¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos

How Abundant are the Sets of Numbers? Students Comparing Infinite Sets of Numbers

Virginia Montoro[1]
Nora Scheuer[2]
Ma. del Puy Pérez Echeverría[3]

Resumen: Estudiamos las concepciones sobre la cardinalidad infinita de conjuntos numéricos, de estudiantes con distinta formación matemática. Se analizó una tarea de comparación de conjuntos infinitos de números, resuelta por estudiantes de educación secundaria y estudiantes universitarios con distinto grado de formación matemática. Se clasificó a los estudiantes según sus ideas sobre el infinito y se realizó un Análisis Factorial de Correspondencia relacionando éstas clases con el nivel de estudios de los estudiantes.

Encontramos un gradiente de profundidad de estas ideas que comienzan desde de lo que hemos denominado *horror infiniti*, con las variantes de evitar el infinito o considerarlo como indefinido, presente principalmente en los estudiantes con menor nivel de estudios de matemática. En una zona intermedia se ubica la concepción más frecuente, la concepción finitista, ya sea tácita, explícita, o se base en los enteros como modelo de inclusión. La concepción

Fecha de recepción: 20 de noviembre de 2015. **Fecha de aceptación**: 15 de mayo de 2016.

[1] Departamento de Matemática. Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. República Argentina. vmontoro@gmail.com.

[2] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. República Argentina. nora.scheuer@gmail.com.

[3] Departamento de Psicología Básica. Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Madrid. España. puy.perez@gmail.com.

más compleja, la infinitista, sólo fue explicitada por estudiantes universitarios, según dos enfoques: pensar la cardinalidad de los conjuntos infinitos como una única cantidad infinita, o concebir distintos cardinales infinitos, este último expresado sólo por estudiantes avanzados de matemática.

Palabras clave: *conjuntos numéricos, infinito cardinal, educación secundaria, estudiantes universitarios.*

Abstract: We studied how students with different mathematical background conceive infinite cardinality of number sets. We analyzed a task in which high school and college students were requested to compare infinite number sets. Students were classified according to their ideas on infinity. Using this classification together with the students' level of math education, we performed a correspondence factorial analysis. A gradient was found in the depth of students' ideas. At one end we found what we called *horror infiniti*, based students propensity *avoid infinity* and instead construe it as something *undefined*. These views were associated with students with less mathematical education. In an intermediate zone, the *finitist* conception was placed. It was the most frequent way of thinking among the participants of the study, with three versions: tacitly infinitist, explicitly finitist, or taking the integers as model of inclusion. At the other end, the infinitist conception was placed. It was present among students with college mathematical education, according to two types: thinking of the cardinality of number sets as a unique infinite quantity; or conceiving different infinite cardinals. The latter was found only in advanced mathematics students.

Keywords: *comparison, number sets, cardinal infinity, mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

Consideramos que para desarrollar una enseñanza eficaz es preciso un conocimiento profundo de las concepciones de los estudiantes acerca de cuestiones clave en campos específicos de conocimiento. Precisamente las teorías del aprendizaje enfatizan en las concepciones de los estudiantes como uno de los puntos de partida y referencia permanente del proceso de enseñanza, debido a que sostienen que para que el aprendizaje sea significativo es necesario movilizar las ideas que los aprendices utilizan en diferentes contextos, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas. Estas ideas se originan en una constelación de factores, que incluyen: formas habituales de razonamiento humano, la cultura en la que los estudiantes participan y en particular, las experiencias educativas. Suelen, además, interferir con la adquisición de conocimientos académicos (Ausubel, Novak y Hanesian 1978/83; Pozo y Gómez-Crespo, 1998; Vosniadou, 2008).

En este trabajo nos hemos propuesto estudiar las concepciones de estudiantes de nivel secundario y universitario sobre la noción de infinito cardinal. Por lo cual señalamos la importancia de distinguir, en el campo de las matemáticas, entre los conceptos (consensuados en comunidades científicas) y las concepciones (personales). Coincidimos con Sfard (2000, p. 211) cuando afirma que se puede definir el concepto como la palabra junto con sus usos discursivos, entendida como dicha por los miembros competentes de la comunidad de discurso, mientras que la concepción es la versión individual del concepto. Este último término se refiere a la manera especial en que una persona emplea la palabra en su discurso y resuelve situaciones en las que el respectivo concepto está involucrado.

El infinito en la educación matemática, un contenido invisibilizado

En Argentina (donde desarrollamos nuestro estudio), como en muchos países iberoamericanos, en la escuela primaria la educación matemática se centra, en principio, en el conjunto de números naturales, y hacia el final de este nivel se pretende que los alumnos operen en el conjunto de números racionales. En los estudios secundarios, la enseñanza propone profundizar la comprensión y el uso de los números racionales, siendo esperable que al completar este nivel los estudiantes conozcan los conjuntos de números enteros, racionales y reales.

Los conjuntos numéricos se presentan como *infinitos,* de manera no formal, en toda la escolaridad, dando múltiples sentidos a este término. Por ejemplo, *los naturales son (potencialmente) infinitos porque siempre se puede encontrar uno mayor*; en tanto que, *los racionales son infinitos porque entre dos de ellos siempre se puede encontrar otro*. En la enseñanza de la matemática de los últimos años de secundaria y de los primeros años de universidad se trabaja con los conjuntos infinitos como tema destacable, sin embargo, es habitual que se use esta noción como si resultara parte del sentido común, o fuese evidente para la comprensión de los estudiantes (Montoro y de Torres Curth, 1999). Sólo en un estadío muy avanzado del estudio de la matemática se estudia de manera formal la cardinalidad de los conjuntos infinitos.

Sin embargo, el infinito matemático no constituye un objeto de conocimiento que las personas generan fácilmente a partir de su interacción con el ambiente físico y cultural cotidiano. Tanto el análisis histórico de este concepto matemático, como los modos en que estudiantes de secundaria y universitarios resuelven tareas que lo involucran, indican que para que el infinito se convierta en una entidad acerca de la cual y con la cual es posible pensar y operar se requiere la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión (Juan, Montoro y Scheuer, 2012; Monaghan, 2001; Montoro y Scheuer, 2004; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Waldegg, 1993a, 1996).

El infinito matemático constituye un concepto poco familiar incluso para docentes de nivel primario (para quienes no forma parte del contenido curricular de enseñanza). Tal como muestran las investigaciones de Sbaragli (2004) y Arrigo, D'Amore y Sbaragli S. (2010), estos docentes mantienen concepciones del infinito basadas en la intuición, que por lo general lo reducen a una extensión de lo finito. Los resultados de estos autores ponen de relieve cómo las dificultades observadas en la comprensión de lo infinito por los estudiantes avanzados no sólo se deben a obstáculos epistemológicos, sino que también se ven reforzadas por obstáculos didácticos derivados de modelos intuitivos erróneos proporcionados por los profesores desde los primeros años escolares. En este trabajo nos limitaremos a describir las concepciones naturalizadas por los estudiantes de los últimos años de secundaria y universitarios, sin pretender discutir el origen de las mismas.

Las dos caras del infinito

El infinito se puede pensar de dos formas: como infinito potencial o como infinito actual. Si nos situamos en el contexto de los números naturales, una aproximación potencial está implicada cuando nos percatamos de que podemos comenzar a contar 1, 2, 3, … y seguir contando, o al menos imaginar que contamos, y cada vez que tengamos un número, tendremos otro más grande. En cambio, pensar en el conjunto de todos los números naturales como una unidad, es pensarlo en forma actual. Cuando contamos n "cosas" establecemos una relación uno a uno entre las n cosas y los n primeros números naturales. Si las n cosas son una cantidad muy grande de cosas, n será un número (finito) muy grande. Pero, ¿cuántas son todas las cantidades posibles de cosas? ¿Cuántos son los números naturales? ¿Cuántos los números racionales? ¿Cuántos los números reales?

Concebir una colección de infinitos elementos presentes simultáneamente, requiere poner en juego procesos mentales de un notable nivel de abstracción. Para representarnos una cantidad infinita es necesario tratar las cantidades de un modo muy diferente al que es habitual cuando enumeramos o precisamos la cantidad de elementos de una colección finita (Montoro, 2005).

El largo camino matemático hacia los números cardinales

La historia de la matemática provee nutrida información acerca del largo camino recorrido desde la dicotomía infinito potencial-actual planteada por Aristóteles en el siglo IV a.C. hasta la central influencia de Georg Cantor, a fines del S. XIX, quien dotó de sentido matemático al concepto de infinito trabajando con números transfinitos y mostrando que no todos los conjuntos infinitos son igualmente infinitos (para una revisión abarcativa, consultar Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011).

A los fines de este trabajo nos interesa destacar la figura de Bolzano (1781-1848), quien a comienzos del siglo XIX redacta las *Paradojas del Infinito*, donde reivindica la existencia del infinito actual y reconoce que la diferencia entre los conjuntos finitos e infinitos es precisamente la posibilidad de estos últimos de estar en correspondencia biunívoca con una parte propia. Sin embargo, considera que los conjuntos sólo pueden ser comparados por inclusión, respetando a la hora de comparar, el principio de que *el todo es mayor que la parte.*

Luego, Cantor estableció el concepto de potencia de una colección infinita, que más tarde conoceríamos como cardinalidad. Según Cantor, dos conjuntos tienen la misma potencia (o cardinal) si se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos. Propone considerar a todos los conjuntos de igual potencia con un mismo *cardinal infinito.* Cantor demostró que hay tantos números pares como enteros, tantos naturales como enteros, tantos enteros como racionales (o fracciones). Su siguiente paso fue todavía más notable: demostró que no puede existir ninguna correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales. En esta teoría los conjuntos infinitos son comparados por cardinalidad, lo que se presenta como una manera de contestar las preguntas formuladas más arriba en cuanto a la cantidad de números, estableciéndose una relación de orden entre las cardinalidades de los conjuntos numéricos.

Tenemos entonces que los conjuntos infinitos pueden ser comparados de dos maneras:

- Por inclusión: un conjunto incluido estrictamente en otro es menor (en el sentido de la inclusión) que éste. La relación de inclusión es una relación de orden parcial, es decir puede haber conjuntos incomparables. El todo es considerado mayor que la parte y la correspondencia uno a uno entre el todo y una parte es una característica de la infinitud del conjunto.
- Por cardinalidad: en este modo de comparar, mediante correspondencias biunívocas, el todo puede ser igual (o equivalente) a la parte. Cualquier par de conjuntos es comparable. Se establece que todos los conjuntos coordinables poseen un mismo *cardinal infinito*. Cada cardinal se constituye en un nuevo objeto (número cardinal – cantidad infinita – número transfinito). Se puede operar con estos nuevos objetos; el cardinal de los números naturales y el de los números reales son cantidades infinitas distintas.

Las concepciones de los estudiantes acerca del infinito

Podemos considerar que la idea de infinito potencial aborda el infinito como un proceso, mientras que el infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación, la cosificación de este proceso (Lakoff y Nuñez, 2000; Dubinsky, Weller, Mc Donald y Brown, 2005a; 2005b). Cuando una situación requiere que los estudiantes vean este proceso como terminado, pensando en las colecciones formadas por una infinidad de elementos en forma actual, la idea construida fuera y dentro del aula de matemáticas suelen suscitar inconsistencias, incoherencias (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014) o presentarse como nociones paradójicas, en función del contexto o de la tarea (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Garbín, 1998; Garbín y Azcárate, 2000; Mántica y Carbo, 2013; Waldegg, 1993b). Muy a menudo, estas inconsistencias provienen de aplicar a conjuntos infinitos procesos propios de las colecciones finitas con las que se interactúa normalmente (Arrigo y D'Amore, 2004).

Considerando la cardinalidad de los conjuntos numéricos, la demostración de Cantor de que hay tantos números pares como naturales, tantos naturales como enteros y tantos enteros como fracciones, enfrenta aspectos nucleares del sentido numérico básico humano (Dehaene, 1997; Pérez-Echeverría y Scheuer, 2005). La afirmación *los números enteros y los racionales tienen el mismo cardinal* es contraintuiva debido a que entre dos racionales hay siempre otro racional, mientras que los números enteros se sitúan alejados entre sí en la recta numérica. También resulta contraintuitivo pensar que siempre podemos situar infinitos números irracionales entre dos números racionales por pequeño que sea el intervalo que elijamos.

Por otra parte, como argumenta Waldegg (1993a; 1996), el establecimiento de una correspondencia biunívoca entre un conjunto infinito y una parte propia se presenta como un obstáculo para la comprensión de los conjuntos infinitos, dándose en los estudiantes, frente a esta idea, una fuerte resistencia a la instrucción. Esto se aprecia en el trabajo de Moreno-Armella y Waldegg (1991) en el que solicitaron a estudiantes de matemática del primer semestre de la universidad (sin instrucción formal sobre el infinito matemático) comparar pares de conjuntos numéricos (naturales/sus cuadrados y enteros/pares) presentados explícitamente como infinitos, como incluidos uno en otro y al mismo tiempo equipotentes. En la mayoría de las respuestas (43%) prevaleció el énfasis en el conflicto parte/todo comparando por inclusión, 22% comparó afirmando que *son infinitos* según una única cantidad infinita y sólo 2% comparó por cardinalidad.

En cuanto a la comprensión de cardinalidades transfinitas por parte de estudiantes de los últimos años de la secundaria, se ha encontrado que normalmente piensan que los *números enteros son más que los naturales*, debido a que los naturales están incluidos en los enteros (Fischbein, Jehiam y Cohem, 1995; Tsamir y Tirosh, 1994; Waldegg, 1993b). En algunas ocasiones los estudiantes aceptan que el conjunto de los números naturales es equipotente al conjunto de los números enteros, no obstante, esta aceptación proviene de considerar que existe una sola cantidad infinita, o en palabras de Arrigo y D´Amore (1999; 2004), de que se ha producido un *aplanamiento de los cardinales transfinitos*. Desde este punto de vista, los racionales, los irracionales y por lo tanto los reales tienen simplemente la misma cardinalidad.

Algunos estudios muestran que casi la mitad de los estudiantes de secundaria (Juan, Montoro y Scheuer, 2012) y universitarios en carreras con diferente nivel de estudios de matemática (Montoro, 2005) admiten la posibilidad de obtener colecciones infinitas discretas. Según esos estudios, otros estudiantes de secundaria (22%) o de universidad (37%), especialmente aquellos de carreras sin estudios de matemática, muestran concepciones finitistas, tales como: *infinito como número muy grande*. Alrededor de 20% de los estudiantes en ambos niveles no considera posibles las colecciones infinitas y 12% de los de secundaria (la mayoría en primer año) manifiesta duda e inseguridad al respecto.

En un estudio acerca de los modelos intuitivos sobre el infinito, con estudiantes de secundaria, bachillerato y primero de universidad, Belmonte y Sierra (2011) identificaron el modelo de indefinición, que consiste en respuestas asociadas a la imposibilidad de conocer, operar o calcular con procesos u objetos infinitos. La presencia de este modelo fue disminuyendo en los grupos de estudiantes con mayor nivel de estudio de matemática.

Sintéticamente, podemos decir que la bibliografía revisada muestra seis tipos de concepciones que operan cuando los estudiantes de secundaria y universidad se enfrentan a tareas cuya respuesta implica, necesariamente, la noción de infinito.

Los estudiantes más jóvenes o con menor estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a la posibilidad de la existencia de colecciones infinitas, manifestando, explícitamente esta imposibilidad (Juan, Montoro y Scheuer, 2012; Montoro, 2005) y la concepción de infinito como indefinido (Belmonte y Sierra, 2011), según la cual no se puede operar con conjuntos infinitos.

Dos visiones finitistas muy arraigadas en los estudiantes son: concebir el infinito como un número muy grande (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Monaghan, 2001; Montoro, 2005; Juan, Montoro y Scheuer, 2012) y extender la propiedad de los conjuntos finitos *el todo es mayor que la parte* a los conjuntos infinitos, concepción que suele denominarse de inclusión (Fischbein et al., 1979; Fischbein; 1987; Waldegg, 1993b; Falk, 1994).

Entre los estudiantes que aceptan la posibilidad de colecciones infinitas se ha identificado la concepción de aplanamiento donde se considera única la cantidad infinita (Arrigo y D´Amore, 2004; Fischbein et al., 1979; 1987) y, muy minoritariamente, la concepción de infinito cardinal, sólo presente en universitarios (Moreno-Armella y Waldegg, 1991, Montoro, 2005).

En este trabajo nos proponemos contribuir a un mayor conocimiento de las concepciones sobre el infinito matemático de estudiantes en los últimos años de la escuela secundaria y en la universidad.

Consideramos que un estudio de este tipo puede ayudar a comprender cómo evolucionan estas concepciones en función de la educación, así como a analizar más a fondo las posibles barreras para la comprensión de este concepto, en su forma específicamente matemática en tanto infinito actual o cardinal.

Objetivos

El objetivo del presente estudio fue conocer cómo estudiantes conciben el infinito matemático en el contexto de la comparación de la cardinalidad de conjuntos numéricos, en diferentes etapas de la educación matemática, desde la matemática escolar hasta la matemática universitaria y la transición entre ellas.

Apelamos a un contexto de comparación de conjuntos infinitos de números, sin plantear explícitamente que se trata de conjuntos infinitos, ni mostrar una posible biyección entre ellos, a fin de habilitar que, incluso estudiantes con escaso grado de formalidad en sus estudios de matemática, pudiesen abordar la tarea.

En particular, nos propusimos:

- Identificar diferentes modos de comparar conjuntos infinitos de números y observar su distribución entre estudiantes de distinto nivel de estudios de matemática.
- Inferir las concepciones sobre el infinito de los estudiantes y relacionarlas con el nivel de estudio de matemática.

METODOLOGÍA

PARTICIPANTES

Participaron 307 estudiantes de escuela secundaria (167) y de universidad (140) de instituciones públicas en San Carlos de Bariloche (Argentina). Los estudiantes de nivel secundario se distribuyeron en los tres últimos cursos de un mismo centro educativo: tercero, cuarto o quinto. Los de nivel universitario se diferenciaron en *ingresantes*, quienes estaban asistiendo al cursillo de ingreso universitario de un mes de duración, y *avanzados*, quienes cursaban materias del último año de tres carreras distintas.

Los estudiantes de los últimos años de secundaria habían cursado asignaturas de matemática en las que se enseñan los conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales y reales. Durante el tercer año de secundaria se estudian los números reales, actualizando los enteros y racionales introducidos en primaria, enfatizando que los enteros amplían a los naturales y están incluidos en los racionales, y que la unión de racionales e irracionales conforma los números reales. En cuarto y quinto año de este nivel se estudian distintos temas en el marco del conjunto de los números reales, llegando incluso a un pre-cálculo, donde se interactúa con el concepto de infinito, principalmente como proceso sin fin.

En las tres carreras universitarias consideradas, Matemática, Biología y Educación Física, los estudios de matemática tienen diferente peso. La primera se centra en la formación matemática, llegando en los últimos años a estudiar formalmente el concepto de infinito cardinal. La segunda es una carrera de ciencias naturales en la cual se cursan asignaturas de matemática, sin que ésta sea una disciplina central. Los temas habituales son cálculo en una y varias variables y ecuaciones diferenciales, donde se trabaja implícitamente con el concepto de infinito. En Educación Física no se contempla formación matemática.

En lo sucesivo denominaremos NEM, al *Nivel de Estudio en Mat*emática al que pertenecen los/las estudiantes y 3ro al grupo de estudiantes de *tercer curso de secundaria*, 4to al grupo de estudiantes de *cuarto curso de secundaria*, 5to al grupo de estudiantes de *quinto curso de secundaria*, EFI al grupo de estudiantes *ingresantes de Educación Física*, BI al grupo de estudiantes *ingresantes de Biología*, MI al grupo de estudiantes *ingresantes de Matemática*, EFA al grupo de estudiantes *avanzados/as de Educación Física,* BA al grupo de estudiantes *avanzados/as de Biología* y MA al grupo de estudiantes *avanzados/as de Matemática.*

La distribución de los estudiantes participantes respecto de su Nivel de Estudios de Matemática y rango de edad se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Distribución según nivel de estudios de Matemática y rango de edad de los participantes.

Nivel de Estudios de Matemática			NEM	Rango de edad en años	N
Secundario	3er año		3ro	15-17	59
	4to año		4to	16-18	56
	5to año		5to	17-19	52
Total, estudiantes de secundaria					167
Universidad	Ingresantes	Ed. Física	EFI	18-24	26
		Biología	BI	17-24	26
		Matemática	MI	18-27	31
	Total, estudiantes ingresantes				83
	Avanzados	Ed. Física	EFA	23-27	21
		Biología	BA	21-26	16
		Matemática	MA	22-30	20
	Total, estudiantes avanzados				57
Total, estudiantes universitarios					140
Población total			PT	15-30	307

Tarea y procedimientos

La tarea formó parte de un cuestionario escrito, más amplio, destinado a indagar sobre la comprensión del número real, contestado de forma voluntaria, individual e informada en las respectivas instituciones educativas y en un tiempo medio de 40 minutos. Este cuestionario constaba de 10 tareas relacionadas con la cardinalidad infinita de conjuntos de números, la densidad, la representación en la recta y la completitud de los números reales. En este estudio se consideraron 307 estudiantes que respondieron al menos 70% del cuestionario.

La tarea demandó a los participantes que comparasen cinco parejas de conjuntos infinitos de números indicando cuál es más abundante. Las parejas de conjuntos propuestas fueron: A. capicúas/ no-capicúas; B. primos/ pares; C. naturales/ enteros; D. enteros/ racionales y E. racionales/ irracionales.

Se solicitó elegir una respuesta entre las siguientes opciones: que *alguno de los dos conjuntos fuera más abundante*; los dos conjuntos fueran *igualmente abundantes*, *no se pudieran comparar,* o que *no se supiera* la respuesta. Además, se pedía una justificación de la opción elegida. Es decir que se contó con diez respuestas por estudiante: cinco elecciones y cinco justificaciones. En el Anexo puede verse la tarea en su redacción original.

Lógica de la tarea

La tarea fue diseñada de forma que propusiera a los estudiantes un amplio espectro de situaciones de comparación de conjuntos infinitos de números, de manera que los patrones de respuestas de elección y justificación permitieran conocer distintas maneras de comprender la cardinalidad infinita. Además, habían sido elegidas de modo que hubiese conjuntos numerables y no numerables; discretos y densos; comparables por inclusión o no (disjuntos; con intersección finita y complementarios), como puede verse en la tabla 2. Las parejas de conjuntos estaban ordenadas según su complejidad y la etapa educativa en la que se inicia su estudio.

Los números capicúas (pareja A) son una curiosidad numérica, dependen de la notación y carecen de estructura algebraica, por lo que tienen mayor relación con la vida cotidiana (por ejemplo, debido a su presencia en billetes, formularios, identificación de automóviles, números en direcciones postales, etc.) que con la cultura específicamente escolar. Los números primos y pares (pareja

B) son subconjuntos de números enteros, estudiados desde la escuela primaria por sus particularidades en la divisibilidad de enteros. Los naturales, enteros y racionales (parejas C y D), son conjuntos de números con estructura aditiva y multiplicativa, estudiados desde la escolaridad primaria. Por último, los irracionales (pareja E) se originan de una necesidad intra-matemática como forma de completar el conjunto de números reales y se estudian en los últimos años de secundaria.

Tabla 2. Características de los conjuntos numéricos.

Parejas de conjuntos a comparar	Coordinables (numerables)	Inclusión	Disjuntos (complementarios)	Discretos
A (capicúas/ no capicúas)	SÍ	NO	SÍ	SÍ
B (primos/ pares);	SÍ	NO	NO (Intersec. finita)	SÍ
C (naturales/ enteros)	SÍ	SÍ ($N \subset Z$)	NO (Intersec. infinita)	SÍ
D (enteros/ racionales)	SÍ	SÍ ($Z \subset Q$)	NO (Intersec. infinita)	NO (Q denso)
E (racionales/ irracionales)	NO	NO	SÍ	NO (ambos densos)

En cuanto a la elección de las opciones de respuesta, se podría esperar que aquellos estudiantes que comprendieran la noción de infinito matemático respondieran que todos los conjuntos numerables son igualmente abundantes y que los irracionales son más que los racionales. Mientras que aquellos estudiantes que consideraran *más los no-capicúas que los capicúas, más los pares que los primos, más los enteros que los naturales* y *más los racionales que los enteros* (dada la densidad de los racionales) estarán respondiendo coherentemente con lo que ocurriría en una colección o intervalo finito o acotado de números. En cuanto a la pareja E, los irracionales pueden ser considerados más que los racionales aun cuando se piense en un intervalo acotado; o los racionales pueden ser considerados más abundantes que los irracionales si se concibe a los irracionales como números raros (un número finito de ellos); o ambos conjuntos pueden ser vistos como igualmente abundantes debido a la densidad de ambos en un intervalo acotado. Considerar que los irracionales son más abundantes que los racionales se puede interpretar como la respuesta experta si se compara por cardinalidad, o como finitista si se considera que en un intervalo acotado hay más irracionales que racionales.

Las eventuales elecciones correspondientes a: *más capicúas que no capicúas, más primos que pares, más naturales que enteros, más enteros que racionales, más racionales que irracionales* nos indican que posiblemente no conocen o confunden los conjuntos numéricos en cuestión.

Considerar que los conjuntos propuestos *son igualmente abundantes* podría indicar dos razonamientos diferentes: existe una única cantidad infinita o los conjuntos en cuestión son coordinables entre sí.

La elección *no se puede comparar* puede deberse a una concepción de lo infinito como indefinido o bien a una visión de infinito potencial, es decir lo infinito como sin fin, de modo que, si el proceso no termina nunca, no arrojará resultados a comparar. Por último, las elecciones *no sé* evidencian dificultades o falta de disposición para pensar en colecciones infinitas.

Vemos que las elecciones brindan ciertas pautas sobre cómo se piensa el infinito matemático, pero no son en sí mismas concluyentes. Para acceder de forma más completa a las concepciones de los estudiantes es necesario tener en cuenta también sus justificaciones.

Categorización de las justificaciones

Las justificaciones brindadas por los estudiantes constaban en todos los casos de una sola frase y en ocasiones de muy pocas palabras (ej.: *son infinitos*) por lo que fue posible realizar una categorización identificando cualitativamente expresiones similares. Se aplicó un procedimiento de control inter-juez a la totalidad de las respuestas. Las jueces fueron dos docentes universitarias de matemática obteniéndose una coincidencia de al menos 95% para cada pareja de conjuntos. Presentamos en la tabla 3 una breve descripción de cada una de las seis categorías determinadas y ejemplos de justificaciones literales de los estudiantes.

Tabla 3. Caracterización y ejemplos de las categorías de justificaciones brindadas por los estudiantes.

Categorías	Caracterización	Ejemplos literales
J1: No saben – No justifican	Manifiestan no saber el porqué de su elección, o la reiteran o parafrasean o expresan que su elección es obvia o evidente.	*No sé cómo explicarlo. / Porque hay más pares* (eligiendo más abundantes pares que primos).
J2: No conocen los conjuntos numéricos.	Evidencian que no conocen o confunden los conjuntos en cuestión.	*Porque los naturales son del 1 al 10 y los enteros pueden ser del 11 o más. / Porque es uno impar y otro par* (por primos/pares).
J3: Dan razones finitistas	Evidencian coherencia con pensar en una colección finita o acotada. Dan a entender que los números que cumplen con ciertas condiciones son más difíciles de encontrar.	Los números pares son más seguidos que los primos. / Porque entre 2 enteros consecutivos hay muchos racionales.
J4: Son infinitos	Hacen referencia a que ambos conjuntos son infinitos.	Son los dos conjuntos infinitos.
J5: Inclusión	Hacen referencia a que un conjunto está incluido en el otro o que posee más tipos de números que el otro.	Porque dentro de los racionales están los enteros. / En los enteros están positivos y negativos, en naturales sólo positivos.
J6: Cardinalidad	Expresan que ambos conjuntos son numerables (o no-numerable) o que se pueden poner en correspondencia biunívoca o no, y/o que tienen el mismo cardinal.	Ambos son conjuntos infinitos y sus elementos se pueden aparear con los del otro conjunto. / Los conjuntos N y Z son infinitos numerables: tienen cardinal Alef_0.

Procedimientos de análisis de la información

El análisis de la información se realizó en tres fases:

Fase 1: Cómputo de frecuencias de los modos de respuesta (elección y justificación) para las cinco parejas de conjuntos. Con el fin de observar cómo las elecciones de los estudiantes y sus justificaciones varían según las propiedades de los conjuntos y cuál es el perfil de distribución de las opciones de elección y categorías de justificación de la población, se determinó la frecuencia de estudiantes que eligieron cada modalidad y que poseen cierta categoría de justificación para cada una de las cinco parejas de conjuntos.

Fase 2: Clasificación de los estudiantes según sus modalidades de elección y justificación, e interpretación de las clases resultantes en términos de concepciones de infinito. Los análisis de esta fase se realizaron sobre los 220 estudiantes que contestaron al menos 60% de la tarea.

2a. Se aplicó un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples[4] (AFCM) (Benzécri, 1973) de los estudiantes, tomando como modalidades activas para la formación de los ejes factoriales las modalidades de las variables de respuesta. Las modalidades de NEM (Nivel de Estudio de Matemática) se proyectaron sobre los planos factoriales como variables ilustrativas.

2b. Considerando a los participantes descriptos por sus coordenadas en los siete ejes principales del AFCM (factores de variabilidad de los modos de respuestas encontrados), realizado en el paso anterior; efectuamos una clasificación jerárquica ascendente (Ward, 1963). El método utilizado comienza con una partición de la población de estudiantes de manera que cada uno de ellos sea el único elemento de una clase y en cada iteración se agrupa en una nueva clase aquellas dos más parecidas, en el sentido de que posean casi las mismas asociaciones con los modos de elección y justificación. Se corta el proceso de manera que la conformación de las clases obtenidas tenga sentido en términos de los objetivos de la investigación.

Fase 3: Distribución de las clases de estudiantes según sus concepciones sobre la cardinalidad de conjuntos infinitos de números en las modalidades de NEM.

Realizamos un Análisis Factorial de Correspondencias (AFC) (Benzécri, 1973) de la tabla de contingencia de los grupos de estudiantes según su NEM, respecto de las clases de la clasificación realizada en la Fase 2, a fin de observar si existen perfiles de distribución, similares u opuesto entre los grupos de NEM. Los análisis de esta fase se realizaron sobre los 307 estudiantes que contestaron el cuestionario.

Resultados

Fase 1: Distribución de frecuencias de las modalidades de respuesta de elección y justificación

De la población de 307 estudiantes, 87 resolvieron menos de seis de los diez ítems de la tarea, según la siguiente distribución en las modalidades de NEM. (ver tabla 4).

---

[4] Para detalles sobre análisis multivariado de datos ver Benzécri, (1973), Crivisqui, (1993), Baccalá y Montoro, (2008).

Tabla 4. Distribución de los estudiantes que mayormente NC o NJ en las modalidades de NEM

	3ro	4to	5to	EFI	BI	MI	EFA	BA	MA	TOTAL
Mayormente NC/NJ	18	20	17	13	4	7	7	1	0	87
% de mayormente NC/NJ	31%	36%	33%	50%	15%	23%	44%	5%	0%	28%
Realizaron más del 60%	41	36	35	13	22	24	9	20	20	**220**

Los siguientes resultados de esta fase, se informan relativos a los 220 estudiantes que respondieron mayormente la tarea. En la tabla 5 presentamos los porcentajes de elección de las distintas opciones en cada comparación.

Tabla 5. Porcentajes de elección de opciones. La elección correcta aparece subrayada. (N=220)

	A (cap/no-cap)	B (primo/par)	C (nat/ent)	D (ent/rac)	E (rac/irrac)
1. El primero es más abundante	3%	5%	13%	10%	24%
2. El segundo es más abundante	46%	42%	47%	45%	17%
3. Son igual de abundantes	27%	33%	25%	24%	24%
4. No se pueden comparar	15%	12%	7%	10%	16%
5. No sé. No contesta	9%	8%	8%	11%	19%

Ya que la falta de respuesta no es muy numerosa, pues sólo se retuvieron los estudiantes que realizaron más del 60% de la tarea y considerando que la opción *no sé* no brinda mayor información que la falta de respuesta, en este caso las analizamos conjuntamente. La indecisión y la falta de respuesta se mantuvieron en un nivel estable en torno al 10% para las primeras cuatro parejas de conjuntos a comparar, duplicándose para la comparación racionales/irracionales.

En la tabla 6 figuran los porcentajes en que se presentaron las categorías de justificación para cada comparación.

Tabla 6. Distribución de los modos de justificación (N=220)

	A (cap/no-cap)	B (priml/par)	C (nat/ent)	D (ent/rac)	E (rac/irrac)
J1. No saben - Reiteran la opción cerrada.	29%	40%	27%	35%	50%
J2. Confunden los conjuntos numéricos	17%	7%	17%	4%	10%
J3. Razones finitistas	33%	24%	0%	13%	11%
J4. Ambos infinitos	17%	26%	18%	17%	18%
J5. Inclusión	0%	0%	34%	27%	8%
J6. Cardinalidad	4%	3%	4%	4%	4%

La falta de respuesta es mucho más elevada para la petición de justificación que para la de elección, registrándose entre 29% y 50% de los estudiantes, siendo más elevadas para la pareja racionales/ irracionales, seguida por primos/pares. Las justificaciones basadas en la cardinalidad son prácticamente excepcionales en todas las parejas de conjuntos.

Fase 2: Clasificación de los estudiantes según sus modos de respuesta e interpretación en términos de concepciones sobre infinito

2a. En el AFCM de los estudiantes descriptos por sus modalidades de respuesta de elección y de justificación y su NEM encontramos que el principal factor de variabilidad corresponde a respuestas *infinitistas* oponiéndose al resto de respuestas. Esto nos dice que las respuestas infinitistas son más consistentes intra-individualmente que el resto de respuestas y justificaciones

El segundo factor discrimina entre las modalidades en que se establece que *no es posible comparar* y el resto de las modalidades. El tercer factor discrimina al interior de las modalidades no-infinitistas, ordenándolas desde aquellas en las que no se justifica la elección; siguiendo por las que comparan por inclusión los conjuntos naturales, enteros y racionales, pero suelen no justificar o confundirse con irracionales; hasta las respuestas netamente finitista en las parejas de conjuntos en las que no se puede comparar por inclusión.

2b. *Caracterización de las clases y respuestas literales dadas por estudiantes representativos de cada clase.*

A continuación, presentamos las clases obtenidas en la clasificación posterior al AFCM, ordenadas desde la más numerosa hasta la más rara. Informaremos la cantidad de estudiantes y porcentaje de la población que representa, respuestas de elección y categorías de justificación asociadas y modalidades de NEM relacionadas particularmente. Haremos también una caracterización de las clases según las ideas relacionadas con los modos de respuesta asociados a cada una de ellas y, por último, ilustraremos cada clase con respuestas y justificaciones literales de los estudiantes (entre comillas).

Clase 1. (n=84, 27%). Modalidades asociadas: JD1 – JC1 – JE1 – JB1 – D5 – C1 – D1 – JC2 – JA1.
Concepción finitista no justificada: Eligen respuestas finitistas, pero no justifican su elección; caracterizada por las justificaciones que manifiestan no saber el porqué de la elección o reiteran la opción cerrada; por ejemplo, eligen: "enteros más abundantes que naturales" justificando "porque los enteros son más abundantes" y es común que no respondan cuando intervienen los racionales. Están los pocos que eligen "más naturales que enteros" y "más enteros que racionales". El setenta por ciento de la clase son alumnos de secundario, en particular 30% provienen de 4to año.

> Respuestas de un/a estudiante de 4to año.
> Más no-capicúas que capicúas / porque "hay más números no capicúas que capicúas".
> Igualmente abundante pares que primos / porque "son la misma cantidad".
> Más enteros que naturales / no justifica.
> Enteros/racionales / no contesta ni justifica.
> Más irracionales que racionales / porque "creo que hay más cantidad".

Clase 2. (n=53, 17%). Modalidades asociadas: C2 – D2 – JC5 – JD5 – JE5 – JE2.
Concepción de los enteros como modelo de inclusión: Se comparan por inclusión las parejas de conjuntos donde figuran los enteros, es decir los naturales, enteros y racionales. Mientras que en las otras tres parejas las respuestas están muy repartidas. Algunos estudiantes de esta clase parecen no conocer los capicúas ni los irracionales y algunos tienden a no justificar su elección finitista para capicúas/no-capicúas, primos/pares e racionales/irracionales. No hay modalidad de NEM asociada.

> Respuestas literales de un/a estudiante de 3ro año.
> Más no-capicúas que capicúa / porque "son más los números no capicúas".

Más pares que primos / "no sé".
Más enteros que naturales / porque "los naturales están dentro de los enteros".
Más racionales que enteros / porque "los racionales abarcan a los enteros".
Más racionales que irracionales / porque "abarcan más números y más conjuntos numéricos".

Clase 3. (n=41, 14%). Modalidades asociadas: A2 – B2 – E1 - D2 – JE3 – JA3 – JB3 – JD3 – JC5

Concepción finitista explícita. Se eligen "más no-capicúas que capicúas"; "más pares que primos" y, en menor medida, "más racionales que irracionales", posiblemente consideren porque estos últimos son raros. Se dan justificaciones por razones finitistas, salvo en el caso de naturales/enteros que se justifica por inclusión. Manifiestan un tipo de comprensión finitista, apelando a lo que ocurre en un intervalo finito o acotado de números. No presenta modalidades de NEM asociadas.

Respuestas literales de un/a estudiante de BI.

Más no-capicúas que capicúa / "ya que cada una cierta cantidad de no capicúas hay uno capicúa por lo tanto la cantidad de no capicúas es mayor".

Más pares que primos / porque "por cada número par no hay un primo sino que cada algún par aparece uno primo por lo tanto los pares son más abundantes".

Más enteros que naturales / porque "no sólo posee infinitos números positivos sino que también los posee en negativos".

Más racionales que enteros / porque "entre dos números enteros hay infinitos racionales entre ellos. Por lo tanto los fraccionales - por fracciones - son más abundantes".

Más irracionales que racionales / porque "por cada número racional hay infinitos irracionales por lo tanto estos son más abundantes".

Clase 4. (n=24, 8%). Modalidades asociadas: A3 – B3 – C3 – D3 – E3 – JA4 – JC4 JD4 – JE4 – JB4.

Concepción de único infinito. Justifican su elección por ser ambos conjuntos infinitos en la mayoría de las comparaciones y, por tanto, igualmente abundantes. El 35% del grupo MA está en esta clase y es menor, pero notable, la presencia de estudiantes de MI.

> Respuestas literales de un/a estudiante de MA.
> Igualmente abundante para las cinco comparaciones. Justificando en todos los casos con la frase: "ambos son infinitos, aunque sean conjuntos densos o discretos".

Clase 5. (n=10, 3%). Modalidades asociadas: D4 – B4 – C4 – A4 – E4 – JA4 – JB4 – JE4 – JD4 – JC4

Concepción de infinito como indefinido. Eligen la opción "incomparable" y justifican porque "son infinitos". Evidencia una idea de que lo infinito es equivalente a lo *sin límite, sin reglas, indefinido.* Participan de esta clase 30% de 5to de secundaria y 60% de los universitarios distribuido en las tres carreras.

> Respuestas literales de un/a estudiante de 5to año.
> Responde en las cinco comparaciones que no se pueden comparar / porque "la cantidad de números es infinita así que no se podría saber exactamente cuál es más abundante".

Clase 6. (n=8, 3%). Modalidades asociadas: JD6. – JC6 – JB6 – JA6 – JE6 – D3 – C3 – E2 – A3 – B3

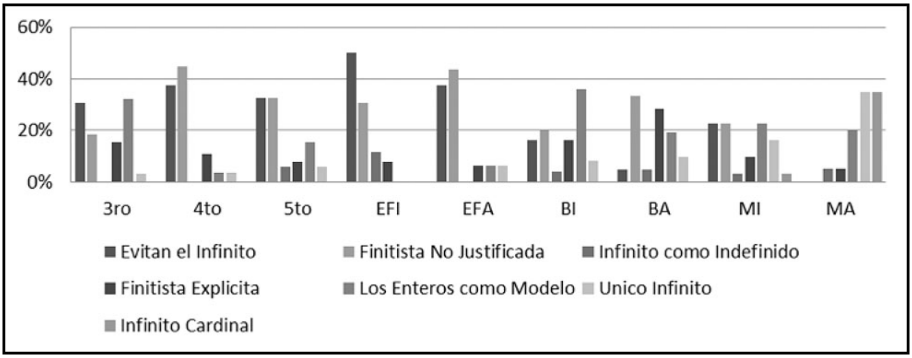
Concepción de infinito cardinal. Eligen, de forma correcta matemáticamente, que los conjuntos son "igualmente abundantes" en los conjuntos infinitos numerables y que hay "más irracionales que racionales". Sus justificaciones son también por cardinalidad. Todos son estudiantes de Matemáticas, mayoritariamente de MA.

> Respuestas literales de un/a estudiante de MA.
> Igualmente abundantes para capicúas/no-capicúas; primos / pares; naturales / enteros y enteros/ racionales. Justificando en todos estos caso con la frase: "son numerables".
> Más irracionales que racionales / porque "tienen distinta cardinalidad (Alef$_0$")."

Fase 3: Distribución de las clases de concepciones sobre la cardinalidad de conjuntos infinitos de números en las modalidades de NEM.

En esta etapa del análisis reincorporamos a los estudiantes que respondieron a menos de 60% de la tarea. Teniendo en cuenta que en el resto del cuestionario estos estudiantes habían realizado la mayoría de las tareas, interpretamos el hecho de no contestar esta tarea específicamente (es la quinta tarea de diez) como un comportamiento particular al encontrarse frente a un conflictivo tema como es el de los conjuntos infinitos. Estos 87 estudiantes (28%) constituyeron una nueva clase denominada Clase 0, a la que denominamos *evitan el infinito.*

En la figura 1 puede observarse el porcentaje en que se presenta cada clase de estudiantes según sus respuestas en los niveles de estudio.



Puede observarse los perfiles de distribución claramente opuestos entre EFI y MA.

Figura 1. Distribución de las clases según modos de respuesta dentro de cada grupo de estudiantes.

A continuación, presentamos el primer plano factorial del AFC realizado sobre los perfiles de distribución de las siete clases de estudiantes según el modo de respuesta al interior de los nueve niveles de estudio (figura 2). La cercanía entre dos modalidades de NEM significa que poseen perfiles de distribución similares en las clases de concepciones, mientras que cada modalidad de NEM será el baricentro de las clases de concepciones. Una de estas clases muy cercana a un NEM significa que su frecuencia es relativamente grande en ese nivel de estudio.

El principal factor de variabilidad corresponde a las clases infinitistas (*infinito cardinal* y *único infinito*) oponiéndose al resto de clases (no-infinitistas). Las modalidades de nivel de estudio en este factor quedan ordenadas de la siguiente manera: MA, MI y BA oponiéndose a BI, 3ro, 5to, EFA, 4to, EFI según ese orden (figura 2).

El segundo factor discrimina dentro de las clases no-infinitistas separando *los enteros como modelo de inclusión* y *finitista explicita,* por una parte, de *infinito como indefinido, finitista no justificada* y *evitan el infinito* por otro. Asocia MI, BI, BA y 3ro a los primeros y 5to, EFA, 4to y EFI a los últimos.

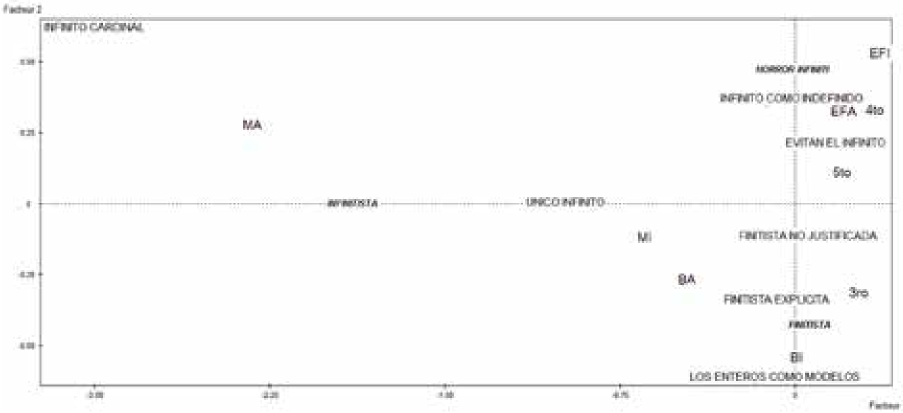


Figura 2. Primer plano factorial del AFC de los NEM descriptos por su distribución en las distintas clases.

La tabla 7 sintetiza los grupos de asociaciones de los perfiles de distribución de las clases de concepciones con los niveles de estudio relacionados, encontrados mediante el AFC

Tabla 7. Grupos de asociaciones entre clases de concepción y modalidades de NEM en el AFC

Asociaciones de clases de concepción		NEM
INFINITISTA (11%)	Infinito cardinal	MA
	Único infinito	MA y MI
FINITISTA (59%)	Explícita Inclusión	MI; BA y BI.
	Los enteros como modelo	BI y 3RO
	No justificada	3RO; 4TO; 5TO; EFA; EFI
HORROR INFINITI (31%)	Infinito como indefinido	EFI y 5TO
	Evitan el infinito	3RO; 4TO; 5TO; EFA; EFI

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A continuación, sintetizamos e interpretamos los resultados obtenidos por medio de las distintas fases de análisis. Un primer acercamiento global a la distribución de respuestas (Fase 1) informa que 28% de los participantes no completaron esta tarea, en su mayor parte alumnos de escuela secundaria o de la carrera de Educación Física. Todos los estudiantes avanzados de matemática la resolvieron completamente. Parece, por tanto, que el conocimiento matemático ha influido en la disposición a responder (tabla 4).

La distribución de las respuestas no sabe/no contesta se produjo de forma desigual entre las parejas de conjuntos a comparar. La mayor parte (19%) se ubicó en la pareja racionales/irracionales (tabla 5), que a su vez presentó un mayor número de elecciones incorrectas y de falta de justificaciones, todo lo cual indica que fue la de mayor dificultad. Esto puede deberse a que los irracionales se enseñan más tarde en la escuela y presentan una notable dificultad epistemológica al ser no-numerables.

Si consideramos las cuatro primeras parejas de conjuntos (todas menos racionales/irracionales), la mayoría de los estudiantes (entre 42 − 47% según la pareja) eligieron la opción finitista. Para racionales/irracionales este porcentaje se reparte entre la elección *más racionales que irracionales* y *más irracionales que racionales*. Podemos interpretar la respuesta: *más racionales que irracionales* como finitista, dado que se podría estar considerando a los irracionales como unos pocos números "raros".

La mayor parte de los estudiantes no explicitó el porqué de su elección, o se limitó a reiterarla, parafrasearla o expresar que su elección es obvia o evidente. Esta opción de justificación fue tomada por 50% de los estudiantes en el caso racionales/irracionales, siendo el menor porcentaje (27%) para los naturales/enteros. En todas las parejas, la petición de justificar se presentó como más difícil que comparar.

En el caso de las justificaciones por inclusión de los naturales, enteros y racionales, la mayoría de los estudiantes hicieron referencia a que *un conjunto está incluido en el otro* o *que abarca más tipos de números que el otro,* lo cual es válido desde un punto de vista finitista ya que respeta el principio *el todo es más que la parte*. Siendo particularmente notable el porcentaje de justificaciones por inclusión para naturales/enteros. Sin embargo, en las parejas de conjuntos a comparar que no se relacionan a través de la inclusión las justificaciones se repartieron principalmente entre argumentos finitistas y del tipo *ambos son infinitos*. Las justificaciones por cardinalidad fueron minoritarias, tan sólo 3%.

Al analizar, mediante la clasificación, la articulación de los modos en que los estudiantes respondieron (tanto al elegir como al comparar) en todas las parejas de conjuntos (Fase 2) encontramos seis clases, que se corresponden con distintas maneras de pensar o concebir el infinito.

Dos de estas clases, poco numerosas, se corresponden con visiones *infinitistas*, en las cuales se piensa a los conjuntos infinitos de dos maneras: como una *única cantidad infinita*, o asociada al *infinito cardinal*. La clase *único infinito* (8%) se caracteriza por afirmar que todos los conjuntos son igualmente abundantes por ser infinitos y está asociada con estudiantes de MA, con notable presencia de estudiantes de MI y muy pocos estudiantes de secundaria. Sólo el 3% de la población comparó por *cardinalidad* (infinito cardinal), siendo ésta la respuesta experta. Esta clase está asociada únicamente con estudiantes de MA.

Las otras clases son finitistas. La más numerosa (28%), asociada a Secundaria y Educación Física, estaba constituida por estudiantes que eligen una opción finitista sin explicarla. En las otras dos clases finitistas se compara (y justifica) por inclusión la pareja natural/enteros. Una de estas clases, los enteros como modelo de inclusión (17% de los estudiantes), se caracteriza por comparar (y justificar) por inclusión los conjuntos numéricos naturales, enteros y racionales mientras que cuando compararon parejas en las que no intervienen los enteros solían confundir o no conocer los primos y los irracionales. Esta clase está asociada a 3er año de secundaria, curso en el que se estudia principalmente los enteros y racionales como conjuntos numéricos. Notemos que este modo de pensar es compatible con la visión escolar en la cual los enteros son los naturales a los que se les agrega el cero y los negativos. La tercera clase finitista (14%) evidencia una concepción *finitista explícita*, donde, salvo para los naturales/enteros (en las que se da una justificación de inclusión), se dieron respuestas coherentes con lo que ocurriría en un intervalo finito o acotado. Está asociada a los estudiantes de Biología (BA y BI).

En la sexta clase los estudiantes consideraron que con el infinito no es posible comparar: *infinito como indefinido* (3%), asociada principalmente a estudiantes de escuela secundaria y de Educación Física. Por último, incorporamos otra clase, constituida por 87 estudiantes que contestaron menos de 60% de la tarea, aunque, como dijimos, realizaron la mayoría de las otras tareas del cuestionario. Por ello consideramos que evitaron esta tarea en particular, precisamente por tratarse de comparar conjuntos infinitos. Esta clase la denominamos *evitan el infinito* y constituye el 28% de la población. Llamamos *horror infiniti* al tipo de pensamiento que opera en estas dos últimas clases (*evitan el infinito* e *infinito como indefinido*) ya que podría interpretarse; como "con infinito no se puede; con infinitos no comparo o no puedo operar ".

La Fase 3 muestra que el orden *horror infiniti – finitistas – infinitistas* en las concepciones se asoció al nivel de estudio en Matemática. Si observamos este ordenamiento en los perfiles según este nivel (tabla 8) encontramos que en su base están los estudiantes de secundaria y de Educación Física –que no habían estudiado más matemática que la de secundaria– compartiendo una concepción de *horror infiniti* (*evitan el infinito-infinito como indefinido)* o una *concepción finitista no justificada.* En un nivel intermedio, los estudiantes de Biología ingresantes y algunos pocos estudiantes de secundaria utilizaron los *enteros como modelo de inclusión*, donde *prima el todo es mayor que la parte*. Los estudiantes ingresantes y avanzados de Biología y los ingresantes de Matemática contestaron como *finitistas explícitos,* trasladando las propiedades de los conjuntos finitos a los infinitos. Los estudiantes de Matemática dieron cuenta del *infinito como una cantidad única* y sólo los estudiantes avanzados en la materia se basaron sistemáticamente en la cardinalidad.

En síntesis, un gradiente de profundidad de estas ideas que comienzan en lo que hemos denominado *horror infiniti*, con las variantes de *evitar el infinito* o considerarlo como *indefinido*, presente en 31% de la población, principalmente, con menor nivel de estudios de matemática. Al igual que en estudios anteriores encontramos que casi un tercio de los estudiantes más jóvenes o con menos estudio de matemática suelen mostrar inseguridad o resistencia frente a la posibilidad de operar (pensar) sobre conjuntos infinitos (Juan, Montoro y Scheuer, 2012; Montoro, 2005); incluyendo el modelo de indefinición de Belmonte y Sierra (2011) que indica cierta imposibilidad de operar con procesos u objetos infinitos, en este caso comparar conjuntos infinitos.

En una zona intermedia se ubica la concepción finitista, con 58% de la población, de acuerdo a una concepción *finitista tácita*, *finitista explícita* o *los enteros como modelo de inclusión*. En todas estas versiones finitistas el principio del *todo es mayor que la parte,* parece estar muy arraigado e indica un modo de operar con los conjuntos infinitos como si fueran finitos. La mayoría de los participantes de este estudio podrían ser considerados finitistas, en el sentido de que sus elecciones son las que serían validas en conjuntos finitos. La concepción *finitista explícita* en la que los estudiantes justifican sus comparaciones por lo que ocurre en conjuntos muy grandes es congruente con concebir al infinito como un número muy grande, descripta por Fischbein *et al.* (1979), Juan *et al.* (2012), Monaghan (2001), Montoro (2005). La concepción los *enteros como modelo de inclusión* es consistente con la concepción que suele denominarse de inclusión (Falk, 1994; Fischbein *et al.*, 1979; Fischbein; 1987; Waldegg 1993a).

Sólo unos pocos estudiantes (11%), la mayoría universitarios, dieron repuestas infinitistas. El 8% del total concebía el cardinal de los conjuntos infinitos como una única cantidad infinita o como infinito potencial (sin fin), en el mismo sentido que el modelo de aplanamiento. (Fischbein et al., 1979; 1987 y Arrigo y D´Amore, 2004). El otro 3% considera la posibilidad de diferentes cardinales infinitos, algo similar ocurrió en el trabajo de Moreno-Armella y Waldegg (1991) con una presencia algo mayor de respuestas único infinito, posiblemente debido a que estos autores planteaban una tarea donde los conjuntos se daban explícitamente como infinitos y siempre con un subconjunto propio incluido.

El bajo porcentaje de estudiantes infinitistas de este estudio contrasta con resultados anteriores en los cuales casi 50% de los estudiantes con nivel de estudio de matemática similares a los de este estudio fueron considerados como infinitistas (Juan, Montoro y Scheuer 2012; Montoro, 2005). En el caso del estudio de Belmonte y Sierra (2011) este grupo fue de casi 60%. Estas diferencias pueden estar motivadas por el tipo de tarea empleada en cada estudio. En nuestro trabajo, la tarea de comparar conjuntos infinitos de números está planteada en un contexto de conjuntos numéricos, es decir infinito matemático (actual) lo que da lugar a que el grupo de estudiantes infinitistas sea sensiblemente menor. Es decir, este estudio pone de relieve la brecha conceptual entre poder pensar u operar con colecciones potencialmente infinitas, o poder hacerlo con conjuntos actualmente infinitos. De este modo, destaca que el infinito cardinal está muy lejos de ser una noción que los estudiantes adquieren por el sólo hecho de estar en contacto con conjuntos infinitos de números.

Además, estos resultados muestran la diversidad de ideas que pueden operar en un mismo grupo de estudiantes, por ejemplo, en una misma clase; por lo que el supuesto imperante en la enseñanza de la matemática universitaria de que el infinito matemático es transparente o accesible directamente, puede convertirse en un serio obstáculo para favorecer la comprensión de este concepto, indispensable para incursionar en la matemática universitaria.

Para promover que los estudiantes puedan apropiarse del concepto de infinito cardinal, es indispensable que la enseñanza matemática prevea entre sus metas para los primeros años de la universidad una explicitación de las nociones que atañen al infinito matemático, de modo de facilitar el pasaje de una matemática escolar a una matemática avanzada.

REFERENCIAS

Arrigo, G. y D'Amore, B. (1999). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación Matemática, 11* (1), 5-24.

Arrigo, G. y D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática,* 16 (2), 5-19. México.

Arrigo, G., D'Amore, B. & Sbaragli S (2010). *Iinfiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matemático*, Ciudad, Edizioni Erickson.

Arrigo, G., D'Amore, B. y Sbaragli S. (2011). *Infinitos infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático.* Bogotá, Ediciones Didácticas Magisterio.

Ausubel, D. P, Novak, J. D. & Henesiam, H. (1978/83). *Educational Psychology*, New York, Holt Rinehart and Winton. Traducción al español, original, *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México, Trillas.

Baccalá, N. y Montoro, V. (2008). *Introducción al análisis multivariado.* Centro Regional Cuaderno Universitario nº 51. Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue.

Belmonte, J. L. y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME.* Vol. 14 (2), 139-171. México.

Benzécri, J. (1973). *L'Analyse des Données. Tomo 1: La taxinomie. Tomo 2: L' Analyse des Correspondances.* (Segunda edición 1976). Paris, Dunod.

Crivisqui, E. (1993). *Análisis factorial de correspondencias. Un instrumento de investigación en ciencias sociales.* Asunción: Laboratorio de Informática Social de la Universidad Católica de Asunción.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics* 58, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS Analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics* 60, 253-266.

Falk, R. (1994). Infinity: a Cognitive Challenge. *Theory and Psychology* 4(1), 35-60.

Fischbein Y. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Fischbein Y., Jehiam, R. & Cohen D. (1995), The Concept of Irrational Numbers en High-School Students and Prospective Teachers, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.

Garbín, S. (1998). Esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el concepto de infinito actual contextualizado en problemas expresados en diferentes lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. Estudio exploratorio. Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

Garbín, S. y Azcárate, C. (2000). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual. *Educación Matemática.* 12 (3) 5-17. México.

Juan, M. T., Montoro, V y N. Scheuer. (2012). Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. *Educación Matemática*, vol. 24, N. 2. Agosto de 2012. México. 61-90.

Lakoff; G. & Núñez, R. (2000). The Basic Metaphor of Infinity in *Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. 155-180. Basic Books. New York.

Mántica, A. y Carbó, A. (2013). Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico. *Educación Matemática, 25* (3), 27-55. México.

Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 239-258.

Montoro V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y* Aprendizaje. 28 (4). 409-427. Madrid.

Montoro, V. y de Torres Curth, M. (1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en aprendizaje de la matemática. *Epsilon*, *15* (45), 357-364.

Montoro, V. y Scheuer N. (2006). Distintas formas de pensar el infinito. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 19. ISBN 970-9971-08-5. pp. 159-161.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático estudiantes universitarios de distintas carreras? *Épsilon*, 60 (3), 435-447.

Moreno-Armella, L. & Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.

Moreno-Armella, L. y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Educación Matemática,* 7 (1), 12-28.

Pérez-Echeverría, M. del P. y Scheuer, N. (2005). Desde el sentido numérico al número con sentido. *Infancia y Aprendizaje*, 28 (4), 393-407.

Pozo, J. I. y Gómez Crespo, M. A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*. Madrid: Morata.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática, 26* (1), 73-101. México.

Sbaragli, S. (2004). Le Convinzioni degli insegnanti sull Infinito Matematico. Tesis doctoral. Universidad de Bratislava. Disponible en http://math.unipa.it/~grim/thesis_sbaragli__04_cap3_it.pdf. Abril de 2006.

Sfard, A. (2010). A Theory Bite on Infinity: A Companion to Falk, *Cognition and Instruction,* 28:2, 210.

Tsamir P. & Tirosh D. (1994). Comparing infinite sets: intuition and representation, *Proceedings of the XVIII PME,* 2, Lisboa, 345-352.

Vosniadou, S. (Ed.) (2008). *International Handbook of Research on Conceptual Change.* New York. Routledge.

Waldegg, G. (1993a). El infinito en la obra aristotélica. *Educación Matemática, 5* (3), 20-38. México.

Waldegg, G. (1993b). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 5*, 19-36.

Waldegg, G. 1996. Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1* (1), 107-122. México.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association, 58.* 236-244.

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes e instituciones participantes y a las profesoras María Teresa Juan y Martha Ferrero por su importante colaboración en los procesos inter-juez de la categorización de las respuestas. El trabajo contó con el apoyo de la Universidad Nacional del Comahue, mediante los Proyectos de Investigación: B186 y C107, subvencionados por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNC-Argentina y de la Universidad Autónoma de Madrid-España, mediante el Proyecto EDU2013-47593-C2-1-P; subvencionado por la Dirección General de Investigación de Ministerio de Economía y Competitividad, por medio del Plan Estatal de Investigación Científica y Técnica y de Innovación. España. En el contexto del convenio de cooperación entre la Universidad Nacional del Comahue (Rep. Argentina) y la Universidad Autónoma de Madrid (España).

ANEXO.
LA TAREA TAL COMO APARECE EN EL CUESTIONARIO

A continuación, aparecen parejas de conjuntos numéricos. Comparando estas parejas ¿qué conjunto es más abundante, es decir con más cantidad de números? ¿Por favor, explicarías por qué piensas así en cada caso?

Capicúas	No capicúas	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☐ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué?
Los números primos	Los números pares	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☐ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué?
Naturales	Enteros	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☐ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué?
Enteros	Racionales	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☐ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué?
Racionales	Irracionales	☐ El primero es más abundante ☐ El segundo es más abundante ☐ Son igual de abundantes ☐ No se pueden comparar ☐ No sé	¿Por qué?