Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal

Teachers' knowledge of mathematics teaching when they exemplify and help in linear algebra classes

Leticia Sosa Guerrero*
Eric Flores-Medrano**
José Carrillo Yáñez***

Resumen: Este artículo muestra evidencias del conocimiento exhibido por dos profesoras de bachillerato en España en relación con el uso de ejemplos y ayudas en la clase de álgebra lineal. Se trata de un estudio de caso instrumental cualitativo enfocado desde un paradigma interpretativo. Utilizamos el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* para analizar el conocimiento de las profesoras, centrándonos particularmente en uno de los subdominios del conocimiento didáctico del contenido, el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. A partir de la observación de las cualidades y tipos de ejemplos empleados por las profesoras, los resultados dan cuenta del conocimiento de estas acerca de la potencialidad y el uso didáctico de los ejemplos. Análogamente, el uso de diversas técnicas de andamiaje permite identificar conocimiento de las profesoras sobre la diversificación y focalización de las ayudas.

Fecha de recepción: 3 de noviembre de 2015. **Fecha de aceptación:** 17 de marzo de 2016
* Universidad Autónoma de Zacatecas, México, lsosa@mate.reduaz.mx
** Universidad de Huelva, España, ericfm_0@hotmail.com
*** Universidad de Huelva, España, carrillo@uhu.es

Palabras clave: *Profesor de matemáticas, ejemplificación en matemáticas, ayudas en matemáticas, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento base para la enseñanza.*

Abstract: This paper examines the kind of mathematical knowledge, which lies behind the use of examples and provision of support for students by two Baccalaureate (16-18) teachers in Spain. The methodological approach is that of a qualitative instrumental case study within an interpretative paradigm. Analysis is carried out through the *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* model, with particular focus on one of the sub-domains of pedagogical content knowledge, Knowledge of Mathematics Teaching. The detailed consideration of the types of examples used and their particular features sheds light on the teachers' awareness of the potential these have in the educational context. At the same time, the use of various scaffolding techniques on the part of the teachers points to knowledge about the variety of learner support available and how this focuses on specific aspects.

Key words: *Mathematics teachers, exemplification in mathematics, mathematics learning support, pedagogical content knowledge, knowledge base for teaching.*

INTRODUCCIÓN

En los trabajos de Shulman (1986, 1987) hay un reconocimiento de las diferentes naturalezas del conocimiento que un profesor utiliza en su profesión. Algunos investigadores (e.g. Ball, Thames & Phelps, 2008; Tatto *et al.*, 2008) han trabajado en la conformación de modelos analíticos que permitan sistematizar elementos del conocimiento del profesor de matemáticas. La influencia del constructo denominado *Pedagogical Content Knowledge* (PCK –conocimiento didáctico del contenido) ha motivado que en dichos modelos haya una constante consideración de conocimientos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Este trabajo tiene por objetivo la identificación de elementos constituyentes del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. Usamos el modelo llamado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [MTSK] (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013). Nos basamos en la observación de dos actividades usuales en la práctica de aula del profesorado: la ejemplificación de contenidos matemáticos y brindar ayudas (andamiaje), ya sean grupales o personalizadas, a sus estudiantes. Mediante el método de observación no participante, se videograbaron 15 sesiones de Álgebra Lineal de cada una de las dos profesoras informantes de este estudio. Nuestro interés no está en evaluar si una situación es propicia para dar o no ayudas o si los ejemplos empleados son idóneos ante las intenciones que se persiguen. Lo que intentamos es clarificar qué conocimiento está detrás de estas acciones y toma de decisiones.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El modelo MTSK

Este artículo tiene sus bases en el MTSK, el cual fue diseñado para explorar y comprender los conocimientos del profesor de matemáticas que, en su conjunto, sólo tienen sentido para él (Carrillo *et al.*, 2013).

Este modelo considera la separación de dos grandes dominios de conocimiento, el Conocimiento Matemático y el PCK. En cada uno de estos se consideran tres subdominios de naturaleza diferenciable (figura 1).

Por un lado, se estudian diferentes aspectos del conocimiento matemático del profesor de matemáticas. La división de este dominio en subdominios de conocimiento se hace de manera intrínseca a la disciplina, diferenciando el conocimiento de los objetos matemáticos (KoT-*Knowledge of Topics*) del conocimiento de su estructuración (KSM-*Knowledge of the Structure of Mathematics*) y, a su vez, del conocimiento de la sintaxis y prácticas matemáticas (KPM-*Knowledge of the Practice of Mathematics*).

El KoT engloba el conocimiento del profesor acerca de los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Considera el conocimiento de definiciones, procedimientos, fenomenologías asociadas al concepto, propiedades y caracterizaciones. Por ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor acerca de qué se obtiene al multiplicar dos matrices y de las posibles aplicaciones de esta operación forma parte de este subdominio.

En el KSM se considera el conocimiento de las relaciones matemáticas que el profesor hace entre distintos contenidos, ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. El conocimiento de cómo se relacionan algunas matrices con los procesos estocásticos de probabilidad es un elemento del KSM.

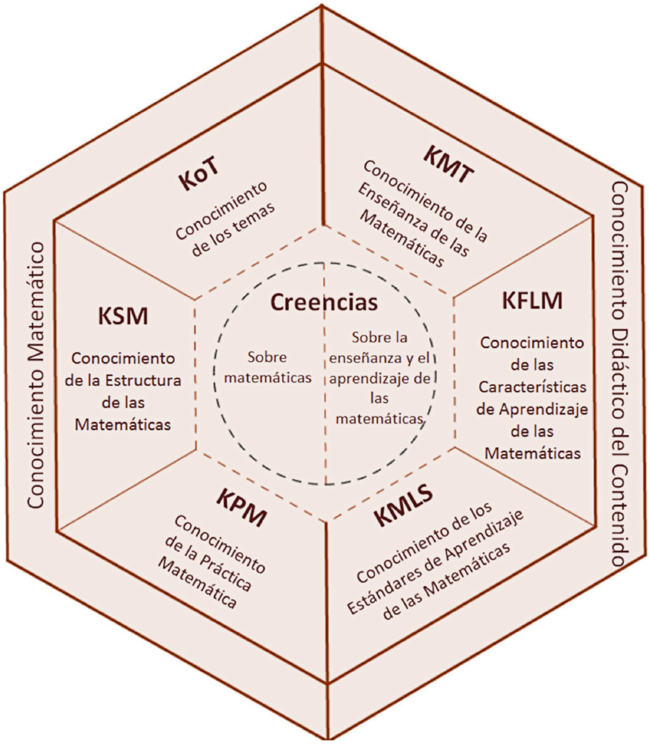

Figura 1. Subdominios del MTSK

Por su parte, en el KPM se considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional, de los modos de proceder y de la sintaxis propia de las matemáticas. En este subdominio está, entre otros, el conocimiento que tiene el profesor acerca de qué es una definición, qué características puede tener la demostración matemática, el papel de la suficiencia y necesidad de propiedades, el papel del ejemplo y contraejemplo en la demostración.

Por otro lado, la consideración del PCK se une al interés que han tenido diferentes investigadores (e.g. Llinares, 2000) por indagar en éste. Entre los aspectos que lo hacen especialmente interesante está su caracterización como un conocimiento particular del profesor, propio de la labor de enseñanza. En el MTSK se consideran como parte de este dominio el conocimiento del contenido desde el punto de vista de los logros de aprendizaje esperados (KMLS-*Knowledge* *of Mathematics Learning Standards*), como objeto de aprendizaje (KFLM-*Knowledge of Features of Learning Mathematics*) y como objeto de enseñanza (KMT-*Knowledge of Mathematics Teaching*).

En el KMLS se considera el conocimiento que posee el profesor sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos (Escudero-Avila *et al.*, 2015). Amplía la idea del conocimiento de los programas y materiales curriculares considerados por Shulman (1987) y Ball *et al.* (2008). Por ejemplo, el conocimiento de aquello que se espera que aprendan sobre matrices los estudiantes de bachilleratos de ciencias sociales o los de ciencias exactas forma parte de este subdominio.

El KFLM engloba los conocimientos sobre las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático. Considera el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de la interacción del estudiante con el contenido matemático, pero no las características del estudiante en sí mismo. Conocer errores habituales en el producto de matrices pertenece a este subdominio. Otros ejemplos y categorías relativos al Álgebra Lineal pueden encontrarse en Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2015).

El KMT se refiere al conocimiento que le permite al profesor seleccionar representaciones particulares, ejemplos, libros de texto o ciertos materiales para la enseñanza de un concepto o procedimiento matemático. El KMT es el conocimiento del profesor en cuanto a las características de recursos (materiales o tecnológicos) que usan para enseñar. Incluye su conocimiento acerca de tareas, actividades, ayudas y ejemplos, así como su conocimiento acerca de teorías de enseñanza de las matemáticas, ya sean personales o institucionalizadas. Un ejemplo es el conocimiento acerca de las bondades del software Derive para trabajar álgebra matricial en el aula.

Inspirados en el contenido del KMT decidimos estudiar el conocimiento que manifiestan dos profesoras de Álgebra Lineal en el uso de ejemplos (distinguiendo el tipo y potencialidad de estos con base en las intenciones detectadas para su aparición) así como en las ayudas que dan a sus estudiantes en diversas situaciones.

Las creencias que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, son consideradas en el MTSK como elementos que permean al conocimiento del profesor en los diferentes subdominios, lo cual guía la elección del paradigma interpretativo al realizar las investigaciones, sin embargo, no son objeto de estudio en este artículo.

Ejemplos y ayudas en la clase de matemáticas

Gran parte de los profesores usa de alguna manera los ejemplos (Chick & Harris, 2007). Concebimos el ejemplo como "un elemento de una colección de objetos (entes) que es utilizado en una determinada situación de enseñanza/aprendizaje porque evidencia determinada, o determinadas, características" (Figueiredo, 2010, p. 173). El ejemplo puede ser empleado para ilustrar objetos como un concepto, procedimiento o teorema (Zodik & Zaslavsky, 2007) y se usa en ocasiones para dar sentido o para comprender dichos objetos (Watson & Mason, 2002).

El uso de ejemplos en el aula es importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Figueiredo, Contreras & Blanco, 2009), el cual, además de ser un terreno esencial, es complejo (Bills *et al.*, 2006); tanto su elección como su tratamiento constituyen un gran reto para el profesor en relación con el grado de dificultad para el aprendizaje que dicho ejemplo suponga (Zaslavsky & Peled, 1996).

En la literatura se pueden encontrar varias clasificaciones de ejemplos. Dentro del uso didáctico de estos, Figueiredo, Blanco y Contreras (2007) presentan una clasificación según el objetivo del ejemplo: 1) Definición, son los primeros ejemplos, se presentan a los alumnos inmediatamente después de definir un concepto pero también puede presentarse primero los ejemplos y luego la definición; 2) Representación, primeros ejercicios típicos de aplicación del concepto, promueven el surgimiento de las primeras dudas –mayor autonomía al alumno; 3) Características, surgen cuando el alumno emprende la tarea de profundizar en el concepto, en sus diversas representaciones y descubrir sus peculiaridades, se dan como explicación a las dudas de los alumnos o como una forma de resolver las situaciones de confusión; 4) Aplicaciones internas, aparecen en las fases de mayor profundización en el concepto, las aplicaciones pueden incluir contenidos o conceptos enseñados anteriormente o relacionarse con otros posteriores y 5) Aplicaciones externas, son de aplicación a la vida real y a otras ciencias. Por otro lado, Bills *et al.* (2006) muestran una clasificación según la naturaleza del ejemplo: 1) ejemplos resueltos (por el profesor o el manual), 2) ejercicios (para ser resueltos por los alumnos), 3) ejemplos genéricos (de conceptos o ilustraciones de procedimientos), 4) contraejemplos (que necesitan de una hipótesis o afirmación para contrariar) y 5) no ejemplos (que sirven para definir los límites de un concepto, de un caso en el que un procedimiento no se aplique o falle en la obtención de un resultado deseado, o para demostrar que las condiciones de un teorema son precisas, bien definidas).

Zazkis y Leikin (2007) afirman que los investigadores podemos aprender acerca del conocimiento matemático y pedagógico de los profesores desde el repertorio de ejemplos generados por ellos. En ese sentido, Figueiredo, Contreras y Blanco (2012) realizan un estudio centrado en el tipo de ejemplos que utilizan cuatro futuros profesores y una profesora con experiencia y tratan de explicar algunos aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza. Sin embargo, cabe destacar que hay pocos trabajos que propongan explícitamente indicadores y categorías del Conocimiento Didáctico del Contenido referentes al conocimiento de ejemplos (e.g. Chick, Baker, Pham & Cheng, 2006; Chick & Harris, 2007), lo que concede relevancia al propósito de esta investigación.

En cuanto al uso de ayudas por parte del profesor, coincidimos con Amerian y Mehri (2014) en que el *andamiaje* es un tipo particular de ayuda y con Jiménez (2012) en que el papel del profesor es central en la organización de estas. El término andamiaje "refleja una consciencia del hecho de que los estudiantes pueden necesitar ayuda en el proceso de aprendizaje, e indica que dicha ayuda puede darse usando un andamio en el cual el profesor puede estar en un nivel superior al estudiante" (Rasmussen, 2001, p. 569).

Bruner (1986) presenta una visión de los efectos que puede tener el andamiaje sobre el aprendiz y que lo hace interesante para ser estudiado: a) simplifica la dificultad de la tarea, b) atrae y mantiene la atención, c) ofrece un modelo de interacción, d) extiende la situación en la que se está interaccionando, e) se observa el punto en que se frustra una tarea y f) provee de un modelo de resolución de la tarea que se está enfrentando.

Verenikina (2004) realiza una revisión de literatura con la finalidad de esclarecer cuál es la noción de andamiaje que puede ser usada con fines educativos. Destaca una caracterización y algunas técnicas. En la caracterización se expresa que en el andamiaje el conocimiento es co-construido, que la elección del tipo de actividad es esencial para que el saber esté incrustado en esta y resulta importante el reconocimiento de cómo los artefactos median el conocimiento. Algunas técnicas de andamiaje que recolecta de resultados de investigaciones son: mostrar, dividir una tarea en pasos simples, proveer guías, focalizar la atención, ejemplificar y cuestionar.

Otras formas de aplicar andamiaje fueron categorizadas por Zurek, Torquati y Acar (2014) a partir de un estudio realizado en etapas tempranas de educación. Enlistan los siguientes recursos que los profesores emplean para brindar andamiajes:

- Provocar mediante frases o preguntas que evoquen una respuesta concreta de los estudiantes.
- Utilizar preguntas en las que se requiera usar evidencia.
- Proponer situaciones para hacer predicciones.
- Focalizar la atención en características relevantes de un problema.
- Dar pistas que ayuden a llegar a una conclusión.
- Proveer de herramientas que permitan desarrollar la actividad.
- Ofrecer una realimentación con efectos de validar.
- Ofrecer una realimentación con efectos de corregir.
- Llevar el lenguaje impreciso de los estudiantes hacia uno institucionalizado.
- Agregar información a lo expuesto por los estudiantes.
- Dar una categoría que subordine a los elementos que los estudiantes reconozcan.
- Dar ejemplos específicos para explicar un concepto general.
- Vincular lo que se está trabajando con conocimientos o experiencias previas.
- Ser copartícipe del trabajo.
- Contextualizar o descontextualizar (acercar o alejar un concepto de una fenomenología con la que se corresponda) según la intención.

Por otro lado, Verenikina y Chinnappan (2006) describen un proceso como técnica de andamiaje denominada *cambio en la cantidad de ayuda*. Este proceso abarca desde los momentos en los que el profesor da mucha ayuda a sus estudiantes hasta cuando estos pueden realizar el trabajo de manera autónoma. En este artículo buscamos el conocimiento que permite al profesor gestionar las ayudas.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación está inscrita en el paradigma interpretativo (Latorre, Rincón & Arnal, 1996) porque intentamos comprender e interpretar el KMT evidenciado por dos profesoras al dar ayudas y usar ejemplos en su clase de Álgebra Lineal en bachillerato. Se emplean métodos cualitativos debido a que nuestro propósito es comprender, descubrir e interpretar la realidad (Merriam, 1988) y porque, de acuerdo con Erickson (1986), la característica que más distingue a la indagación cualitativa es el énfasis en la interpretación.

Los casos

En esta investigación consideramos un estudio de casos de corte instrumental el cual, de acuerdo con Stake (1994), permite profundizar en la comprensión de un tema determinado o afinar una teoría. Entre la distinción que hace el autor de los estudios de caso, se hace notar que el uso del tipo de estudio de casos depende de la finalidad que se persiga. En nuestro estudio la intención es profundizar en la conceptualización del KMT, es decir, el estudio de casos es un instrumento para lograr esto. Decidimos estudiar dos casos (Emi y Aly), ambas son licenciadas en matemáticas y profesoras de bachillerato en centros públicos de España. Su alumnado es heterogéneo social y cognitivamente. Emi tiene 21 años de experiencia y enseña en el bachillerato de Ciencias Sociales. Una buena parte de su alumnado procede de clases bajas, y ha de atender en el aula a una alumna con necesidades educativas especiales. Aly cuenta con 13 años de experiencia y enseña en el bachillerato Científico Tecnológico. Ambas profesoras fueron elegidas por ser reconocidas como buenas profesionales por sus pares, sus directivos y la comunidad. Asumimos este reconocimiento y las diferencias de experiencia y contexto como garante de aportación de riqueza de indicadores de conocimientos para enseñar matemáticas.

Recolección de datos y análisis

En la línea de Kagan (1990), en el estudio de los dos casos, intentamos obtener todo el provecho posible con múltiples fuentes de evidencia: observaciones de aula, notas de campo, cuestionarios y entrevista semiestructurada.

Las observaciones de aula (15 clases de cada profesora, con una duración aproximada de 50 minutos cada una), se efectúan durante el comienzo del curso de Álgebra Lineal de segundo de bachillerato con el método de observación no participante (Cohen & Manion, 2002). En cada clase, para obtener impresiones que complementan la observación, tomamos notas de campo *in situ* y *a posteriori* (como recomiendan Lofland y Lofland, 1984), pues estas son registros que incluyen aspectos teóricos, puntos de vista y reflexiones personales que subyacen en la observación (Evertson & Green, 1989).

Además se pidió a las profesoras que contestaran secuencialmente seis cuestionarios con preguntas abiertas sobre algunos aspectos generales (formación, experiencia, etcétera) y otras referentes al KMT. Luego, para obtener más información se realizó una entrevista semiestructurada a cada una de las profesoras. De esta forma las observaciones de aula constituyen la fuente principal para el análisis, las notas de campo, cuestionarios y entrevista son fuentes secundarias que ayudaron principalmente a triangular la información.

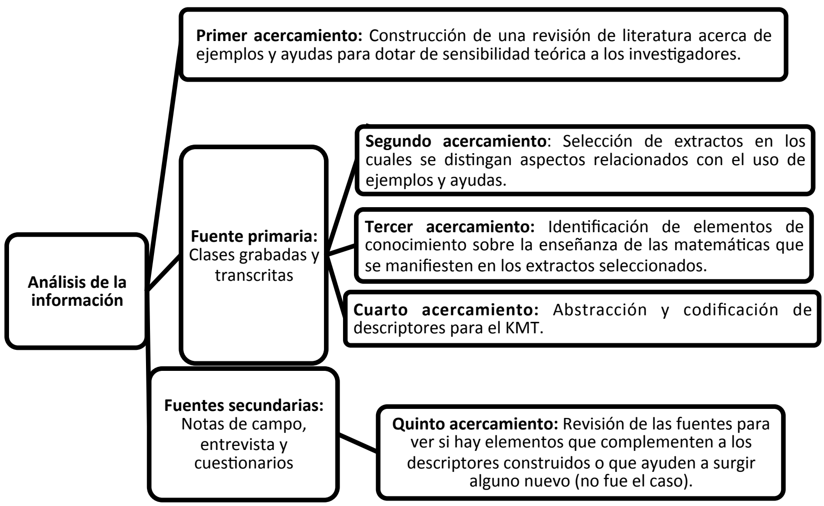

Figura 2. Acercamientos realizados para el análisis de información y la obtención de resultados.

Posterior a la transcripción de las videograbaciones, hicimos el análisis a partir de cinco acercamientos para contrastar y confrontar la información analizada. Se sintetizan en la figura 2.

Una vez categorizadas las evidencias de usos de ejemplos y ayudas, procedimos a interpretarlas como elementos de conocimiento pertenecientes al KMT. En este proceso nos apegamos al acercamiento *bottom-up* y *top-down* en términos de la teoría dirigida y teoría generada (Grbich, 2007), la cual nos permitió obtener una lista preliminar de indicadores, compararlos y refinarlos hasta obtener elementos de conocimiento que dieran cuenta de esas acciones de las profesoras.

RESULTADOS

En este apartado mostramos los elementos de conocimiento que encontramos, fruto del análisis de los usos de ejemplos y de las ayudas que las profesoras daban en su clase. Primero presentamos el análisis que dio pie a la abstracción de elementos de conocimiento. Codificamos este primer acercamiento con la letra E (para ejemplos) y A (para ayudas) seguidas de un número para identificarlas. Posteriormente, presentamos de forma sintética la abstracción de elementos sobresalientes para la conformación de indicadores de conocimiento referentes al KMT. La codificación que seguimos resulta de nombrar a cada indicador con las siglas KMT seguidas de un número que los ordena.

E1. La profesora emplea algunos ejemplos contextualizados en los que puede ser útil el trabajo con matrices.

En este indicador nos referimos a Emi, quien sabe que usar ejemplos (situación-problema) de criptografía y de estudios sociológicos, le es útil para ir creando un contexto de significación antes de introducir la definición formal de matriz.

Tras una primera sesión en la que Emi presenta las matrices (primera aproximación informal), en la segunda sesión, la profesora comienza proponiendo un ejemplo de criptografía (consistente en el cifrado y descifrado de mensajes), en el cual menciona la utilidad del producto de matrices y de la matriz inversa:

Emi. *«Las matrices no sólo nos sirven para guardar datos, para almacenar información, sino que con las matrices podemos realizar operaciones en las cuales, como en este caso, nos ayudan a proteger el descifrado de un texto, de un mensaje cifrado y luego también con la ayuda de la operación inversa, de la matriz inversa, volver de nuevo al mensaje original»*.

Enseguida Emi les propone otro ejemplo, en esta ocasión sobre estudios sociológicos. Ella les pregunta a los estudiantes: “¿quién creéis que es una persona idónea para ser el delegado de la clase?” Y en la pizarra va completando la matriz, en ella acomoda en orden alfabético letras que representan a cada estudiante de la A a la P en forma de fila, y en forma de columna en ese orden, escribiendo 1 si cree que sería buen delegado o 0 si no lo cree (se puede votar por uno mismo); todo ello para hacerles notar que a través de una matriz se vería *claramente* que el que tuviera más unos sería la persona que, según el grupo, sería idónea para ser el delegado de la clase. A continuación les señala que estas matrices se utilizan en estudios sociológicos para ver la opinión que el grupo posee de cada uno de sus miembros. De este modo, se promueve la noción de matriz como arreglo ordenado de datos.

Después de usar esos ejemplos contextualizados, Emi concluye de la siguiente manera:

Emi. *«Bueno, visto esto, decidme, ¿qué es una matriz?, ya tenéis que tener una idea»*
S1. *«Un conjunto de datos que se disponen en columnas»*
Emi. *«¿Si en lugar de datos decimos elementos?»*
S1. *«También»*
Emi. *«Sería prácticamente lo mismo y más genérico, entonces es un conjunto ordenado de elementos dispuestos en filas y columnas, es lo que nosotros llamamos matriz».*

Tras esta formalización de la definición de matriz, Emi define algunos tipos de matriz (cuadrada, fila, columna, nula, triangular superior e inferior, escalar, diagonal, unidad, traspuesta y opuesta).

Con estos extractos queremos hacer notar cómo la profesora emplea los ejemplos contextualizados con dos fines. En primer lugar, los usa para mostrar la funcionalidad del tema en relación con otras ciencias: Criptografía y Sociología (tipo de ejemplo 5 para Figueiredo *et al.*, 2007). El segundo aspecto es la relación que establece entre los ejemplos y la necesidad e importancia del orden de los elementos de las matrices como característica definitoria (tipo de ejemplo 1 para Figueiredo *et al.*, 2007).

Estos aspectos nos llevan a la determinación del indicador "saber de la potencialidad del ejemplo contextual para crear un entorno de significación antes de introducir la definición formal de un concepto". Sin lugar a dudas, en este conocimiento influyen tanto que Emi esté impartiendo el tema de matrices a estudiantes de bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales, como su trayectoria profesional, lo cual puede trascender su conocimiento del contenido matemático.

E2. La profesora elige intencionalmente un ejemplo en el que se cumple una propiedad singular.

Aly da muestras de conocer la potencialidad del ejemplo como instrumento para hacer notar singularidades de un tema. En este caso se trata de una propiedad de los determinantes de la cual quiere hacer notar su potencialidad. Utiliza el ejemplo para remarcar que en ocasiones interesa separar un determinante en la suma de dos determinantes porque puede simplificar los cálculos. El ejemplo consiste en hacer el cálculo de la expresión 1 y lo separa como aparece en la expresión 2

$$\begin{vmatrix} 7+3 & 3 \\ 4+2 & 2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Aly. *«¿Ven por qué me interesa separar?»*

S2. *«Porque el segundo se anula»*

Aly. *«Claro, porque hay veces que al separar, resulta que hay uno que se anula, ¿vale? Entonces es mejor primero hacer esto y aplicar la propiedad y no hacer todo el cálculo, sino separar en dos, porque, claro, en nuestro ejemplo el segundo determinante tiene dos columnas iguales, entonces su determinante es cero, ¿de acuerdo?».*

En este caso, la elección que hace la profesora del ejemplo (de aplicación de un procedimiento –Bills *et al*., 2006) es intencionada para que se denote la potencialidad de una propiedad que, aunque a primera instancia parecería que aumenta la cantidad de cálculos (calcular dos determinantes en lugar de uno), en realidad simplifica los resultados con los que se tiene que operar, lo cual toma importancia de cara a ejercicios más complicados que el que les presenta.

Lo anterior nos permite delimitar otro indicador con respecto al conocimiento de las bondades que conoce la profesora para el ejemplo en la enseñanza. Lo concretamos como “saber de la potencialidad del ejemplo como medio para destacar o recalcar los aspectos singulares del contenido matemático que pretende enseñarse”. Aquí se verá reflejada de manera implícita o explícita la capacidad que cada profesor tenga para elegir los ejemplos con tal fin, ya que se pone en juego el conocimiento que les permite saber qué ejemplo podría ser realmente potente para recalcar, ilustrar, aclarar, comprobar o mostrar aquellos aspectos más sobresalientes del contenido matemático a enseñar.

E3. La profesora emplea ejemplos contextualizados y en el lenguaje de los estudiantes para que entiendan mejor el significado del producto de matrices.

La profesora considera que los estudiantes podrían entender mejor el contenido si ven en el ejemplo una aplicación familiar para ellos, con datos cercanos a su entorno. En la clase 3, Emi crea un ejemplo *cercano* al contexto de los estudiantes y con palabras familiares a ellos.

> Emi. *«Quiero que me escribáis la matriz A, que va a ser una matriz fila que me indique el número de vuelos de Sevilla a cada una de estas ciudades intermedias y vamos a llamar B a la matriz columna, el número de vuelos desde los puntos intermedios a Nueva York,* […] *tenéis que calcular A por B y después de calcular A por B, ver si se pueden multiplicar, y luego quiero que me digan qué significado tiene el producto».*

Queremos destacar que, si bien es cierto que la profesora indica el proceso para resolver el problema y que esto priva a los estudiantes de proponer soluciones genuinas, también es cierto que muestra un conocimiento sobre ejemplos contextuales en los que el producto de matrices tiene un significado concreto que puede ser asequible al bagaje cultural de los estudiantes. Consideramos que el tipo de ejemplo que usa Emi puede ser muy cercano al ejemplo de aplicación a la vida real (tipo 5) de la categorización de Figueiredo *et al.* (2007).

Esto da pie a la conformación de otro indicador acerca del conocimiento de la potencialidad del ejemplo, esto es "saber crear, elegir y explorar situaciones problema en forma de ejemplo o ejercicio, para que los estudiantes puedan producir sentido y significado al contenido matemático".

Por otro lado, las ayudas matemáticas son elementos habituales de la acción del profesor para propiciar el aprendizaje de sus estudiantes. En las ayudas se interrelaciona el conocimiento matemático del profesor y su conocimiento acerca de las representaciones, recursos y estrategias didácticas que pueden hacer más asequible el contenido al estudiante:

A1. La profesora gestiona una serie de ayudas diferenciadas entre sus estudiantes para que multipliquen dos matrices.

En el siguiente extracto mostramos cómo la profesora Emi aplica la técnica de andamiaje denominada cambio en la cantidad de ayuda (Verenikina &

Chinnappan, 2006), diferenciando la necesidad de cada una de las estudiantes involucradas. Se trata de un tema procedimental en el cual la profesora intenta que se aprenda la mecanización del proceso. En el subtema matrices, Emi indica a los estudiantes, paso a paso, el procedimiento matemático que deben realizar para hacer el ejercicio que les propone sobre producto de matrices. Apoya a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio, además les indica algunas pautas a seguir o incluso ayuda a terminar el ejercicio a S3 en su cuaderno, tras su segunda equivocación.

En esa clase, Emi pide a sus estudiantes que realicen el producto de matrices de la expresión 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Destacan dos casos, por un lado la estudiante S4, que solo requiere ayuda para empezar el ejercicio y por otro lado S3 que tiene más dificultades durante el proceso.

Emi. *«¿Alguien necesita ayuda?* [S4 levanta la mano y Emi se acerca a ella]. *Tienes que multiplicar la primera fila por la primera columna* [Emi marca, en el cuaderno de S4 en el primer ejercicio, la primera fila de la primera matriz y la primera columna de la segunda matriz] *y luego tienes que ir multiplicando cada una de las filas por cada una de las otras columnas»*.

Emi sabe que con esa ayuda es suficiente para que S4 logre obtener el producto de las dos matrices.

Posteriormente, S3 levanta la mano para solicitar ayuda a Emi. La profesora se acerca a S3 y le indica paso a paso el procedimiento matemático y juntas logran obtener los valores de la primera fila de la matriz producto. Emi pretende que S3 aprenda el procedimiento para multiplicar dos matrices y considera que un método adecuado para ello es indicarle elemento a elemento (fila-columna) qué debe multiplicar y luego sumar. Posteriormente Emi ayuda a S3 para que obtenga los valores de la segunda fila.

S3. *«Ésta con ésta* [S3 señala la segunda fila y la primera columna]*»*
Emi. *«Eso es»*

S3. *«Yo creía que multiplicaba sólo el primer elemento de la fila por toda la columna* [en términos generales a_{11} por b_{11}, luego por b_{21}, y finalmente por b_{31}], *pero entonces ahora es 0 por 4, 1 por 5, y 3 por 3* [son los productos correspondientes a la segunda fila por la primera columna]*»*
Emi. *«Sí, muy bien»*.

Así, S3 expresa a Emi su idea errónea en cuanto al procedimiento de la multiplicación fila-columna. Emi sabe que en sus ayudas a S3 tendrá que subsanar esa idea errónea, por ello le va preguntando tanto la fila como la columna que debe ir multiplicando. Emi sabe que S3 presenta más dificultades que S4 para ejecutar el procedimiento, por eso decide dar un paso más allá del marcado de fila y columna que empleó para representar el procedimiento en el caso de S4, pasando a desglosar la expresión concretándola en los números específicos que forman esas fila y columna.

En los siguientes pasos S3 vuelve a su idea errónea de multiplicar sólo un número de la tercera fila por cada uno de los elementos de la segunda columna. Emi detiene a S3, indicándole que no es así y es Emi quien le indica los productos concretos que tiene que realizar, S3 sólo anota los resultados. Es así como logran obtener los valores de la tercera fila de la matriz producto.

En esos segmentos de transcripciones, de los cuales solo se muestra aquí una parte, se evidencia la variación de las ayudas que Emi va dando a sus estudiantes, pues a S4 sólo le indicó los pasos a seguir y con S3 fueron diferentes las ayudas, conforme surgían reacciones de la estudiante hasta terminar ese ejercicio.

Lo anterior nos lleva a la obtención del indicador "saber qué tipo de ayudas matemáticas dar a los estudiantes en situaciones de error, confusión o dificultad, con la intención de que puedan dar solución a una tarea", que engloba el conocimiento de ayudas diferenciadas dependiendo del tipo de problemática matemática a la que se enfrente el estudiante. Cabe destacar que en este caso la tarea es de tipo procedimental y que no se dota a los estudiantes de los porqués de cada paso en ese proceso.

A2. La profesora da ayudas para que sus estudiantes mantengan en mente cuál es el propósito del problema que están resolviendo.

Emi encomienda a los estudiantes hacer un problema de programación lineal propuesto en el libro de texto. El problema consiste en determinar cómo debe organizarse el transporte para que su gasto sea mínimo.

Emi les hace notar con qué datos cuentan y qué tienen que determinar en el problema; en particular, les hace notar que sólo necesitan dos variables para resolver el problema y que da igual que escojan una ciudad u otra dado que las otras ciudades quedarían en relación con esas. En términos de Zurek *et al.* (2014), Emi utiliza una técnica de andamiaje para focalizar la atención en aspectos relevantes del problema.

> Emi. *«Tenemos el coste de transporte desde cada ciudad europea a cada una de las africanas, luego los lotes de que disponen y los lotes que necesitan cada una de las poblaciones, entonces ¿qué es lo que hay que determinar? Cuántos lotes de cada tipo desde cada una de las ciudades europeas a cada una de las africanas y tenemos que saber cuántos lotes de mantenimiento y de choque salen de la ciudad A, de la ciudad B y de la ciudad C y lo mismo para Munich»*.

Hay que señalar que, en la clase anterior, Emi ya les había encomendado la tarea de hacer al menos el planteamiento del problema, por eso, en la clase les pide a los alumnos que alguno pase a la pizarra, pero, al ver que nadie lo hizo, decide empezar a dar pautas y hacer preguntas para que los estudiantes participen y de esa manera ayudarles a comprender de qué trata el problema y luego hagan el planteamiento. Emi sabe que si no promueve al menos la comprensión del problema, será difícil que los estudiantes hagan un intento para resolverlo.

Respecto a esto, hay que mencionar también que en varias ocasiones Emi se enfrenta a que los estudiantes eluden abordar un ejercicio o problema, es decir, los estudiantes no hacen nada para solucionarlo, porque no entienden de qué trata el ejercicio o problema, o no entienden qué quiere el profesor que ellos hagan. Por ello, Emi, tratando de solucionar esa dificultad, decide hacerles saber explícitamente lo que requiere el problema y enfatizarles en concreto cómo quiere que lo resuelvan y para qué (de hecho, se sirve de ejemplos para recalcar esos aspectos). Con esta evidencia y análisis surge el indicador "saber que una estrategia para que los estudiantes comprendan o realicen un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en señalar lo que la actividad les demanda".

A3. La profesora brinda ayuda para que los estudiantes se percaten de detalles implícitos en un problema que resolverán.

Emi les hace notar a los estudiantes que se puede leer entre líneas en los datos del problema, es decir, que aunque no se dé en el problema la distancia entre las fábricas de refresco y los supermercados, se puede saber qué supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste de transporte.

Emi. *«¿Por qué estas diferencias de precios?»*
S3. *«Depende de qué tan lejos estén»*
Emi. *«Muy bien, dependerá de la distancia los costes de transporte pues las cajas se introducen en camiones y los camiones tienen que recorrer una distancia, entonces dependiendo de la distancia que cada uno recorra será el coste, por ejemplo podemos ver que aunque no nos lo digan, el supermercado más cercano desde la fábrica A es el supermercado 2* [pues es el menor coste que aparece en la tabla para la fábrica A] *y para la fábrica B el supermercado más cercano es el 1* [pues es el menor coste que aparece en la tabla para la fábrica B], *mientras que el supermercado 3 sería el más alejado para las dos de ellas»*.

Emi sabe que habrá problemas en los que los estudiantes tendrán que deducir datos que no están explícitos en el problema pero que pueden obtenerlos y así tener acceso a la solución del problema. Expresa en la entrevista que para ella una manera de animar a los estudiantes a hacer el ejercicio es señalarles datos o aspectos que ellos deben considerar, combinando técnicas de andamiaje de focalización y ofrecimiento de pistas.

Esto nos lleva a plantear el indicador "saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que se usará para darle solución".

Cada uno de los descriptores que abstrajimos, y que presentaremos en la tabla 1, pertenecen a la misma categoría dentro del KMT que se llama *actividades, tareas, ejemplos, ayudas* (Carrillo *et al.*, 2014a). Se trata de elementos de los que el profesor se vale para gestionar los contenidos entre los estudiantes de su clase. En este caso, el tipo de gestión que tienen las profesoras se relaciona con una comunicación mayoritariamente unidireccional en la que la profesora asume la responsabilidad del aprendizaje y se convierte en el medio de validación del conocimiento. Queremos subrayar que nuestra intención es comprender el conocimiento que ponen en juego las profesoras. No nos posicionamos desde una perspectiva evaluativa, sino desde una interpretativa, por lo cual, no hacemos juicios de valor acerca del tipo de determinaciones y acciones que llevan a cabo. Para fines prácticos, hemos dividido la categoría en subcategorías referentes a ejemplos y a ayudas.

En resumen, los resultados que presentamos en este artículo corresponden al conocimiento del profesor que da pie a que la investigación proponga indicadores como parte –tangible– para analizar el KMT del profesor de matemáticas al utilizar los ejemplos y dar ayudas a sus estudiantes. Estos indicadores dan

Tabla 1. Indicadores de conocimiento que provienen del análisis de los usos de ejemplos y las ayudas que las profesoras dan a sus estudiantes.

Categoría	Subcategoría	Indicador
Actividades, tareas, ejemplos y ayudas	Conocimiento de las características de las tareas ejemplos y actividades	**KMT1.** Saber de la potencialidad del ejemplo contextual para crear un entorno de significación antes de introducir la definición formal de un concepto.
		KMT2. Saber de la potencialidad del ejemplo como medio para destacar o recalcar los aspectos singulares del contenido matemático que pretende enseñarse.
		KMT3. Saber crear, elegir y explorar situaciones problema en forma de ejemplo o ejercicio, para que los estudiantes puedan producir sentido y significado al contenido matemático.
	Conocimiento de diversas maneras de encauzar, canalizar y dar pautas ante problemáticas suscitadas en el aprendizaje matemático	**KMT4.** Saber qué tipo de ayudas matemáticas dar a los estudiantes en situaciones de error, confusión o dificultad, con la intención de que puedan dar solución a una tarea.
		KMT5. Saber que una estrategia para que los estudiantes comprendan o realicen un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en señalar lo que la actividad les demanda.
		KMT6. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que se usará para darle solución.

luz sobre la categoría y el subdominio en cuestión, permitiendo acercarnos a otros profesores con una mayor sensibilidad teórica y con una mejor herramienta analítica. Somos conscientes de que el propio conocimiento en general de las profesoras, su formación, experiencia e interés, el contexto donde desarrollan su trabajo, además de otras variables que influyen en su identidad como profesoras, condicionan las expresiones de su conocimiento de la enseñanza de las matemáticas que se han interpretado con la intención de abstraer los indicadores presentados.

CONCLUSIONES

El análisis de las acciones de las profesoras nos ha permitido abstraer lo que hemos presentado como indicadores de conocimiento para la categoría *Actividades, ejemplos, tareas y ayudas*, perteneciente al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. Para ello elegimos a dos profesoras sobre la base de su consideración como *buenas profesionales* por su entorno educativo y por las diferencias entre sus contextos.

Independientemente de las valoraciones que pudieran hacerse del aprovechamiento y generación de oportunidades de aprendizaje por parte de las profesoras, el uso del modelo teórico MTSK como herramienta analítica y la sensibilidad teórica de la que nos dotó el estado del arte que construimos han posibilitado la obtención de los indicadores mencionados y por ende la profundización del propio modelo MTSK.

Pudimos detectar el uso por parte de las dos profesoras de varios tipos de ejemplos de acuerdo a la literatura revisada. Además, observamos la importancia de que el profesor conozca la potencialidad del ejemplo como recurso didáctico, así como el conocimiento subyacente a la selección, aplicación o uso de éstos, lo cual incluye plantearse si el ejemplo que se propone es realmente un ejemplo, si debe usar datos concretos o genéricos, si debe usar ejemplos para contextualizar un contenido, etcétera. Es evidente que estas elecciones por parte del profesor no sólo se sustentan en el KMT, reflejan parte de este tipo de conocimiento, pero también requieren estar respaldadas por conocimiento del propio tema, de cómo se proyectará este tema a futuro, tanto dentro de la disciplina como en otras ciencias, de los elementos sintácticos que permiten saber los efectos matemáticos del uso del ejemplo, de las consideraciones que suponen estos para los diferentes procesos de aprendizaje y de aquellos aspectos estipulados oficialmente de hasta dónde o cuánto del contenido debe abordar con los ejemplos. Todo ello a fin de construir un riguroso cuerpo de conocimiento acerca de los conceptos que presente (Muir, 2007) y obtener el máximo provecho como oportunidad de aprendizaje (Carrillo, Contreras-González & Zakaryan, 2014b).

Por otro lado, en cuanto a las ayudas, la organización de la clase en una comunicación privilegiadamente unidireccional o con rasgos de discusión programada permitió únicamente ver algunas de las técnicas que en la literatura se han encontrado oportunas para propiciar el aprendizaje mediante andamiajes. De hecho consideramos que algunas de las técnicas que pudieran ser más productivas e interesantes, pero que requerirían de un trabajo más protagónico por parte de los estudiantes, no fueron intentadas por las profesoras. En parte puede deberse a que el tema es tratado desde un punto de vista de dominar la técnica y no de comprender los porqués de los procedimientos enseñados. En ese sentido, también en el uso de los ejemplos es notorio que, aunque las profesoras hayan evidenciado diversos conocimientos del KMT, parecen no haber motivado la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes sino más bien parecían invitados únicamente a reproducir procedimientos.

Además queremos destacar que, aunque en este artículo solamente hemos explorado el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, somos conscientes de que existe una interrelación entre los distintos subdominios del MTSK. El ejemplo tiene distintas facetas que lo hacen aparecer en los diferentes subdominios: conocer las características del ejemplo como medio para hacer comprensibles ciertas partes del contenido está incluido en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, lo cual ha sido objeto de estudio en este artículo; pero además saber ejemplos de un tema específico está en el conocimiento de los temas, saber qué ejemplos les serán más accesibles o cuáles más útiles a los estudiantes se encuentra en el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, saber qué es un ejemplo, qué es un contraejemplo y las funciones lógicas y argumentativas de estos forman parte del conocimiento de las prácticas matemáticas. De este modo, tomando la ejemplificación como foco se podrían obtener indicadores del conocimiento del profesor tanto matemático como didáctico. Lo mismo podríamos decir si focalizamos en las ayudas (algunas relaciones son descritas en Carrillo *et al.*, 2014a).

Finalmente, queremos señalar que aún quedan varias tareas pendientes; por ejemplo, analizar cómo se expresan –si lo hacen– los indicadores propuestos en este artículo en profesores con otras características, además de estudiar en qué medida estos indicadores así como los que emerjan de otras investigaciones, podrían aportar ideas para el diseño de programas y actividades de formación inicial y continua del profesorado (Sosa & Ribeiro, 2014).

REFERENCIAS

Amerian, M., & Mehri, E. (2014). "Scaffolding in Sociocultural Theory: Definition, Steps, Features, Conditions, Tools, and Effective Considerations". *Scientific Journal of Review*, *3*(7), 756-765. DOI: 10.14196/sjr.v3i7.1505

Ball D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). "Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special?" *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. DOI: 10.1177/0022487108324554.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). "Exemplification in Mathematics Education". En J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. USA: Harvard University Press.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014a). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J. Contreras-González, L.C., & Zakaryan, D. (2014b). "Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas: un estudio de dos casos". *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 89-109.

Carrillo, J. Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). "Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching". En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8*. Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME. pp. 2985-2994.

Chick, H.L., & Harris, K. (2007). "Pedagogical Content Knowledge and the Use of Examples for Teaching Ratio". *Proceedings of the 2007 AARE International Educational Research Conference*, 1-15.

Chick, H. L., Baker, M., Pham, T., & Cheng, H. (2006). "Aspects of Reachers' Pedagogical Content Knowledge for Decimals". En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, Prague: PME. pp. 297-304.

Cohen L., & Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Erickson, F. (1986). "Qualitative Methods in Research of Teaching". En M. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*. Nueva York: Macmillan. pp. 119-161.

Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (2015). "El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas". *PNA*, *10*(1), 53-77.

Evertson, C. M., & Green, J. L. (1989). "La observación como indagación y método". En C.M. Wittrock (Ed.). *La investigación de la enseñanza, II: Métodos cualitativos y de observación*. Barcelona: Paidós/MEC. pp. 303-406.

Figueiredo, C. A. (2010). "Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional". Tesis Doctoral no publicada. Extremadura, España: Universidad de Extremadura.

Figueiredo, C.A., Blanco, L.J., & Contreras, L.C. (2007). “La ejemplificación del concepto de función en estudiantes para profesores de matemáticas de secundaria”. *Investigación en la escuela*, *61*, 53-68.

Figueiredo, C.A., Contreras, L.C., & Blanco, L.J. (2009). “A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos”. *ZETETIKÉ*, *17*(32), 29-60.

Figueiredo, C.A., Contreras, L.C. y Blanco, L.J. (2012). “La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos”. *Educación Matemática*, *24* (1), 73-105.

Grbich, C. (2007). *Qualitative Data Analysis: An Introduction*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Jiménez, R. (2012). “Educación inclusiva y formación inicial del profesorado: evaluación de una innovación didáctica basada en la producción cinematográfica desde la perspectiva del alumnado”. *Revista de Educación*, 359, 232-259, DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2011-359-093.

Kagan, D.M. (1990). “Ways of Evaluating Teacher Cognition: Inferences Concerning the Goldilocks Principle”. *Review of Educational Research*, *60* (3), 419-469. DOI: 10.3102/00346543060003419.

Latorre, A., Rincón, D. del, & Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado ediciones.

Llinares, S. (2000). “Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas”. En J. Ponte & L. Serrazina (Eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao-1999* . Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao. pp. 109-132.

Lofland, J., & Lofland, L.H. (1984). *Analyzing Social Settings*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company, Inc.

Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education: A Qualitative Approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Muir, T. (2007). “Setting a Good Example: Teachers’ Choice of Examples and Their Contribution to Effective Teaching of Numeracy”. En J. Watson & K. Beswick (Eds.). *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematical Education Research Group of Australasia*, *2*, 513-522.

Rasmussen, J. (2001). “The Importance of Communication in Teaching: a Systems-Theory Approach to the Scaffolding Metaphor”. *Journal of Curriculum Studies*, *33*(5), 569-582. DOI: 10.1080/00220270110034369.

Shulman, L.S. (1986). “Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching”. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). “Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform”. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2015). “Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato”. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, pp. 173-189.

Sosa, L., & Ribeiro, C.M. (2014). “La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente”. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, *1*, 1-15.

Stake, R.E. (1994). “Case Studies”. En N.K. Denzin, & Y.S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research*. Thousands Oaks, CA: Sage Publications. pp. 236-247.

Tatto, M.T., Schwille, J., Senk, S.L., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual Framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Verenikina, I. (2004). “From theory to practice: What does the metaphor of scaffolding mean to educators today?” *Outlines: critical social studies*, 6 (2), 5-16.

Verenikina, I., & Chinnappan, M. (2006). “Scaffoldings Numeracy: Pre-service Teachers’ Perspective”. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces. Proceedings of the 29th Conference of MERGA* (pp. 519-528). Adelaide, SA: MERGA.

Watson, A., & Mason, J. (2002). “Extending Example Spaces as a Learning/Reaching Strategy in Mathematics”. En A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377). University of East Anglia, Norwich, UK: PME.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). “Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student-Teachers: the Case of Binary Operation”. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 67-78.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). “Generating Examples: from Pedagogical Tool to Research Tool”. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 15-21.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2007). “Exemplification in the Mathematics Classroom: What is it Like and What does it Imply?” En D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2024-2033), Larnaka, Cyprus.

Zurek, A., Torquati, J., & Acar, I. (2014). “Scaffolding as a Tool for Environmental Education in Early Childhood”. *International Journal of Early Childhood Environmental Education*, *2*(1), 27-57.