráfica, lo que derivó en la construcción de la expresión algebraica  $y = 40t$ . Finalmente para determinar el tiempo de encuentro entre el primer ciclista y tercer ciclista fue por medio de la expresión algebraica  $d_2 = -20t + 105$ , misma que fue construida en la representación gráfica empleando tratamientos cualitativos y cuantitativos para identificar por un lado las variables

visuales; sentido de inclinación del trazo y la posición del trazo respecto al origen del eje vertical, y por otro el comportamiento de la pendiente.

**Episodio 1.** Análisis funcional en la argumentación sustancial. Caso Fernando (equipo 2). A continuación se expone el análisis funcional del equipo 2, nos referiremos únicamente a la condición que se establece en la situación, “se hubieran encontrado el primero y segundo ciclista, si las velocidad de primero hubiera sido de 20 km/h menos y la del segundo 2 km/h más que la original”, para determinar la velocidad del tercer ciclista, que se convirtió en el punto de debate entre los equipos.

(13) Nos falta el tercero, para este caso, tenemos un tiempo de 1.8 horas porque el tercero salió del mismo punto del segundo y se cruzó con el primero, (14) entonces nos falta nada más la distancia, ya la tenemos porque ya sabemos que mide 20 km si le restamos 2km de diferencia del punto de encuentro del primero con el tercero nos va a dar el total que esto mide 33 km, (15) entonces nos dice que recorrió 33 km en 1.8 horas, tenemos distancia y tiempo, haciendo cálculos nos va a dar que eso es igual a 55/3 km/h.

Dadas las proposiciones (13), (14) y (15), las cuales evidencian las **relaciones semánticas**, Fernando expone el diagrama para determinar la distancia recorrida en el punto de encuentro entre el primer ciclista y el tercer ciclista, y determina la distancia de 33 km. De acuerdo con el diagrama, el tercer ciclista recorrió 33 km en un tiempo de 1.8 horas, con una velocidad de 55/3 km/h (Ver figura 8).



**Figura 8.** Diagrama del equipo 2 para determinar la velocidad del tercer ciclista.

Fernando **concluye** su exposición manifestando el **valor lógico** de **veracidad** de los resultados, y las proposiciones que argumenta durante su discurso, finalmente establece la velocidad del tercer ciclista considerando el **valor epistémico** semántico de la proposición (15); **Evidente**, siendo reforzado por el diagrama, el cual muestra la veracidad de la conclusión, siendo ésta una **Representación válida**. Cabe señalar que en este episodio de estudio no están presentes las preguntas.

**Episodio 2.** Análisis estructural de la argumentación sustancial. Debate entre los equipos.

La dimensión estructural sustentó el análisis en la argumentación sustancial, para mostrarlo se procedió a identificar pasos relacionados entre sí, de los que emergen “bloques” articulados de proposiciones. Lo que asegura la contundencia de la argumentación de los estudiantes para cada una de las preguntas enunciadas en el problema, así como la que corresponde al enunciado-objeto, la velocidad del tercer ciclista.

Para organizar la argumentación se consideró la relación entre la fuerza y la orientación de los argumentos con el enunciado-objeto. En este proceso los conectivos argumentativos tienen un papel fundamental, ya que de ellos depende la identificación de la orientación y la fuerza de los argumentos.

La discusión entre los equipos de la situación *Los ciclistas*, aportó evidencias para el análisis estructural en la argumentación sustancial. A partir del debate se realizó el análisis de los argumentos entre las diferentes posturas en relación con el enunciado-objeto, se analizaron las proposiciones y los valores epistémicos que emergieron, así como la relación entre los diferentes enunciados, se determinó también la continuidad del discurso sobre la tesis objeto de la discusión.

El análisis se inició identificando las proposiciones emitidas por los dos equipos cuando pretendían ganar la adhesión de más miembros, o cuando se refutaban las afirmaciones que exponían, de las que emergieron proposiciones y conectivos argumentativos que permitieron establecer, desde el contenido de las proposiciones, una contra-argumentación para evidenciar el valor epistémico de la afirmación.

Martín (equipo 1): [1] *Mi criterio para establecer el 23.15 km fue tomar el punto hipotético de A y B, de A y C, y B y C, por eso obtuve 23.15 km y [2] mi duda es por los 33 km, porque [3a] siguiendo ese criterio se debieron haber encontrado en un*

*punto de 18.33 km en un punto muy similar al 50, [3b] sabiendo que debió estar A y B, [4] no sé si con el 18.33 km se alcanza a encontrar el B y C.*

Fernando (equipo 2): *Sí, [5] nos salió que se encuentran casi a la mitad del punto E [6] de hecho nos salió igual que en tu gráfica 55 de aquí y hasta aquí y 50 de aquí y hasta aquí.*

La participación de los alumnos muestra la necesidad de confirmar cada una de las conclusiones que expresó el equipo 2, para determinar la velocidad del tercer ciclista (enunciado-objeto). El interlocutor del equipo 1, expuso su postura utilizando tres proposiciones (2, 3a y 3b), y utilizó estas proposiciones para establecer las condiciones para que se diera el encuentro entre el segundo ciclista y tercer ciclista, retomando las conclusiones a las que llegó su equipo. Además, manifestó su opinión en relación con el punto de encuentro entre los ciclistas (proposición 4). El **valor epistémico semántico** (ver tabla 1) de la proposición 4 es **posible**, por lo que el interlocutor del equipo 1 tuvo la necesidad de confirmar la proposición.

Estas cuatro proposiciones presentan los conectivos argumentativos: “porque”, “sabiendo que”, “siguiendo”, los que evidencian la orientación hacia el enunciado-objeto que es determinar la velocidad del tercer ciclista.

El interlocutor del equipo 1 muestra confusiones, la primera considera 18.33 km como la distancia recorrida por el tercer ciclista, concluye dudando si con la distancia de 18.33 km puede encontrarse al segundo ciclista con el tercer ciclista.

Por su parte el equipo 2 expone las proposiciones 5 y 6 para definir su postura en respuesta a lo expuesto por el integrante del equipo 1. El interlocutor del equipo 2, mencionó la coincidencia con las distancias obtenidas al asumir la velocidad del primer ciclista con 20 km/h menos y la del segundo con 2 km/h menos que la original (ver figura 8). Señaló el punto de encuentro E, en la gráfica del equipo 1 (gráfica 1). El **valor epistémico semántico** de la proposición 6 cuya categorización es **necesario** (ver tabla 1), conecta una proposición con otras.

El equipo 2 durante su intervención no mencionó la pregunta sobre la velocidad del tercer ciclista, y sólo confirmó los resultados obtenidos para las distancias recorridas por el primer y segundo ciclistas, con lo que dejó de lado la velocidad del tercer ciclista. Es decir, a la velocidad del tercer ciclista, le otorga un valor epistémico “neutro”, pues se identifica que el contenido de la situación no se comprendió bien o la pregunta no fue identificada.

El equipo 2 infiere que el encuentro entre el ciclista A y el ciclista B “se encuentran casi a la mitad del punto E”, el interlocutor del equipo 2 confunde la distancia recorrida con el punto de encuentro.

Jovanni (Equipo 1): [7] *Es que el criterio de ellos es un poco menos exacto, establecieron el tiempo en un solo plano, [8] pero en el caso de Martín se toma el tiempo como una variable, y [9] ellos sólo lo toman como algo que está ahí, [10] pero en el caso de Martín, se ve la línea negra de A y B, se puede obtener la distancia.*

El integrante del equipo 1 señala la debilidad de los argumentos del equipo 2, con las proposiciones 7 y 10 y manifiesta la contra-orientación apoyado por el conectivo argumentativo “pero”, para fortalecer las conclusiones de su equipo. Las proposiciones 8 y 10 muestran la importancia de la identificación de las variables para analizar el comportamiento de los ciclistas, así como la de la gráfica para determinar su distancia, cuyo valor epistémico es la “evidencia” perceptiva de la gráfica (gráfica 1).

Uriel (Equipo 1): [11] *Porque ellos no tomaron en cuenta los puntos que influyeron para sacar la velocidad de 23.15 km/h, [12] lo que a ustedes les falló es que no sacaron su otra variable, por lo que no tomaron los otros dos factores que tomamos.*

El equipo 1 muestra la organización de su razonamiento argumentativo con el empleo del conectivo “porque”, el cual denota la conclusión de los “puntos” faltantes en la argumentación del equipo 2, lo que condujo a la obtención de dos diferentes velocidades para el tercer ciclista. Respecto al conectivo “por lo que” permitió concluir la falta de “dos factores”, los cuales influyen para determinar la velocidad del tercer ciclista, dado que ambos equipos consideraron posturas diferentes relacionadas con el punto de partida del tercer ciclista.

Uriel establece la falta de “dos factores”, es decir considera la presencia de las variables que intervienen en la situación: el tiempo y la distancia, incluidos en la gráfica que trazaron, mientras que el equipo 2 muestra las distancias a través del diagrama (ver figura 5), por lo que arguye la falta de la variable tiempo.

Fernando (Equipo 2): [13] *Pues sí, no lo tomamos en cuenta, lo que te da, en esta parte del problema, de menos kilómetros, [14] entonces no lo relacionamos. [15]*

*Tomando en cuenta que el tercero se cruza con el primero, [16] entonces diferimos a partir de esto, nada más como dice aquí, tres minutos después del encuentro, [17] ya que sacamos que son los kilómetros, restando los kilómetros del tercer ciclista en 1.8 horas, [18] fue así como encontramos su velocidad sin tomar en cuenta lo que se plantea aquí.*

Fernando confirma con las proposiciones 13, 14, 15 y 16, la aseveración de Uriel, para agregar elementos que contribuyeron a evidenciar la omisión por parte del equipo 2, sobre el supuesto enunciado en el problema (*“en el cual se hubiera encontrado el primer y el segundo ciclista, “si la velocidad del primero hubiera sido 20 km/h menos y la del segundo 2 km/h menos”*), relativo a las velocidades del primero y segundo ciclistas, respectivamente. No obstante, las proposiciones 16 y 17 son las conclusiones de las premisas anteriores para exhibir la ruptura y la justificación del porqué no llegan a la misma conclusión.

La velocidad del tercer ciclista se obtuvo considerando el desplazamiento del primer ciclista e ignoró el desplazamiento del segundo ciclista, lo que trajo por consecuencia que la velocidad del tercer ciclista fuera 33 km/h.

Los conectivos argumentativos “entonces” establecen las conclusiones de la argumentación que Fernando expone, por otra parte los conectivos co-orientados; “ya que”, “pues sí” y “así como” permiten continuar con la discusión hacia el enunciado-objeto.

El análisis estructural desarrollado durante el debate entre los equipos evidenció la argumentación sustancial que emplearon los alumnos para justificar cada una de sus afirmaciones, para ello se identificó y analizó el contenido de las diferentes proposiciones expuestas y los valores epistémicos generados por parte del interlocutor, pero también por los demás miembros de los equipos.

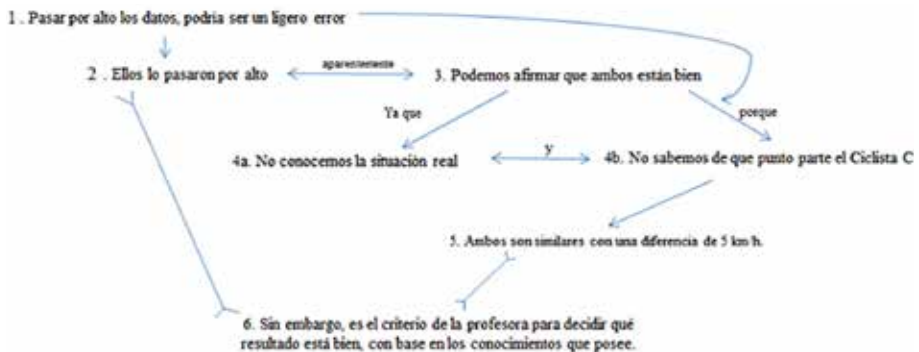
Los estudiantes presentaron encadenamiento por conexiones extrínsecas; es decir, los enunciados fueron sucesivos y acumulativos, agregándose unos a otros para respetar la coherencia de las velocidades de los ciclistas y el supuesto expuesto en el problema, con ello se dio continuidad a la discusión, reforzando la similitud semántica, ya que el debate siempre se orientó hacia los mismos objetos; distancias, velocidades y el análisis del supuesto sobre las velocidades del primero y segundo ciclistas, para dirigirse hacia el enunciado-objeto: determinar la velocidad del tercer ciclista.

El siguiente episodio expone la continuidad temática a través del encadenamiento de los pasos de razonamiento en la argumentación sustancial, en la cual se presentan las premisas y las conclusiones, así como las relaciones de oposición

y las relaciones de equivalencia. Es la última intervención del equipo 1 para concluir con el debate.

Martín (equipo 1):

- (1) Pasar por alto los datos podría ser un ligero error
- (2) y ellos lo pasaron por alto.
- (3) Aparentemente podemos afirmar que ambas podrían estar bien,
- (4a) ya que no conocemos la situación real y
- (4b) no sabemos de qué punto parte el ciclista C.
- (5) Ambos son muy similares con una diferencia de 5km/h,
- (6) sin embargo es el criterio de la profesora para decidir qué resultado está bien, con base en los conocimientos que posee.



**Figura 9.** Organización Estructural de la argumentación sustancial durante el debate expuesto por los equipos.

El esquema estructural (figura 9) comprende dos tipos de dobles flechas: una representa la relación de equivalencia ( $\longleftrightarrow$ ) y las otras la relación de oposición ( $\rightrightarrows$ ). En el esquema (figura 9) se pueden identificar tres pasos de razonamiento explícitos que el alumno expone para justificar los resultados que se obtuvieron al concluir el debate.

1. El enunciado 1 es la premisa y el enunciado 2 la conclusión.
2. El enunciado 4b es premisa y el enunciado 5 la conclusión.
3. El enunciado 3 es premisa y el enunciado 4b la conclusión.



4. Los enunciados 2 y 3 son considerados como tercer-enunciado y cuya conclusión es el enunciado 4.

Se observa que el enunciado 3 presenta dos posturas durante el paso del razonamiento, como conclusión y como tercer-enunciado. Este doble papel de los enunciados se presentó durante el debate entre los equipos, siendo entonces una característica común en la argumentación y en particular en la argumentación sustancial.

Además, la relación de oposición entre el enunciado-objeto y el enunciado 6, así como el enunciado 1 y 6, en los cuales el estudiante exhibe la necesidad de que el docente acepte o rechace las conclusiones emitidas por los equipos, y, por otro lado, las relaciones de equivalencia presentes durante la argumentación, muestran el encadenamiento de los enunciados y las diferentes relaciones semánticas, constituyendo con ello la continuidad temática durante el discurso.

Sin embargo, es relevante mencionar la discusión establecida entre ambos equipos y el análisis realizado para argumentar cada una de las afirmaciones que emergieron del debate, en este sentido, la conclusión del equipo 1, quien presentó diversas relaciones semánticas para emitir el valor de verdad del enunciado-objeto, cierra su participación exponiendo la necesidad de que el docente tome la decisión final de la discusión, es decir, evidenciar el valor lógico de las conclusiones expuestas por los equipos. Se aprecia por parte del equipo 1 (Martín), el valor lógico de las conclusiones emitidas por ambos equipos, como "indeterminado".

*Caracterización de la argumentación sustancial.* Con base en el análisis funcional y estructural, se caracterizó la argumentación sustancial desde la teoría expuesta por Duval (1999). Se identificaron las siguientes características discursivas:

- I. Focalización del discurso. Enunciado-objeto (tesis) puede ser implícito o explícito.
- II. Producción del discurso; contenido para modificar el valor epistémico de la proposición.
- III. Aspectos de las proposiciones, intencionalidad del contenido.
- IV. Relaciones entre las proposiciones, conectivos argumentativos entre proposiciones en pro y en contra.

- V. Razonamiento, razones para volver comprensible un dato, un fenómeno o conjeturas.
- VI. Continuidad, indica al posición de una proposición en relación a otras proposiciones, es decir, determinan su lugar en la organización del discurso.

La tabla 2 muestra las características discursivas identificadas en el estudio:

**Tabla 2.** Caracterización de la argumentación sustancial desde un enfoque cognitivo. Adaptación de Argumentación, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? Duval, R. (1999).

Características Discursivas	Caracterización
I. Focalización del discurso.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Explora a través de escudriñar el contenido de la situación</li> <li>• Identifica los elementos primarios en el texto</li> <li>• Identifica los elementos secundarios en el texto</li> <li>• Identifica el enunciado-objeto</li> </ul>
II. Producción del discurso.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Busca aclarar/ampliar el contenido semántico de la intervención</li> <li>• Busca aclarar/ampliar el contenido de la representación en la intervención</li> <li>• Interpretación personal de lo que sucede/se dice en la intervención</li> <li>• Establece la verosimilitud/absurdo del contenido en la intervención</li> <li>• Establece la certeza/falsedad del contenido en su intervención</li> <li>• Evalúa su pertinencia desde su contenido representacional</li> </ul>
III. Aspectos de las proposiciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expone proposiciones semánticas</li> <li>• Determina analogías</li> <li>• Ejemplifica encontrando regularidades</li> <li>• Interpreta las proposiciones desde distintos puntos de vista</li> <li>• Identifica similitudes/diferencias entre las premisas y las conclusiones en la intervención</li> <li>• Identifica signos comunes entre las premisas y las conclusiones en la intervención</li> <li>• Comparativo para establecer semejanza o diferencia en el proceso</li> </ul>
IV. Relaciones entre las proposiciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establece conectivos argumentativos: “o”, “pero”, “además”, “entonces”, “se tiene”, para agregarse unos a otros y reforzarse mutuamente o para oponerse</li> <li>• Establece incongruencias en el sistema argumentativo presentado entre dos aserciones de las cuales es necesario elegir una</li> </ul>

Características Discursivas	Caracterización
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Externa expresiones como “razón de más” para fortalecer el enunciado-objeto</li> <li>• Externa expresiones como “pero” para disentir el enunciado-objeto.</li> <li>• Deriva conclusiones con premisas dadas</li> <li>• Expone la relación con una intervención o grupo de intervenciones particular (explícito o implícito, convencer a otros)</li> <li>• Expone relaciones para establecer inclusiones/exclusiones de los significados del contenido</li> <li>• Establece explícitamente la relación entre el contenido de las proposiciones (conectivos argumentativos)</li> <li>• Establece conexiones extrínsecas para dar coherencia a las proposiciones emitidas durante la intervención.</li> </ul>
V. Razonamiento	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Emplea reglas implícitas derivadas del contenido semántico de las proposiciones</li> <li>• Emplea representaciones (pictográfica, algebraica, numérica y gráfica) para establecer razones durante el discurso</li> <li>• Privilegia la presentación de razones para justificar el enunciado-objeto</li> <li>• Expone conclusiones que emergen de la discusión</li> <li>• Explicita el contenido de las representaciones para establecer la incoherencia o verosimilitud de lo expuesto en una proposición</li> <li>• Establece conjeturas y preguntas en su intervención</li> <li>• Establece relaciones de razones en pro o en contra</li> <li>• Considera elementos de intervenciones anteriores (del mismo compañero o no) como elementos/antecedentes</li> </ul>
VI. Continuidad	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta la secuencia de las proposiciones desde una organización global</li> <li>• Ejemplifica la determinación de casos que ilustran la pertinencia y fuerza del proceso, o de la situación argumentada</li> <li>• Enumera ejemplos para exponer la aplicabilidad del caso presentado</li> <li>• Presenta proposiciones que fortalecen/debilitan las anteriores, respetando la coherencia del tema desde una perspectiva global del discurso</li> </ul>

De acuerdo con la caracterización de la argumentación sustancial, a continuación se analiza un episodio durante la discusión entre los equipos, para evidenciar la presencia o bien ausencia de las características discursivas identificadas.

Los estudiantes presentaron proposiciones para ganar la adhesión de los equipos o bien para refutar las afirmaciones que se expusieron, en las cuales se hacen evidentes las proposiciones que emplearon y los conectivos organizativos para establecer, desde su contenido (empírico), una contra-argumentación que permitiera demostrar el valor epistémico de la afirmación:

***Martín:** Mi duda es ¿qué criterios tomaron suponiendo que lo que dices es verdad?, **porque** de donde parte el ciclista C yo lo reflejé en mi gráfica, ¿cuáles fueron sus criterios para decir que 33 km fue la distancia recorrida por el tercer ciclista o por qué parte del punto C?*

La respuesta que emite el interlocutor del equipo 2 al anterior cuestionamiento, la realiza empleando siete proposiciones que le permitieron desde su perspectiva dar un argumento para establecer el valor epistémico de verdad de su enunciado-objeto.

***Fernando:** (1) Es más o menos lo mismo, (2) **se dice que** el ciclista C se cruzó con el ciclista A, (3) si se cruzaron **significa que** iban en trayectorias contrarias, o (4) sea, uno en este punto y otro en este otro, y (5) cuando se **dice que** lo alcanzó, (6) **significa que** iban en la misma trayectoria, (7) si tiene una velocidad mayor, lo alcanzó.*

Expresa un valor epistémico “posible” de las proposiciones (1). Las dos proposiciones siguientes se encuentran conectadas por los conectivos argumentativos “se dice que” y “significa que” que son conectivos co-orientación, los cuales contribuyeron para fortalecer la conclusión de la afirmación. Respecto a los conectivos “dice que” y “significa que” que conectan a las proposiciones 5 y 6 son conectivos co-orientados para establecer la conclusión que presenta la proposición 7.

Respecto a la proposición 2 el estudiante extrae información del contenido expuesto en el texto del problema, y emite en la proposición 3 la conclusión del encuentro entre el primer ciclista y el tercer ciclista. La proposición 4 expone el argumento con el cual justifica su afirmación, para ello emplea el diagrama diseñado para tal propósito. Las proposiciones 5 y 6 son respectivamente premisa y conclusión, y finalmente la proposición 7 emite la afirmación para establecer que la velocidad del tercer ciclista es mayor que la del primer ciclista.

Las respuestas que emiten los interlocutores (equipo 1 y 2) al cuestionamiento del que escucha tienen un nivel argumentativo que cumple con los criterios (tabla 3):

**Tabla 3.** Criterios Argumentativos de los interlocutores.

Criterios	Descripción	Evidencia
I	Explora a través de escudriñar el contenido de la situación e identifica los elementos primarios en el texto.	<i>¿cuáles fueron sus criterios para decir que 33 km fue la distancia recorrida por el tercer ciclista o por qué parte del punto C?...</i>
II	Busca aclarar/ampliar el contenido de la representación en la intervención, interpreta lo que sucede/se dice en la intervención y establece la verosimilitud /absurdo del contenido en la intervención.	<i>Mi duda es ¿qué criterios tomaron suponiendo que lo que dices es verdad?</i>
III	Ejemplifica encontrando regularidades, identifica similitudes/diferencias entre las premisas y las conclusiones en la intervención.	<i>Es más o menos lo mismo...</i>
IV	Establece conectivos argumentativos, expone relaciones para establecer inclusiones/exclusiones de los significados del contenido	<i>porque de donde parte el ciclista C yo lo reflejé en mi gráfica...</i>
V	Emplea representaciones (pictográfica, algebraica, numérica y gráfica) para establecer razones durante el discurso, privilegia la presentación de razones para justificar el enunciado-objeto. Expone conclusiones que emergen de la discusión	<i>si se cruzaron <b>significa que</b> iban en trayectorias contrarias, sea, uno en este punto y otro en este otro... <b>significa que</b> iban en la misma trayectoria...</i>

Criterios	Descripción	Evidencia
VI	Ejemplifica la determinación de casos que ilustran la pertinencia y fuerza del proceso, o de la situación argumentada y presenta proposiciones que fortalecen/debilitan las anteriores, respetando la coherencia del tema desde una perspectiva global del discurso	<i>se dice que el ciclista C se cruzó con el ciclista A y cuando se dice que lo alcanzó... Si tiene una velocidad mayor, lo alcanzó.</i>

Durante la discusión los estudiantes presentaron diferentes afirmaciones del contenido en las proposiciones para fortalecer los argumentos. En cuanto a la elaboración matemática el desarrollo fue de tipo empírico, apoyados con diferentes representaciones para exponer la comprensión de la situación y justificar sus afirmaciones.

La elaboración discursiva privilegió formas de corte narrativo del discurso, puntualizando proposiciones derivadas de dos posturas por parte de los equipos a la problemática expuestas así como la riqueza de razones y/o argumentos durante la discusión para determinar el valor lógico del enunciado-objeto.

Durante el proceso emergieron diferentes valores epistémicos tanto del interlocutor como del que escucha, para generar conjeturas y/o preguntas, las cuales fueron analizadas y discutidas por medio de las relaciones semánticas entre los contenidos que surgieron durante el debate, dando así continuidad al discurso, el estudio expone el análisis funcional y estructural del razonamiento en la argumentación sustancial por parte de los estudiantes de Nivel Medio Superior durante la discusión y análisis en problemas contextualizados evocados, dado que se parte de una situación conocida y común para todos los integrantes de los equipos.

## CONSIDERACIONES FINALES

El análisis cognitivo de la argumentación sustancial evidenció el proceso por el cual transita el estudiante para justificar las afirmaciones que emergieron durante el debate. Se habla entonces de los valores epistémicos que el estudiante determinó a partir de la comprensión de las diferentes proposiciones construidas durante la discusión, y que son dirigidas hacia el enunciado-objeto.

Durante el debate, los estudiantes expusieron diferentes proposiciones de nivel descriptivo, las cuales surgieron del texto expuesto en el problema contextualizado, hasta la construcción de conjeturas y preguntas que emergieron de la diversidad de perspectivas en la discusión, contribuyendo a enriquecer las relaciones semánticas para establecer conclusiones y poder abonar hacia el enunciado-objeto.

Del análisis funcional y estructural del razonamiento emergen las características discursivas de argumentación (Duval, 1999), desde este marco se determinaron algunos elementos que permitieron caracterizar a la argumentación sustancial desde la cognición, específicamente se examinaron los aspectos de la proposiciones emitidas por los alumnos de Nivel Medio Superior, así como las relaciones entre ellas, la producción del discurso, el razonamiento y la continuidad.

Se reconoce la conformación de las premisas y conclusiones, además de puntualizar el encadenamiento de las proposiciones por conexiones extrínsecas, lo cual fue evidente durante la discusión entre los equipos, pues se agregaban unas a otras respetando la coherencia expuesta en el problema contextualizado, asegurando con ello la continuidad en el discurso.

Las características identificadas muestran la inclinación del alumno por desarrollar procesos intuitivos que le permitieron establecer conjeturas para fortalecer el pensamiento reflexivo, y con ello construir proposiciones para emitir afirmaciones razonadas, y avanzar en la pertinencia del proceso.

En términos generales la experiencia resultó rica, en cuanto a la diversidad de argumentos expuestos por los estudiantes, los cuales fueron aceptados o rechazados, con base en la fuerza y pertinencia que el estudiante logró desde el valor epistémico del contenido en la proposición.

Por otra parte, durante la experiencia, los procesos desarrollados con los grupos muestran que si el proceso se realiza sólo en forma escrita, limita las conclusiones que surgen y en consecuencia la solución se dirige a formular básicamente una respuesta a la pregunta expuesta, sin que se pueda apreciar con claridad el proceso que se sigue para explicar, conjeturar o bien argumentar la respuesta.

La discusión entre los equipos de primer semestre (equipo 1) y cuarto semestre (equipo 2), mostraron semejanzas y diferencias en el proceso de argumentación. Una de las semejanzas identificadas fue la búsqueda y formulación de conjeturas por ambos equipos, y el encadenamiento de proposiciones para asegurar la continuidad entre las conclusiones que emergieron durante el debate. Respecto

a las diferencias identificadas, el equipo 1 expuso con mayor fluidez los argumentos para cuestionar las conclusiones del equipo 2, mientras que el equipo 2 se limitó a exponer argumentos para justificar sus conclusiones, sin que existiera cuestionamiento referido al desempeño emitido por el equipo 1. Cabe señalar que ambos equipos debatieron el problema contextualizado desde sus ideas previas y estrategias argumentadas oportunamente en las unidades de aprendizaje respectivas.

Para el caso de la argumentación de manera oral, la confrontación se expuso en tres escenarios: contextualizada-alumno-argumentos, de ahí que la solución no se restringe a la sola respuesta, sino a la búsqueda de alternativas de solución que garanticen el carácter de claridad, coherencia y en consecuencia la minimización de la ambigüedad. La confrontación entre ambos equipos de distintos niveles, muestra las ideas intuitivas que desembocan en proposiciones conectadas por conectivos argumentativos, para dar soporte a posibles generalizaciones, privilegiando la presentación de razones para ser discutidas en pleno, exhibiendo argumentos que contribuyan a la solución del problema contextualizado planteado sin hacer énfasis en la obtención de la respuesta correcta puesto que es un proceso de argumentación y construcción de conocimiento.

Las vías de exploración empleadas por los estudiantes en las representaciones gráfica y algebraica, fueron por un lado, la interpretación del contenido desde una visión cualitativa; es decir la identificación de las variables visuales del comportamiento del trazo para establecer conexiones con las variables correspondientes en la representación algebraica, y por otro la vía del punteo (cuantitativa) para designar la asociación de valores particulares a los puntos marcados en el plano de referencia, cabe mencionar que el equipo exploró parejas ordenadas importantes para progresar en la actividad o bien para plantarse nuevas conjeturas que beneficiaron el desarrollo de la tarea.

La escala fue otro factor notable en la construcción de los trazos, pues dependió de ello el comportamiento de la gráfica, en este caso los estudiantes consideraron escalas distintas para ambos ejes, lo que originó alternaciones en las variables visuales, no obstante el equipo identificó el contenido cualitativo y aunado con el cuantitativo (punteo), permitió transformar la información en la representación algebraica para construir sus respectivas representaciones algebraicas.

Desde el punto de vista de los recursos matemáticos, el estudiante recurre inicialmente a apoyos empíricos y la influencia que ejerce el trabajo en equipo permite modificar y buscar mayores niveles matemáticos (representaciones,



definiciones, registros). De esta manera se fue sustituyendo el aspecto empírico por los recursos analíticos. En cuanto a la manifestación de recursos discursivos, se observó al inicio el predominio del recurso descriptivo y a medida que se fue desarrollando el trabajo, el recurso tuvo matices argumentativos sustanciales.

La presente investigación contribuye al desarrollo y fortalecimientos de uno de los pilares en el quehacer matemático: la argumentación es un proceso longitudinal que se presenta de manera gradual durante su formación, por lo que es indispensable dotar al alumno de herramientas y estrategias en problemas contextualizados evocados, con la finalidad de construir la plataforma a partir de sus conocimientos previos que le permita emitir sus intuiciones por medio de procesos heurísticos para ser consolidados en la construcción de conjeturas, explicaciones, argumentaciones y razonamientos. Las discusiones permitieron exponer el valor epistémico de verdad de sus conclusiones de manera razonada ante un público crítico, para externar sus argumentos sustanciales y establecer discusiones que evidencien cada uno de sus argumentos para ser aceptados o rechazados de manera consensuada.

Los autores agradecen el patrocinio otorgado por el Instituto Politécnico Nacional por medio de la Secretaría de Investigación y Posgrado para realizar y presentar este artículo con la investigación que tiene por números de registro 20120794.

## REFERENCIAS

- Corredor, L. y Calderón, I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(1), 5-21.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. y Marazzani, I. (2003). Ejercicios anticipados y zona de desarrollo próximo: comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon* 57, 357-378.
- Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar y explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Pitagora Editrice Bologna y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In Nakahara, T. and Koyama, M. (Eds.). *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Conference of PME*. Nishiki Print Co. Ltf, Hiroshima. pp. 55-69.
- Duval, R. (2007). Cognitive Functioning and the Understanding of Mathematical Processes of Proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers. pp. 137-162.

- Fridman, L. (1995). *Metodología para resolver problemas de matemáticas*. México: Iberoamérica.
- Goizueta, M. y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias Revista de investigación y experiencias didácticas* 31 (1), 61-77.
- Godino, J. y Recio A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. 19 (3), 405-414.
- Krummeheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.), *The Emergence of Mathematics Education*. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 14-25.
- Marmolejo, E. y Solano, M. (2005). Convención didáctica sobre la demostración geométrica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 139-145. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ramos A. y Font V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. En *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535-556.