

Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso

A Math Class about Word Problems in a one-room School. A Case Study

Laura Reséndiz¹

David Block²

José Carrillo³

Resumen. Con el propósito de contribuir al conocimiento de las prácticas de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas multigrado, en el presente artículo se analizan las condiciones que una maestra, con experiencia en este tipo de escuelas, crea para favorecer la resolución de problemas, con alumnos de los seis grados de primaria simultáneamente. El estudio se realizó con herramientas metodológicas que proceden de la investigación en didáctica de las matemáticas, especialmente para el estudio del medio, y de la etnografía, al considerar los saberes docentes que sustentan tales prácticas. El análisis ayudó a identificar múltiples recursos utilizados por la maestra: problemas con distinto nivel de complejidad generados mediante el manejo de variables didácticas; la diversificación de las fuentes de ayuda al fomentar las interacciones entre los alumnos; varias formas de optimizar el tiempo, entre otros. Así mismo se pusieron en evidencia algunas tensiones entre lo que la maestra se proponía hacer y lo que lograba.

Palabras clave: *problemas aritméticos, escuela unitaria, medio (milieu).*

Fecha de recepción: 19 de octubre de 2016. **Fecha de aprobación:** 30 de marzo de 2017.

¹ Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav, México, lresendi@cinvestav.mx

² Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav, México, dblock@cinvestav.mx

³ Universidad de Huelva, España, carrillo@uhu.es

Abstract. With the aim of contributing to the knowledge of mathematics teaching practices in multigrade schools, this paper analyzes the conditions a teacher with experience in this type of school creates to facilitate problem solving, with students in the six primary grades simultaneously. The study was carried out with methodological tools that come from research in the teaching of mathematics, especially in the study of the milieu and ethnographic elements, when considering the didactic knowledge that underpins such practices. The analysis helped us to identify multiple resources used by the teacher: problems with different levels of complexity generated by the use of didactic variables; the diversification of sources of support by encouraging student interaction; various ways of optimizing the use time, among others. At the same time, certain tensions were revealed between what this teacher intended to do and what she actually achieved.

Keywords: *Arithmetic problems, one-room school, milieu.*

INTRODUCCIÓN

Las escuelas multigrado son aquellas en las que un docente atiende, simultáneamente, alumnos de dos, tres o hasta seis grados. Se ubican, en su mayoría, en zonas rurales e indígenas, en pequeñas comunidades de alto nivel de marginación. Su tamaño es reducido (en general, menos de 30 alumnos) y carecen de la infraestructura y de los recursos humanos de las primarias generales en México. Estas condiciones suelen agravarse por la falta de una política sostenida sobre la educación multigrado en México.

Entre las dificultades específicas de los procesos de enseñanza y aprendizaje en este tipo de escuelas se señalan: la reducción de tiempos de enseñanza debido a que los profesores también realizan funciones directivas e incluso de intendencia; el predominio de los métodos "tradicionales" de enseñanza; la falta de una propuesta curricular específica para esta modalidad (Arteaga, 2011; Fuenlabrada, Weiss, 2006; Mercado, 1999; Popoca *et al.*, 2006).

No obstante las dificultades señaladas, la modalidad multigrado constituye la única opción para llevar educación a un gran número de comunidades (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2014).⁴ Por otra parte,

⁴ En el periodo 2012-2013, había 43,673 escuelas multigrado, que representaban el 44% de las escuelas primarias del país, y atendían al 9.1% (1,347,939) del total de alumnos de primaria. Estas cifras han sido constantes a lo largo de una década (pp. 305 y 312).

las investigaciones citadas también han destacado características que pueden ser favorables para el aprendizaje, como la posibilidad que tienen los alumnos para aprender unos de otros y la flexibilidad que existe para asignar tareas a cada alumno en función de su nivel de desempeño.

El presente estudio, es parte de una investigación en curso⁵ desarrollada en el Departamento de Investigaciones Educativas, cuyo interés es identificar y analizar estrategias para la enseñanza de las matemáticas desarrolladas por maestros con experiencia en escuela multigrado. Además de contribuir a la comprensión de la complejidad de la enseñanza en este tipo de escuelas, se espera que este conocimiento sea útil para la práctica de otros docentes, así como para los procesos de formación.

En el artículo reportaremos las condiciones didácticas que implementa una maestra para trabajar una clase sobre la resolución de problemas aritméticos, en una escuela multigrado unitaria, así como algunos de los motivos que subyacen a sus decisiones.

Para preparar la clase, la maestra consultó, como es su costumbre, diversos materiales curriculares oficiales de México, actuales y de períodos anteriores. En todos ellos se propone que los problemas no solamente sean un espacio en el que los alumnos *apliquen* los conocimientos previamente enseñados, sino que, antes de ello, constituyan el primer encuentro con dichos conocimientos. En las clases de la maestra de la que nos ocupamos aquí, identificamos, efectivamente, ambas dimensiones en el uso de los problemas, pero en el presente trabajo nos interesa centrar la atención en la práctica de plantear problemas numéricos de aplicación.⁶ La importancia de estudiar dicha práctica radica en que sigue siendo, en general, la más conocida y frecuente en el aula de escuela primaria (Ávila, 1991; Block, Dávila, Martínez, 1995; Mendoza, 2004), debido, entre otras razones, a la necesidad que perciben los docentes de consolidar estrategias y técnicas de resolución de problemas y de los algoritmos implicados.

REFERENTES TEÓRICOS

Para analizar la práctica docente de una maestra de escuela multigrado utilizamos herramientas conceptuales y metodológicas de dos marcos teóricos: de la

⁵ "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria multigrado", coordinada por el doctor David F. Block Sevilla (2010 a la fecha).

⁶ Con respecto al otro tipo de problemas, para introducir un contenido, en Muñoz (2013) se analizan algunas formas que la maestra utiliza para introducir la noción de volumen.

didáctica de las Matemáticas, especialmente de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y de la etnografía.

La TSD, desarrollada por Guy Brousseau, surge dentro de una corriente pedagógica constructivista. Dicha teoría caracteriza los conocimientos matemáticos a partir de las situaciones en las que éstos se usan. Desde esta perspectiva, el aprendiz produce conocimiento como resultado de la adaptación a un “medio” antagonico⁷ con el que interactúa. En el aula, este *medio* está compuesto por las condiciones que enfrenta el alumno, mismas que lo llevan a actuar, “formular lenguajes y conceptos, cuestionar la validez de lo que se produce, etc. (...) está concebido para producir una confrontación con el alumno y que resista a sus primeras interacciones (...) es la colección de objetos, problemas, textos, en suma los recursos que provee el profesor (...)” (Fregona, Orús, 2011, p. 17 a 21). También incluye las acciones que permiten instalarlo en la clase para su estudio.

(...) en la noción de “medio” se incluye el cuestionamiento del objeto matemático a enseñar; se lo recorta y vincula con otros saberes, se elabora la consigna con la cual se planteará la actividad en la clase que explicitará de alguna manera las responsabilidades del alumno y docente con respecto al objeto de estudio; se organiza la clase y se administra el tiempo en función de lo que es posible producir en torno a ese objeto de estudio, se favorecen ciertas interacciones de los alumnos en búsqueda de ciertos procesos de aprendizaje, etcétera (p. 19).

El responsable de organizar este *medio* en el aula es el docente, quien es el encargado de favorecer que el alumno entre en relación con los saberes culturales que la sociedad considera necesarios (Brousseau, 1986 en Fregona, Orús, 2011).

Las herramientas que tomamos de la TSD nos ayudaron a analizar las situaciones propuestas por la maestra: el conocimiento matemático implicado, las características didácticas, las interacciones entre los actores y la gestión de la clase.

Como un apoyo para analizar la tarea cognitiva que el problema implica, retomamos el concepto de *campo conceptual de las estructuras aditivas*, el cual es considerado, por una parte, como “el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones”, y por otra, como “el

⁷ Significa que el sujeto se enfrenta a una situación con insuficientes elementos para resolverla de forma eficaz y rápida.

conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas" (Vergnaud, 1990, p. 97).

Como ya mencionamos, la maestra utiliza dos tipos de problemas, unos para introducir un conocimiento y otros de aplicación. Los primeros tienen el propósito de que los alumnos aprendan nuevas nociones al interactuar con el problema. Los problemas de aplicación que la maestra diseñó tienen la finalidad de que los alumnos movilicen nociones aprendidas con anterioridad. Houdement caracteriza a estos problemas como un texto dado a los alumnos de una situación real, en donde algunos de estos elementos están cuantificados, y el propósito del problema es cuantificar otros, apoyándose en el texto del problema. Estos "exigen poner en marcha y reproducir técnicas aritméticas (cuatro operaciones, reglas diversas...) o el cálculo rápido" (2013, p. 52).

Por otra parte, varios investigadores (Robert, 2007; Roditti, 2003; Rockwell y Mercado, 2003, entre otros) han demostrado, desde distintas perspectivas, que las *prácticas docentes* son complejas; en ellas intervienen condicionantes que van más allá del conocimiento pedagógico o del contenido matemático que el profesor posea –sin menoscabo de la importancia de éste–, tales como las de tipo institucional, personal y social. En este estudio compartimos la concepción de maestro, considerado desde la perspectiva etnográfica, como un sujeto "particular que incorpora y objetiva a su manera, prácticas y saberes de los cuales se apropiá en diferentes momentos y contextos de vida que contienen historias acumuladas por siglos" (Rockwell y Ezpeleta, 1985: 170).

Mercado (1991) señala que el trabajo de un profesor en el salón está regido por *saberes docentes*⁸ que se apropiá⁹ al llevar a cabo su tarea cotidiana de enseñanza. Estos saberes están basados en un tipo particular de conocimiento muchas veces no formulado, ni sistematizado, ni explicitado "que implica el ensayo y la solución de los problemas que el trabajo mismo plantea, en las condiciones específicas en que se presentan y en la necesaria reflexión continua que a la vez el trabajo diario impone" (p. 60). Estos saberes se nutren de su experiencia como maestro, de las relaciones sostenidas con las diferentes propuestas curriculares, de los cursos de actualización, de su

⁸ Existen otras líneas de investigación que estudian los conocimientos que el profesor utiliza para enseñar contenidos escolares de determinada disciplina (Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Shulman, 1986, Ball *et al.*, 2008 en Petrou y Goulding, 2011). Aquí optamos por considerar los saberes docentes.

⁹ La autora señala que "en el proceso de apropiación, los maestros se confrontan con los saberes del oficio que les anteceden; rechazan algunos, integran otros a su práctica y generan a su vez nuevos saberes al enfrentarse a la resolución de su trabajo en los contextos específicos en que lo realizan." (Mercado, 1991: 60).

trayectoria como alumno, de las relaciones con otros maestros o directores y con padres de familia.

Los saberes se pueden identificar en los diferentes recursos que usa el docente para lograr su tarea y pueden ser relativos a formas de organizar el trabajo del grupo, formas de involucrar a los niños en la actividad, estrategias de gestión e intervención, maneras de promover el trabajo individual, entre otros. Por lo tanto el maestro es considerado como un sujeto “constructor de conocimiento en su tarea de enseñanza” (Arteaga, 2011, p. 26).

La etnografía posibilita “indagar en el entramado de significados de las acciones humanas y conocer las lógicas que subyacen a las prácticas sociales” (Erickson, 1989; Geertz, 2002 y 2005; Rockwell, 1986 y 1987, citados en Arteaga, 2011). En este caso específico nos permitirá estudiar los saberes docentes que esta maestra pone en marcha durante una clase de matemáticas en una escuela multigrado unitaria.

En esta investigación nos interesa conocer las condiciones didácticas que la maestra implementó para propiciar el trabajo matemático del alumno en una clase, y más específicamente el *medio* que creó (Brousseau, 2007, p. 15), el cual está constituido por los problemas, las ayudas que ella brinda a los alumnos, las que suceden entre ellos y que suelen modificar el problema que se enfrenta. La construcción de este *medio* se lleva a cabo a partir de saberes docentes de la maestra de distinta naturaleza, en particular, saberes sobre el tema y su enseñanza, incluyendo las propuestas didácticas relacionadas y sobre las formas de interactuar con los alumnos, dentro de las restricciones institucionales en las que labora (la atención simultánea a alumnos de diferentes grados, los cortos tiempo laborales, la falta de propuestas curriculares, etc.). Este saber se materializa a través de las prácticas, en las decisiones que toma la maestra en el salón de clases.

METODOLOGÍA

Debido a que el interés, expresado en el proyecto general, fue conocer con cierta profundidad la forma en que docentes con amplia experiencia en escuelas multigrado organizan el estudio de las matemáticas con alumnos de los seis grados simultáneamente, se optó por estudiar varios casos¹⁰ eligiendo para ello

¹⁰ Stake (1999) menciona que el estudio de caso es “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11).

a docentes considerados expertos por sus pares, esto es, creadores de estrategias para atender a alumnos de los seis grados de primaria. En el presente texto, como ya se mencionó, daremos cuenta de las condiciones didácticas que implementa una de las docentes, en una clase sobre resolución de problemas de aplicación, con alumnos de los seis grados, destacando sus fortalezas y sus posibles puntos débiles. Intentaremos dar cuenta también de algunas de las causas que subyacen a las decisiones de la docente.

Algunas de las preguntas a las que tratamos de dar respuesta fueron: ¿Cómo organiza una maestra de multigrado, y más precisamente, de una escuela unitaria, una clase de problemas (de aplicación) en la que participan alumnos de los seis grados escolares?, ¿Qué problemas plantea?, ¿Cómo gestiona la clase?, ¿Qué ayudas brinda?, ¿Cómo evalúa las producciones de los alumnos?, ¿Qué dificultades enfrenta y cómo las resuelve?

Participantes en el estudio. La maestra trabaja en esta escuela unitaria multigrado desde el 2003 hasta la fecha. Participó en el piloteo de una propuesta curricular que se desarrolló especialmente para escuelas multigrado (Propuesta Educativa Multigrado [PEM 2005]); además coordinó la elaboración del documento "Adecuaciones curriculares para multigrado a partir del plan de estudios 2009". Al hacer la observación de clases (2011) la matrícula de la escuela estaba constituida por 24 alumnos: nueve en 1º, cinco en 2º, cuatro en 3º, dos en 4º, uno en 5º y tres en 6º. Dicha escuela se ubica en una comunidad de poco más de 150 habitantes, en el estado de Hidalgo.

Herramientas metodológicas para la obtención de los datos. Se utilizaron herramientas de corte etnográfico: se observaron, se videografiaron y se tomaron notas a mano de cada una de las seis clases por tres observadoras, con lo que se elaboraron registros¹¹ detallados. El grupo, al ser observado, muy probablemente se vio afectado en alguna medida, como ocurre en toda investigación de este tipo, por otra parte "no es válido negar nuestra presencia en el lugar con todo lo que llevamos ahí" (Rockwell, 2009, p. 49). Consideramos que esta afectación disminuyó en la medida que trascurrieron los días de observación. Además se realizaron dos entrevistas a la docente, al inicio y final de la observación; se fotografiaron algunos de los cuadernos de los alumnos y de las planeaciones de la maestra y, tiempo después, se le solicitó información, por escrito, sobre

¹¹ Cada registro se elaboró con la transcripción del material videografiado, y se complementó con las notas tomadas a mano por las observadoras.

algunos aspectos específicos de las clases. Previo a estas observaciones realizamos guiones de observación y de entrevistas.

Proceso de análisis. Una vez terminada la elaboración de registros detallados de cada clase, se hizo un primer análisis, con apoyo en las categorías iniciales de la TSD: las tareas propuestas, identificación de fases, organización y gestión de las clases, las relaciones entre maestra y los alumnos y entre los alumnos mismos. En este análisis se incluyó también información recabada de los cuadernos de los alumnos, de la planeación de clases de la docente y de las entrevistas. En un segundo momento, se escogieron ciertos aspectos para analizar con mayor profundidad, para lo cual se consultó bibliografía adicional.

Cada clase fue estudiada por tres investigadoras, cada una fue responsable de profundizar en el análisis de un ciclo (dos grados escolares). A lo largo del periodo de análisis, las tres investigadoras y el coordinador, realizamos varias reuniones para discutir y contrastar las interpretaciones que cada uno iba haciendo de los hechos observados. De esta manera, se hizo una constante triangulación de los resultados. Se recurrió también, con frecuencia, a las explicaciones y relatos que la maestra proporcionó en las entrevistas, lo que fue de gran ayuda para comprender más ampliamente las razones de ser de algunas de sus decisiones. Las entrevistas fueron centrales para el estudio de los saberes y su vinculación con el entorno institucional. En este estudio, las lecturas sobre problemas matemáticos, y sobre los trabajos de Vergnaud, en especial el de las estructuras aditivas y la categoría de campos conceptuales, que fueron fundamentales para identificar la estructura de cada problema y sus significados.

RESULTADOS

En este análisis centramos nuestra atención en las condiciones que la maestra considera para trabajar problemas de aplicación con los seis grados simultáneamente. Los resultados se organizan en función de los recursos puestos en práctica por la maestra (problemas propuestos, formas de organizar la actividad del aula y de las ayudas que se dan en el aula), en tanto que constituyen elementos en torno a los cuales podemos aproximarnos a la comprensión del *medio* que se ofrece a los alumnos y por ende a los saberes docentes de la maestra respecto a esta actividad.

I. LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

El propósito general que la maestra consideró en su planeación fue que “los alumnos resuelvan problemas matemáticos de sumas, restas, multiplicación de enteros y decimales utilizando procedimientos convencionales y no convencionales”. En los propósitos por grado escolar, puede apreciarse la centralidad de las operaciones básicas: se trata de seleccionarlas, de usarlas con determinados números, o con determinados procedimientos:

- 1º Resolver problemas que impliquen correspondencia del tipo “más n”.
- 2º Distinguir problemas aditivos y multiplicativos.
- 3º y 4º Usar el algoritmo convencional para sumar y restar números decimales hasta centésimos, al resolver problemas en contextos de medición y dinero.
- 5º y 6º Resolver problemas que impliquen multiplicar números fraccionarios y decimales por enteros.

Mediante una explicación, la maestra comunica estos propósitos a los alumnos y expresa las expectativas que tiene sobre los conocimientos que desea que utilicen; por ejemplo, en el segundo grado espera que los alumnos utilicen la multiplicación en lugar de sumas iteradas.

Maestra: (...) vamos a determinar, en el caso de segundo, si los problemas que vamos a resolver son de suma o son de multiplicación. En qué caso utilizar la suma y en qué caso utilizar la multiplicación y vamos a trabajar con primero algunos otros problemas en los que tendremos que hacer operaciones de suma y de resta y vamos a determinarlo también.

Los problemas que la maestra ofrece a los alumnos presentan una diversidad de características,¹² en cuanto a contexto, forma de presentar los datos, número de etapas y estructura semántica.

El contexto del comercio –las ventas de la papelería- es el referente de todos los problemas. La magnitud “dinero” facilitó el uso de los números decimales. Los problemas fueron vinculados con la vida de los alumnos, utilizando

¹² Si bien algunas de las variables que la maestra utiliza para generar los problemas pueden considerarse “variables didácticas”, éste no es necesariamente el caso de todas las características que identificamos, por esta razón las llamaremos características.

sus nombres y/o de otras personas de la comunidad. Por otra parte, la mayoría de los problemas planteados por la maestra corresponden a situaciones cercanas a las que los niños pueden encontrar en sus contextos.

En los problemas planteados, algunos datos están escritos en el texto del problema y otros se tienen que buscar en dos listas de productos que se encuentran pegadas en el pizarrón. Al ofrecer los datos de esta manera la situación se hace más parecida a la que se enfrenta fuera de la escuela y, posiblemente también, más atractiva para los alumnos; por otra parte, el texto se vuelve más corto ya que se pueden omitir de éste las cantidades de cada producto así como el precio unitario.

La maestra planteó problemas de una etapa y, más frecuentemente, de varias etapas (Puig y Cerdán, 1988).¹³ Entre los problemas de una etapa, el tipo más utilizado es “isomorfismo de medidas” (Vergnaud, 1997). En estos problemas se utilizan dos dominios de magnitudes y una relación funcional multiplicativa entre éstos (ver Figura 1).

Figura 1

Lápices	Precio
1	4
3	x

Problema apuntado en el pizarrón para primer grado:

Tomás compró 3 lápices. ¿Cuánto debe pagar?

Características:

Números naturales (pequeños),

Un dato se debe buscar en la lista de precios (4 pesos),

El procedimiento que busca la maestra es la suma iterada.

La maestra fue complejizando este problema de una etapa al cambiar el tamaño y el tipo de las cantidades: en primer grado plantea cantidades pequeñas

¹³ Los problemas de “una etapa” son aquellos compuestos por una operación y por lo tanto, dos datos. Los problemas de “más de una etapa” contienen más de dos operaciones y por lo tanto más de dos datos. Además los distingue el tipo de decisiones que debe tomar el alumno; mientras que en el primer tipo sólo tiene que decidir qué operación resuelve el problema, en el segundo tiene que decidir “qué operaciones, entre qué cantidades y en qué orden”.

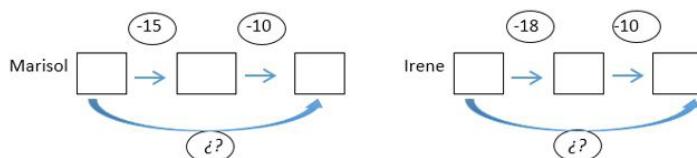
(4 pesos, 3 lápices) aunque espera que los alumnos lo resuelvan con suma, en cuarto grado utiliza números más grandes y decimales (24×4.90) y en sexto incluye un número fraccionario ($9 \times 1/4$).

Con respecto a los problemas de varias etapas, en algunos, la resolución implica operaciones de un solo tipo (todas las operaciones son de suma) y en otros implica dos operaciones distintas (multiplicación y resta), se observó también un cambio en los rangos numéricos. A continuación presentaremos un ejemplo de cada uno.

A los alumnos de primer grado se les plantearon dos problemas de dos etapas (dos operaciones cada uno) que, al parecer, resultaron demasiado difíciles. La estructura aditiva del siguiente, corresponde a dos transformaciones que se componen para dar lugar a una tercera (Vergnaud, 1997):¹⁴

Marisol gastó 15 pesos en la papelería e Irene gastó 18, si además compraron, cada una, unas tijeras de 10 pesos ¿Cuánto deben pagar? (Ver Figura 2).

Figura 2



La complejidad de este problema radica en parte en que las cantidades no se tienen, pues se gastaron, corresponden a números relativos negativos. Por otra parte, la formulación misma del problema es poco familiar, pues dice que cada niña “gastó”, sin que eso corresponda al total de lo comprado. La resolución de este problema fue larga y difícil.

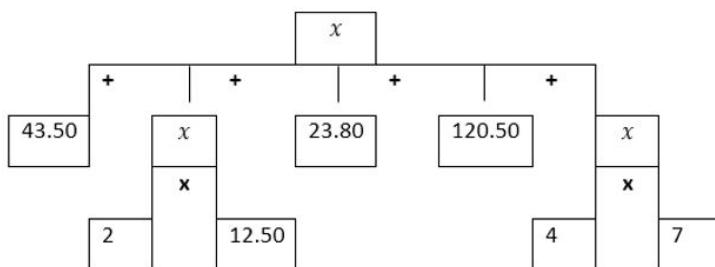
En tercero propuso el siguiente problema, que se podría resolver realizando sumas o aplicando una multiplicación y una suma:

Doña Libia vendió los siguientes productos durante el día: un libro de cuentos, 2 refrescos, una caja de colores, un balón de fútbol y 4 chocolates ¿Cuánto reunió por la venta del día?

¹⁴ Vergnaud utiliza operaciones con dos datos en todos los ejemplos ofrecidos en la caracterización de las estructuras aditivas.

En caso de que se usen multiplicación y suma, el problema implicaría relaciones multiplicativas de proporcionalidad simple y una relación aditiva “parte-parte-todo”. (Ver Figura 3)

Figura 3



Otras características manipuladas por la maestra para complejizar los problemas fueron el tamaño y la naturaleza de los números (enteros, decimales y fraccionarios); la inclusión de palabras que no sugieren la operación en el texto de un problema aditivo, por ejemplo, “gastó” en un problema que implica sumar; el planteo de problemas abiertos que admiten diversas respuestas y de problemas que se responden a veces con un dato no numérico (“sí” o “no”). Destaca también, en tanto consideración interesante en el aula multigrado, el que la maestra propusiera un problema similar en dos grados diferentes, con la expectativa de que los alumnos utilizaran procedimientos distintos.

Cuando se le preguntó acerca de los criterios que utilizó para elegir los problemas, la maestra mencionó el tipo de operación, la naturaleza de las cantidades (naturales, fracciones o decimales), el número de operaciones, y el hecho de que los datos pueden estar o no en el enunciado. No mencionó, en cambio, los tipos de relaciones entre los datos que nosotros utilizamos para analizar los problemas (utilizando categorías de Vergnaud). No obstante, la diversidad en el nivel de dichas relaciones deja suponer una intención en ese nivel, aunque ésta no se haga explícita y quizás no esté totalmente consciente.

Esta diversidad de problemas propuesta por la maestra, resultó relevante desde el punto de vista del aprendizaje, mostró ser, en casi todos los casos, pertinente, es decir, que si bien les representaban un reto, los alumnos de los distintos niveles del aula multigrado tenían los elementos para abordarlos y resolverlos. En su selección y diseño, la docente dejó ver un conocimiento amplio

del currículo, en particular, del contenido que se debe enseñar en cada grado. Las múltiples variables de los problemas que fueron manipuladas para generar tal diversidad también dan cuenta de un conocimiento de didáctica de las matemáticas. Al respecto, coincidimos con Arteaga (2011) cuando, refiriéndose a otra profesora de escuela multigrado, afirma que “despliega una serie de saberes para orquestar simultáneamente los contenidos de cada grado” (p. 10).

II. LA ORGANIZACIÓN DE LA CLASE

La maestra destinó una de las tres clases observadas sobre aritmética a la resolución de problemas de aplicación. En sus clases identificamos varios recursos que dan cuenta de su experiencia y conocimiento para organizar el trabajo en el aula multigrado. Desde el punto de vista del propósito de crear condiciones favorables para que los niños aprendan, la eficacia de dichos recursos es heterogénea: algunos parecen funcionar bien, mientras otros se revelan problemáticos. A continuación destacamos algunos de los que nos parecieron más importantes.

La distribución de los alumnos. Los alumnos estaban organizados por filas en función del grado escolar que cursaban. La maestra expresó que esta organización le facilitaba la comunicación con ellos al momento de dar indicaciones y/o en la confrontación, ya que así aseguraba que todos los alumnos la escucharan o, por lo menos, la observaran. Esta distribución propició el trabajo individual, pero no impidió totalmente que hubiera interacciones entre los alumnos, pues éstos con frecuencia hablan entre ellos, ya sea desde su lugar o desplazándose.

Fases a lo largo de la clase. La clase comenzó con una actividad inicial en la que participaron alumnos de los seis grados y siguió con actividades por grupo o por ciclo,¹⁵ éstas últimas fueron aplicadas en dos momentos. En el primero, en el cual se centra este trabajo, la maestra planteó en cada grado tres problemas verbales, los escribió en hojas de cartulinas y los pegó en el pizarrón. En un segundo momento, a los alumnos de primer grado y de tercer ciclo (5º y 6º) les planteó operaciones sin contexto, y a los de tercero y cuarto grados les pidió que inventaran problemas.

¹⁵ La maestra intenta llevar a cabo las clases de matemáticas con base en la PEM 2005: una actividad inicial, seguida de actividades diferenciadas por grado o por ciclo y, después una evaluación de la actividad.

En ambos momentos organizó el trabajo de los alumnos de 1º a 4º por grados, y de 5º y 6º de manera conjunta, por ciclo. La maestra comenzó esta actividad dando la consigna a cada grado o ciclo. Después los alumnos debían resolver los problemas de forma individual, consultando con la maestra las dudas que tuvieran. Durante esta consulta individual, la maestra aprovechó para valorar el avance de los alumnos, y en ocasiones calificar las resoluciones de cada problema. Al terminar la clase los alumnos debían dejar su cuaderno en el escritorio de la maestra para recibir una última evaluación a su trabajo.

El tiempo utilizado para resolver los problemas del primer momento fue muy diverso, algunos alumnos de segundo lo llevaron a cabo entre 15 y 20 minutos, mientras que a los de primero les llevó 1 hora con 25 minutos (aproximadamente).

*La actividad inicial.*¹⁶ Los alumnos de los seis grados participaron en esta actividad. La maestra hizo una introducción al tema, en la que mencionó que el propósito era “reforzar lo que se ha estado viendo”, y mediante un diálogo con los alumnos bajo la modalidad pregunta-respuesta, expuso algunas razones de por qué era necesario adquirir este conocimiento: “los beneficios de saber usar operaciones aritméticas al momento de realizar una compra”. Al parecer, tiene la idea de que una función de los problemas de aplicación es dar significado a las operaciones “básicas” que ya ha enseñado, lo cual constituye un punto de vista frecuente entre los maestros (Block *et al.*, 1995).

Maestra: Si vamos a la tienda, ¿qué cuentas podemos hacer? ¿qué pasaría si nosotros no supiéramos cómo calcular lo que debemos de pagar?.. Además de las tiendas, pues en muchos lugares necesitamos hacer uso de las matemáticas para poder resolver las actividades de nuestra vida diaria. Entonces vamos a trabajar un poco con los precios de productos en las tiendas, en este caso va a ser en la papelería.

La consigna de la actividad por grado. Una vez explicada la finalidad del tema, la maestra solicitó a un alumno de segundo grado la lectura de los precios de la primera lista de productos, después dio las indicaciones a los alumnos de 1º y 2º grados. Continuó con la lectura de precios y las indicaciones a los alumnos de los demás grados.

¹⁶ Las actividades iniciales que desarrolla esta maestra suele usarlas para explicar la finalidad de la actividad, ofrecer alguna información extra del contenido matemático o realizar alguna actividad con todo el grupo (Block, Ramírez, Reséndiz, 2013).

Al parecer, la maestra consideró que estas indicaciones fueron insuficientes y decidió aclarar el primer problema en cada uno de los grados. La amplitud de esta aclaración varió dependiendo del grado en que se realizó: con los alumnos de primer grado llegó hasta la solución del problema, mientras que con los de quinto y sexto solo lo leyó. Así, cuanto mayores son los alumnos, mayor parece ser el grado de libertad que tienen en la resolución de la tarea.

En la entrevista, la maestra señaló que prefiere comenzar brindando las instrucciones a los alumnos de primer grado y dejarlos trabajar mientras explica con más tranquilidad a los otros niños y, regresar con los de primer grado ya que requieren más apoyo.

Los problemas anotados en carteles. La maestra acostumbraba anotar las instrucciones de las actividades, en este caso los problemas, en hojas grandes que pegaba en el pizarrón formando una especie de ficha de trabajo, con el fin de ahorrar tiempo de clase y, también, para permitir que los alumnos iniciaran su trabajo sin tener que depender de las indicaciones. Los alumnos sabían que tenían que copiar en su cuaderno y resolver las tareas que les correspondían.

La copia. La maestra utiliza la copia como un dispositivo que le permite atender a todos los alumnos, mientras unos copian ella tiene tiempo para explicar o atender a niños de otros grados. Sin embargo, en esta sesión, y en algunas otras, esta actividad resultó ser muy larga y pesada para los alumnos, especialmente para los de primer grado. El texto que debían escribir los alumnos de primero tenía 60 palabras repartidas en 17 líneas.

La complejidad de esta tarea radica en que varios alumnos, en el momento de la observación, no dominaban la escritura y lectura de la lengua así que hacían la copia letra por letra. También influyen factores como el deseo de escribir con letra bonita e incluso detalles, como el que otros niños obstruyen la visibilidad del texto pegado en el pizarrón. Continuamente se escucha que piden permiso, "comper maestra", "comper Mario".

Del tiempo de trabajo matemático para los niños de primer grado destinado a la resolución de problemas, 70%, aproximadamente, se destinó a la copia de los problemas (60 min). ¿Qué otro mecanismo se podría utilizar que permita a la maestra mantener a los alumnos ocupados y así contar con el tiempo suficiente para atenderlos de manera individual, o por grado, y que a la vez sea más interesante para los alumnos y para su aprendizaje de conocimientos matemáticos?

Los recursos (o saberes docentes) anteriores constituyen condiciones –con distintivo grado de potencial para favorecer el aprendizaje–, que la maestra crea

para hacer posible la realización de una clase de problemas para alumnos de los seis grados escolares simultáneamente.¹⁷ En los comentarios finales, volveremos sobre ello.

III. AYUDAS DURANTE EL PROCESO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS¹⁸

A continuación analizamos otro recurso, importante desde el punto de vista de la constitución del *medio* que finalmente enfrentan los alumnos: el de las ayudas que reciben de la maestra así como el de las que se dan entre ellos mismos, para resolver los problemas.

A) LAS AYUDAS DE LA MAESTRA A LOS ALUMNOS. Las ayudas otorgadas por la maestra tenían diferentes funciones: aclarar el problema (qué se pregunta, qué se sabe), comprobar o recordar el procedimiento, y verificar el resultado. Se pudo apreciar, en algunas ocasiones, un esfuerzo de la maestra por no resolver lo esencial del problema a los alumnos, si bien esto no siempre se logró. A continuación veremos algunas de estas formas de ayuda.

Ayuda para aclarar el problema. En un primer momento Berenice, de segundo grado, acude con la maestra para que le ayude a aclarar el problema. La información ofrecida por la maestra es muy parecida a la que da a otros alumnos: ella lee el problema, identifica los datos (los cuales no estaban todos en la redacción del problema) y pregunta a la alumna por lo que se necesita hacer (la operación).

Berenice: (Lee en voz muy baja) “El dueño de la papelería vendió nueve gomas, ¿cuánto debe cobrar?”

Maestra: ¿Qué cuenta tendremos que hacer? Vendió nueve gomas, ¿cuánto cuestan las gomas?, ¿qué cuenta harías para resolverlo?...

Berenice: (Silencio)

¹⁷ Arteaga, 2011, menciona que “los maestros de escuela multigrado ponen en juego una serie de saberes docentes para atender la heterogeneidad de su grupo”. Los recursos mencionados arriba son un ejemplo de estos saberes.

¹⁸ En Block, Ramírez y Reséndiz (2015) se pueden ver las ayudas identificadas durante los seis días de observación.

Maestra: A ver, piénsale... A ver, hazlo y me vienes a decir (Berenice regresa a su lugar).

La maestra intenta proporcionar ayudas que no comuniquen el procedimiento de resolución. Al parecer, considera que es suficiente con releer el problema y plantear preguntas que centran la mirada en los datos y la operación que lo resuelve ("¿Qué cuentas tendremos que hacer?", "¿Cuánto cuestan las gomas?"). En este ejemplo no espera a que la alumna responda las preguntas en su presencia, sino que propicia que ella busque por sí misma la solución, pidiéndole que regrese a su lugar ("A ver, piénsale").

Por otra parte, el pedirle que regrese para revisarle su trabajo una vez más ("y me vienes a decir"), abre la posibilidad de que los alumnos puedan consultarla todas las veces que consideren necesario. Este hecho probablemente disminuye la ansiedad en los alumnos pero quizás también aumenta la dependencia de las revisiones por parte de la maestra, con lo que podría disminuir la autonomía en el trabajo matemático, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ayuda para determinar el procedimiento. El siguiente ejemplo es la interacción entre la maestra y Sergio, un alumno de tercer grado, al resolver un problema de varias etapas. El problema es el siguiente: *María tiene un billete de \$50.00. Si compra una caja de colores y un chocolate. ¿Cuánto le sobra?*

(Sergio tiene lo siguiente en su cuaderno)

$$\begin{array}{r} 50.00 \\ - 23.80 \\ \hline 7 \\ \hline 27.20 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{El costo de una caja de colores}) \\ (\text{El costo de un chocolate}) \end{array}$$

Maestra: (Revisa el cuaderno de Sergio) A ver, primero le restaste, ¿sí? A ver, una caja de colores. ¿Cuánto cuesta una caja de colores? (La maestra se acerca al pizarrón para ver el cartel de precios junto con Sergio, le señala algunos productos). Un chocolate. ¿Cuánto habrá gastado en estas dos cosas? ¿No será necesario saber primero cuánto gastó en estas dos cosas?

La maestra cuestiona el procedimiento de Sergio. Éste sin embargo era correcto (al parecer él pretendía restarle a los 50 pesos el costo de cada producto: 50 menos 23.80, y a ese resultado, restarle 7), pues lo mismo da sumar primero los precios de lo que se gasta y luego restar el resultado del monto con el que se paga, que ir restando de dicho monto cada producto. A través de la pregunta

“¿no será necesario saber primero cuánto gastó en estas dos cosas?”, induce a Sergio a cambiar su estrategia. Sergio vuelve a requerir de la ayuda de la maestra seis veces más, a lo largo de las cuales ella le va indicando qué operación debe hacer primero y cuál después en este problema. Esto hace que disminuya la tarea matemática planteada originalmente al alumno, dejándole a cargo la escritura y la realización de las operaciones. Al final, Sergio termina llorando. ¿Fueron demasiados intentos fallidos para él? Parece que, en la dinámica de asesorías puntuales, individuales, la maestra no siempre puede comprender la lógica de las resoluciones, el origen de los errores, y poder dar así una ayuda más adecuada.

Cuando la maestra da ayudas a todos los alumnos de un grado juntos y no individualmente, utiliza el mismo recurso (relee el problema y centra la atención en las operaciones y en los datos del problema), pero echa a andar otras formas de corregir los errores que no se vieron en las ayudas individuales: apela al conocimiento de sus compañeros de grado al preguntarles si están de acuerdo con el procedimiento y a veces resuelve el problema con el procedimiento incorrecto para que los alumnos identifiquen el error.

Ayudas “de principio a fin” (exhaustiva). Este tipo de ayuda se presentó en dos ocasiones con los alumnos de primer grado. En ambos casos la maestra fue más allá de aclarar el problema. En el primer caso ella dirigió la identificación de la operación y la resolución de ésta mediante preguntas. En el otro, indicó dónde y cómo escribir la operación y dejó a cargo de los alumnos realizarla. El siguiente ejemplo corresponde a este último caso.

Se trata de resolver el segundo problema para primer año (“Marisol gastó 15 pesos en la papelería e Irene gastó 18, si además compraron cada una unas tijeras de 10 pesos, ¿cuánto deben pagar?”) Tras un arduo trabajo de la maestra y los alumnos para escribir los nombres de las protagonistas del problema en su cuaderno, la maestra dirigió la respuesta por medio de preguntas, sugerencias, o señalamientos silenciosos. Veamos algunos fragmentos de esta interacción:

Maestra: ... A ver, ¿Marisol cuánto gastó ya?

Tomás: 10 pesos

Maestra: ¿Diez? (señala algo en el cuaderno de Erick) 15, apunta el 15. (Los niños y la maestra ven qué está haciendo Erick) ¿Ya lo tienes?

Tomás: ¿Nada más es el uno y cinco?

Maestra: (No contesta pues está viendo qué hace Erick. Cuando el alumno termina de escribir la maestra dice) además compró una tijeras que le costaron 10... ¿Qué tendremos que hacer, entonces, para saber cuánto gastó?

Tomás: Sumar

Maestra: ¿Qué vamos a sumar?... (Silencio) los 15 que ya tenía...

Tomás: Sí (ve a la maestra)

Maestra: Más los... (ningún niño termina la frase) 10 que le costaron las tijeras (Tomás afirma con un movimiento de cabeza) Entonces, ¿a dónde apuntamos el número diez? (ninguno de los niños responde. La maestra señala abajo del 15) ¿en dónde?

Tomás: Aquí (señala el dedo de la maestra)

Maestra: Abajo del 15. A ver, váyanlo haciendo.

La maestra fue indicando el procedimiento a todo el grado, a través de las respuestas de un alumno, Tomás, quien siguió el discurso y la lectura de los señalamientos que le fueron dados de forma indirecta y directa (como el lugar donde debería ir el 10, o asintiendo a los señalamientos que la maestra iba haciendo).

Se observa que el intento de la maestra por no dar la solución en las ayudas se ve debilitado en el caso de los alumnos de primer grado, a quienes dirige en la selección de la operación, la escritura de ésta y, en una ocasión, en las formas de resolverla. Observamos también que, cuando el tiempo de la clase está llegando a su fin, la maestra proporciona ayudas más dirigidas a los alumnos que no pudieron resolver con ayudas previas.

B) DOS CARACTERÍSTICAS MÁS DE LAS AYUDAS BRINDADAS POR LA MAESTRA. Durante la clase se identificaron varios elementos en el proceso de resolución de problemas que influían en la dinámica de la clase y por lo tanto del aprendizaje. Estos elementos parecen ser condiciones necesarias para llevar a cabo esta actividad.

Las ayudas de forma individual. Las ayudas se llevaron a cabo de la siguiente manera: en un inicio, cuando todavía no había alumnos que pidieran apoyo porque estaban copiando o comenzando a resolver, la maestra pasaba por los lugares a revisar lo que estaban haciendo. En la medida que el trabajo avanzaba y los alumnos tenían dudas, la llamaban, o se levantaban de su lugar para ir a buscar. Los alumnos la seguían, formando una especie de nube que la acompañaba por el salón.

El hecho de trabajar en forma individual parece traer beneficios pero también inconvenientes en esta clase. Por una parte, cada alumno trabaja a su ritmo y la maestra tiene la oportunidad de conocer los problemas que enfrenta cada uno y de brindar información o confrontarlos de forma personal, como ya lo mencionamos. Pero por otra parte, parece darse una dependencia de los alumnos

a la revisión continua de su trabajo. Además, la ayuda individual permanente posiblemente no deja espacio para un trabajo en grupo con la maestra para confrontar ideas, o para dar indicaciones. ¿Habrá una forma de que la maestra pueda brindar las ayudas e identificar los aprendizajes de los alumnos al mismo tiempo, sin hacer dependientes a los alumnos de estas ayudas?

La atención simultánea a varios alumnos. Atender las dudas de varios alumnos al mismo tiempo ha llevado a la maestra a desarrollar la habilidad de entablar distintas conversaciones simultáneamente, es decir, puede estar revisando la producción de un niño, dar indicaciones a los niños de primer grado y, a la vez, regañar a aquel alumno que está haciendo travesuras, sin perder el hilo de las conversaciones. Sin embargo esta actividad también provoca que algunas ideas se vean continuamente interrumpidas.

Ayudas entre los alumnos en el proceso de resolución de problemas. Este aspecto en el aula multigrado resulta relevante dada la heterogeneidad de niveles de desempeño que existe entre los alumnos. En esta actividad identificamos casos en los que la ayuda prácticamente resuelve todo el problema y otros en las que se utiliza para constatar un resultado o un procedimiento.¹⁹

El siguiente es un ejemplo más cercano a los del primer tipo (ayuda total), de una alumna de 6º (Yésica) a un alumno de 3º (Manuel): Primero, la maestra ayudó a Manuel a identificar los precios, el tiempo que estuvo con él fue relativamente corto. Posteriormente Yésica acudió a ayudarlo para realizar la operación y escribir el resultado.

Yésica: (Ayuda a Manuel a hacer las operaciones diciéndole lo que debe ir escribiendo y posteriormente lo cuestiona para que con ayuda de los resultados que obtuvo responda las preguntas del ejercicio. Cuando Manuel se tarda en responder o contesta mal, Yésica le señala o le dice la respuesta correcta y Manuel se apresura a escribirla).

Se observó que los alumnos de sexto ofrecen la ayuda a los alumnos de otro grado cuando terminan su tarea o están esperando a ser atendidos por la maestra. Identificamos dos casos en los que Yésica dio ayuda a sus compañeros y ésta fue muy similar: identificaba la operación y la resolvía con ellos.

¹⁹ En otras clases identificamos también ocasiones en las que un alumno trataba de ayudar a un compañero sin darle la respuesta. No obstante, este tipo de ayuda no era frecuente.

También se observaron casos, principalmente entre alumnos de sexto grado, de ayudas entre ellos para comprobar un procedimiento o un resultado.

En varias ocasiones se advirtió que la maestra restringía la participación de los alumnos mayores a los menores porque consideraba que podían interferir en el aprendizaje de los más pequeños. Para disminuir el riesgo de que sucediera lo anterior, la maestra solía decirles “dejen que lo haga ella”, o bien, “lo tienes que hacer tú” y, a la vez, preguntaba a cada niño cuando habían terminado un problema: “¿cómo le hiciste?”, “¿cómo supiste que era eso?”, “¿cuál es el procedimiento que utilizaste?”

A pesar de este riesgo, la maestra promovía la ayuda entre los alumnos. En una entrevista manifestó que solía pedir a los alumnos de sexto grado que apoyaran a sus compañeros, en especial, cuando la dinámica de la clase la sobrepasaba y ellos ya habían terminado su trabajo.

COMENTARIOS FINALES

El *medio* que el maestro organiza para que los alumnos resuelvan problemas verbales de aplicación en este tipo de escuela, es distinto al que prepara un maestro en una escuela unigrado. La necesidad de considerar contenidos de los seis grados escolares, así como la complejidad de las interacciones en el seno de la clase, que hemos intentado exponer aquí, dan cuenta de ello.

Un elemento sobresaliente del *medio* que identificamos fue la variedad de problemas que la maestra implementó en esta clase y que, en general, representó un reto para los alumnos de los distintos grados. La variedad de problemas derivó, en parte, de la manipulación que hizo la maestra de ciertas características de los mismos: la naturaleza de los números, el número de operaciones, la forma en que se proporcionan los datos, entre otras.

Además de la selección, adaptación y diseño de los problemas, durante la conducción de la clase la maestra puso de manifiesto recursos para optimizar el trabajo, fruto de saberes docentes que ha desarrollado a lo largo de su experiencia, y con respecto a los cuales el análisis permitió destacar algunas fortalezas pero también debilidades. Algunos de estos recursos son: diversificar la fuente de la ayuda, fomentando las interacciones entre alumnos; optimizar el tiempo mediante medidas como la de escribir, previamente a la clase, los problemas en hojas de cartulina; utilizar dos listas de artículos de papelería con sus respectivos precios para de ahí tomar los datos de todos los problemas; ofrecer indicaciones en forma

escalonada; usar la copia como un medio de mantener a un grupo ocupado mientras se atiende a otro; respetar en lo posible los ritmos de trabajo de cada alumno al no explicitar los cambios entre una actividad y otra.

Sin embargo, algunos de estos recursos parecieron complicar la actividad de la maestra o el proceso de aprendizaje de los alumnos: la atención casi inmediata e irrestricta, a las demandas de ayuda de los alumnos podría ser un factor que propicie una dependencia de éstos hacia la maestra; la atención simultánea a varios alumnos da lugar a diálogos interrumpidos que eventualmente dificultan a los alumnos seguir el hilo de la ayuda; el dispositivo de la copia ocupó un tiempo considerable, para los de primer grado este tiempo fue incluso mayor que el del trabajo con el contenido; la posibilidad que se da a los alumnos de avanzar a su ritmo provoca, por otro lado, un traslape de los momentos previstos, de tal manera que la maestra termina atendiendo simultáneamente un gran número de actividades distintas; a pesar de su esfuerzo porque fueran los alumnos quienes resolvieran por sí mismos los problemas, existieron ayudas, de ella o los compañeros, que resolvieron una parte medular del problema, reduciendo el trabajo matemático del alumno, y en algunas ocasiones, al nivel de sólo seguir instrucciones.

Lo anterior muestra la existencia de cierta tensión entre el deseo de la maestra de que los alumnos resuelvan por ellos mismos los problemas, que tengan la posibilidad de usar diferentes procedimientos, no necesariamente convencionales, y el hecho de que, en clase, en momentos, ocurre cierta dependencia de su ayuda, reduciéndose, involuntariamente, el *topos* del alumno²⁰ al de ejecutor de instrucciones. Estas divergencias entre “el decir” y “el hacer” no son, desde nuestro punto vista, anomalías, sino parte inherente de los procesos de construcción de alternativas para el aula y, más ampliamente, de apropiación de saberes docentes, en el sentido que dan a este término Rockwell y Mercado (2003). Poner en evidencia tales divergencias, y dar cuenta de los factores que las propician puede ser una condición para enfrentarlas.

Por otra parte, hemos intentado identificar elementos en las prácticas de una maestra con experiencia, que puedan compartirse con otros docentes de escuelas multigrado para apoyar la enseñanza de las matemáticas en este tipo de escuelas. Enriquecer el repertorio de alternativas mediante el análisis de estrategias que

²⁰ Chevallard (1999), mediante el concepto de topogénesis, da cuenta del lugar del alumno y del maestro en la gestión del conocimiento en clase.

otros maestros han desarrollado, constituye una tarea que nos parece apremiante y a la que actualmente nos abocamos.

REFERENCIAS

- Arteaga, P. (2011). *Los saberes docentes de maestros en primaria con grupos multigrado*. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C.
- Ávila, A. (1991). La reforma a las Matemáticas en Primaria. Lo posible y lo necesario. *Educación Matemática*, 3(3), 31-39.
- Block, D., Dávila, M. y Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática*, 7(3), 5-26.
- Block, D., Rámirez, M. y Reséndiz, L. (2013). Tejer currículo: la planeación de la clase de matemáticas en una escuela multigrado. *Memoria Electrónica del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa. Aportes y reflexiones de la investigación para la equidad y la mejora educativa*. Sede Guanajuato, Gto.
- Block, D., Ramírez, M. y Reséndiz, L. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. Un estudio de caso. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 20(66), 711-735.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (Trad. D. Fregona). Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. En: L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, Ma. Molina, I. Segovia (eds.) *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada, España: Editorial Comares, S.L. pp. 193-200.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Fregona, D. y Orús, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Fuenlabrada, I. y Weiss, E. (coords.), Candela, A., Ezpeleta, J., Fuenlabrada, I., Kalman, J., et al. (2006). *Las prácticas escolares y docentes en las escuelas multigrado de la educación primaria. Informe de investigación*. México: Consejo Nacional de Fomento Educativo.
- Houdelement, C. (2013). Problèmes numériques à l'école primaire: une fenêtre sur des problématiques d'enseignement. En: *Au milieu du gué : entre formation des enseignants*

- et recherche en didactique des mathématiques. L'Habilitation à Diriger des Recherches.* Francia: l'Université Paris Diderot. pp. 50-81.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2014). *Panorama educativo de México 2013. Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Educación básica y Media Superior.* México: INEE.
- Mercado, R. (1991). Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros. *Infancia y aprendizaje*, 55, 59-72.
- Mercado, R. (1999). *El trabajo docente en el medio rural.* México: DIE-CINVESTAV-IPN.
- Mendoza, J. (2004). La reforma curricular y los problemas en el salón de clase de matemáticas. En A. Ávila, LM Aguayo, D. Eudave, JL Estrada, A. Hermosillo, J. Mendoza, ME Saucedo y E. Becerra. *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas.* México: Secretaría de Educación Pública. pp. 67-102.
- Muñoz, A. (2013). La enseñanza de las matemáticas en la escuela multigrado. Análisis didáctico de un caso centrado en los alumnos de quinto y sexto grados. Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV. México.
- Petrou, M. y Gouding, M. (2011). Conceptualizing Teacher's Mathematical Knowledge in Teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds) *Mathematical Knowledge in Teaching. Mathematics Education Library.* Países Bajos: Springer. pp. 9-25.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid, España: Editorial Síntesis. (Núm. 8 de la Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje).
- Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré): Une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271-312.
- Rockwell, E. (2009). *La experiencia etnográfica: historia y cultura en los procesos educativos.* Buenos Aires: Paidós.
- Rockwell, E. y Ezpeleta, J. (1985). La escuela: relato de un proceso de construcción inconcluso. En: F. Reicher y N. Guiomar (coords), *Educação na América Latina os modelos teóricos e a realidade social.* São Paolo: Cortéz Editora.
- Rockwell, E. y Mercado, R. (2003). *La escuela, lugar del trabajo docente. Descripciones y debates.* México: DIE-CINVESTAV-IPN.
- Roditi, E. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication de nombres décimaux en sixième. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 183-216.
- Popoca, C., Cabello, M.E., Cuervo, A.R., Estrada, M.G., Hernández, M., Reyes, M. de L., et al. (2006) *Retos y necesidades del cambio en las escuelas multigrado. Estudio exploratorio.* México: Secretaría de Educación Pública.

- Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. (Trad. Roc Filella). Madrid, España: Ediciones Morata, S.L. Colección Pedagogía Manuales.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. En: *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa*. México: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.
- Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.