Ruptura del contrato didáctico en la solución de un problema de geometría con estudiantes de secundaria

Breaking the didactic contract in solving a geometry problem with high school students

Apolo Castañeda*
Juan Arturo Hernández-Morales**
Rosa Isela González-Polo***

Resumen: Se presentan los resultados de la implementación de un diseño didáctico con estudiantes de secundaria (12-14 años), relativos a la construcción de triángulos, dados tres segmentos, donde se analiza la ruptura e instauración del contrato didáctico en la solución de un problema de cálculo de área y perímetro. Para el diseño de la secuencia se consideraron las aportaciones teóricas sobre el contrato didáctico de Brousseau, y el modelo de resolución de problemas de Lester (2013: 258), a partir de los cuales se plantearon actividades de construcción de triángulos con tiras de papel que sirvieron de preámbulo para abordar un problema de cálculo de área y perímetro de un triángulo con medidas erróneas. Los resultados muestran que los estudiantes entran en contradicciones, ya que a pesar de concluir ciertas condiciones para las medidas de los segmentos de un triángulo y trabajar previamente con problemas sin solución, no pueden reconocer un triángulo con medidas erróneas e incluso afirman que es posible obtener el perímetro de tres segmentos de una figura que no es cerrada.

Fecha de recepción: 5 de febrero de 2015. **Fecha de aceptación**: 2 de febrero de 2016.

* Programa de Matemática Educativa. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. acastane@ipn.mx

** Programa de Matemática Educativa. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. arturo535@gmail.com

*** Normal Superior del Estado de México. rosaiselag@gmail.com

Palabras clave: *Contrato Didáctico, resolución de problemas, geometría, estudiantes de secundaria.*

Abstract: This study reports the results of the implementation of an experimental design in a high school mathematics classroom (students 12-14 years old) aimed at the construction of triangles, given three segments. Within the experimental design, there is a problem of calculation of area and perimeter where the rupture and establishment of didactical contract is analysed. For the design of the sequence, theoretical reflections on the concept of didactical contract of Brousseau were considered, as well as the problem solving model of (Lester, 2013: 258), this allowed the design of activities regarding triangles construction using paper strips. These activities served as a prelude to address a problem of calculation of area and perimeter of a triangle with wrong measures. The results show that students get into contradictions, because despite finding certain conditions for the measure of the segments of a triangle and working previously with unsolvable problems, they cannot recognize a triangle with wrong measures and even claim that it is possible to obtain the perimeter of three segments of a figure which is not closed.

Key words: *Didactical Contract, problem solving, geometry, high school students.*

ANTECEDENTES

En el trabajo de Chevallard, Bosch y Gascón (1997: 61) se afirma que en la escuela son importantes aquellas normas que rigen las obligaciones de los alumnos y del profesor con respecto a un proyecto de estudio. Se trata de cláusulas que evolucionan a medida que avanza el proceso didáctico. A este fenómeno Brousseau le denominó contrato didáctico.

El trabajo de síntesis sobre hallazgos sólidos en matemática educativa de Education Committee of the EMS (2012: 1) presenta varios episodios de tareas escolares que documentan la existencia del contrato didáctico. Uno de estos casos es el problema que se expone bajo el nombre de "la edad del capitán", el cual enuncia: en un barco hay 26 ovejas y 10 cabras, ¿Cuál es la edad del capitán? Las investigaciones que exploraron las respuestas de este problema (como la de Verschaffel, Greer y De Corte, 2000: 4) señalan que la gran mayoría de los alumnos se rigen por la creencia de que los datos asignados en el problema se van a utilizar en los cálculos y a su vez, estos cálculos darán la respuesta requerida, no se cuestiona la estructura del problema.

Brousseau (1980: 127) señala que el contrato didáctico es el conjunto de los comportamientos específicos de los profesores, para un conocimiento a enseñar, previstos por el estudiante y el conjunto de comportamientos de los estudiantes esperados por el profesor. Este es un modelo de obligaciones recíprocas y sanciones, donde el estudiante o profesor impone o cree haberlas impuesto explícita o implícitamente respecto a un conocimiento en cuestión. O bien son impuestas o cree que se han impuesto al estudiante o al profesor con respecto al conocimiento en cuestión (Education Committee of the EMS (2012: 2-3).

Como se observa, estos comportamientos específicos de los profesores y estudiantes son definidos por una negociación implícita y establece las relaciones entre estudiantes o grupo de estudiantes en el ámbito de una institución y un sistema educativo en torno a un conocimiento, sin embargo, este contrato no es explícito, ni es establecido abiertamente, pero sus efectos son visibles cuando la clase evoluciona y se generan contradicciones, por ejemplo, cuando los estudiantes son conscientes de que el profesor conoce el procedimiento de solución, así que el profesor por medio de la actividad matemática enseñará la solución. El estudiante entonces, no asume la respuesta para sí mismo, no se involucra lo necesario con el conocimiento matemático y por lo tanto, no puede apropiarse de este conocimiento (Education Committee of the EMS, 2012: 3).

Brousseau afirma también que el contrato didáctico es insostenible y conduce a paradojas, por ejemplo cuando el profesor, que hace todo con el fin de producir en los alumnos el comportamiento que quiere, tiende a disminuir la incertidumbre de los estudiantes, y por lo tanto les priva de las condiciones necesarias para la comprensión y el aprendizaje de la noción. Si el profesor dice o indica lo que el estudiante debe hacer, el estudiante sólo obtendrá el resultado como consecuencia de la ejecución de una orden, y no por medio del ejercicio de conocimientos y pensamientos. (Education Committee of the EMS, 2012: 4).

Desde esta perspectiva, aprender matemáticas no es consecuencia de un buen funcionamiento del contrato didáctico, implica que el estudiante niegue o rompa el contrato didáctico para hacerse cargo de la tarea de forma autónoma. Esta ruptura está caracterizada por una actitud de responsabilidad y autonomía en la actividad matemática, donde se da la posibilidad de que el estudiante emplee sus conocimientos, habilidades y estrategias para determinar la solución. Sin embargo, como Brousseau (1987) lo señala, el contrato didáctico no es una enfermedad de la relación didáctica, sólo muestra que el aprendizaje de las matemáticas no se reduce a memorizar algoritmos y conocer definiciones. En este sentido el contrato didáctico no es un fenómeno que obstruya el aprendizaje, ni es una condición negativa para el desarrollo de la clase, ya que su ruptura, así como la autonomía y la responsabilidad en el estudiante no son determinantes en el aprendizaje, aunque sí lo favorecen.

En este sentido, Montiel (2002: 26) explica que el profesor tiene el control del contrato y esta posición de autoridad le permite reorientar la actividad en caso de rupturas, así logra que el contrato evolucione a medida que la actividad y los conocimientos de los estudiantes también evolucionan. El profesor puede anticipar la manifestación del contrato didáctico durante el desarrollo de una actividad de aprendizaje y esto le permite organizar la enseñanza y llevar a los estudiantes al aprendizaje.

Por otra parte, como concluye Education Committee of the EMS (2012: 2) los estudiantes asumen sin cuestionar que todas las tareas que les propone el profesor tienen solución. Más aún, admiten que sería muy extraño que un ejercicio no tuviese respuesta o que condujera a una respuesta inconsistente, por ello, cuando a los estudiantes se les enfrenta a problemas no-estándar pueden manifestar confusión y contradicciones al tratar de buscar la respuesta directa al planteamiento.

De acuerdo con Santos (1992: 18) los problemas "no rutinarios" son aquellos que cuentan con varios métodos de solución o que requieren para su solución, más que la simple aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos. Señala además que su uso puede constituir un recurso natural para discutir actividades que ilustren el uso de conjeturas, contraejemplos, aproximaciones, aunque como lo afirma Schoenfeld, (1985: 2), rara vez reciben atención en el currículo escolar.

En el contexto escolar, es usual que la actividad de resolver un problema posicione a la "obtención del resultado" como actividad central y prioritaria ya que es lo que comúnmente se evalúa. Pero como lo expone Lester (2013: 257) la solución no debe ser considerada el último paso, debe involucrar y provocar una serie de comparaciones entre el contexto inicial del problema y la representación matemática que se deriva; Lester explica, que este proceso de actividad metacognitiva de continuo monitoreo es clave para el éxito en el proceso de solución.

Al respecto, D'Amore y Martini (1997: 27) describen dos momentos donde se manifiesta específicamente el contrato didáctico durante la resolución de problemas. El primero se refiere a un momento en el que el estudiante no se siente autorizado a escribir lo que no se pide explícitamente en el problema (denominado aprehensión del problema) y por otra parte, cuando el estudiante se olvida del texto del problema y se enfoca en desarrollar estrategias para encontrar la solución al establecer cálculos y operaciones, que se interpreta como la respuesta del problema (delegación formal). Más adelante, D'Amore y Martini (1997:27) exponen que un aspecto relevante en la resolución de un problema es la elección o planteamiento de la operación, a partir de esto se desprenden los cálculos que se van a realizar. De acuerdo con esta investigación, los estudiantes no reflexionan sobre el texto o descripción del problema ya que la prioridad es encontrar un determinado valor, por lo que no hay un control crítico, tal como lo señala Nesher (1981:43) los estudiantes, más que dar un contexto al planteamiento del problema, buscan la inferencia directa de la operación matemática necesaria. Donde por contexto nos referimos a los significados no matemáticos que están presentes en la tarea (Lester, 2013: 265).

En este punto, es necesario reconocer que la definición de problema es algo relativo: lo que para un estudiante requiere de un esfuerzo, para otro puede ser sólo un ejercicio de rutina (Schoenfeld, 1985: 17), esto depende de los conocimientos y habilidades previas, así como de su experiencia en la resolución de problemas. Tal como lo menciona Lester (2013: 251) la resolución de problemas es una actividad en la que se articulan una variedad de acciones cognitivas, cada una de las cuales necesita de ciertos conocimientos y habilidades, algunas de ellas no son rutinarias, como por ejemplo, coordinar experiencias previas, usar representaciones, patrones, emplear la intuición, entre otros.

Aunque Lester (2013: 268) explica que se trata de una actividad que no está regida o establecida por pasos definidos, es posible identificar características comunes, en cuanto a su estructura y a las estrategias que se emplean para resolver los problemas. En su trabajo menciona a la heurística como un aspecto que permite a los estudiantes enfrentar y resolver un problema matemático. Esto se refiere a las estrategias que usan los estudiantes como formular métodos, reglas, así como inventar procedimientos, por ejemplo: ensayo y error, búsqueda de patrón, resolver un problema más simple, hacer un diagrama, resolver un problema equivalente, hacer una tabla de valores, entre otros. Estas estrategias se manifiestan en el estudiante de forma autónoma, por lo que bien podría considerarse como una forma de afrontar el problema sin empeñarse únicamente en realizar los cálculos.

En Santos (2007: 26) se afirma que los actuales cambios al currículum matemático en el nivel medio superior reconocen que el estudio de la matemática debe ir más allá de la memorización de reglas o fórmulas para resolver determinados problemas, en esta perspectiva resulta importante plantear escenarios de aprendizaje que proporcionen al estudiante la oportunidad de reflexionar acerca del uso de conocimientos y procesos del quehacer matemático y, que le permitan extender y fortalecer sus formas de resolver problemas. Estos aspectos están integrados en el esquema de Lester (2013: 258) en el que se describe un modelo de actividad matemática por el que transita un estudiante en la solución de un problema matemático.

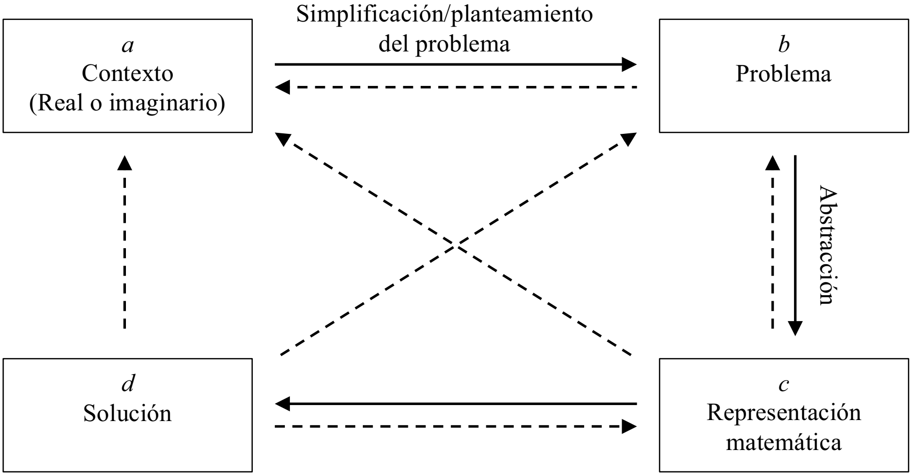


Figura 1. Esquema de Lester sobre la resolución de problemas

Este esquema inicia con un contexto desde donde se le propone al estudiante trabajar en la resolución de un problema (*a*), se le plantea una tarea específica para resolver (flecha sólida entre *a* y *b*). El estudiante simplifica el planteamiento al identificar conceptos y procesos que soportan al problema (*b*). El estudiante vuelve al contexto inicial para reinterpretar el sentido del problema (flecha punteada entre *b* y *a*). A continuación viene la fase de abstracción (flecha sólida entre *b* y *c*) la cual introduce conceptos matemáticos y notaciones (aunque idiosincráticos). Esta fase de abstracción involucra la selección de conceptos matemáticos que representen las características esenciales del modelo real. Una vez que el estudiante ha generado una representación matemática de la situación original, este problema matemático adquiere un significado propio, volviéndose un problema matemático aislado, bien definido (cuadro *c*).

La tercera fase del proceso (de *c* - *d*) involucra la manipulación de la representación matemática y la deducción de algunas conclusiones matemáticas (señaladas como la flecha sólida de cálculos). Por último la fase final (que puede ser de *d* - *a*, *d* - *b*, y *d* - *c*) implica la comparación de las conclusiones o resultados con el problema en su contexto original o con su representación matemática. Lester señala que esta etapa de comparación no implica necesariamente el término de un proceso de solución ya que se trata de un proceso de continuo monitoreo del trabajo propio; él identifica esta actividad como actividad meta-cognitiva y señala que éste es elemento clave para el éxito en tareas matemáticas complejas. Considera que el grado con el cual un individuo compara el estado actual del problema con estados anteriores denota la complejidad de la tarea, permitiendo distinguir tareas rutinarias o no rutinarias.

Este trabajo propone observar el fenómeno del contrato didáctico enmarcado en el ámbito de resolución de problemas matemáticos, considerando que hemos identificado coincidencias en ambos modelos teóricos. La primera se refiere a la importancia de realizar una actividad meta-cognitiva de monitoreo a fin de darle sentido al resultado obtenido, lo cual implica reconocer el sentido de los datos asignados en el problema y definir el tipo de cálculos necesarios para la respuesta. No se trata de evitar un contrato didáctico, sino favorecer su ruptura. La segunda se refiere a una ausencia de reflexión del resultado en términos del contexto del problema, ya que de acuerdo con el modelo de Lester, la solución es el último paso, debe involucrar y provocar comparaciones entre el contexto inicial del problema y la representación matemática obtenida, en este sentido, los estudios sobre el contrato didáctico reportan que los estudiantes se enfocan en realizar cálculos y operaciones lo que D'Amore y Martini (1997: 27) llaman delegación formal.

Este trabajo de investigación reporta la experiencia de trabajo que se desarrolló en una clase de matemáticas de nivel secundaria, al implementar una actividad didáctica con estudiantes de segundo grado con edades de entre 12 y 14 años, integrada por varios problemas relativos a la construcción de triángulos y al cálculo de área y perímetro de los mismos. El propósito del trabajo fue describir la aparición del contrato didáctico y su ruptura en la solución de dos problemas, el primero relativo a la construcción de triángulos con segmentos de papel y el segundo relativo al cálculo de área y perímetro de un triángulo. Para realizar el análisis nos apoyamos en el modelo teórico de Lester sobre resolución de problemas.

METODOLOGÍA

Se diseñó una actividad didáctica denominada "construcción de triángulos" que tuvo como propósito introducir al estudiante a un análisis de las relaciones de orden de las medidas de los segmentos que permiten la construcción de un triángulo. En esta actividad se emplean tiras de papel con medidas establecidas, donde la consigna para el estudiante es formar un triángulo y pegarlo en las hojas de trabajo. Al usar segmentos de papel se pueden realizar diferentes combinaciones y los estudiantes pueden cerciorarse de la posibilidad de construir un triángulo con tres segmentos dados y determinar las condiciones y las relaciones de orden de los segmentos para formar un triángulo. La segunda parte de la actividad consiste en resolver un problema del cálculo de área y perímetro de un triángulo con medidas falsas en sus lados (medidas no proporcionales a las dimensiones de los lados). El propósito de esta sección fue observar las reacciones de los estudiantes ante un planteamiento erróneo; considerando que en la primera parte de la actividad se analizaron las relaciones de orden de las medidas de los lados de un triángulo y se consideraron los casos en los que no era posible construir un triángulo. Se trata de un planteamiento que no era desconocido para los estudiantes y fue considerado también como una forma de evaluar el trabajo anterior.

La actividad didáctica tiene 7 secciones. La sección 1 (S1) consta de cuatro planteamientos donde se pide a los estudiantes comparar la suma de dos segmentos respecto a un tercero. Los planteamientos S1-1 y S1-2 cumplen que la suma de dos de los segmentos es mayor que el tercero, los planteamientos S1-3 y S1-4 no lo cumplen.

A partir de lo realizado en S1, en la sección 2 (S2) se pide al estudiante construir, para cada caso, un triángulo con las medidas de los segmentos usando tiras de papel. La intención es que reconozca que con las medidas de los planteamientos S2-1 y S2-2 es posible construir un triángulo y en los casos S2-3 y S2-4 no se puede.

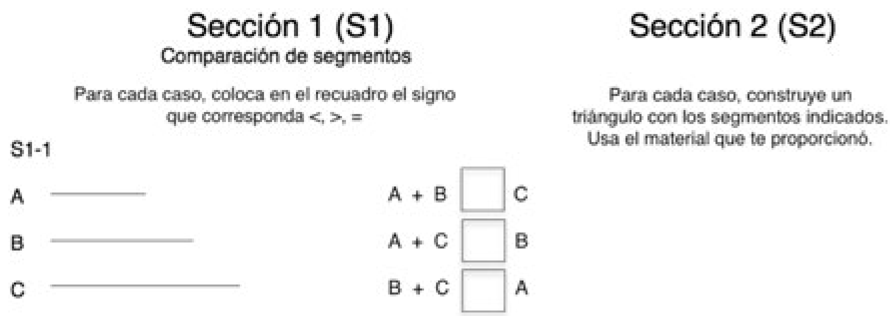


Figura 2. Sección S1-1 y S2

La sección 3 (S3) consta de dos preguntas, la primera (S3-1) cuestiona si es posible construir en cada caso un triángulo con los segmentos dados y la segunda (S3-2) cuestiona si se observa una regularidad en los resultados de las comparaciones de los segmentos.

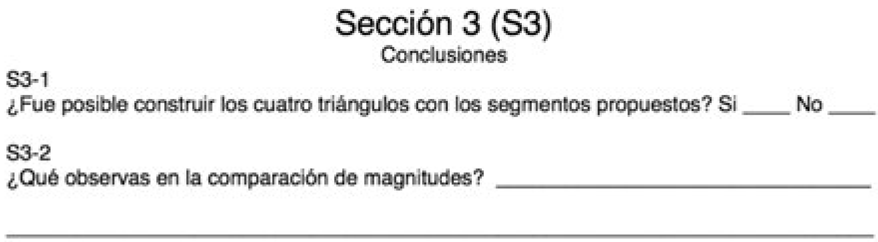

Sección 3 (S3)
Conclusiones
S3-1
¿Fue posible construir los cuatro triángulos con los segmentos propuestos? Si ____ No ____
S3-2
¿Qué observas en la comparación de magnitudes? ______________________________
____

Figura 3. Sección S3

La sección 4 (S4) consta de dos problemas, uno de cálculo de área (S4-1) y otro de perímetro (S4-2). En esta sección se muestra la imagen de un triángulo al cual se le asignaron medidas falsas a los lados. La intención es que el estudiante cuestione las medidas a partir de sus conocimientos previos sobre las relaciones de los lados de un triángulo. Sin embargo, como lo han reportado los estudios de Duval (2005: 17) y de Gal y Linchevski (2010) los estudiantes emplean una visualización de naturaleza estática, centrada en lo que a primera vista se observa en la figura geométrica; esta actividad cognitiva es insuficiente y dificulta la aplicación y desarrollo de conceptos y relaciones geométricas, por lo que es posible que los estudiantes pasen por alto la información de la figura y se enfoquen en aplicar las fórmulas para obtener el valor del área y perímetro.

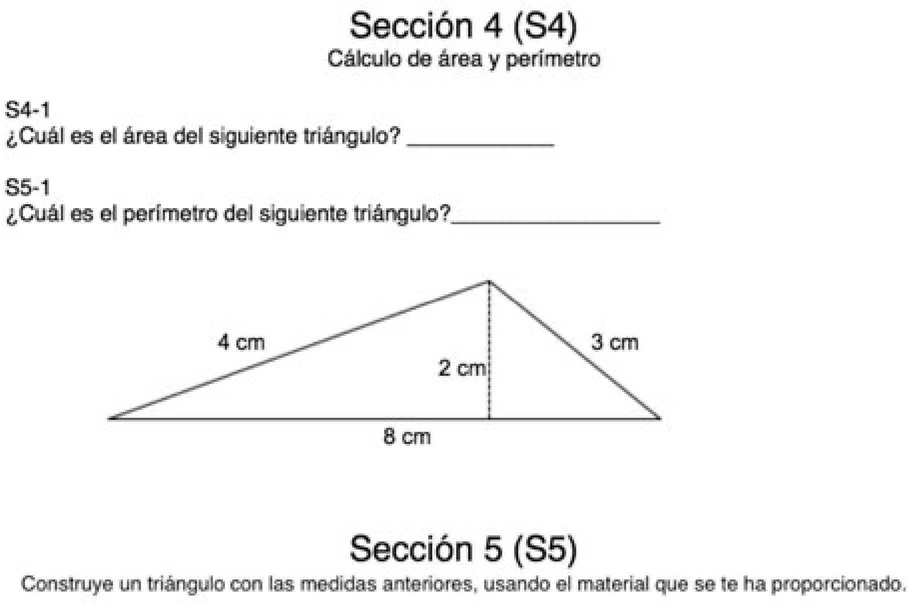
De acuerdo con Laborde y Capponi (1994:178-182) el objeto geométrico existe en una teoría geométrica (abstracta) y el dibujo se toma del universo de todos los dibujos posibles del objeto geométrico, así la figura geométrica es la relación que se establece entre el objeto geométrico y las posibles representaciones de éste. Esta relación constituye el significado de la figura geométrica asociado por el sujeto. "Por tanto, la relación establecida depende de la teoría en la que se desea hacer ésta, de los conocimientos del lector y para qué se establece dicha relación" (Laborde y Capponi, 1994, pp. 168-169). Con este referente señalamos que las actividades S1 y S2 conducen a analizar las condiciones de construcción de un triángulo dado tres segmentos, por lo que la conclusión esperada es que un triángulo existe y se puede construir si los segmentos utilizados cumplen con una condición; que la suma de cualquiera de dos de ellos es siempre mayor que el restante. El triángulo en la sección S4 representa un dibujo de un triángulo teórico que no existe, aunque el estudiante con los conocimientos adquiridos en las secciones S1, S2 y S3 podría refutar el planteamiento.

Inicialmente se pensó en preguntar *observa el siguiente triángulo ¿qué observas en la medida de sus lados?*, sin embargo era una pregunta directa que hacía énfasis sobre el dato falso, así que se optó por solicitar el cálculo de la medida del área y del perímetro donde el énfasis se trasladó al uso de una fórmula. ¿Sería posible que los estudiantes identificaran la anomalía en los datos del problema? se esperaba que varios de ellos así lo hicieran, considerando que no era un planteamiento aislado pues en la primera parte de la actividad se analizan los casos en los que es posible construir un triángulo y los casos en los que no. Por otra parte, también consideramos la posibilidad de que los estudiantes asuman que el problema está correctamente planteado y no cuestionen los datos falsos y obtengan una respuesta para el valor de área y perímetro.

El planteamiento S4 se formuló anticipando la creencia de los estudiantes de que los datos asignados en el problema se van a utilizar en los cálculos y darán la respuesta requerida (Education Committee of the EMS, 2012: 1), en nuestro caso la consigna es obtener el valor del área y perímetro, y los estudiantes lo obtendrán como resultado de la ejecución de una orden y no por medio del ejercicio de conocimientos y pensamientos. En el diseño del problema también consideramos que los estudiantes asumen sin cuestionar que todas las tareas que les propone el profesor tienen solución, por lo que esperamos que algunos estudiantes no cuestionen el problema y obtengan una respuesta, ya que como se ha señalado anteriormente, la actividad de resolver un problema posiciona la "obtención del resultado" como actividad central y prioritaria ya que es lo que comúnmente se evalúa.

También se atendió a lo señalado por D'Amore y Martini (1997: 27) respecto a "los momentos del contrato didáctico" en la resolución de problemas; el primero manifiesta que el estudiante no se siente autorizado a escribir lo que no se pide explícitamente en el problema y en nuestro caso el problema solicita únicamente obtener el valor del área y perímetro y no cuestiona las medidas de los lados del triángulo (aprehensión del problema). El segundo establece que el estudiante se olvida del texto del problema y se enfoca en encontrar la solución al realizar cálculos y operaciones que se interpretan como la respuesta del problema (delegación formal), en nuestro caso el uso de las fórmulas de área y perímetro representa la actividad central que permitirá obtener el resultado.

Las actividades de S4 no tienen solución, sin embargo es probable que varios estudiantes obtengan un resultado a consecuencia de la aparición de un contrato didáctico. Se le pedirá al estudiante construir los triángulos con trozos de papel (S5) para confrontar su idea sobre la existencia del triángulo como una forma de romper el contrato al observar que el problema anterior tiene una figura con medidas que no forman un triángulo y por lo tanto no se puede resolver. La ruptura se promoverá en S6 de la secuencia didáctica donde se plantean preguntas reflexivas para analizar lo sucedido, tal como lo señala Montiel (2002), se le dará continuidad a la secuencia al anticipar la existencia de una ruptura del contrato.


Sección 4 (S4)

Cálculo de área y perímetro

S4-1

¿Cuál es el área del siguiente triángulo? ____________

S5-1

¿Cuál es el perímetro del siguiente triángulo?________________

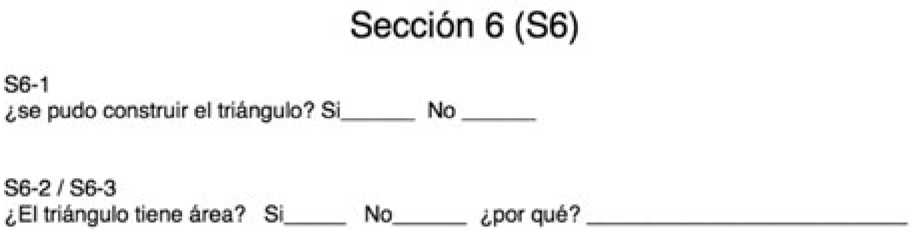
Sección 5 (S5)

Construye un triángulo con las medidas anteriores, usando el material que se te ha proporcionado.

Figura 4. Sección S4 y S5

En la sección 5 (S5) se plantea la construcción de un triángulo con las medidas falsas señaladas en triángulo, usando tiras de papel. Para aquellos estudiantes que cuestionaron las medidas falsas, la intención es llevarlos a que confirmen que no es posible construir el triángulo y no es posible obtener su área y perímetro. Para los que obtuvieron una medida del área y del perímetro, la intención es llevarlos a una contradicción donde puedan reconocer que las medidas del triángulo no son correctas y no tiene sentido el cálculo de área y perímetro. El uso de segmentos de papel tiene como propósito que los estudiantes realicen la construcción y confirmen si es posible formar un triángulo. Las medidas de los segmentos fueron dadas en unidades enteras (centímetros) para evitar cualquier dificultad en la unión de los segmentos o para motivar justificaciones como por ejemplo que estuvieron mal cortados.

En la sección 6 (S6) se plantean siete cuestionamientos, todas estas preguntas tienen el propósito de favorecer una reflexión sobre lo realizado en las secciones 4 y 5. La pregunta S6-1 cuestiona si es posible construir el triángulo referido en el cálculo de áreas. Las preguntas S6-2/S6-3 cuestionan si es posible calcular el área del triángulo de la sección tres, las preguntas S6-4/S6-5 cuestionan si es posible calcular el perímetro. La pregunta S6-6 plantea si es posible que el triángulo presentado en la sección 4 exista y el planteamiento S6-7 solicita al estudiante proponer medidas de segmentos para que no se pueda construir un triángulo.


Sección 6 (S6)

S6-1
¿se pudo construir el triángulo? Si______ No ______

S6-2 / S6-3
¿El triángulo tiene área? Si_____ No______ ¿por qué? ____________________________

Figura 5. Parte de la Sección S6

La sección 7 (S7) tiene un único planteamiento donde se pide al estudiante escribir una conclusión sobre la comparación de dos segmentos respecto a un tercero para que un triángulo se pueda construir.

De acuerdo con la descripción anterior establecemos en la figura 6 la relación de etapas de la actividad, los cuadros de línea continua establecen las secciones de la actividad, las flechas sólidas indican la secuencia de etapas de la actividad, las líneas punteadas señalan la existencia de una relación entre las secciones. Los cuadros punteados indican los momentos en que se manifiesta el contrato didáctico así como su eventual ruptura.

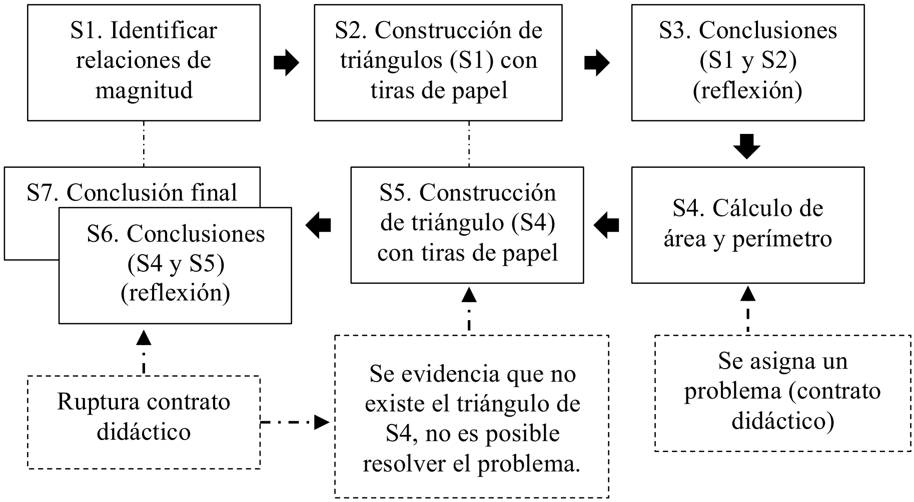


Figura 6. Esquema de las secciones de la actividad

Para desarrollar la secuencia se utilizaron los aportes teóricos de Lester, referidos a la coordinación de conocimientos previos (figura 7, sección A), y al uso de heurísticas en las actividades previas que promueven la identificación de un patrón general de comportamiento (figura 6, sección S1). Así como los aportes de Santos (1992), sobre la importancia de reflexionar y cuestionar la estructura del problema que resuelven los estudiantes (figura 7, sección D) y al agregar preguntas y cuestionamientos de metareflexión (figura 6, sección S6). También lo señalado por Schoenfeld (1985) respecto al diseño de las preguntas considerando la edad de los estudiantes y sus conocimientos previos. Derivado de lo anterior se propuso el uso de material tangible (figura 6, sección S2; sección S5) a fin de proporcionar un referente concreto a los estudiantes para visualizar y analizar las medidas de los segmentos en la construcción del triángulo.

En la figura 7 se describe el proceso de solución, que inicia con el planteamiento del problema (B) del cálculo de área y perímetro de un triángulo. En la hoja de actividades se indican las medidas (C) de los lados del triángulo y de su altura. Para resolver el problema se pueden utilizar las fórmulas para calcular área y perímetro de un triángulo (E), esto implica identificar en el triángulo las medidas necesarias para sustituirlas (F) en las fórmulas y realizar los cálculos (G) necesarios para obtener la medida del área y perímetro (F). El resultado se contrasta con el contexto inicial del problema (A) para asegurar su pertinencia. Dado que el problema presenta un triángulo con medidas falsas se espera que los estudiantes identifiquen las medidas (C) y reinterpreten el sentido del problema (D) a partir de lo analizado previamente en S1 y concluyan que no es posible calcular el valor del área y perímetro.

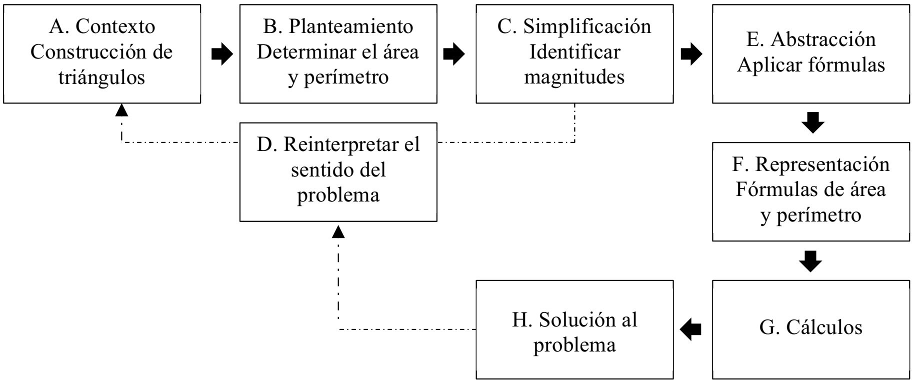


Figura 7. Esquema del modelo de resolución del problema S4

IMPLEMENTACIÓN

La secuencia didáctica se implementó durante el tiempo regular de clase de matemáticas en dos sesiones de 50 minutos cada una, en un grupo de 37 estudiantes de segundo grado de secundaria (nivel básico, 12-14 años de edad). Se les proporcionó una hoja de actividades para cada estudiante y tiras de papel para las actividades S2 y S5. El profesor titular coordinó la actividad. En la primera fase los estudiantes trabajaron de forma individual y en la segunda (desarrollada en otra sesión de 50 minutos) realizaron una plenaria para compartir sus resultados.

Los estudiantes ya habían trabajado previamente con el tema de triángulos durante las primeras semanas del ciclo escolar. La implementación fue realizada en las últimas semanas del mismo y se utilizó como preámbulo para el estudio del tema de simetría donde también se trabaja con distintos tipos de triángulos. El programa de estudios (Secretaría de Educación Pública, 2011) agrupa los temas de segundo grado en 5 bloques, cada bloque con tres ejes: "sentido numérico y pensamiento algebraico", "forma espacio y medida" y "manejo de la información". El estudio de los triángulos está ubicado en el eje de "forma, espacio y medida" dentro del subtema "figuras y cuerpos". En el bloque 1 aparece como: "Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones". Y en el bloque 5 se estudia la "Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos."

El tema de triángulos se estudia desde el nivel primaria (estudiantes con edades de 6 hasta 12 años), por lo que no se consideró necesario diseñar una actividad introductoria.

RESULTADOS

Procedimiento de análisis

El análisis de los resultados se discutirá en dos partes. En la primera se analizan los resultados de la actividad considerando repuestas correctas e incorrectas, descripción de los procedimientos, catalogación de las respuestas abiertas, relaciones entre respuestas, así mismo se señalan respuestas inconsistentes y contradictorias. En la segunda parte se aborda el análisis del problema presentado en S4 considerando el modelo presentado en la figura 7, como el encuadre de las respuestas de S4 desde el contrato didáctico analizando los momentos de ruptura.

Discusión de resultados

En S1 tenemos cuatro preguntas con la misma estructura. Dados tres segmentos *a, b* y *c,* se pide comparar (tricotomía) la suma de dos segmentos respecto a un tercero, con lo cual se obtienen tres casos (donde la suma puede ser mayor, menor o igual al resultado):

$$a + b \;\_\_\_\; c$$
$$a + c \;\_\_\_\; b$$
$$b + c \;\_\_\_\; a$$

S1-1 y S1-2 corresponden a los dos primeros planteamientos donde en todos los casos se cumple que, la suma de dos segmentos siempre es mayor que un tercero, los resultados muestran que de un total de 37 estudiantes, 35 respondieron correctamente lo cual representa 94.5% de respuestas correctas. S1-3 y S1-4 corresponden a los dos últimos planteamientos donde no se cumple con la condición anterior, los resultados obtenidos son: 30 contestaron correctamente (81% de respuestas correctas), 2 contestaron incorrectamente y 5 no contestaron.

En S2, se les proporcionó a los estudiantes tiras de papel con las medidas señaladas en S1 y se les pidió construir un triángulo para cada uno de los casos, pegando las tiras de papel en la hoja de trabajo. En los dos primeros casos (S2-1 y S2-2) los triángulos se podían formar y 100% de los estudiantes construyeron los triángulos. En S2-3 y S2-4 no era posible formar un triángulo dado que los segmentos no cierran la figura. Durante la aplicación de la actividad se observó que varios estudiantes forzaron los segmentos para cerrar la figura haciendo diferentes combinaciones. Concluimos que los estudiantes no lograron reconocer que sería imposible formar el triángulo, y se enfocaron en tratar de descubrir un truco o estrategia para afrontar el planteamiento. Esta fue una manifestación del contrato didáctico, ya que se enfocaron en responder el planteamiento bajo el supuesto que el profesor asigna actividades que se pueden resolver. Los resultados fueron, 31 estudiantes pegaron las tiras esbozando la forma de un triángulo, 1 estudiante flexionó las tiras de papel y construyó los triángulos, 1 estudiante formó una línea recta con los tres tiras y 4 estudiantes no hicieron la actividad. Esto representa 83.7% de respuestas correctas.

En S3-1 se cuestionó ¿Fue posible construir los cuatro triángulos con los segmentos propuestos? 100% de estudiantes reconoció que no era posible. En S3-2 se presentó una pregunta abierta ¿Qué observas en la comparación de *medidas?* (se refiere a S1), se catalogaron las respuestas de acuerdo con el argumento expuesto por cada estudiante y se construyó el siguiente concentrado.

Tabla 1. Respuesta de S3-2

Que la suma de dos lados era mayor que el tercero:	21
Si se tiene un signo igual en la comparación no es posible formar un triángulo:	3
Hay que agregarle centímetros a las medidas para modificar el signo de la tricotomía y poder construir un triángulo:	11
Sin respuesta:	2

En S4-1 se solicita obtener el área de un triángulo que tiene una base de 8 y una altura de 2. Aunque el dibujo representa un triángulo, las medidas de los lados son falsas. Por lo que el triángulo (teórico) no podría existir.

El total de los estudiantes obtuvo como respuesta 8 (existen diferencias en las unidades de medida que usaron los estudiantes) lo cual indica que ningún estudiante se cuestionó si el triángulo podría formarse a pesar de que en la actividad anterior se analizaron, compararon segmentos y se usaron tiras de papel para construir triángulos, además de que en S3 los estudiantes concluyeron que para formar un triángulo se deben tener ciertas condiciones en las medidas de los segmentos. Observamos que los estudiantes siguieron la consigna del profesor asumiendo que los datos del problema son correctos, que el dibujo representa correctamente un triángulo porque tiene tres lados y una altura y como lo señala Education Committee of the EMS (2012: 2) los estudiantes admiten que sería muy extraño que un ejercicio no tuviese respuesta o que condujera a una respuesta inconsistente.

En S4-2 se solicitó obtener la medida del perímetro del triángulo descrito en S4-1, 100% de los estudiantes obtuvo como respuesta 15 (existen diferencias en las unidades de medida que usaron los estudiantes). Al igual que en el planteamiento anterior, los estudiantes se enfocan en aplicar la fórmula para el cálculo de perímetro y no cuestionan el planteamiento del problema.

En el planteamiento S5, se le entregó a cada estudiante tres tiras de papel con las medidas referidas en el triángulo de la sección anterior y se les solicitó construir el mismo triángulo pegando las tiras en su hoja de trabajo. Las medidas de las tiras de papel corresponden a medidas en centímetros, 100% construyó una figura con los segmentos dispuestos a semejanza de S4, colocando un segmento como base y los lados del triángulo a una abertura entre 30º y 45º, los segmentos no permiten formar un triángulo.

En S6-1 se preguntó ¿se pudo construir el triángulo?, 100% de los estudiantes respondieron "no". Esta pregunta confirma lo realizado en S5 y muestra que los estudiantes se involucraron en el planteamiento del problema y se olvidaron del trabajo realizado sobre comparación de segmentos en S1. La respuesta da cuenta de un momento de reacción del estudiante en el proceso de solución del problema, reconocen que no tiene sentido el resultado obtenido pues la figura no existe.

En S6-2 se preguntó, ¿el triángulo tiene área?, y se agregaron dos opciones a elegir: *sí*___ *no*___ y finalmente se pidió explicar su elección (S6-3). Los resultados fueron: 33 estudiantes eligieron la opción "no", 3 señalan ambas opciones, y 1 no señala ninguna de las opciones. Se observa que la mayoría de los estudiantes reconocen que no se puede calcular el área ya que no es correcto el dibujo del triángulo. A pesar de que todos los estudiantes aplicaron un procedimiento algorítmico correcto, no es posible obtener el valor del área. En S6-3 se solicitó una justificación a la respuesta S6-2, se catalogaron las respuestas de opción "no", de acuerdo con el argumento expuesto por cada estudiante y se construyó la siguiente tabla.

Tabla 2. Respuesta de S6-3

No se unen los segmentos:	5
No cierran los segmentos:	14
No se forma una figura geométrica:	11
No se tiene la altura*:	2
Los lados son desiguales:	1

En relación al caso "no se tiene la altura" en la tabla anterior se observó que los 2 estudiantes intentaron reproducir el triángulo presentado en S4, pero dado que las tiras de papel no permitían cerrar la figura, los estudiantes esbozaron el triángulo y concluyeron que no se tenía el segmento altura.

Las preguntas S6-4 y S6-5 tienen la misma estructura y enfoque que las dos anteriores pero son referidas al cálculo del perímetro. En S6-4 se preguntó, ¿el triángulo tiene perímetro?, y se agregaron dos opciones para elegir: *sí*___ *no*___, posteriormente en S6-5 se pidió explicar su elección. Los resultados fueron; 5 estudiantes señalaron la opción "no" y 32 la opción "sí". En esta pregunta se observó que la mayoría de los estudiantes (86.5%) admitieron que "si existe un triángulo" y que además "tiene perímetro", esta respuesta entra en contradicción con la actividad S6-1 donde concluyen que no era posible formar un triángulo con las tiras de papel. Entra en contradicción con S6-2 y S6-3 en donde se concluyó que no se puede obtener el área. Una posible explicación a este hecho es que el concepto de perímetro está asociado a la suma de medidas de segmentos sin que necesariamente se identifique un polígono.

En S6-5 se solicitó una justificación a la respuesta S6-4, se catalogaron las respuestas de opción: "si", de acuerdo con el argumento expuesto por cada estudiante y se construyó la siguiente tabla.

Tabla 3. Respuesta de S6-5

Porque tienen los tres lados:	17
Porque se tiene la medida de los lados:	11
Sólo se suman los lados:	4

Los 5 estudiantes que respondieron *no* en S6-4, explicaron que no se puede formar la figura geométrica y por lo tanto no se puede calcular el perímetro.

En S6-6 se preguntó, ¿el triángulo existe? y se agregaron dos opciones para elegir: *sí* ___ *no*___, 100% de los estudiantes respondió "no". Para el caso de los estudiantes que afirmaron que se puede obtener el valor del perímetro (S6-4 y S6-5), esta pregunta nos permitió observar que el concepto de perímetro no está asociado con una figura geométrica, sino con la suma de medidas de segmentos indistintos.

S6-7 es un planteamiento de síntesis y cierre, se pidió a los estudiantes proponer medidas para que no se pudiera construir un triángulo. 6 estudiantes dieron valores que sí permiten la construcción de un triángulo, 3 estudiantes no dieron respuesta y 28 estudiantes propusieron valores de segmentos que no forman un triángulo.

En S7 se planteó: *Menciona las relaciones que deben tener los segmentos de un triángulo para que sea posible construirlo.* Este cuestionamiento está estrechamente vinculado al S6-7 y tuvo el propósito de que los estudiantes expresaran sus ideas finales sobre la actividad.

Tabla 4. Respuesta de S7

Aumentar centímetros para que cierre el triángulo:	5
La suma de dos lados del triángulo debe ser mayor que el tercero:	25
El triángulo debe tener segmentos específicos:	7

Se observó que 25 estudiantes (67.5%) reafirman la relación de dos lados respecto del tercero que se analizó desde la actividad S1. Otros 7 estudiantes concluyen que el triángulo debe tener medidas específicas de los segmentos. Y finalmente 5 estudiantes retoman lo realizado en S5, justificando una estrategia particular para formar la figura (enfocándose en el caso concreto presentado en la actividad).

Solución del problema S4

Considerando el esquema de la solución del problema S4 (*Figura 7*), se describen a continuación los resultados obtenidos.

Contexto (A). A partir de lo realizado en S1 y S2, los estudiantes reconocieron las relaciones que existen en las medidas de los lados del triángulo y concluyeron en S3, un total de 21 estudiantes, que un triángulo sólo se puede construir si la suma de dos lados es mayor que el tercero. Otros 11 estudiantes mencionaron que "se deberían agregar centímetros" para que se cumpliera la relación (el énfasis estuvo en la cantidad faltante) y 3 estudiantes mencionaron que "cuando el signo era =" no se podría formar el triángulo (el énfasis estuvo en el signo).

Planteamiento (B). En la hoja de actividades aparece como instrucción, *determina el área y perímetro del siguiente triángulo.* Ningún estudiante cuestionó el problema, dado que se trata de un planteamiento escolar muy común y porque durante el momento "aprehensión del problema", los estudiantes se enfocaron en realizar únicamente lo que se pidió explícitamente en el problema.

Simplificación (C). Los estudiantes no identificaron los datos falsos en el triángulo y continuaron con el proceso de solución del problema. En esta etapa los estudiantes simplificaron el planteamiento y se observó que 27 estudiantes emplearon implícita o explícitamente las fórmulas para el cálculo de área y para el perímetro. Esto implicó que los estudiantes identificaran las medidas en la figura para operar con ellas.

Reinterpretar el sentido del problema (D). Ningún estudiante cuestionó las medidas de los lados del triángulo.

Abstracción (E). Un total de 21 estudiantes emplearon una fórmula para resolver el problema y 16 estudiantes no mostraron evidencia del uso de una fórmula.

Representación (F) y Cálculos (G). Un total de 15 estudiantes escribieron una fórmula para el cálculo del área y perímetro, 6 estudiantes siguieron un procedimiento a partir de las fórmulas (sin escribirlas) y 16 estudiantes escribieron el resultado sin señalar una fórmula.

Solución al problema (H). Todos los estudiantes obtuvieron un resultado al problema, 15 señalaron la medida del área en cm^2 y del perímetro en cm y 20 omitieron escribir alguna de las unidades de media y sólo 2 escribieron un número para la medida del área y perímetro.

Reinterpretar el sentido del problema (D). Esta sección corresponde a S6-1 donde se preguntó ¿se pudo construir el triángulo? como se ha señalado previamente 100% de los estudiantes respondieron "no". La respuesta muestra una confrontación con lo realizado en S4, ya que, de haber retomado lo realizado en S1 y S2 los estudiantes podrían concluir que no se puede calcular el área y perímetro del triángulo.

El problema S4 tiene como antecedente lo realizado en S1 y S2 sobre la construcción de triángulos con medidas dadas, esto representa un trabajo preliminar sobre el tema de construcción de triángulos, por lo que el planteamiento S4 no fue desconocido para los estudiantes. Se esperaba que los estudiantes relacionaran sus conclusiones de S3 con el planteamiento del problema S4, sin embargo no cuestionaron las medidas y se enfocaron en aplicar una fórmula y obtener un resultado numérico.

CONCLUSIONES

En la actividad S2 se observó la aparición de un contrato didáctico que no se había contemplado. Los estudiantes se enfrentaron a la construcción de cuatro triángulos con segmentos de papel, en los dos primeros casos no hubo problema ya que los segmentos sí lo permitían. Sin embargo en los dos últimos casos no era posible cerrar la figura. Se observó que varios estudiantes forzaban los trozos de papel para formar un triángulo, pues la consigna de la actividad era construir los triángulos y los estudiantes no admitieron como posibilidad que el profesor les hubiera asignado una tarea que no se podría resolver. Sin embargo, después de varios intentos los estudiantes concluyeron que no era posible formar el triángulo. La conclusión se abordó en el planteamiento S3-1 donde se cuestionó si era posible construir todos los triángulos con los segmentos dados, el resultado fue que 100% de los estudiantes concluyeron que "no" era posible.

En S4 se pidió calcular el valor del área y perímetro de un triángulo con medidas falsas. Ningún estudiante cuestionó este hecho y se involucraron directamente con los cálculos para obtener el valor numérico del área y perímetro (delegación formal), 100% de los estudiantes dio un resultado al problema. Este comportamiento coincide con lo señalado por Verschaffel, Greer y De Corte, (2000: 4) donde explican que los alumnos se rigen por la creencia de que los datos asignados en el problema se van a utilizar en los cálculos y a su vez, estos cálculos darán la respuesta requerida.

La ruptura del contrato didáctico que apareció en S4, se promueve con el planeamiento S5 donde los estudiantes se enfrentan a la construcción del triángulo con tiras de papel con las medidas del triángulo del problema S4, 100% de los estudiantes concluyen que el triángulo del problema S4 no se puede construir y por tanto no se podría tener un valor del área y perímetro. Sin embargo observamos la resistencia a la ruptura del contrato pues en S6-4 admiten que, aunque no se puede construir el triángulo, su perímetro sí existe.

Esta resistencia está ligada a la idea de que el perímetro del triángulo es la suma total de la longitud de los segmentos. Para los estudiantes no importó que los segmentos no cerraran una figura pues la longitud de los segmentos (expresada en centímetros) fue el equivalente a la longitud del perímetro (también expresada en centímetros). Este hecho está reportado en trabajos como el de Moreira y Comiti (1993) quiénes señalan que los estudiantes de últimos años de la escuela primaria presentan dificultades para reconocer a la medida de una figura como un elemento característico que la determina, en nuestro caso, para los estudiantes el perímetro no es un elemento propio de la figura sino algo ajeno a ella.

Esta condición impidió la ruptura del contrato didáctico pues para varios estudiantes el triángulo no podría existir y sin embargo sí tenía perímetro. Se observó además que ningún estudiante cuestionó las medidas del triángulo del problema de S4, por lo que coincidimos con Verschaffel, Greer y De Corte (2000: 4) quiénes señalan que los estudiantes confían en que el profesor asignó correctamente el problema y no habría por qué cuestionarlo.

Observamos que una vez encontrado el resultado, ningún estudiante realizó un regreso para analizar el planteamiento inicial del problema, ya que la atención estuvo en obtener el resultado. Al respecto coincidimos con lo expresado por Nesher (1981:43) pues en 27 estudiantes se observó que más que dar un contexto al planteamiento del problema, buscaron aplicar la operación matemática necesaria.

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

El tratamiento de problemas no convencionales, por ejemplo aquellos que no se pueden resolver o con datos falsos, no suelen abordarse con frecuencia en el aula, por lo que los estudiantes fortalecen la idea de que todo planteamiento del profesor tiene una solución a la que están obligados a arribar, esto forma parte de un contrato didáctico entre el profesor y los estudiantes, y como lo hemos observado, inhibe la reflexión sobre el contexto y las características del problema, ya que los estudiantes se enfocan únicamente en el cálculo operatorio para la búsqueda de un valor numérico.

Sin embargo, constatamos que no es suficiente con enfrentar a los estudiantes a falsos problemas para desarrollar en ellos una perspectiva crítica acerca de los problemas que se les plantean, pues a pesar de que los estudiantes reconocieron que no era posible construir los triángulos en la actividad S2-2, nuevamente en la actividad S4 repitieron el mismo comportamiento al enfocarse en obtener la medida del área y perímetro de una figura con datos falsos.

Así también se observó que en problemas no convencionales, como por ejemplo con datos falsos, podría aparecer un contrato didáctico pues los estudiantes asumen que el profesor asigna problemas que tienen solución. Por otra parte, como lo describe D'Amore y Martini (1997: 27), el estudiante no se siente autorizado para escribir lo que no se pide explícitamente en el problema (aprehensión del problema) por lo que se enfoca en atender la instrucción dada aun si parece contradictoria.

Esta experiencia de trabajo confirma lo expresado por Sadovsky (2005) quien argumenta que los problemas abiertos, aquellos que entre otras cosas generan incertidumbre, dejan una huella en los estudiantes porque conducen al desarrollo de una idea. La actividad didáctica permitió a la mayoría de los estudiantes enfrentarse a contradicciones, y esa incertidumbre genera, en opinión de Sadovsky, preguntas que son constitutivas de los conocimientos. Por esta razón es importante motivar escenarios de aprendizaje que permitan al estudiante generar reflexiones sobre los procesos del quehacer matemático para que vaya más allá de la memorización de reglas o fórmulas para resolver determinados problemas. Bajo este escenario, los estudiantes pueden admitir la posibilidad de que un problema planteado por el profesor pueda, o no, tener solución generando así otras relaciones didácticas que definan a su vez, nuevas formas de contrato didáctico. Como se ha señalado, el contrato didáctico es inherente a un proyecto educativo, que aunque no representa un obstáculo al aprendizaje y no tiene efectos negativos, su ruptura favorece la aparición de manifestaciones de autonomía y responsabilidad en los estudiantes donde se observan posturas críticas y de meta-reflexión señaladas por Lester en la resolución de un problema matemático.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1980). "Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire", *Revue de Laryngologie Otologie Rhinologie*, *101*(3-4), pp. 107-131.

Brousseau, G. (1987). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques –Etudes en didactique des mathématiques* (doc. ronéo). Université de Bordeaux I, France: IREM.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

D'Amore, B. y Martini, B. (1997). "Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos". *Revista de didáctica de las matemáticas.* 32, pp. 26-42.

Duval, R. (2005). "Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements". *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10, pp. 5-53.

Gal, H y Linchevski, L. (2010). "To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception". *Educational studies in mathematics*, 74, 163-183.

Education Committee of the EMS (2012). "What are the Reciprocal Expectations between Teacher and Students? Solid Findings in Mathematics Education on Didactical Contract." *Newsletter of the European Mathematical Society,* 84, pp. 53-55.

Laborde, C. y B. Capponi (1994). "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,*14 (12), pp. 165-210.

Lester, F. K. (2013). "Thoughts about research on mathematical problem solving instruction". *The Mathematics Enthusiast,* 10 (1 y 2), pp. 245-278.

Nesher, P. (1981). "The stereotyped nature of word problems". *For the learning of mathematics*, 1(1), pp. 41-48.

Montiel, G. (2002). "Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual". Tesis inédita de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Cinvestav-IPN. México.

Moreira, P. y Comiti, C. (1993). "Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles". *Petit X,* 34, pp. 43-68.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Santos, L. (1992). "Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas". *Educación Matemática.* 4 (2), 16-24.

Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL, USA: Academic Press.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro, Educación Básica Secundaria, Matemáticas 1, Educación básica*. México: SEP.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger.