

Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”

Mathematics Teaching Based on the Study and Research Path: Mathematical Teaching Indicators of the “Dialectics”

Verónica Parra¹
María Rita Otero²

Resumen. Este trabajo propone y describe una metodología de análisis basada en la formulación de un conjunto de indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas” del estudio y la investigación. Estos indicadores se construyeron a partir de los datos obtenidos al diseñar, implementar y evaluar un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) cuyas preguntas de partida se vinculan al equilibrio de mercado de un modelo de oferta y demanda. Se realizaron dos implementaciones en el último año del nivel escolar secundario argentino (16-17 años) ($N = 60$). El profesor propuso a los estudiantes preguntas del tipo siguiente: ¿Cómo calcular el punto de equilibrio en un modelo lineal de mercado? ¿Cuánto varía exactamente el punto de equilibrio *al modificar los parámetros del modelo?* Se concluye que las dialécticas más identificadas son del individuo y del colectivo, del tema y fuera-de-tema, del estudio y de la investigación, del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica, así como de las cajas negras y cajas claras.

Fecha de recepción: 10 de noviembre de 2016. Fecha de aprobación: 10 de agosto de 2017.

¹ vparra@exa.unicen.edu.ar

² rotero@exa.unicen.edu.ar

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Palabras clave: *Equilibrio de mercado; Recorridos de Estudio e Investigación; Teoría Antropológica de lo Didáctico; dialécticas; indicadores didáctico-matemáticos.*

Abstract. This paper proposes and describes an analysis methodology based on the formulation of a set of didactic-mathematical indicators of the “dialectics” of study and research. These indicators were constructed based on the data obtained from design, implementation and evaluation of a study and research path (SRP). The SRP's initial questions are connected to market equilibrium in a microeconomic model of the supply and demand. Two implementations were developed in the last year of the Argentine secondary level (16-17 years) ($N = 60$). The teacher proposed to the students the following type of questions: *How to determine the market equilibrium? If the parameters of the model are modified: How to describe the variation of the point of equilibrium? How much does the point of equilibrium change exactly in each case?* We conclude that the most identified dialectics are: the individual and collective, theme and out of theme, study and research, praxeological analysis-synthesis and didactic of analysis-synthesis, and the dialectic of black boxes and clear boxes.

Keywords: *Market balance; Study and Research Path; Anthropological Theory of the Didactic; dialectics; didactic-mathematical indicators.*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se propone abordar un problema de investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel secundario argentino, particularmente en el último año de la escolaridad (estudiantes de 16-17 años). Esta problemática ha sido y es el foco de interés de gran parte de los investigadores en Educación Matemática (Artigue, 2004; Brousseau, 1986; Barallobres, 2016; Barquero, 2011; Chevallard, 2002, 2004; Gascón, 2002; Otero *et al.*, 2013; Quiroz Rivera y Rodríguez Gallegos, 2015; Trigueros, 2009). En nuestro caso, describiremos este problema a partir del referente que sirve de marco teórico a nuestro trabajo: el enfoque antropológico de Chevallard (2004, 2009, 2013a, 2013b, 2014), denominado la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

La TAD caracteriza un fenómeno identificado en los sistemas de enseñanza y denominado *monumentalización de los saberes* (Chevallard, 2013a). Este fenómeno se describe a partir de una analogía con la visita a un museo: se invita y guía a los estudiantes a “visitar” las obras propuestas en los programas

oficiales como un guía conduce a una persona a admirar los monumentos dentro de un museo. Allí, las obras expuestas solo se pueden mirar y venerar, sin tocarlas ni manipularlas y manteniendo cierta distancia. Análogamente, en los sistemas de enseñanza las matemáticas son estudiadas como si fuesen un *monumento* para honrar, admirar, y que no tiene más que raros usos. Este fenómeno nace, vive y se desarrolla en el paradigma de enseñanza dominante en las instituciones escolares, denominado *paradigma monumentalista o de inventariar los saberes* (Chevallard, 2013a). En este paradigma la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se limitan a un inventario de obras “muetas”, carentes de sentido, sin razones de ser, transparentes e incuestionables (Chevallard, 2004).

En contraposición al paradigma monumentalista, Chevallard (2004) propone la gestación del paradigma *de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (PICM), incorporando el dispositivo didáctico de los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI). Los REI son considerados un potencial generador de procesos funcionales, posicionando las preguntas como punto de partida de los procesos de estudio. Preguntas en sentido fuerte, es decir, tales que su respuesta no represente una simple búsqueda de información, sino que sea necesaria la construcción o reconstrucción de una praxeología o un conjunto de ellas. Preguntas con este potencial son denominadas preguntas generatrices. Con la introducción de los REI se recuperaría el sentido y las razones de ser -o al menos una razón de ser- de las obras matemáticas propuestas a estudiar en los programas oficiales. Según Chevallard (2014), lanzar y conducir un REI es pilotear un sistema didáctico formado, por ejemplo en una clase de matemáticas, por un grupo de estudiantes, un profesor o un conjunto de profesores y una pregunta Q generatriz. Este sistema didáctico construye un medio de estudio que permite “fabricar” la respuesta R a la pregunta Q. En este proceso de construcción de respuestas, la comunidad de estudio desarrolla ciertas praxeologías consustanciales a la situación de estudiar e investigar, denominadas “dialécticas” (Chevallard, 2012). El desarrollo de estas dialécticas será el que permita pilotear el REI.

Centrándonos en el funcionamiento de las dialécticas, entendidas como gestos clave para concretar una enseñanza mediante el REI, este trabajo se propone abordar el problema de la monumentalización de saberes con un objetivo particular: presentar una metodología de análisis que permita identificar y describir una serie de indicadores didáctico-matemáticos de cada una de las dialécticas, a partir del análisis de datos obtenidos al implementar un REI en

el último año del nivel secundario argentino. El objetivo de este trabajo no consiste en describir detalladamente la dinámica del proceso de estudio del REI, sino que corresponde a una fase posterior de análisis. Es decir, luego de la descripción, análisis y evaluación de la implementación del REI –resultados que ya han sido publicados (Parra, Otero, Fanaro, 2013, 2014, 2015)– hemos identificado una serie de indicadores didáctico-matemáticos que permitirían determinar el funcionamiento de cada una de las dialécticas y, al mismo tiempo, el poder generador de las preguntas generatrices y sus derivadas. Así, la pregunta de investigación de este trabajo puede formularse de la siguiente manera: ¿Cómo determinar, a partir de los resultados de la implementación de un REI, un conjunto de indicadores didáctico-matemáticos para cada una de las dialécticas? ¿Qué condiciones (y restricciones) nos aporta el análisis de las dialécticas sobre el funcionamiento de los REI? Nos proponemos entonces realizar no solamente un aporte desde la perspectiva metodológica, sino también desde el enfoque teórico. Consideramos aportes en los siguientes términos: por un lado, contribuir con una metodología de análisis de resultados de la implementación de un REI a partir de indicadores de las dialécticas, especificando un conjunto de indicadores para cada una de ellas. Diversos trabajos abordan enseñanzas por REI (ver sección siguiente), pero pocos se centran en las dialécticas y, menos aún, en especificar un conjunto de indicadores. Por otro lado, aportar en aspectos teóricos desde el punto de vista de la relación entre el funcionamiento del dispositivo REI, sus preguntas generatrices y el conjunto de indicadores.

Para aportar respuestas a esta pregunta, presentamos en primer lugar la definición y características más importantes de los REI. Luego, sintetizamos los antecedentes de la enseñanza por REI que resultan relevantes para nuestro trabajo, en términos de contextos de implementación y análisis de resultados. Posteriormente describimos las nueve dialécticas propuestas en el marco de la TAD. Esta descripción se elabora segmentando cada una de las dialécticas para efectos de facilitar la identificación de los indicadores, pero esto no significa que exista esa separación entre cada una de ellas. De hecho, todas las dialécticas están interrelacionadas entre sí y, por consiguiente, esta delimitación se realiza sólo para efectos del análisis. Después presentamos la metodología de la investigación, dando algunas características centrales de la dinámica del REI implementado. Inmediatamente presentamos los resultados en términos de identificación y descripción de este posible conjunto de indicadores didáctico-matemáticos y,

por último, los aportes y conclusiones. A continuación se proponen la definición y las características más importantes de los REI.

DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LOS REI

El estudio de una pregunta Q como punto de partida del saber supone la emergencia de sistemas didácticos de la forma $S(X; Y; Q)$. Por ejemplo, en una clase de matemática, esto significa que un grupo de alumnos (X) con la ayuda del profesor (Y) construirá una respuesta R a la pregunta Q . El funcionamiento de este sistema responde a lo que Chevallard (2013b) denomina esquema herbartiano. En su forma reducida, se escribe de la siguiente manera: $S(X; Y; Q) \rightarrow R^\heartsuit$. El símbolo \heartsuit colocado en el exponente de la respuesta R indica que la respuesta a la pregunta Q fue producida bajo ciertas limitaciones y “funciona” como respuesta a esa pregunta bajo esas limitaciones (Chevallard, 2009). La elaboración de R^\heartsuit a partir de Q supone la “fabricación” de un medio didáctico M . Esto se expresa en el esquema herbartiano semi-desarrollado

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R^\heartsuit$$

O sea, el sistema didáctico construye y organiza (\rightarrow) el medio M , con el cual engendrará o producirá (\rightarrow) una respuesta R^\heartsuit . Este esquema indica que la elaboración del medio M se articula de modo complejo con la elaboración de la respuesta R^\heartsuit . Esta observación se aplica en el esquema herbartiano desarrollado (Chevallard, 2009), que se escribe así:

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow [R_1^\diamondsuit, R_2^\diamondsuit, R_3^\diamondsuit, \dots, R_n^\diamondsuit, O_{n+1}, \dots, O_m, O_{m+1}, \dots, O_p]] \rightarrow R$$

Donde $M = [R_1^\diamondsuit, R_2^\diamondsuit, R_3^\diamondsuit, \dots, R_n^\diamondsuit, O_{n+1}, \dots, O_m, O_{m+1}, \dots, O_p]$ es el medio didáctico o medio para el estudio (de Q). Las respuestas disponibles R_i^\diamondsuit , las preguntas derivadas Q_j y las otras obras O_l son instrumentos potenciales para el estudio de Q , instrumentos a estudiar convenientemente –en “calidad” y en “cantidad”, para ser utilizados en el momento oportuno, de manera efectiva y eficaz en el estudio de Q y entonces en la construcción y validación de R^\heartsuit (Chevallard, 2009)–. Los objetos notados por R_i^\diamondsuit para $i = 1, \dots, n$ son respuestas “hechas”, disponibles –por ejemplo, un libro, una página Web, el curso de un profesor, etc.–; las entidades O_l para $l = m + 1, \dots, p$ son otras obras –teorías, montajes experimentales,

praxeologías, etc.- consideradas útiles para deconstruir las respuestas R^\diamond y extraer lo necesario que hay allí para construir la respuesta R^\heartsuit (*ibid*). Con la introducción del esquema herbartiano desarrollado, Chevallard (2012) precisa lo que puede ser visto como un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI).

Una vez definidos los REI, sintetizamos a continuación sus características esenciales:

- Los REI se generan por una pregunta Q denominada generatriz. Es decir, una pregunta cuya respuesta no es inmediata y que permite formular sub-preguntas, denominadas preguntas derivadas (Chevallard, 2004).
- La búsqueda de respuestas a las preguntas conduce no solo a la construcción o reconstrucción de un conjunto de praxeologías, sino que también remite a la búsqueda de información como recurso indispensable para aportar a la construcción de respuestas y, en consecuencia, al análisis y evaluación de esa información. Esto genera diferentes niveles de acción, indispensables en una enseñanza por REI: observar las respuestas existentes, analizarlas, evaluarlas, desarrollar una nueva respuesta y, finalmente, defender la respuesta producida (Chevallard, 2012).
- El medio didáctico en una enseñanza por REI es construido al mismo tiempo que se gestan las respuestas a las preguntas, no está determinado previamente, se construye a lo largo del recorrido y puede incorporar cualquier componente que sea aceptado y validado por la comunidad de estudio.
- La comunidad de estudio en una enseñanza por REI no se limita al grupo formado por el profesor y los estudiantes. Esta comunidad de estudio se amplía e incorpora, al menos momentáneamente, a cualquier persona o institución que resulte de utilidad o pueda aportar una obra útil y pertinente a la construcción de las respuestas.
- El profesor es considerado el director del proceso de estudio (Chevallard, 2009); es una fuente más de información como cualquier otro medio de comunicación, pero es el responsable de guiar el proceso de estudio. No ocupa el lugar central en la clase, como tampoco es considerado el único poseedor del saber.
- Los estudiantes amplían sus posibilidades de acción: formulan preguntas, proponen recursos, fuentes de información, construyen respuestas, las evalúan, las difunden, defienden, y reciben, de manera crítica, las respuestas de otros estudiantes (Chevallard, 2012).

- El saber es considerado de manera integral, un conjunto de saberes interrelacionados entre sí, que son pertinentes y se han construido como producto de una necesidad de respuesta.
- Esta articulación entre saberes se gesta en los procesos de modelización. La modelización es considerada un proceso de reconstrucción y articulación de praxeologías de complejidad creciente (Barquero, Bosch y Gascón, 2011), permitiendo la propuesta de REI con cuestiones generatrices cada vez más amplias. No se trata de “aplicar” un saber matemático a una situación en contexto. Se trata de delimitar un sistema -económico, físico, biológico, etc.-, luego describir sus variables, las relaciones entre ellas, formular un primer modelo, someterlo a prueba y perfeccionarlo las veces que sea necesario, hasta que sea capaz de construir una respuesta razonable, que pueda ser validada y aceptada por la comunidad de estudio.

En la sección siguiente presentamos el estado actual de la cuestión en torno a enseñanzas por REI, con el propósito de mostrar en qué contribuiría, de forma novedosa, nuestro trabajo.

ANTECEDENTES DE ENSEÑANZAS POR REI

En esta sección describiremos los 14 trabajos más recientes que han sido desarrollados en el contexto de enseñanzas por REI, o propuestas abiertas de REI. Describiremos, en primer lugar, los trabajos según su codisciplinariedad, ya sea con la Economía y/o Ciencias Económicas y empresariales y/o Administración y dirección de empresas, al igual que con la Biología, la Física o la Medicina. Luego pasamos a los recorridos monodisciplinares (cuyas cuestiones son intra-matemáticas), y un recorrido propuesto para estudiar cuestiones de la Didáctica de la Matemática.

- Respecto a los trabajos codisciplinares a la Economía y/o Ciencias Económicas y empresariales y/o Administración y dirección de empresas, situamos los trabajos de Fonseca (2010, 2011c) y Serrano, Bosch y Gascón (2010) en el nivel universitario, y los trabajos de Ruiz-Munzón (2010), Ruiz, Bosch y Gascón (2007) y Donvito, Otero y Sureda (2014) en el nivel secundario.

Fonseca (2010) implementó un REI cuya cuestión generatriz corresponde a la movilidad del personal de una empresa, planteando hipótesis respecto no

solo de las políticas de movilidad, sino también sobre la repartición de los trabajadores. La implementación de recorrido se realizó en un taller-seminario con estudiantes de una facultad de ciencias económicas y empresariales. El REI provocó la emergencia de la diagonalización y multiplicación de matrices, así como la resolución de sistemas de ecuaciones. El análisis y descripción de resultados se centró en las organizaciones matemáticas desarrolladas y en la determinación y descripción de los momentos del estudio. Continuando con el estudio de la diagonalización de matrices, Fonseca (2011c) diseñó e implementó un REI en un taller de matemáticas con alumnos de una escuela de ingeniería industrial, cuya pregunta de partida se refiere a la fabricación de tres modelos de motos. Para cada fábrica se especifican los índices de producción, los costos, ingresos, precio de venta y forma de trabajo, construyendo modelos matriciales lineales y utilizando el *software Mathematica*. El análisis y descripción de resultados se elabora en términos de los momentos del estudio y de las técnicas matemáticas propuestas.

Serrano, Bosch y Gascón (2010) diseñaron un taller de modelización y lo implementaron en cuatro grupos de primer año de una carrera de administración y dirección de empresas. Proponen iniciar el taller con una cuestión generatriz vinculada a la previsión de ventas. El taller, que funcionó de forma paralela al desarrollo del curso, tuvo una duración de 5 sesiones de clases. Previo a la concreción del taller, se llevaron a cabo cuatro “clases teóricas” para que los estudiantes tuvieran conocimientos sobre ciertas familias de funciones ya estudiadas en secundaria, tales como función afín, función cuadrática, función cúbica, función hiperbólica y funciones exponenciales. Se realizó un análisis *a priori* de las posibles cuestiones derivadas y se evaluó la experimentación según las restricciones identificadas y la dialéctica de los medios y medio.

Donvito, Otero, Sureda (2014) diseñaron, implementaron y analizaron la viabilidad de un REI cuya pregunta generatriz se refiere a los planes de ahorro. Se efectuaron implementaciones en cursos habituales de matemáticas de tres instituciones con características diferentes: una secundaria estatal (estudiantes de 16-17 años), una privada (estudiantes de 16-17 años) y una secundaria para adultos (estudiantes de 16-60 años). El REI suscita el estudio de funciones, funciones lineales, funciones exponenciales, logaritmos, límites y el número e, sucesiones y series, capitalización, amortización (constants y variables). El análisis de resultados fue elaborado a partir de las actitudes de la PICM: herbartiana, procognitiva, exotérica, de problematización y enciclopedista ordinario.

Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz, Bosch, y Gascón (2007) proponen el diseño y la experimentación de un taller de modelización matemática cuya pregunta generatriz corresponde a los beneficios, la producción y venta de camisetas. La experimentación se efectuó en tres grupos de estudiantes del nivel secundario durante el tercer trimestre 2004/2005. Se propone la utilización de la Calculadora Simbólica Wiris (CSW) para facilitar la creación, representación gráfica y manipulación de diferentes expresiones algebraicas. Se distinguen, a lo largo del trabajo, dos casos en relación a la función costes (costes lineales y costes cuadráticos), suponiendo que la función de ingresos es igual al producto entre las cantidades vendidas y el precio de venta por unidad del producto. Se propone una caracterización del desarrollo hipotético de la modelización funcional, en tres niveles caracterizados mediante praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes. Además, el análisis de datos fue elaborado a partir de las cuestiones derivadas y los modelos construidos para dar respuesta.

- Respecto a los REI codisciplinares a la Biología, ubicamos el trabajo de Barquero (2009, 2011) en el nivel universitario y el trabajo de Ruiz-Higueras y García García (2011) en el nivel inicial.

Barquero (2009, 2011) diseño e implementó un REI cuyas preguntas generatrices corresponden a la dinámica de poblaciones. La implementación se llevó a cabo en un curso denominado “taller de modelización matemática”, con alumnos de ingeniería técnica química industrial de la Universidad Autónoma de Barcelona. Este taller fue desarrollado de forma paralela al curso tradicional de matemáticas. El recorrido propuso estudiar la evolución de una población cuyo tamaño varía con el tiempo. La pregunta generatriz condujo al diseño de tres REI que permitieron cubrir parte de las organizaciones matemáticas propuestas para estudiar en el programa de estudio de los primeros cursos universitarios de Ciencias Experimentales: por ejemplo, cuestiones de álgebra lineal y cálculo diferencial en una variable. El análisis y descripción de las experimentaciones fue realizado en términos de cuestiones generatrices, cuestiones derivadas, modelos poblaciones y organizaciones matemáticas, construidos para dar respuesta a tales cuestiones.

Ruiz-Higueras y García García (2011) describieron las praxeologías que surgen al desarrollar tareas de modelización matemática a partir de un sistema configurado por una colección de gusanos de seda que se transformará (metamorfosis) a lo largo del tiempo. En la propuesta participaron una maestra y un

grupo de alumnos (3 a 6 años) de la educación infantil. Los niños trabajaron en un taller de matemáticas que permitió abordar no únicamente las diferentes cantidades de magnitudes discretas, sino también la necesidad de medirlas y de formular esta medida. La descripción de los resultados fue realizada a partir de la determinación de las praxeologías matemáticas construidas, y de la caracterización de la praxis y logos didáctico de la profesora.

- Respecto a los trabajos codisciplinares a la Física, situamos el trabajo de Costa, Arlego y Otero (2014) en el nivel universitario y el de Otero, Gazzola, Llanos y Arlego (2016) en el nivel secundario, en la formación de profesores y con investigadores en formación.

Costa, Arlego y Otero (2014) diseñaron e implementaron un REI codisciplinario a la Física en un curso habitual de matemáticas de una facultad de ingeniería. La pregunta generatriz se refiere a la construcción de edificaciones sustentables. Esta pregunta y sus derivadas permiten emerger las razones de ser del Cálculo Vectorial, integrando campos como la Termodinámica, la Mecánica de los Fluidos, la Hidrodinámica, la Electricidad y el Magnetismo. El análisis de datos se hizo a partir de la escala de niveles de codeterminación didáctica y de las dialécticas, concluyendo con una serie de condicionamientos en las diferentes escalas que dificultan el desarrollo del REI.

Otero, Gazzola, Llanos y Arlego (2016) diseñaron, implementaron y evaluaron un REI a partir de la pregunta generatriz *¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil?* Se llevaron a cabo implementaciones en cursos de los últimos años del nivel secundario, en cursos de formación de profesores de matemáticas y con investigadores en formación. Fueron estudiadas cuestiones referidas a los sistemas oscilantes, movimiento armónico simple, ecuaciones del movimiento, funciones armónicas, oscilaciones amortiguadas y forzadas, resonancia, nociones de periodo, frecuencia, ciclo en una oscilación, funciones seno y coseno. Analizaron los resultados en términos de preguntas derivadas, de las organizaciones matemáticas y físicas desarrolladas y de los modelos construidos.

- Respecto a los trabajos codisciplinares a la Medicina Nuclear, situamos el trabajo de Oliveira Lucas (2015) en el nivel universitario.

Oliveira Lucas (2015) describe la experimentación y evaluación de recorridos de estudio e investigación diseñados para la enseñanza del cálculo diferencial

elemental en un primer curso de una licenciatura de Medicina Nuclear de la enseñanza universitaria portuguesa. Estos recorridos partieron de datos concretos y se basaban en problemas vinculados a la propagación de epidemias y a la variación de la concentración de un medicamento. Efectuaron la construcción y descripción de los posibles recorridos matemáticos *a priori* y cada sesión de clase fue analizada en términos de las cuestiones, actividades y técnicas.

- Respecto a los recorridos monodisciplinares, ubicamos el trabajo de Llanos y Otero (2015) en el nivel secundario; y los trabajos de Fonseca, Pereira y Casas (2010) y Fonseca (2011a, 2011b) en la transición entre el nivel secundario y universitario.

Llanos y Otero (2015) diseñaron, implementaron y evaluaron un REI cuya pregunta generatriz corresponde a la multiplicación de curvas. El REI fue implementado en dos cursos en paralelo por cada año, durante tres años consecutivos, con estudiantes de cuarto año (14-15 años) del nivel secundario argentino. El recorrido permite estudiar varias organizaciones matemáticas, según las curvas que se elijan y las operaciones, entre ellas: funciones polinómicas, funciones racionales, funciones homográficas, funciones potenciales, funciones radicales, funciones trascendentes. “La generatividad de la cuestión inicial propuesta en el REI, planteada en los dominios geométrico, gráfico y funcional; da sentido a los puntos notables de las curvas y a las características generales de la representación gráfica de dicha función” (Llanos y Otero, 2015: 270). Se hizo un análisis detallado de acuerdo con las funciones didácticas (mesogénesis, topogénesis y cronoménesis).

Fonseca, Pereira y Casas (2010) diseñaron e implementaron, en un “taller de problemas”, un recorrido para estudiantes de Ingeniería Química cuya pregunta de partida se refiere a la optimización de funciones. Otorgaron un rol fundamental al software *GeoGebra* y al software *Máxima*. Construyeron un primer modelo algebraico identificando sus componentes, relaciones y expresión. El análisis de la experimentación se hizo en términos de las modificaciones posibles de realizar a la cuestión inicial para lograr transponerla de la institución secundaria a la universidad, en función de los momentos del estudio y determinando los grados de completitud de las organizaciones matemáticas reconstruidas.

Fonseca (2011a, 2011b) diseñó un REI en torno al “diseño y fabricación de un contenedor que tenga el mayor volumen posible” (Fonseca 2011b: 16). Su

objetivo fue promover una continuidad en el proceso de estudio desde el nivel secundario hacia los primeros años de la universidad, a partir de la ampliación de una misma cuestión generatriz. El REI no fue implementado en la escuela secundaria y sí en la universidad, en la Escuela de Ingeniería Industrial (electrónica y química) durante tres sesiones de un “taller de matemática”. En este nivel, se propone estudiar unidades relativas al Cálculo y Álgebra Lineal. El objetivo particular de este recorrido es abordar el estudio de la derivada introduciendo la optimización de funciones como respuesta a la pregunta generatriz y sus derivadas, recuperando tareas que abarcan, por ejemplo, el estudio de la monotonía de la primera y segunda derivada, los extremos de una función y la interpretación de derivadas. Los datos fueron analizados a partir de la determinación de los grados de completitud de las organizaciones matemáticas reconstruidas.

- Por último, el recorrido propuesto para estudiar cuestiones de la Didáctica de la Matemática corresponde al trabajo de Corica y Otero (2016) realizado en el nivel universitario.

Corica y Otero (2016) diseñaron, implementaron y evaluaron un REI para la formación de profesores. El recorrido se desarrolló en un curso del tercer año de la carrera de profesora en matemáticas, en una universidad pública argentina. Se propuso a los futuros docentes la cuestión generatriz *¿Cómo diseñar e implementar dispositivos didácticos para el estudio de la matemática?* El análisis fue realizado a partir de la categorización de las preguntas derivadas según el género de tarea al que remite su estudio, la identificación de los tipos de tareas asociados a los mismos y las actitudes que pueden describirse en términos de las dialécticas.

La caracterización y clasificación de estos trabajos están resumidas en la Tabla 1. La primera columna contiene el(los) autor(es) de los trabajos y el año de publicación; la segunda, el tipo de propuesta; la tercera incluye las nociones, temas y disciplina en torno a los cuales han sido formuladas las preguntas generatrices de cada REI; la cuarta columna presenta el nivel educativo y/o la carrera en la cual ha sido propuesto y/o implementado el REI; la quinta, el espacio de implementación (un taller de matemáticas, un seminario o el curso habitual de matemáticas) y, finalmente, la última columna contiene el foco de análisis de cada trabajo.

Lo novedoso de nuestro trabajo es la propuesta, desarrollo y uso de una nueva metodología de análisis para estudiar la dinámica de los REI, una metodología

antes no usada y propuesta por primera vez en este trabajo. Nuestro REI se vincula a cuestiones de la microeconomía, específicamente los modelos de oferta y demanda de un único bien. El REI fue implementado en dos cursos de matemáticas del nivel secundario argentino, en las clases habituales, no en cursos tipo "Taller" ni en clases paralelas al curso habitual. Este recorrido tuvo una implementación extendida en el tiempo (36 sesiones), marcando allí una diferencia con las implementaciones de otros diseños. Además, se describió el proceso de estudio en términos de los gestos didácticos denominados "dialécticas". Aquí reside la contribución más importante y novedosa: la metodología de análisis que presentamos en este trabajo corresponde a la construcción de un conjunto de indicadores didáctico-matemáticos potencialmente útiles para determinar la operatividad de cada una de las dialécticas. Nos ubicamos en una fase superior de análisis: nos centramos no en describir el proceso de estudio producto de la implementación del REI (resultados ya publicados en Parra, Otero y Fanaro, 2013, 2014, 2015), sino en cómo generar un conjunto de indicadores de las dialécticas, con base en los datos obtenidos al implementar el REI. Estos indicadores se encuentran en una primera etapa de formulación y, por consiguiente, serán ampliados a partir no solo de futuras implementaciones propias, sino de otros colegas que trabajen en enseñanzas por REI. El trabajo de Salgado, Otero y Parra (2017) aporta en este sentido y corresponde a una tesis en vías de desarrollo. Aquí se ha implementado un REI en la universidad, en dos cursos de Cálculo con estudiantes de Economía y Administración de empresas. La pregunta generatriz se refiere a los costos de un microemprendimiento. Para el análisis del proceso de estudio, el trabajo ha tomado como punto de partida la construcción de los indicadores aquí descritos. Antes de presentar los indicadores construidos, incluimos una breve descripción de cada una de las nueve dialécticas. Esta descripción se realiza de manera independiente no para indicar la no relación entre ellas, sino para manipular la construcción de los indicadores de cada una de las dialécticas.

DIALÉCTICAS O SABERES-HACER DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS

Existen diferentes acepciones del concepto "dialéctica", una de ellas es interpretarla como "la ciencia del movimiento"; esta concepción es muy indeterminada y subraya la movilidad o carácter dinámico de todo. Otra es definir la dialéctica como concepción de la "diversidad de relaciones" implicadas en cualquier

Tabla 1. Caracterización y clasificación de los trabajos referidos a enseñanzas por REI.

Autores (Año)	Tipo de propuesta	Cuestión en torno a (Disciplina)	Nivel educativo (Carrera)	Espacio de implementación	Foco de la sección de análisis y/o descripción
Ruiz-Munzón (2010) Ruiz, Bosch y Gascón (2007)	REI	Ventas, precio unitario, costos de producción (Economía)	Secundario	Taller de matemáticas	Cuestiones y modelos a construir. Caracterización del desarrollo hipotético de la modelización funcional en tres niveles, caracterizados mediante praxeologías matemáticas de complejidad y complejidad crecientes.
Fonseca, Pereira y Casas (2010)	Propuesta abierta de REI	Optimización de funciones (Matemáticas)	Secundario/ Universitario (Ingeniería Química)	Taller de problemas	Modificaciones a la cuestión inicial. Momentos del estudio. Grados de complejidad y complejidad de las organizaciones matemáticas.
Fonseca (2010)	REI	Política de movilidad de una empresa (Economía)	Universitario (Ciencias Económicas y Empresariales)	Seminario	Organizaciones matemáticas desarrolladas. Momentos del estudio.
Ruiz-Higueras y García García (2011)	Taller de modelización	Metamorfosis (Biología)	Inicial	Taller de matemáticas	Praxeologías matemáticas construidas. Caracterización de la praxis y logos didáctico de la profesora.
Serrano, Bosch y Gascón (2010)	Taller de modelización	Previsión de ventas (Economía)	Universitario (Administración y Dirección de Empresas)	Taller de matemáticas	Análisis <i>a priori</i> de las cuestiones. Evaluación de la experimentación según las restricciones y la dialéctica de los medios y medio.
Barquero (2009, 2011)	REI	Dinámica de poblaciones (Biología)	Universitario (Ingeniería Técnica Química Industrial)	Taller de matemáticas	Cuestiones, modelos y respuestas.
Fonseca (2011a, 2011b)	REI	Optimización de caudal (Matemáticas)	Secundario/ Universitario (Ingeniería Industrial)	Taller de matemáticas	Grado de complejidad de las Organizaciones matemáticas desarrolladas.

Autores (Año)	Tipo de propuesta	Cuestión en torno a (Disciplina)	Nivel educativo (Carrera)	Espacio de implementación	Foco de la sección de análisis y/o descripción
Fonseca (2011c)	REI	Fabricación de motos (Economía)	Universitario (Escuela de Ingeniería Industrial)	Taller de matemáticas	Momentos del estudio y tipos de tareas propuestos
Costa, Arlego y Otero (2014)	REI	Edificaciones sustentables (Física)	Universitario (Facultad de Ingeniería)	Curso de matemáticas	Descripción de un modelo praxeológico de referencia. Análisis en términos de niveles de codeterminación. Descripción de las dialécticas.
Donvíto, Otero y Sureda (2014)	REI	Planes de ahorro (Economía)	Secundario	Curso de matemáticas	Actitudes de la PICM (herbariana, procognitiva, exotérica, de problematización, enciclopédista ordinaria).
Olivera Lucas (2015)	REI	Propagación de epidemias (Medicina Nuclear)	Universitario (Licenciatura en Medicina Nuclear)	Curso de matemáticas	Construcción y descripción recorridos matemáticos <i>a priori</i> . Análisis de cada sesión de clase en términos de las cuestiones, actividades y técnicas.
Llanos y Otero (2015)	REI	Operación entre curvas (Matemáticas)	Secundario	Curso de matemáticas	Funciones didácticas (mesogénesis, topogénesis y crónogénesis).
Otero, Gazzola, Llanos y Arlego (2016)	REI	Sistemas oscilantes (Física)	Secundario/ Formación de profesores/ Investigadores en formación	Curso de matemáticas	Preguntas derivadas, organizaciones matemáticas desarrolladas y modelos construidos.
Corica y Otero (2016)	REI	Formación de profesores (Didáctica de la Matemáticas)	Universitario (Facultad de Ciencias Exactas)	Curso de Didáctica de la Matemática	Cuestiones derivadas, géneros y tipos de tareas didácticas. Descripción de dialécticas.

proceso: significa que todo está interconectado y que hay un proceso continuo de cambio en esta interrelación (Bueno, 1972). La tercera acepción de dialéctica es definirla como concepción que subraya la estructura de “retroalimentación negativa” de ciertos sistemas, llamados precisamente por este motivo, dialécticos (Olleta, 1997). La cuarta acepción, que fundamenta la noción de dialéctica en una enseñanza por REI, es la de dialéctica definida en función de las contradicciones implicadas en los procesos analizados, en este caso, en los procesos de estudio. Esta concepción acepta los cambios originados en las contradicciones, a partir del conflicto o del enfrentamiento. Aquí, en un aula de clase, en una comunidad de estudio provista con las intenciones de responder una pregunta generatriz y sus derivadas.

Adhiriéndonos a la noción de dialéctica como una “teoría de las contradicciones”, y considerando el carácter metafórico de la ciencia en general y de la didáctica en particular, asumimos que las acciones ocurridas en el desarrollo de una clase pueden encuadrarse en diferentes *gestos dialécticos*: del estudio y de la investigación; del individuo y del colectivo; del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica; del tema y fuera-de-tema; del paracaidista y de las trufas; de las cajas negras y cajas claras; media-medio; de la lectura y de la escritura, y de la difusión y de la recepción (Chevallard, 2002, 2013b). Es importante destacar que no hay dualidad en una dialéctica sino un proceso interactivo, una interrelación entre los polos de la misma que generan “algo nuevo”. Por ejemplo: entrar o salir del tema son acciones contrapuestas, no duales, una acción llama a la otra. Dentro de esta dialéctica, si se comenzó a estudiar un asunto, habrá también que decidir cuándo dejar de hacerlo, pero esta dinámica produce el estudio de un asunto de una manera “nueva”, dirigida por el interés de responder a un cuestionamiento.

- Dialéctica del estudio y de la investigación (D_{EI}): la búsqueda de respuestas a una pregunta generatriz combina el estudio de praxeologías, disponibles en la cultura escolar (denotadas R^0), con la formulación de nuevas preguntas (preguntas derivadas). Responder una pregunta generatriz genera un cuestionamiento de las obras, nociones y saberes vinculados a ella. Este cuestionamiento provoca una investigación en torno a esas obras y, a su vez, esta investigación genera estudios específicos. Así se concreta una dialéctica: una investigación genera un estudio y un estudio, una investigación.

- Dialéctica del individuo y del colectivo (D_{I-C}): los REI corresponden a un trabajo colectivo pero, en el proceso de búsqueda de respuestas a preguntas, cada actor del proceso de estudio, o sea el profesor y los estudiantes, puede seguir el recorrido que desee. Según Chevallard (2013b) cada miembro de la comunidad de estudio debe considerarse libre de perseguir un estudio e investigar relativamente respecto a las preguntas, pero sin dejar de contribuir al conjunto. Esta dialéctica es fundamental no sólo al interior de cada grupo de trabajo, sino también en la clase en general, con la intervención del profesor para decidir qué cuestiones seguir, cómo gestionar las puestas en común, etcétera.
- Dialéctica del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica ($D_{ASP-ASD}$): consideraremos esta dialéctica no en el sentido estricto, es decir, sin distinguir el análisis-síntesis praxeológico del análisis-síntesis didáctico. Preferimos mantener el nombre asignado por Chevallard (2013b), pero asumimos que la construcción de una respuesta a una pregunta no se limita a buscar, investigar y estudiar los saberes útiles para construir la respuesta. Es necesario concretar un análisis de esos saberes y determinar qué es lo útil, lo funcional para la construcción de la respuesta buscada. Este análisis comporta además la elaboración de una síntesis, entendida no como un resumen de esos saberes sino como una producción personal-grupal de los saberes, identificando las relaciones y los elementos útiles para la construcción de respuestas.
- Dialéctica del tema y fuera-de-tema (D_{T-FDT}): una auténtica pregunta generatriz, vinculada o no con disciplinas diferentes a las matemáticas, conduce inevitablemente a estudiar e investigar saberes ligados directa o indirectamente a la pregunta de partida. La búsqueda de respuestas a una pregunta no es lineal y directa. Es necesario transitar por un camino con ramificaciones que generan “salidas” al estudio e investigación de obras que parecen ser pertinentes para la construcción de la respuesta a construir, aunque luego resulten no serlo.
- Dialéctica del paracaidista y de las trufas (D_{P-T}): un proceso de estudio que tiene como punto de partida una pregunta generatriz necesita “rastrillar” áreas amplias, de gran alcance, zonas donde se estima que puede encontrarse un saber útil a la construcción de una respuesta. Una vez identificadas las áreas pertinentes, es necesario realizar enfoques cada vez más próximos, con el objetivo de identificar las “pepitazas” –las “trufas”– que

permitirán progresar en el estudio e investigación. Los términos “paracaidista” y “trufas” se deben al historiador francés Emmanuel Leroy-Ladurie, quien clasificó a los historiadores como paracaidistas y buscadores de trufas. Por un lado, los paracaidistas realizan una exploración en extensas áreas de territorio, mientras los buscadores de trufas sacan a la luz los tesoros enterrados. “‘Buscadores de trufas’ y ‘paracaidistas’: los primeros hurgan en torno a sí con las narices metidas en la tierra; en tanto que los segundos descienden en medio de las nubes, inspeccionando el panorama de todo el campo, pero desde una altura tan elevada que no alcanzan a percibir con claridad nada en detalle” (Bouza Álvarez, 1990: 99).

- Dialéctica de las *cajas negras* y *cajas claras* (D_{CN-CC}): en una enseñanza tradicional, las obras deben estudiarse porque así se ha explicitado en el programa de estudios, sin cuestionar demasiado su utilidad, el por qué y para qué de su estudio. En una enseñanza por REI, en cambio, se trata de buscar un nivel intermedio sobre cuánto y qué estudiar de una obra. Esto es considerado como el nivel de gris más óptimo en función de una necesidad. Esta dialéctica estimula el estudio de los saberes pertinentes, los necesarios para “clarificar” algunos aspectos de las obras que son necesarios y dejar en la “oscuridad” los que no lo son.
- Dialéctica *media* (*sistema de información*)-*medio* (*de estudio*) (D_{M-M}) (o de la conjectura y de la prueba): el ingreso en la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento concibe un medio didáctico más próximo al desarrollado en una práctica de investigación. El medio de estudio no está definido de antemano, sino que se construye y sus componentes son puestos a prueba en paralelo a la construcción de respuestas. Esta concepción de medio, más amplio y abierto, permite el ingreso a él de cualquier tipo de saber producto de diferentes fuentes de información, diferentes medias. En una enseñanza monumental el único media del que dispone el estudiante es el profesor. En una enseñanza por REI, en cambio, el alumno puede considerar e incorporar al medio de estudio una obra reencontrada en cualquier otro media. Chevallard (2013b) define un media como cualquier sistema que represente una parte del mundo natural o social destinado a un público específico: el “curso” de un profesor, un artículo de química, una revista, un periódico, un sitio de Internet, etc. Esta dialéctica corresponde también, de acuerdo con sus primeras formulaciones, a la conjectura y prueba. En este sentido se refiere a que el saber

construido en un REI y considerado producto de una conjetura, debe ponerse a prueba.

- Dialéctica de *la lectura y de la escritura* (D_{L-E}): el proceso de búsqueda de respuestas disponibles en los diferentes medios conduce a una “deconstrucción” de estas respuestas. Esta deconstrucción se refiere a un desglosamiento, a identificar, separar, “leer” las obras que pueden servir a la construcción de la respuesta buscada. Esta “lectura” activa así, en principio, tres tipos de tareas: *observar, analizar y evaluar* estas respuestas, para luego activar otros tres tipos de tareas, más propios de la “escritura”: *desarrollar, difundir y defender* la respuesta producida. Esta dialéctica incita al desarrollo de diversos niveles de escritura: diarios de clase, notas de síntesis, glosarios, producción final, etcétera.
- Dialéctica de *la difusión y de la recepción* (D_{D-R}): una vez construida la respuesta, cada miembro o grupo de estudio debe difundirla, darla a conocer explicando sus componentes y justificando las elecciones realizadas. Esta difusión no consiste en una simple presentación de la respuesta, sino que debe ser una difusión que tome en cuenta la recepción del resto de la comunidad, una difusión que considere los cuestionamientos, las aceptaciones y resistencias del resto de la clase.

A continuación presentamos la metodología de la investigación. Resulta indispensable mencionar, además, en esta sección las características de la dinámica del REI implementado, para ubicar al lector en el proceso de construcción de los indicadores. Por cuestiones de espacio –y debido a que el objetivo de este trabajo no es describir las implementaciones del REI, sino presentar los indicadores didáctico-matemáticos de las dialécticas– solamente describiremos brevemente la dinámica y estructura del REI experimentado. Una descripción detallada de esta dinámica se encuentra en Parra, Otero y Fanaro (2013).

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La implementación del REI fue llevada a cabo en el último año del nivel secundario argentino desde el primer día del ciclo lectivo, y estuvo a cargo del investigador. Comenzar con la implementación desde el primer día de clases fue una decisión tomada durante la etapa de diseño del REI pues, de esta forma, no se

realizó un “entrenamiento” previo en las praxeologías que permitirían dar respuesta a las preguntas, es decir, los estudiantes no sabrían qué nociones matemáticas permitirían aportar las respuestas. La implementación de mayor duración se desarrolló durante 36 sesiones de clases en un grupo de alumnos del último año de los niveles secundarios argentinos (16-17años), distribuidos (a elección de ellos) en 6 grupos de trabajo ubicados, por decisión institucional, en mesas redondas. Las 36 clases se desarrollaron a lo largo de siete meses. Los encuentros se concretaban dos veces por semana, con duración de 2 horas cada sesión. Se realizó observación participante, se tomaron notas de campo que permitieron registrar en un diario de clase las intervenciones, dificultades, sensaciones, acontecimientos, etc. Fue registrado el desarrollo de las clases en audios generales, para facilitar su registro cronológico, y principalmente se recolectaron las producciones de los estudiantes de todas y cada una de las sesiones de clase. Estas producciones eran escaneadas y devueltas la sesión siguiente.

El REI fue implementado dentro de las clases usuales de matemáticas. El profesor y los estudiantes acordaron que el proceso de estudio a desarrollar diferiría de la forma en que estaban habituados a trabajar. Este grupo de jóvenes ha realizado toda su escolaridad con una enseñanza enmarcada en el paradigma tradicional, donde el docente de matemáticas explica un “tema” del programa y los alumnos resuelven actividades de aplicación del “tema” previamente expuesto. En esta oportunidad, el profesor les propuso trabajar de forma diferente: estudiarían matemáticas a partir de preguntas que cada grupo debería responder y luego comunicar y defender. No se redactó un contrato de trabajo, pero sí se mencionaron algunas “cláusulas” respecto a:

- La modalidad de trabajo: los estudiantes trabajarían en grupos de cinco integrantes cada uno, máximo. La conformación de los grupos era voluntaria y debían permanecer estables a lo largo de todo el recorrido.
- Los recursos a utilizar: además del propio docente de matemáticas, los alumnos podían consultar a los demás profesores del colegio, en particular al profesor de economía. Se incorporó el uso de computadoras: cada grupo disponía de una computadora con acceso a Internet, permitiendo realizar búsquedas cuando lo creían necesario, o utilizar el *GeoGebra®* si lo consideraban pertinente. Además, se acordó asistir a la biblioteca del establecimiento para consultar los libros de texto (de matemáticas y/o de microeconomía) allí disponibles.

- La evaluación: se acordó que la evaluación sería a lo largo del proceso de estudio, clase a clase, a partir de las producciones individuales y grupales diarias. Luego, habría una instancia de síntesis que también formaría parte de la evaluación de todo el proceso de estudio.

Las preguntas generatrices del REI se refieren a la microeconomía, específicamente al comportamiento de las leyes de oferta y la demanda de mercado. Desarrollamos un REI cuyas preguntas e hipótesis de partida (H_0 , H_1 y H_2) permiten construir y analizar las variaciones de un modelo lineal de oferta y demanda, donde las ecuaciones dependen únicamente del precio del bien (p) y de las cantidades del mismo (cantidad demanda y cantidad ofrecida). Estas hipótesis no se explicitaron al grupo de alumnos como tales, sino que fueron consideradas durante las primeras fases de la ingeniería didáctica, específicamente cuando se diseño el recorrido implementado. Las hipótesis son las siguientes:

H_0 : Existe el estado de equilibrio y es accesible.

H_1 : El equilibrio en el mercado se alcanza si y sólo si la demanda excedente es cero: $C_d - C_o = 0$, siendo C_d la función de demanda y C_o la función de oferta.

H_2 : Las funciones C_o y C_d son lineales y dependen de una única mercancía.

Bajo estas hipótesis, las preguntas generatrices, tal cual fueron presentadas a los estudiantes por parte del profesor, fueron las siguientes:

Q₁: Supongamos que se está elaborando un producto con la intención de venderlo. De un ensayo de ventas previo se obtuvo la información ofrecida en las tablas siguientes:

Cantidad ofrecida	Precio por unidad (en \$)	Cantidad demandada	Precio por unidad (en \$)
155	10	330	7
307	18	250	15
98	7	270	13

¿Cómo determinar a qué precio por unidad todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha? ¿Qué modelo lineal permitiría estudiar el comportamiento de la oferta y demanda en este mercado?

Q₂: ¿Cómo se podría estudiar el comportamiento de las leyes de oferta y la demanda para cualquier par de funciones lineales de oferta y de demanda? ¿Cómo podría hallarse en este caso el punto de equilibrio?

Q₃: Supongamos que la función de oferta de un mercado está dada por la función $C_o(p) = 3p - 2$ y que la función de demanda, por $C_d(p) = -4p + 6$. ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si solo se modifica el valor de la cantidad inicial demandada? ¿Y si se modifica el valor de la cantidad inicial ofrecida?

Q₄: ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si solo se modifica el valor de las pendientes?

Q₅: ¿Cuánto varía exactamente el punto de equilibrio en cada caso?

Es importante mencionar que estas preguntas fueron presentadas en el orden indicado. O sea, fue una sucesión de preguntas donde cada una de ellas fue propuesta por el profesor en los momentos donde lo creía conveniente. Cada grupo de alumnos tenía la tarea de aportar una respuesta, comunicarla y defenderla ante el resto. Las preguntas que surgían en los distintos grupos de alumnos eran consideradas por la comunidad de estudio y también debían responderse. Cada grupo debía aportar respuestas, utilizando las sesiones de clases necesarias y los recursos disponibles. El profesor recorría los grupos para seguir el trabajo de cada uno y gestionaba las puestas en común, ayudando pero sin aportar las respuestas a las preguntas planteadas, permitiendo que los estudiantes asumieran su papel en la construcción de respuestas y en el planteo de nuevas preguntas. Los alumnos debían hacerse cargo de las preguntas y comprometerse con la elaboración de respuestas genuinas, y no simplemente buscando información.

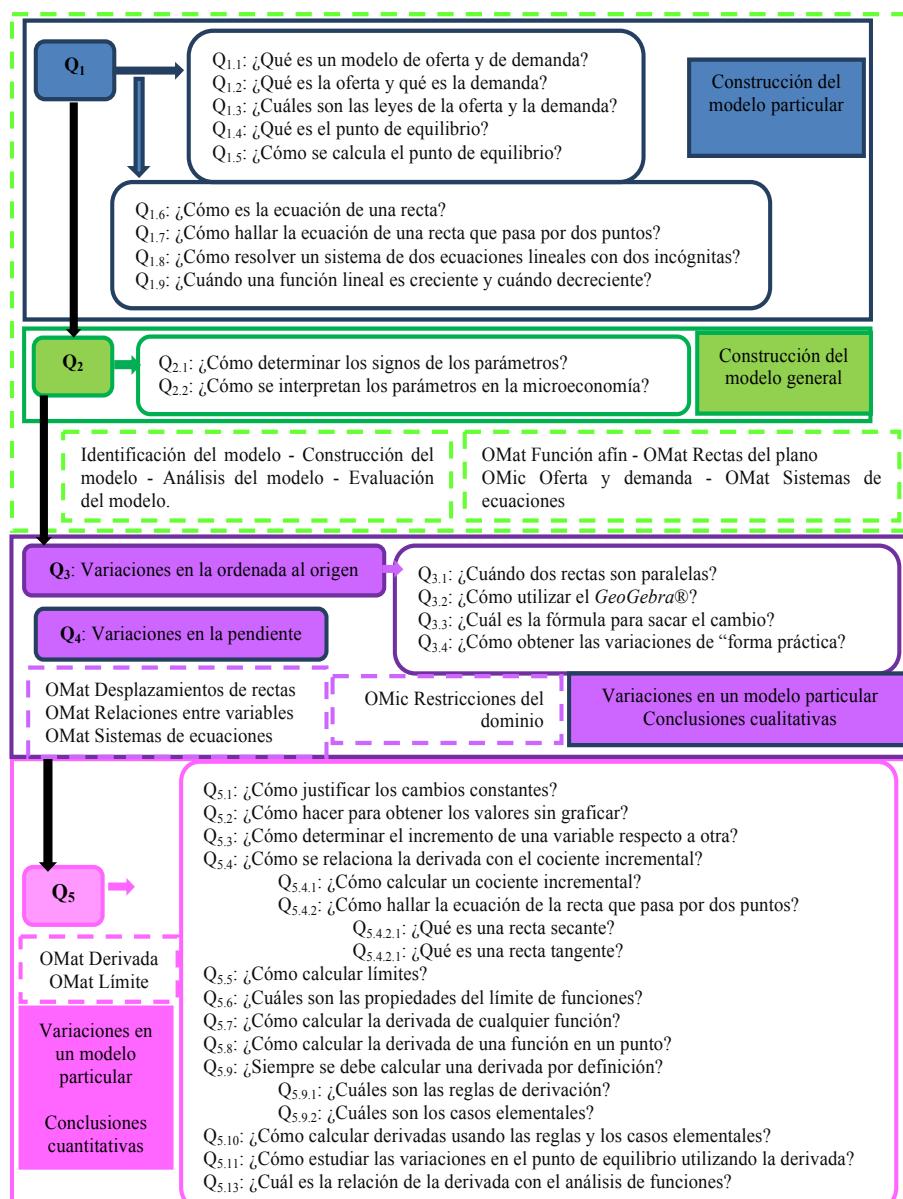
El REI experimentado permitió estudiar organizaciones matemáticas en torno a rectas del plano en diversos momentos del proceso de estudio, a la derivada de funciones que condujo al estudio del límite de funciones (invirtiendo así el orden “habitual”, que en general se efectúa a la inversa, primero se estudia el límite y luego la derivada), a la continuidad y al análisis de algunas funciones sencillas. Respecto a las obras de la microeconomía, fue posible estudiar el esquema de funcionamiento de un modelo económico, el análisis de los mercados, concepto, clases, funcionamiento, equilibrio y la determinación de precios.

Cada pregunta permitió a los grupos (con la ayuda del docente) formular una serie de preguntas derivadas, que por razones de espacio no detallaremos aquí. Conviene mencionar que las preguntas derivadas emergieron durante el proceso de estudio. Como ya lo indicamos anteriormente, el profesor propuso a los estudiantes las preguntas que presentamos bajo el rótulo Q₁, Q₂, Q₃, Q₄ y Q₅. Estas preguntas no se dividieron *a priori* en cada una de sus derivadas, sino que las derivadas emergieron a lo largo del proceso de búsqueda de respuestas a las Q_i, i = 1, ..., 5. Es decir, el profesor no dividió *a priori* las cuestiones Q_i, i = 1, ..., 5 en sus derivadas –por ejemplo, el profesor no dividió *a priori* la cuestión Q₅ en 13 sub-cuestiones, sino que estas 13 sub-cuestiones fueron emergiendo a lo largo del proceso de estudio en los diferentes grupos de la clase, bajo su dirección-. Una descripción detallada del funcionamiento de la dialéctica del estudio y la investigación centrada precisamente en la generación de las sub-cuestiones ha sido el foco de un trabajo ya publicado (Parra, Otero y Fanaro, 2015). Aquí solamente presentamos el esquema que resume las preguntas.

Para analizar los registros obtenidos fue diseñada la Tabla 2. En la primera columna se coloca el número de clase (desde la clase 1 a la 36); la segunda contiene las preguntas estudiadas; la tercera, dividida en 9 sub-columnas, contiene las dialécticas; aquí se coloca un 1 para indicar que esa dialéctica fue identificada y un 0 para indicar que no. Finalmente, la cuarta columna contiene el indicador del funcionamiento de la dialéctica correspondiente.

Tabla 2. Funcionamiento de las dialécticas.

Sesión N°	Pregunta	Dialéctica									Indicador
		D _{E-I}	D _{I-C}	D _{ASP-ASD}	D _{T-FDT}	D _{P-T}	D _{CN-CC}	D _{M-M}	D _{L-E}	D _{D-R}	
	Del estudio y de la investigación										
	Del individuo y del colectivo										
	Del análisis (síntesis) praxeológica y del análisis (síntesis) didáctica										
	Del tema y fuera-de-tema										
	Del paracaidista y de las trufas										
	De las cajas negras y cajas claras										
	Media-medio										
	De la lectura y de la escritura										
	De la difusión y de la recepción										



Esquema 1. Resumen de preguntas formuladas durante las 36 sesiones de clases.

PRINCIPALES RESULTADOS: INDICADORES DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DE LAS DIALÉCTICAS

D_{E-I}: del estudio y de la investigación: identificamos el funcionamiento de esta dialéctica cuando en algún momento de la clase se produce:

- Una búsqueda sostenida en Internet, en libros de diversas disciplinas, consultas a profesores de diferentes disciplinas, consultas a profesionales y/o cualquier otra búsqueda en distintos medios ajenos al profesor del curso. Por ejemplo, en este caso, la búsqueda en Internet o en libros de matemáticas y/o de microeconomía.
- El estudio de respuestas R_i^\diamond , es decir, el estudio de respuestas disponibles, entendiendo por tales a aquellas obras reconocidas por la cultura y/o el estudio de obras O_j que son útiles en la construcción de la respuesta a la pregunta generatriz o sus derivadas. Identificaciones de acciones de estudio en torno a:
 - R_1^\diamond : O_{Mat} en torno a la función lineal.
 - R_2^\diamond : O_{Mat} en torno a rectas paralelas y rectas perpendiculares.
 - R_3^\diamond : O_{Mat} en torno a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
 - R_4^\diamond : O_{Micro} en torno a los modelos de oferta y demanda.
 - R_5^\diamond : O_{Micro} en torno a los desplazamientos de las curvas de oferta y demanda.
- La formulación de preguntas derivadas de la generatriz en los diferentes grupos y acciones de búsqueda de respuestas a las mismas. Por ejemplo:
 - Q_{ME1} : ¿Qué es un modelo de oferta y de demanda?
 - Q_{ME2} : ¿Cómo se comporta la función de oferta?
 - Q_{ME3} : ¿Cómo se comporta la función de demanda?
 - Q_{ME4} : ¿Qué se entiende en microeconomía por punto de equilibrio?
 - Q_{ME5} : ¿Cómo representar el conjunto de datos en un sistema de ejes cartesianos?

D_{I-C}: del individuo y del colectivo: identificamos el funcionamiento de esta dialéctica cuando se detectan las siguientes acciones:

- Una toma de decisiones del grupo de estudiantes, por ejemplo ponerse de acuerdo sobre el modelo a construir (si las cantidades ofrecidas y

demandadas dependen del precio o si el precio depende las cantidades ofrecidas y demandadas).

- Algún integrante menciona que la producción que ha realizado no es de él sino del grupo, y viceversa.
- Cada grupo acuerda cómo difundir y defender su respuesta, entendiendo que es una producción grupal, colectiva, no individual, y asignando tareas y responsabilidades individuales en esa difusión.
- El profesor y/o los estudiantes deciden qué cuestiones estudiar.
- El docente gestiona las puestas en común en función de las necesidades de avanzar en el proceso de estudio.
- Los alumnos incorporan cuestionamientos durante las puestas en común, para re-direccional el proceso de estudio según la producción de su grupo.

D_{ASP-ASD}: *del análisis (síntesis) praxeológica y del análisis (síntesis) didáctico:* identificamos el funcionamiento de esta dialéctica cuando se observa alguna acción del siguiente tipo:

- Un análisis de las diferentes respuestas R_i^\diamond que requiere decidir qué parte estudiar de estas obras para construir la respuesta R^\bullet . Por ejemplo: ¿Qué y cómo estudiar los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas? ¿Qué y cómo estudiar los modelos de oferta y de demanda? ¿Qué y cómo estudiar los desplazamientos de funciones? ¿Qué y cómo estudiar las relaciones entre variables?, etcétera.
- Un análisis de los datos obtenidos de diferentes sistemas de información: Internet, libros de matemáticas, libros de microeconomía, profesores, economistas, comerciantes, etcétera.
- Un análisis de las preguntas formuladas dentro de cada grupo de estudio.
- Una síntesis de las técnicas, tecnologías y teorías que componen las diferentes respuestas R_i^\diamond .
- Una síntesis de la información obtenida en los diferentes media, priorizando lo que es necesario y adecuado para aportar respuestas a las preguntas.
- Una síntesis de las respuestas a las preguntas derivadas de la generatriz.

D_{T-FDT}: *del tema y fuera-de-tema:* previo a enumerar los indicadores, diremos que la separación entre matemática y microeconomía se efectúa en términos de la

exploración de ámbitos que no parecían tener mucha relación directa con la cuestión considerada. Por ejemplo, el estudio del límite de funciones se produjo a partir de la pregunta sobre las variaciones del precio y cantidad de equilibrio. Esta exploración no fue evidente al considerar la pregunta Q₄. Así, detectamos que esta dialéctica funciona por acciones tales como:

- Una salida a una disciplina diferente de las matemáticas, por ejemplo, a la microeconomía. La decisión sobre el dominio de validez de los parámetros del modelo implica estudiar las leyes de oferta y la demanda, y ajustarlos a ellas. A su vez, la representación en un sistema de ejes cartesianos puede alternar los ejes cartesianos.
- Dentro de las matemáticas, una salida a la misma disciplina. Por ejemplo:
 - El estudio del límite de funciones para poder ingresar al estudio de la derivada de funciones como el límite del cociente incremental.
 - El estudio de sistemas de ecuaciones para ingresar al cálculo de puntos de equilibrio.

D_{P-T}: del paracaidista y de las trufas: esta dialéctica se pone en funcionamiento cuando es introducida por primera vez una pregunta “nueva”, alguna pregunta derivada, alguna R[◊] y/o cualquier obra que, habiendo realizado una búsqueda en diferentes media y sin un análisis exhaustivo, pareciera ser útil a la construcción de la respuesta R[▼]. El funcionamiento de esta dialéctica es identificado cuando en algún momento de la clase observamos que:

- Los grupos de alumnos no logran determinar cómo comenzar a responder las preguntas, y las producciones entregadas no aportan una respuesta parcial a las mismas.
- La búsqueda en Internet es ampliada y comienzan a enfocarse en lo que les podría ser útil.
- La búsqueda en los libros los lleva a descartar diferentes capítulos que no servirán para aportar repuestas.

D_{CN-CC}: de las cajas negras y cajas claras: identificamos el funcionamiento de esta dialéctica si en algún momento de la clase se produce un estudio “incompleto”, parcial, de una obra. Es decir, cuando ocurre un estudio en un “nivel de gris”. Por ejemplo, acciones pertenecientes a este nivel de “gris” son las siguientes:

- Estudiar solo una manera de resolver un sistema de ecuaciones.
- Construir la ecuación de la recta que pasa por dos puntos sin realizar el estudio “mecánico” de “la fórmula”.
- Estudiar rectas paralelas sin estudiar las rectas perpendiculares.
- Estudiar la derivada de funciones como el límite del cociente incremental.

D_{M-M}: *media-medo (o la de la conjetura y de la prueba)*: esta dialéctica es detectada cuando en algún momento de la clase:

- Se realizan preguntas en términos de *¿Por qué?*, o sea, cuestionando un resultado obtenido o propuesto en algún media (fuente de información). Por ejemplo *¿Cuál de los dos modelos obtenidos es el correcto? ¿Por qué ambos modelos de oferta y demanda son adecuados?*
- Se estudia una obra obtenida en algún media diferente al profesor de la clase.
- Se hacen preguntas en términos de *¿Cómo?*, cuestionando *¿Cómo probar que efectivamente el modelo elegido es el correcto? ¿Cómo probar que el punto de equilibrio efectivamente varía la cantidad indicada? ¿Cómo probar que la variación entre el punto de equilibrio y los parámetros está relacionado?*, etc. Esto implica la necesidad de disponer de nueva información.

D_{L-E}: *de la lectura y de la escritura*: detectamos el funcionamiento de esta dialéctica si en aquellos momentos de la clase los estudiantes:

- Subrayan o resaltan lo que consideran importante de las búsquedas en Internet, o bien cuando copian en sus carpetas lo que puede serles útil de esas búsquedas y de las lecturas en los libros o de las consultas al profesor de economía y matemáticas.
- Elaboran la síntesis de su propio trabajo, o bien una síntesis de la información obtenida en algún media.

D_{D-R}: *de la difusión y de la recepción*: es identificada cuando en algún momento de la clase los grupos de estudio comunican y defienden cada una de las respuestas construidas. Es decir, al compartir las producciones realizadas.

A continuación se propone, a modo de ejemplo, la tabla generada a partir de los datos de la clase 5. Durante la sesión de clase número 5, la pregunta estudiada fue Q_2 : *¿Cómo podría hallarse en este caso (haciendo referencia a datos específicos) el punto de equilibrio?* Durante la búsqueda de respuestas a esta pregunta se activaron los siguientes gestos, indicando la puesta en marcha de las dialécticas señaladas en la tabla:

Tabla 3. Indicadores didáctico-matemáticos de la sesión cinco.

Sesión Nº	Dialéctica								
	D _{E-I}	D _{I-C}	D _{ASP-SD}	D _{T-FDT}	D _{P-T}	D _{CN-CC}	D _{M-M}	D _{L-E}	D _{D-R}
5	1	1	1	1	0	1	1	1	0

Enseguida, los indicadores didáctico-matemáticos identificados en esta clase, espacio correspondiente a la última columna de la Tabla 2:

INDICADORES DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS

D_{E-I}: los grupos de trabajo investigan y estudian qué relación existe entre los signos de los parámetros del modelo que lograron construir (ver siguiente figura) y los postulados de la oferta y la demanda en microeconomía.

D_{I-C}: primero al interior de cada grupo y luego con el grupo en general, los estudiantes y el profesor deciden los signos de los parámetros del modelo, según las distintas formulaciones. Existe aquí una toma de decisiones intra e inter grupal.

D_{ASP-SD}: analizar la praxeología “función lineal”. Se analiza lo que ya se “conoce” de funciones lineales, determinando lo que puede servir para la construcción de respuesta. Luego, se procede a realizar una síntesis respecto a funciones crecientes y funciones decrecientes.

D_{T-FDT}: salir a la microeconomía para interpretar los signos de los parámetros y su razón de ser en los modelos de oferta y de demanda. Salir a la praxeología, funciones crecientes y funciones decrecientes, y una salida más prolongada en el tiempo a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (generada por la búsqueda del punto de equilibrio en el modelo general).

D_{CN-CC}: establecer que el saber pertinente en este caso corresponde al (de) crecimiento de una función lineal, cuándo y por qué.

D_{M-M}: los alumnos, junto con el profesor, realizan cuestionamientos, en términos de validación, sobre la consideración del precio en el eje horizontal: Se formulan preguntas tales como: ¿Por qué la pendiente de la demanda debe ser negativa? ¿Por qué su ordenada debe ser positiva? ¿Por qué la pendiente de la oferta debe ser positiva? ¿Por qué su ordenada negativa?

The image shows handwritten mathematical notes on a grid background. On the left, there is a green bracket grouping three equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0(p) = a_1 p + b_1 \\ C_d(p) = -a_2 p + b_2 \\ C_0(p) = C_d(p) \end{array} \right.$$

To the right of the equations, there are four circled numbers indicating sign values:

- $a_1 = +$
- $b_1 = -$
- $-a_2 = -$
- $b_2 = +$

D_{L-E}: los estudiantes y el profesor interpretan y reescriben lo que encontraron de funciones afines crecientes y decrecientes, para justificar los signos de los parámetros del modelo. Se “lee” de apuntes del profesor y se “reinterpreta” en el contexto de los modelos de oferta y de demanda.

Durante esta clase no se han detectado indicadores de D_{P-T} ni de D_{D-R}. El análisis realizado aquí con la sesión número 5 fue también efectuado con las 35 sesiones restantes, obteniendo la frecuencia con que se ha desarrollado una cierta dialéctica (Tabla 4). Conviene destacar que esta tabla no corresponde a un análisis estadístico, sino que la codificación en 0 o 1 nos permite rotular y diferenciar los gestos que consideramos propios de una dialéctica y no de otra. Es una rotulación desarrollada para interpretar lo ocurrido en clase en términos de las dialécticas, considerando que estos gestos no pueden determinarse directamente sino a través de indicadores.

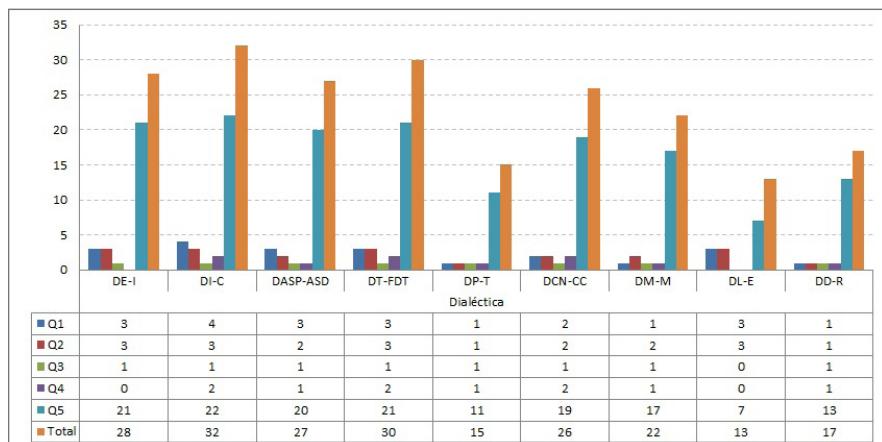
Reagrupando la ocurrencia de 0 y 1 en función de cada pregunta y cada dialéctica, resumimos esta información en el esquema 2:

La pregunta 5 presenta mayor ocurrencia de indicadores en todas las dialécticas, especialmente las del estudio y la investigación, del tema y fuera-de-tema, y del individuo y el colectivo. Esto indica mayor ocurrencia de búsqueda de información y desarrollo de investigaciones, mayor presencia

Tabla 4. Resumen de las sesiones de clase.

Sesión N°	Fecha	Pregunta	Dialéctica								
			D _{E-I}	D _{I-C}	D _{ASP-ASD}	D _{T-FDT}	D _{P-T}	D _{CN-CC}	D _{M-M}	D _{L-E}	D _{D-R}
1	10/03	Q ₁	1	1	0	1	1	0	0	1	0
2	15/03	Q ₁	1	1	1	1	0	1	0	1	0
3	17/03	Q ₁	1	1	1	1	0	1	1	1	0
4	22/03	Q ₁	0	1	1	0	0	0	0	0	1
		Q ₂	1	1	0	1	1	1	0	1	0
5	29/03	Q ₂	1	1	1	1	0	1	1	1	0
6	31/03	Q ₂ Q _{2,1}	1	1	1	1	0	0	1	1	1
7	05/04	Q ₃	1	1	1	1	1	1	1	0	1
8	07/04	Q ₄	0	1	1	1	1	1	1	0	0
9	12/04	Q ₄	0	1	0	1	0	1	0	0	1
10	14/04	Q ₅ Q _{5,1} Q _{5,2}	1	1	1	0	0	1	1	0	1
11	19/04	Q _{5,3}	1	1	0	1	1	1	1	0	1
12	26/04	Q _{5,3}	1	1	0	1	0	0	0	0	0
13	28/04	Q _{5,3} Q _{5,3,1}	1	1	1	1	0	1	1	1	1
14	05/05	Q _{5,3}	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	10/05	Q _{5,4} Q _{5,4,1} Q _{5,5}	1	1	1	1	1	1	1	1	0
16	12/05	Q _{5,5} Q _{5,6}	1	1	1	1	1	1	1	1	0
17	17/05	Q _{5,5} Q _{5,6}	1	1	1	1	0	1	1	1	0
18	19/05	Q _{5,5} Q _{5,6}	0	0	0	0	0	0	0	0	1
19	24/05	Q _{5,5} Q _{5,6}	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	26/05	Q _{5,5} Q _{5,6}	0	1	0	0	0	0	0	0	1
21	31/05	Q _{5,5} Q _{5,6}	0	1	1	1	0	1	0	1	1
22	02/06	Q _{5,5}	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Sesión N°	Fecha	Pregunta	Dialéctica								
			D _{E-I}	D _{I-C}	D _{ASP-ASD}	D _{T-FDT}	D _{P-T}	D _{CN-CC}	D _{M-M}	D _{L-E}	D _{D-R}
23	07/06	Q _{5,5}	1	1	1	1	0	0	0	0	0
24	14/06	Q _{5,4,1}	1	1	1	1	0	1	1	0	0
25	28/03	Q _{5,4,1} Q _{5,4,2} Q _{5,4,2,1} Q _{5,7} Q _{5,8}	1	0	1	1	0	1	1	0	0
26	30/06	Q _{5,7} Q _{5,8}	1	1	1	1	1	1	1	1	0
27	05/07	Q _{5,9} Q _{5,9,1} Q _{5,9,2}	1	1	1	1	1	1	1	0	0
28	07/07	Q _{5,10}	1	1	1	1	0	1	0	0	1
29	02/08	Q _{5,10}	1	1	1	1	1	1	1	0	0
30	04/08	Q _{5,10}	1	1	1	1	0	1	1	0	1
31	09/08	Q _{5,11}	1	1	1	1	1	1	1	0	0
32	11/08	Q _{5,11}	0	0	0	0	0	0	0	0	1
33	16/08	Q _{5,12}	1	1	1	1	1	1	1	0	0
34	18/08	Q _{5,12}	1	1	1	1	1	1	1	0	1
35	30/08	Q _{5,13}	1	1	1	1	1	1	1	0	0
36	01/09	Q _{5,13}	1	1	1	1	1	1	1	1	1



Esquema 2. Ocurrencia de cada dialéctica según cada pregunta.

de acuerdos al interior de cada grupo y mayor salida-ingresos a otros temas (tanto de las matemáticas como de la microeconomía). Se observa una diferencia significativa con las restantes preguntas, posiblemente porque Q₅ ha permitido generar el mayor número de preguntas derivadas, característica no determinada de antemano. La cuestión Q₅ fue produciendo, a lo largo de todo el proceso de estudio, una variedad de preguntas, que además generó un estudio sostenido en el tiempo. Es decir, se destinaron más sesiones de clase a la construcción de respuestas para Q₅ y sus derivadas que al resto de las cuestiones. Esta particularidad podría influenciar en la aparición de las dialécticas, así como también el hecho de que Q₅ permitió abordar aspectos del programa no estudiados previamente por el grupo de clase, y el hecho de que gran parte de las preguntas derivadas fuesen formuladas por los propios grupos de estudiantes.

La búsqueda de respuestas a la Q₄ no presenta indicadores de la dialéctica del estudio y la investigación ni de la dialéctica de la lectura y escritura, posiblemente porque Q₄ no generó preguntas derivadas y, en consecuencia, no fue necesario buscar e investigar en diferentes fuentes de información, por lo cual no hubo lecturas con posteriores re-escrituras e interpretaciones por parte de los alumnos.

En Q₃ no se determinaron indicadores de la dialéctica de la lectura y escritura, pero sí del estudio e investigación, posiblemente porque Q₃ generó algunas preguntas derivadas –relativas a rectas paralelas, al uso del *GeoGebra®* y a la intersección de dos rectas– específicas de una matemática que los estudiantes conocían y sabían utilizar. De manera general, la ocurrencia de indicadores fue similar para Q₂ y Q₁, detectándose un número inferior a los correspondientes a Q₅, pero superior a Q₃ y Q₄.

La formulación de las preguntas en términos de “Cómo” ha limitado la generación de preguntas derivadas. Así, las cuestiones desde Q₁ a Q₄ formuladas en términos de “Cómo” generaron un menor número de preguntas derivadas que la cuestión Q₅, formuladas en términos de “Cuánto varía (exactamente)”, permitiendo activar las distintas dialécticas. A su vez, estas diferencias, respecto a las apariciones de una dialéctica en detrimento de otras, podrían vincularse a que las preguntas hagan o no referencia a aspectos ya estudiados o no por los alumnos. Diferencia que podríamos asociar a la pregunta Q₅ respecto a las restantes. Otro aspecto a considerar es que Q₅ ha favorecido en mayor medida la formulación de sub-cuestiones por parte de los propios estudiantes.

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

El proceso de estudio llevado a cabo a partir de la implementación del REI permitió poner en funcionamiento las dialécticas del estudio y la investigación. Varias de ellas pueden operar a la vez, y el funcionamiento de una llama a la puesta en marcha de las otras. La búsqueda de respuestas a las distintas preguntas pone en juego la dialéctica del “estudio y de la investigación”, pues no sólo es necesario estudiar sobre microeconomía y matemáticas, sino también investigar en torno a ambas disciplinas. Para estudiar e investigar sobre una pregunta, es necesario decidir dónde (por ejemplo, Internet, libros de microeconomía, economía, matemáticas, profesores de economía y matemáticas, entre otros) realizar las búsquedas y luego determinar cuáles de esos medios serán incorporados al medio (dialéctica de los medios y medio), y qué saberes extraídos de dichos medios serán puestos a prueba, o sea, no creídos bajo palabra o por el principio de autoridad. A su vez, esta búsqueda en diferentes fuentes de información requiere determinar qué saberes son pertinentes y funcionales para la construcción de la respuesta R^* , o sea, cuál es el nivel de “gris” más adecuado. Asimismo, la decisión del nivel de “gris” de las distintas R^o y de otras obras encontradas en los diferentes medios conducen a decidir de qué forma se incluirán estos saberes en la construcción de la respuesta R^* , para lo cual será necesario analizarlos, interpretarlos y reescribirlos sin elaborar una copia textual (dialéctica de la lectura y de la escritura).

Por otra parte, la respuesta R^* desarrollada por cada grupo de alumnos debe ser el producto de un consenso entre todos los integrantes del mismo. Si bien cada integrante puede realizar un estudio e investigación individual, llega un momento en el cual debe contribuir a la respuesta colectiva, incluyendo a cada actor del proceso de estudio, estudiantes y profesor (dialéctica del individuo y del colectivo). Una vez construida R^* al interior de cada grupo, éstos la difunden y defienden para con el resto de la clase (dialéctica de la difusión y recepción). El estudio y la investigación de diferentes obras, la puesta a prueba de los saberes encontrados en los distintos medios, la decisión de su pertinencia y funcionalidad, la identificación del nivel de “gris” adecuado, la lectura y escritura no textual de esas obras y la difusión y defensa de la respuesta R^* implican que en diferentes momentos del proceso de estudio se realicen “salidas” y “entradas” a ámbitos inesperados o que no parecían, en principio, tener relación directa con la cuestión considerada. Por ejemplo, la praxeología en torno al límite de funciones estaba disponible en el equipamiento praxeológico de los

estudiantes, pero fue necesario llevar a cabo un “reencuentro” con tal praxeología. En otras palabras, se requirió “volver a estudiarla”, a partir del análisis de sus tipos de tareas, sus técnicas, tecnologías y teorías. Así ocurrió una “salida” al límite de funciones, que se prolongó en el tiempo pero que recuperó al menos un sentido al concepto “límite”. Con posterioridad a este estudio fue necesario volver a ingresar, “entrar”, a la organización relativa a la derivada, pues es la que permitía aportar una respuesta a la cuestión sobre las variaciones en el punto de equilibrio. La dialéctica del análisis (y síntesis) didáctica y análisis (síntesis) praxeológica opera no solamente en el desarrollo del REI, sino también en la ingeniería didáctica del mismo. El investigador analiza las acciones didácticas y praxeológicas que cada pregunta puede poner en juego.

Respecto a las preguntas derivadas, las correspondientes a las matemáticas han sido superiores al número de sub-preguntas relativas a la microeconomía, y las mayores dificultades corresponden al análisis cuantitativo de las variaciones en el modelo de mercado. La dialéctica con mayores dificultades de puesta en marcha fue la de la lectura y escritura, lo cual podría relacionarse con una restricción institucional: el retroceso de las prácticas de lectura y escritura por parte de los alumnos, que opera de hecho en la escuela secundaria y que no pueden circunscribirse solo a las clases de matemáticas ni resolverse en su seno. Su número de ocurrencia es el más bajo. Las dialécticas de la difusión y recepción del paracaídista y de las trufas presentan también un menor número de ocurrencia que las restantes. En esta última, si bien los estudiantes no sabían con qué nociones podrían responderse las preguntas, una vez que identificaron que se refería a modelos de oferta y de demanda, los enfoques para hallar las “pepititas” fueron cada vez menos frecuentes.

La dialéctica más frecuente fue la del individuo y colectivo, lo cual podría deberse a la modalidad de trabajo del grupo de clase. La dialéctica del tema y fuera-de-tema es otra de las más frecuentes –esto se correspondería con la generatividad de las preguntas formuladas–, como también la del estudio y de la investigación, del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica, y de las cajas negras y cajas claras. El trabajo en clase, desde el primer día del ciclo escolar, fue responder las preguntas relativas al punto de equilibrio. No se introdujo la pregunta como una “aplicación” de algo estudiado en clases anteriores. Esto provocó cierto desconcierto en los estudiantes, ya que no sabían con qué nociones matemáticas ni microeconómicas podrían responderse las preguntas. Esta “incertidumbre” conduce a buscar información útil y a formular preguntas sobre los saberes “matemáticos” y “microeconómicos” que

son necesarios estudiar para responder las preguntas (dialéctica del estudio y de la investigación). La dialéctica del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica, al igual que la de las cajas negras y cajas claras, fueron puestas en marcha en la gran mayoría de las clases. Ambas dialécticas están fuertemente asociadas, ya que la realización de un análisis y una síntesis requiere determinar un nivel de gris óptimo del estudio de las obras.

La dialéctica media-medio resulta en menor ocurrencia que las mencionadas anteriormente. Habría aquí un resultado llamativo, pues la dialéctica media-medio es considerada un elemento clave en la reforma epistemológica-didáctica basada en los REI (Bosch, Gascón, 2007, Barquero, Bosch, Gascón, 2011). Consideramos que este resultado es producto de la clasificación disjunta de las dialécticas y que, en realidad, los indicadores de una de las dialécticas podrían ser también indicadores de otra. En cambio, la importancia de la dialéctica del estudio y la investigación (preguntas y respuestas), así como la del individuo y colectivo, resulta confirmarse en nuestros resultados, puesto que son dos de las dialécticas con mayor ocurrencia. Con esto es posible reconocer la interrelación entre las distintas dialécticas ya que, por ejemplo, toda propuesta de nuevas cuestiones o de búsqueda de respuestas externas o creación de nuevas soluciones son elementos que constantemente se incorporan en el medio de los estudiantes y de la comunidad. Así podemos aludir a que la menor ocurrencia de la dialéctica medio-media podría depender de la forma como se decida describir y medir la aparición de cada una de las dialécticas. En nuestro caso, el considerarlas independientemente podría correr el riesgo de simplificar su propia dinámica interna, estableciendo así cierta jerarquía entre cada una de las dialécticas y otorgándole a la dialéctica del estudio y de la investigación un papel primordial.

Como se ha mencionado, el objetivo de este trabajo no consistió en describir detalladamente la dinámica del proceso de estudio del REI, sino que se propuso avanzar hacia una fase posterior de análisis. Es decir, luego de la descripción, análisis y evaluación de la implementación del REI, nos propusimos identificar y describir un conjunto de indicadores didáctico-matemáticos que permitirían establecer el funcionamiento de cada una de las dialécticas –no solo su descripción– y al mismo tiempo determinar el poder generador de la pregunta generatriz y sus derivadas. Conviene mencionar que el interés de este trabajo en contar las apariciones de las dialécticas radica en la posibilidad de cuantificar cada una de ellas, y que esto no implica un desprecio en un análisis cualitativo. Nos proponemos avanzar en este sentido, pues un análisis cualitativo

nos permitiría evidenciar qué ha hecho posible o qué ha restringido la aparición o no de las diferentes dialécticas. Aunque hemos mencionado algunos aspectos en la sección anterior, sería deseable avanzar el análisis cualitativo con el objetivo de precisar qué particularidades de cada cuestión parecen influir en la aparición o no de las dialécticas, por ejemplo que las preguntas sean completa o parcialmente formuladas por el profesor o los alumnos, que hagan referencia al estudio de aspectos conocidos, poco o nada conocidos por los estudiantes, que sean preguntas fuertemente codisciplinares, etcétera.

Las preguntas de investigación que nos planteamos fue ¿cómo determinar, a partir de los resultados de la implementación de un REI, un conjunto de indicadores didáctico-matemáticos para cada una de las dialécticas? y ¿qué condiciones (y restricciones) nos aporta el análisis de las dialécticas sobre el funcionamiento de los REI? Para responder nuestras preguntas de investigación, a los efectos del análisis de datos y con la intención de construir tales indicadores, las dialécticas fueron consideradas de forma independiente. Esta decisión, correspondiente al nivel de análisis, generó ciertas dificultades, ya que en algunos casos resultó difícil delimitar cuándo un indicador corresponde, por ejemplo, a la dialéctica del paracaidista y de las trufas o a la de las cajas negras y cajas claras. A su vez podría ser la razón por la cual la dialéctica media-médios, vital en una enseñanza por REI, tuvo menor ocurrencia que, por ejemplo, la de las preguntas y respuestas.

Consideramos que, además, estas dificultades pueden ser producto de la poca utilización de las dialécticas para describir y analizar este tipo de experimentaciones y aquí radica, entendemos, la aportación metodológica y teórica más importante de este trabajo: contribuir en una fase metodológica y de análisis poco explorada. Si bien los indicadores presentados en la sección de resultados corresponden a esta experimentación en particular, y han sido desarrollados bajo las condiciones y limitaciones del REI implementado, podemos concluir que la generatividad de una pregunta y la ocurrencia de los indicadores de las dialécticas están vinculados entre sí de forma directa: cuanto más generativa es una pregunta, es posible construir más indicadores de las dialécticas. Se espera avanzar en la construcción, amplitud y generatividad del conjunto de indicadores –los resultados aquí presentados corresponden a sus primeras formulaciones y en absoluto son definitivos–, extendiéndolos a partir de futuras implementaciones, propias y de otros investigadores. El trabajo de Salgado, Otero y Parra (2017) aporta en este sentido.

Por último, queremos indicar que el carácter exploratorio de esta investigación deja una variedad de preguntas que aún no poseen respuestas. Por ejemplo: ¿Cómo construir indicadores que permitan determinar dos o más dialécticas interrelacionadas entre sí? ¿Cómo ampliar este conjunto de indicadores incorporando las dimensiones topogénesis, mesogénesis y cronogénesis? ¿Cómo construir un conjunto de indicadores que permita describir cualquier enseñanza por REI?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*, 16(3), 5-28.
- Barallobres, G. (2016). Diferentes interpretaciones de las dificultades de aprendizaje en matemática. *Educación Matemática*, 28(1), 39-68.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.
- Barquero, B. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 339-352.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: los Recorridos de Estudio e Investigación. En: M. Bosch, J. Gascón, J., A. Ruiz Olarra, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y Larguier, M. (eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "Talleres de Prácticas Matemáticas" a los "Recorridos de Estudio e Investigación". En: A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, G. y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 55-91). Uzès: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Bouza Álvarez, F. J. (1990). Reverenter Absolvit: Nadie ha inventado la Historia. *Manuscrits: Revista d'Història Moderna*, 8, 87-104.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 39-115.
- Bueno, G. (1972). Sobre dialéctica. En: G. Bueno (ed.), *Ensayos materialistas* (pp. 371-389). Madrid: Taurus Ediciones, S.A.

- Chevallard, Y. (2002). Les TPE comme problème didactique. Consultado el 11 de agosto de 2016 en <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Consultado el 10 de septiembre de 2016 en <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (2009). Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. Consultado el 15 de marzo de 2017 en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactique_PER.pdf
- Chevallard, Y. (2012). *Journal du Séminaire TAD/IDD. Éléments de didactique du développement durable. Notes & documents*. Consultado el 3 de febrero de 2016 en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf
- Chevallard, Y. (2013a). Enseñar matemática en la Sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma. *REDIMAT*, 2(2), 161-182. DOI: <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2013.631>
- Chevallard, Y. (2013b). Journal du Séminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Séance 1. Consultado el 14 de marzo de 2017 en <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tadidd-2012-2013-1.pdf>
- Chevallard, Y. (2014). Sur les praxéologies de recherche en didactique. Séance 2. Consultado el 14 de marzo de 2017 en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_2.pdf
- Corica, A. y Otero, M. R. (2016). Diseño e Implementación de un curso para la Formación de Profesores en Matemática: una propuesta desde la TAD. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 763-785. DOI: 10.1590/1980-4415v30n55a22
- Costa, V. A., Arlego, M. y Otero, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 7(1), 20-40.
- Donvito, A., Otero, M. R. y Sureda, P. (2014). Actitudes de la pedagogía de la investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. *Ikastorratza, e-Revista de Didáctica*, 12, 1-27.
- Fonseca, C. (2010). Una posible “razón de ser” de la diagonalización de matrices en ciencias económicas y empresariales. En: A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 595-614). Montpellier: IUFM de Montpellier.
- Fonseca, C. (2011a). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación. *Educación Matemática*, 23(1), 97-121.

- Fonseca, C. (2011b). Los Recorridos de Estudio e Investigación en las escuelas de ingeniería. *Educação Matemática Pesquisa São Paulo*, 13(3), 547-580.
- Fonseca, C. (2011c). Recorridos de Estudio e Investigación: una propuesta dentro de la teoría antropológica de lo didáctico para la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. *Paradigma*, 32(1), 55-70.
- Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. (2010). Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. En: M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Languier (eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 671-684). Bellaterra: CRM Centre de Recerca Matemàtica.
- Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5(3), 673-698.
- Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2015). Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Relime*, 18 (2), 245-275. DOI: 10.12802/relime.13.1824
- Oliveira Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* (Tesis doctoral). Consultada el 10 de octubre de 2016 en <http://www.atd-tad.org/>
- Olleta, J. E. (1997). *Filosofía contemporánea*. Madrid: Edinumen.
- Otero, M. R., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V. C., Sureda, P. y Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Tandil: Dunken.
- Otero, M. R., Gazzola, M. P., Llanos, V. C. y Arlego, M. (2016). Co-disciplinary Physics and Mathematics Research and Study Course (RSC) within Three Study Groups: Teachers-in-training, Secondary School Students and Researchers. *Review of Science, Mathematics and ICT Education*, 10(2), 55-78.
- Parra, V., Otero, M. R. y Fanaro, M. (2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la escuela secundaria: resultados de una implementación. *Revista Bolema*, 27(47), 847-874.
- Parra, V., Otero, M. R. y Fanaro, M. (2014). Enseñanza por Recorridos de Estudio e Investigación en la escuela secundaria: la dialéctica del estudio y de la investigación. *Ikastorratza, e-Revista de Didáctica*, 13, 1-18.
- Parra, V., Otero, M. R. y Fanaro, M. (2015). Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario. Preguntas generatrices y derivadas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 69, 1-10.
- Quiroz Rivera, S. y Rodríguez Gallegos, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática*, 27(3), 45-80.

- Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. En: L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 677-704). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Ruiz-Higueras, L. y García García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Relime*, 14(1), 41-70.
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.
- Salgado, D., Otero, M. R. y Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional*, 56(1), 84-108.
- Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En: A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M., Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp.835-857). Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.