ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos

To recognize and refine personal meanings addressing an error: the case of the Point Localization Theorem

Óscar Molina, Patricia Perry,
Leonor Camargo y Carmen Samper

Resumen: En este artículo presentamos significados que estudiantes de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas dan al Teorema Localización de Puntos (de la geometría plana euclidiana), inferidos del uso que ellos hacen del mismo cuando intentan justificar teóricamente un procedimiento en el que el uso de tal teorema no es adecuado. Destacamos el error al que esta falencia conlleva, como un camino usado deliberadamente por el profesor para favorecer una semiosis relacionada con el significado del teorema; exponemos cómo el profesor reconoce la importancia de este suceso y abre el espacio para que los estudiantes expliciten los significados, posible génesis de tal dificultad, buscando que se acerquen al significado compartido deseado de dicho teorema. Para describir tal semiosis y decantar los significados, hacemos uso de la perspectiva semiótica inspirada en la idea peirceana de signo triádico.

Palabras clave: Construcción de significados, teorema localización de puntos, semiosis, signo triádico de Peirce.

Abstract: The purpose of this article is to present the meaning that pre-service teachers give to the Point Localization Theorem, a Euclidean plane geometry theorem. We infer the meaning from the students' use of the theorem when they try to justify a procedure for which it is not adequate. We point out that the error this mistake entails becomes a path used deliberately by the teacher to favor semiosis with respect to the meaning of the theorem; we expose how the teacher recognizes the importance of this incident and therefore opens a space so that the

Fecha de recepción: 4 de diciembre de 2014; fecha de aceptación: 29 de junio de 2015.

students can explicit their meanings, possible genesis of the inadequate use, as a means to approach the desired shared meaning of the so said theorem. To describe the semiosis and identify the meanings, we use the semiotic perspective inspired in Peirce's idea of triadic sign.

Key words: Making meaning, Point Localization Theorem, semiosis, Peirce's idea of triadic sign.

INTRODUCCIÓN

Usar teoremas y definiciones del sistema teórico de referencia como garantías al demostrar un enunciado condicional o al resolver teóricamente una situación específica es una acción imprescindible de la práctica matemática que debe tener un estudiante de nivel universitario (Selden, 2012), habida cuenta de que se parte de la premisa según la cual, en alguna medida, el significado personal de un enunciado matemático (postulado, teorema o definición) se refina mediante su uso. En este artículo presentamos significados que los estudiantes dan al Teorema Localización de Puntos (TLP[1]); los inferimos caracterizando el uso que ellos hacen del mismo en el marco de la justificación teórica de un procedimiento en el que el uso tal teorema no es acertado. Con esto, mostramos que los estudiantes tienen dificultad en usar de manera apropiada teoremas relevantes, particularmente, en verificar si las propiedades mencionadas en las hipótesis de un teorema se satisfacen bajo las condiciones de una situación específica (Selden, 2012). Pretendemos destacar el error al que esta falencia conlleva, como un camino usado deliberadamente por el profesor para favorecer una semiosis relacionada con el significado del TLP; exponemos cómo el profesor reconoce la importancia de este suceso y abre el espacio para que ellos expliciten los significados, posible génesis de tal dificultad, buscando que se acerquen al significado compartido deseado de dicho teorema.

En primera instancia, presentamos la perspectiva teórica a la luz de la propuesta de signo tríadico de Charles S. Peirce (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012), que fundamenta el análisis realizado; enseguida, nos referimos a asuntos metodológicos para lo cual contextualizamos y presentamos el episodio que es objeto de análisis, aludimos a la identificación de los ciclos de interpretación que constituyen el episodio, y establecemos una comparación, desde un punto de vista matemático, de los enunciados de los hechos geométricos involucrados en el

[1] Sean r número real positivo y $\overrightarrow{AC}$. Entonces existe un único punto $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AD = r$. AD denota la distancia entre los puntos A y D.

episodio. Luego se presenta un análisis de la interacción verbal con base en los referentes teóricos expuestos. Por último, exponemos las conclusiones que son producto de tal análisis.

PERSPECTIVA SEMIÓTICA DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La interacción social entre profesor y estudiantes que tiene lugar en el aula para construir significado matemático es una actividad semiótica. Para describir e interpretar dicha actividad tomamos la perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), basada en la teoría del signo triádico de Charles S. Peirce. Para Peirce, la semiosis es la actividad comunicativa o de pensamiento en la que se crean o se usan "signos". El "signo" de Peirce, denotado SIGNO por Sáenz-Ludlow y Zellweger, consiste en la relación triádica que resulta de la integración inseparable de tres relaciones diádicas entre un objeto, una representación del objeto (representamen o signo vehículo) y una interpretación del objeto representado (interpretante). En el siguiente diagrama (Figura 1), la "Y" invertida[2] permite plasmar los tres componentes del SIGNO y sus tres relaciones diádicas (i.e., objeto-signo vehículo, signo vehículo-interpretante y objeto-interpretante).

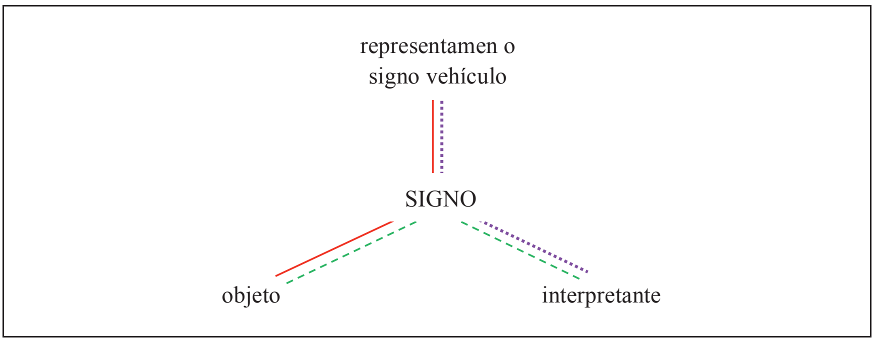


Figura 1. Diagrama de la estructura general del SIGNO

[2] De esta representación icónica, nos dice Perry (2009) que se trata de la única figura apta para representar la estructura general de la semiosis peirceana, y que fue redescubierta por el matemático Robert Marty.

Este modelo de la semiosis es esencialmente un modelo de comunicación basado en la idea de SIGNO y en la diferenciación que Peirce hace del objeto del SIGNO. Esta diferenciación se enfoca en los aspectos del objeto que son indicados y transportados en el signo vehículo y en las características del objeto que es construido por el intérprete una vez que recibe e interpreta el signo vehículo. Peirce hace referencia a tres objetos: el Objeto Real, el objeto dinámico, y el objeto inmediato. El *Objeto Real* (*OR*) es el objeto que acepta la comunidad de discurso dentro del cual tiene lugar el acto semiótico. En el caso que nos ocupa, nos referimos al *Objeto Real Matemático* (*ORM*); objeto que es de naturaleza social, cultural e histórica. El *objeto dinámico* (*od*) es una representación del Objeto Real, una interpretación idiosincrática generada en la mente del intérprete cuando recibe un signo vehículo y lo interpreta. El *objeto inmediato* (*oi*) es una representación del Objeto Real que refiere a uno o más aspectos específicos de este, y que se codifican y se expresan en un signo vehículo. El aporte distintivo de Peirce a la noción tradicional de "signo" está en la inclusión fundamental de la mente que interpreta. Esta inclusión pone de relieve que la comunicación no es un proceso inmediato que permita pasar de manera directa un determinado mensaje de una persona a otra con significados supuestamente "objetivos" y asociados a aquellos objetos en los que se enfocan los signos vehículos que median la comunicación. En cambio, es un proceso mediato e indirecto en el que la construcción de interpretantes de las personas involucradas es imprescindible y desempeña un papel preponderante.

La siguiente es una descripción somera de cómo ocurre la semiosis en torno a un determinado Objeto Real, en un intercambio verbal constituido por dos turnos (ver Figura 2). En un acto de interpretación-intra (interacción consigo mismo), la persona A genera un *objeto inmediato* (oi) seleccionando, de su interpretante (i) relativo al Objeto Real, algún aspecto específico sobre el que quiere enfocar su comunicación, lo codifica y lo expresa en un signo vehículo dirigido a la persona B. En un acto de interpretación-inter (interacción con otros) que tiene lugar en el contexto de su conocimiento y experiencia, B decodifica el signo vehículo emitido por A y genera un interpretante que determina un *objeto dinámico* (od) que puede estar en mayor o menor consonancia con el objeto inmediato de A. Luego, en un acto de interpretación-intra, B genera un objeto inmediato, lo codifica en un signo vehículo dirigido a A, quien a su vez lo decodifica y así se forma un interpretante en la mente de A de donde podría provenir otro objeto dinámico. Obsérvese que la relación mediante la cual comparamos el objeto dinámico del intérprete con el objeto inmediato del emisor del signo vehículo no es de igualdad sino de consonancia. Es prácticamente imposible que en algún momento sean idénticos dada la naturaleza provisional y, por tanto, cambiante de los objetos dinámicos, y debido a que ellos están influidos por la experiencia previa y el conocimiento del intérprete.

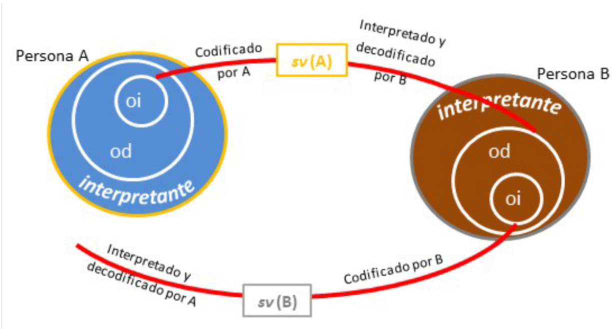


Figura 2. Modelo del curso de una semiosis en un intercambio de dos turnos

En una interacción dialógica de varios turnos en el aula de matemáticas, cuyo propósito es el aprendizaje de los estudiantes con el apoyo del profesor que representa a la comunidad del discurso matemático, tiene lugar una semiosis colectiva con la intención de construir significado de un Objeto Real Matemático situado, es decir, inmerso en una situación didáctica específica; lo denominamos *Objeto Real Matemático del profesor*. Por ejemplo, en una determinada semiosis, el Objeto Real Matemático podría ser el elemento teórico Teorema Localización de Puntos (TLP) mientras que el Objeto Real Matemático del profesor bien podría ser el TLP como herramienta para construir un segmento congruente a otro dado.

En el aula de clase, la mayoría de los objetos dinámicos que construye el profesor no son objetos dinámicos matemáticos "genuinos". Más bien, estos objetos dinámicos, fundamentales en la actividad semiótica del aula, tienen naturaleza didáctica, razón por la cual los distinguimos y los denominamos *objetos dinámicos didácticos* (odd) (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014). El calificativo "didáctico" alude a que estos son el resultado de decisiones didácticas tomadas para facilitar la evolución de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia objetos inmediatos que se aproximan al objeto inmediato pretendido. Como se ha sugerido ya, el profesor, en cuanto representante de la comunidad de discurso matemático, desempeña un papel especial en la construcción de significado.

Para el caso de la educación matemática, la noción de construcción de significado ha sido entendida por diversos autores (Godino y Llinares, 2000; Radford, 2000) como la búsqueda de compatibilidad entre las ideas de un individuo acerca de un objeto matemático, significado personal, y las de la comunidad cultural de referencia, significado objetivo o institucional. Desde la perspectiva planteada en este texto, procuramos operacionalizar tal noción. Entendemos por *construcción de significado* el proceso de interpretación a través del cual se busca la convergencia de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia objetos inmediatos pretendidos del profesor, convergencia de la cual se puede tener alguna noticia durante la comunicación con base en los objetos inmediatos que los estudiantes acarrean en sus signos vehículos. Los significados pretendidos del profesor, se espera que tengan como referencia significados objetivos o institucionales de algún Objeto Real Matemático. Un *significado objetivo* es la integración de consensos de significados que se ha construido históricamente en el seno de la comunidad profesional de discurso matemático. El *significado subjetivo o personal* que da un estudiante a un Objeto Real Matemático es la integración de significados personales parciales y provisionales que se han constituido principalmente de manera colectiva en el aula de clase con la *mediación semiótica del profesor* (i.e., acciones interpretativas y deliberadas que él realiza con el propósito de lograr la convergencia de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia los objetos inmediatos pretendidos del profesor). Cuando una persona interpreta un signo vehículo que acarrea algún aspecto de un Objeto Real, es decir, cuando hace una lectura de un signo vehículo para tratar de entender lo que su proferente expresó, se genera un interpretante y un objeto dinámico. Tras el surgimiento de tal interpretante del signo vehículo y de tal objeto dinámico, se pone en juego la subjetividad del intérprete, quien se esfuerza en ir construyendo su propio significado del Objeto Real, probablemente influido por las interpretaciones anteriormente mencionadas. Es decir, el significado personal está conformado por los objetos dinámicos que el intérprete ha ido construyendo a lo largo de su interacción con otros, pero no coincide con tales objetos dinámicos, tampoco con los interpretantes. El significado provisional que una persona va atribuyendo a un determinado Objeto Real, en un proceso semiótico que podría no terminar en la medida que siga trabajando al respecto, está constituido por todas las ideas que va formando, reformando, precisando, modificando al respecto, y los usos que pueda hacer tanto de la definición del objeto como del objeto mismo.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El episodio que analizamos hace parte de una sesión de clase en la que se estudian procedimientos realizados por los estudiantes para construir un ángulo congruente a uno dado. Esto en el marco de un curso de geometría euclidiana plana del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). El curso tiene como propósito que los estudiantes aprendan a demostrar, participando en la resolución de problemas geométricos abiertos, a partir de lo cual deben formular conjeturas y demostrarlas en el sistema teórico que gradualmente se conforma en el curso. Los estudiantes usan el programa de geometría dinámica Cabri para resolver los problemas. El grupo estuvo constituido por 14 estudiantes. El profesor, coautor de este artículo, tiene amplia experiencia en el respectivo desarrollo curricular. A continuación contextualizamos y presentamos el episodio que se analiza en el artículo, identificamos los ciclos de interpretación, y aportamos un análisis comparativo del TLP y el Postulado rayos – números reales PRYN[3] para tener en cuenta en el análisis del episodio.

CONTEXTUALIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DEL EPISODIO QUE SE ANALIZA

En esta clase se estudian los procedimientos de construcción realizados por los estudiantes para resolver el problema

Construir, en el *software* Cabri, un ángulo congruente a $\angle BAC$ dado. Justificar, con el sistema teórico disponible, el procedimiento.

El problema se les plantea con el propósito de motivar la necesidad de usar el PRYN y de introducir al sistema el *Teorema Construcción de Ángulos* (TCA[4]).

El profesor propone abordar el procedimiento, realizado por varios grupos, que recurre al uso de la herramienta “rotación” de Cabri –conocida ya en el curso

[3] Dados $\overleftrightarrow{AB}$ y punto C tal que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, y el conjunto de los números reales entre 0 y 180. Se puede establecer una correspondencia de todos los rayos de extremo A y un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB}, C}$ (semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ donde está C) con el mencionado conjunto de números tal que:

(i) A cada rayo le corresponde un único número.

(ii) A cada número le corresponde un único rayo.

(iii) Al $\overrightarrow{AB}$ le corresponde 0

(iv) Al rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$ le corresponde 180.

[4] Sean $\overleftrightarrow{AB}$ en un plano α y un número real r tal que $0 < r < 180$. Entonces existe un único $\overrightarrow{AD}$ tal que D está en alguno de los semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ en α y $m\angle DAB = r$.

anterior de geometría. Pretende que los estudiantes participen en la tarea de justificar teóricamente cada uno de los pasos de tal procedimiento. Los pasos del procedimiento son: i) construir $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$; ii) construir $\overrightarrow{AC}$ y D tal que $D - A - C$; iii) construir $\overrightarrow{AD}$; iv) tomar la medida de $\angle BAC$ y usar la herramienta “rotación” para rotar $\overrightarrow{AD}$ con medida de $\angle BAC$ respecto a A, siendo $\overrightarrow{AE}$ el producto de tal acción; v) tomar la medida de $\angle EAD$ y constatar que $m\ \angle EAD = \mathrm{m}\ \angle BAC$ (Gráfico 1).

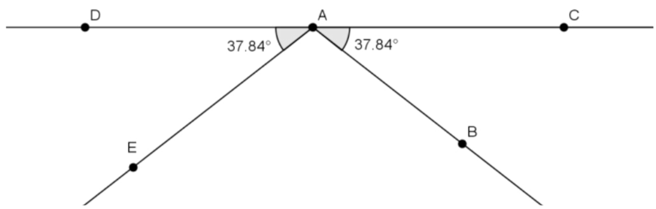


Gráfico 1. Representación gráfica producto del procedimiento de construcción

Estando en el proceso de justificación de los pasos de construcción, al llegar a validar la existencia del $\overrightarrow{AE}$, que junto con el rayo opuesto a $\overrightarrow{AC}$ permite construir un ángulo congruente al ángulo $\angle BAC$, ocurre el episodio que motiva el análisis que presentamos en este capítulo. Una estudiante, Dina,[5] menciona como garantía el TLP y no el PRYN. Ante esta respuesta inesperada, el profesor emprende la siguiente tarea no explícita inicialmente para los estudiantes:

> Producción colectiva de una argumentación que explique por qué el TLP no es pertinente para garantizar la construcción de un rayo.

Comienza por preguntar a los estudiantes su opinión sobre la aseveración de Dina, con el objetivo de cuestionarla. Dan respuesta al profesor María, Antonio y Juan; producto de la interacción se logra una aproximación a la idea pretendida por el profesor y es este quien complementa la idea. Dice entonces, una vez más, en qué circunstancias es pertinente usar el TLP y en cuáles el PRYN. Hecha la aclaración, el profesor vuelve a preguntar cómo justificar la existencia del rayo en

[5] Todos los nombres de estudiantes que figuran en el texto han sido cambiados.

cuestión. Camilo responde acertadamente aludiendo al ítem ii del PRYN y explica cómo lo usa en el contexto en que se encuentran.

REGISTRO DE INFORMACIÓN

La información sobre la actividad semiótica provino de cinco fuentes: (i) video grabaciones de todas las clases de un curso de geometría plana, hechas con dos cámaras; se accionaban para enfocar al profesor, el tablero, los computadores o a los estudiantes, de acuerdo con el interés de capturar la interacción comunicativa y poderla reproducir lo más fielmente posible; (ii) grabaciones de audio tomadas con dos dispositivos: uno de ellos situado muy cerca del profesor y el otro cerca a los estudiantes; (iii) notas de clase elaboradas por los estudiantes, como una tarea cotidiana en la clase; distribuidos por grupos, los estudiantes se turnaban diariamente para reconstruir los principales aspectos tratados en la clase y enviar las notas al profesor; él las revisaba y las ubicaba en una carpeta virtual en la *web* para uso de todo el grupo; (iv) notas tomadas por algún miembro del equipo de investigación que acompañaba las clases y hacía observaciones *in situ* de los aspectos de la interacción que le parecía oportuno registrar y comentar en las reuniones de investigación; (v) reconstrucción narrativa hecha por el profesor en las reuniones de investigación realizadas semanalmente para evaluar los sucesos de la clase y definir el rumbo de nuevas acciones.

IDENTIFICACIÓN DE CICLOS DE INTERPRETACIÓN

La identificación de los ciclos para el análisis se hizo a partir de la trascripción completa de la grabación de video de la clase en la que ocurrió el episodio. La información del video enfocado en el profesor se complementó con la del video enfocado en el grupo de estudiantes. La transcripción se hizo procurando una reproducción fiel de la interacción comunicativa.[6] Sobre la transcripción, se hizo un primer ejercicio de análisis en el que un miembro del equipo de investigación resaltó los signos vehículos del profesor y de los estudiantes relevantes para la

[6] En la transcripción hemos puesto entre paréntesis cuadrados [ ], comentarios sobre acciones del profesor o del estudiante realizadas a la vez que verbalizan. [...] indica que suprimimos parte de la intervención de quien habla en ese momento.

reconstrucción de la semiosis correspondiente al significado del TLP; en los signos vehículos identificó los objetos inmediatos, y propuso inferencias acerca de los interpretantes, objetos dinámicos y objetos dinámicos didácticos del profesor. Este ejercicio dio lugar a la identificación de cinco ciclos de actividad semiótica, es decir, fragmentos que tienen en sí mismos un sentido completo. Estos ciclos son: (i) Propuesta de uso del TLP para justificar teóricamente la rotación de un rayo. (ii) ¿Están de acuerdo con la propuesta de Dina? -Respuesta de María. (iii) ¿Por qué no es pertinente el TLP? -Respuesta de Antonio. (iv) ¿Por qué no es pertinente el TLP? -Respuesta de Juan, y (v) Significado esperado del TLP según su uso.

ANÁLISIS COMPARATIVO DEL TLP Y EL PRYN

Buscando recursos para analizar la situación que centra nuestra atención en este artículo, vemos útil comparar el TLP con el PRYN atendiendo a dos aspectos: sus enunciados y las situaciones en las que es pertinente su uso. Así que, a continuación, explicitamos los enunciados, resaltando en cada caso las respectivas hipótesis y consecuencias necesarias de estas; luego precisamos las respectivas situaciones genéricas de uso pertinente. Estas dos acciones están relacionadas estrechamente en el sentido de que la primera prepara el terreno para la segunda.

El enunciado del TLP es:

Dado $\overrightarrow{CT}$ y $z > 0$, entonces existe un único punto X tal que $X \in \overrightarrow{CT}$ y $CX = z$.

El enunciado del PRYN es:

Dada $\overleftrightarrow{AB}$, punto C tal que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, y el conjunto de los números reales entre 0 y 180, se puede establecer una correspondencia de todos los rayos de extremo A y un punto en $S_{\overrightarrow{AB},C}$ con el mencionado conjunto de números, tal que:
(i) A cada rayo le corresponde un único número real.
(ii) A cada número real le corresponde un único rayo.
(iii) Al $\overrightarrow{AB}$ le corresponde 0.
(iv) Al rayo opuesto al $\overrightarrow{AB}$ le corresponde 180.

El texto subrayado en cada enunciado reporta las condiciones de la hipótesis del respectivo hecho geométrico. Aunque ambos antecedentes aluden al mismo objeto geométrico (rayo) y a números reales, los antecedentes tienen condiciones diferentes. En el TLP, el objeto geométrico es un único rayo cualquiera, mientras que en el PRYN se alude a todos los rayos contenidos en un mismo semiplano, determinado por una recta, y extremo en dicha recta (i.e., tienen una condición específica). En cuanto a las condiciones del número, algo similar ocurre: en el TLP se alude a un sólo número real con la única condición de ser positivo, mientras que el PRYN alude a todos los números reales positivos menores que 180. En resumen, el PRYN es mucho más exigente que el TLP en lo que tiene que ver con las condiciones de los objetos involucrados en el antecedente. Un asunto implícito en la enunciación del PRYN lo constituye la descripción analítica que esconde la generación de ángulos tras la mención de rayos cuyo origen (A) pertenece a la recta dada ($\overleftrightarrow{AB}$) y sus demás puntos en un semiplano (e.g., $\overrightarrow{AD}$).

Ahora, con respecto a las consecuencias necesarias (lo no subrayado en los enunciados) de las condiciones de los antecedentes antes descritos, precisamos lo siguiente: el TLP garantiza la determinación de un único punto (e.g., X) en un objeto muy bien determinado (un rayo –e.g., $\overrightarrow{CT}$) con una condición de distancia (e.g., z) dada a un punto previamente establecido (el extremo del rayo). Por su lado, el PRYN provee una consecuencia más rica por cuanto precisa las relaciones que pueden presentarse entre los números y los rayos a los que hace referencia el respectivo antecedente. Así, plantea que a cada rayo (con las condiciones específicas) se le puede asignar un único número entre 0 y 180, que a cada uno de tales números se le puede asignar uno de dichos rayos, y que a los rayos que conforman la recta se les asigna 0 y 180, según el caso. En síntesis, precisando un rayo (e.g., $\overrightarrow{AD}$) con puntos en el semiplano mencionado en el antecedente (e.g. el determinado por $\overleftrightarrow{AB}$), se puede garantizar la existencia de un único número entre 0 y 180 que le corresponde (e.g., s). En el otro caso, especificando un número entre 0 y 180 (e.g., s), se puede garantizar la existencia de un único rayo (e.g., $\overrightarrow{AD}$) con puntos en el semiplano mencionado en el antecedente (el determinado por $\overleftrightarrow{AB}$) al cual le corresponde ese número especificado (s).[7] En cualquiera de los dos casos, ese número s se convierte en la medida del $\angle DAB$.

Con la descripción de los consecuentes hecha, es posible concluir que el TLP se usa en contextos de distancia entre puntos (necesaria para determinar la medida

[7] Nótese que el PRYN no declara la existencia de los números reales entre 0 y 180, o de los rayos en un semiplano específico. Estos objetos ya existen *a priori*. Lo que se quiere decir es que existe un número en el conjunto (0, 180) que le corresponde a un rayo con las condiciones dichas en el enunciado del postulado, y que existe un rayo con tales condiciones que le corresponde a un número dado del conjunto (0,180).

de longitud de segmentos); de manera general, se usa en casos en los que sea necesario construir un segmento congruente a uno dado mediante la localización de un punto que será uno de sus extremos. El PRYN se usa en contextos donde interviene la medida de amplitud de ángulos; de manera general, en situaciones en las cuales es necesario construir un ángulo congruente a uno dado mediante la determinación de un rayo que será uno de sus lados.

Es de esperar que los estudiantes reconozcan los contextos respectivos donde el uso de los hechos geométricos es pertinente, pues una descripción similar debe conformar parte de su interpretante relacionado con cada hecho geométrico. Como el contexto de la clase se enfoca en la justificación teórica del procedimiento de construcción de un ángulo congruente a uno dado, específicamente en la existencia de un rayo que en el *software* surgió como rotación de otro, claramente el uso del TLP no es pertinente; sí el del PRYN.

ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN VERBAL

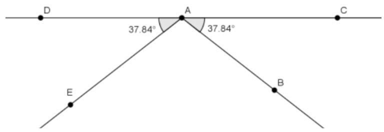
El análisis del episodio nos permitirá tener indicios del significado que al TLP dan tres estudiantes en aquel momento, en su reacción a la propuesta de Dina. Para el fragmento de diálogo que vamos a analizar, se identifica como OR(M) el TLP, y como OR del profesor, el significado del TLP a partir de la caracterización del uso (i.e., identificación de las situaciones en las cuales es pertinente usarlo y uso adecuado del mismo en tales situaciones).

Para efectos de la lectura de la trascripción analizada, los SV del profesor sobre los que concentramos la atención son expresiones del profesor en sus intervenciones donde alude al uso del TLP. En relación con los SV de los estudiantes, se presentan expresiones de una intervención de un estudiante en la que podemos reconocer algo relacionado con el pretendido uso del TLP.

Ciclo 1. Propuesta de uso del TLP para justificar teóricamente la rotación de un rayo

El profesor ha emprendido la tarea antes mencionada junto con los estudiantes. La atención se enfoca en la justificación del paso iv de tal procedimiento, específicamente en la justificación de la existencia de $\overrightarrow{AE}$ producto de la rotación del $\overrightarrow{AD}$ en torno a A con medida de $\angle BAC$. En este sentido, el profesor, con una pregunta, pretende que los estudiantes precisen la garantía teórica que valida la construcción de un rayo a partir de la rotación de otro y de la medida de un ángulo, que se ha hecho en el *software* Cabri. Dina le responde.

1. Profesor: [...] ¿Cómo aparece ese rayo? [...] ¿Listo? Ya sé que en los computadores aparecen, pero ahora teóricamente, ¿cómo hago para que aparezca el rayo AE? ¿Cómo hacemos?
2. Dina: Por Teorema Localización de Puntos, ¿no?



Ante el sv[8] del profesor [1],[9] cuyo oi_1-p es la garantía teórica solicitada que permite justificar teóricamente la existencia del $\overrightarrow{AE}$, Dina responde: "Por Teorema Localización de Puntos"(sv-D). El profesor no deja que pase inadvertida esta respuesta no apropiada y hace que el oi_1-D acarreado por sv-D sea el que tome el protagonismo en la clase; esto es: *el Teorema Localización de Puntos permite justificar teóricamente la existencia del rayo*. El objeto inmediato de Dina está en concordancia con el objeto inmediato del profesor; claro, ella provee una garantía teórica para justificar la rotación del rayo. No obstante, el profesor no pretendía que se aludiera a tal garantía (i.e., TLP), sino al PRYN.

Algunos posibles interpretantes que motivaron a Dina a mencionar aquel sv-D son:

- Para construir el nuevo rayo primero se debe "localizar" un punto con ubicación especial, lo cual se garantiza con el TLP.
- La aplicación del TLP requiere de un rayo y una medida. El TLP se usa para transferir medidas. Aquí tengo un rayo y una medida que debo transferir, entonces el TLP me sirve.
- En los últimos problemas que se ha abordado en clase, el TLP siempre surge como justificación de un paso de un procedimiento. Este caso no debe ser la excepción.

[8] sv-X, oi-X, od-X e i-X denotan respectivamente a signo vehículo, objeto inmediato, objeto dinámico e interpretante asociado al sujeto X.

[9] El número encerrado por los corchetes indica la fila de la trascripción donde está ubicado el sv referido.

En cualquiera de los dos primeros interpretantes, habría indicios para inferir que el significado que Dina da al TLP no corresponde al pretendido por el profesor. El primer interpretante implicaría no contar inicialmente con un rayo sino más bien generarlo con la aplicación del supuesto teorema, es decir, estaría intercambiando, en cierta medida, las condiciones suficientes y necesarias del TLP, por ende, usando como garantía un enunciado que no corresponde a un hecho geométrico verdadero en el sistema teórico disponible.

En relación con el segundo, Dina aludiría a hechos descriptivos relacionados con el TLP como: este se aplica para transferir medidas, o para aplicarlo se debe tener un rayo y un número. No habría una precisión sobre el tipo de medidas (asociadas a longitud de segmentos o amplitud de ángulos) ni sobre las condiciones específicas que deben tener los rayos y el número para poder aplicarlo.

En el caso del tercer interpretante posible, Dina estaría actuando en respuesta más al contrato didáctico de la clase (la respuesta a algo debe estar en el marco de lo que se ha venido estudiando), que a la evocación consciente del TLP en términos de su pertinencia para justificar el paso del procedimiento.

Ciclo 2. ¿Están de acuerdo con la propuesta de Dina? -Respuesta de María

El profesor interpreta el aporte equivocado de Dina como un indicio de la necesidad de revisar el significado del TLP en términos de su uso; probablemente, el sv_1-D lo sorprende tanto que considera que no es suficiente una explicación de su parte (i-p), razón por la cual pretende que los estudiantes se percaten de la necesidad de examinar y reconocer *la posible pertinencia del uso de TLP para la construcción de un rayo como rotación de otro* (odd_1).

La intención de estudiar la propuesta de Dina en la tarea en cuestión, se concreta en la siguiente interacción entre profesor y una estudiante:

3. Profesor:	Teorema Localización de Puntos, dice Dina. ¿Por qué Teorema Localización de Puntos?... ¿De acuerdo? o ¿No de acuerdo?
4. María:	[Disiente moviendo la cabeza.]
5. Profesor:	¿Por qué no de acuerdo, María? Dices que no.
6. María:	Porque es que, o sea, el rayo, necesitamos que ese rayo que me aparezca, tenga la medida del otro, entonces ahí, si localizamos un punto más... Por decirlo... Más arriba, entonces pues no va a ser igual.

El odd_1 del profesor se concreta en su segundo sv-p [3]. El objeto inmediato (oi_2-p) del profesor acarreado en tal sv-pes *justificación (solicitada) del uso o no del TLP como garantía teórica para la construcción de un rayo*. María es la primera estudiante que se aventura a dar una respuesta (sv-M) [6]. En esta respuesta encontramos evidencia de que la estudiante quiere justificar *por qué el TLP no es garantía teórica para construir un rayo en Cabri* (oi-M), asunto que está en concordancia con el oi_2-p. Su interpretante, probablemente, está constituido por un razonamiento con el que intenta invalidar el uso del TLP para esta situación; para ello, alude a una conclusión vaga y que iría en contravía de lo esperado, que se desprendería de haber localizado un punto gracias a la aplicación del TLP. Es decir, según su argumentación, si el TLP se usara, aparecería un nuevo punto en un semiplano; pero no se sabe exactamente dónde (dice ella *más arriba* del que necesita). Si fuera así, que el punto apareciera *más arriba*, el rayo determinado con tal punto no sería el que se necesita. Claro, este debe guardar relación con un número; en palabras de María, debe tener *la medida de otro rayo*; con el punto nuevo, no se sabría si el rayo que aparece tiene *la medida del otro rayo*.

En síntesis, para argumentar su posición, María recurre aun *uso hipotético del TLP* (i.e., *la localización de un punto*) *conllevaría a un resultado que no se corresponde con lo deseado* (od_1-M). Infortunadamente, aunque ella alude a un hecho que permite hacer corresponder un rayo con un número y a la existencia de un rayo, no hace una mención explícita al PRYN ni a los casos donde el TLP es útil: aquellos donde lo que se desea construir son segmentos congruentes y no ángulos congruentes.

Ciclo 3. ¿Por qué no es pertinente el uso del tlp? -Respuesta de Antonio

Con la intervención de María, el profesor interpreta que ella se acerca a lo que él pretende: uso del PRYN para justificar el paso de construcción en cuestión y alusión a la no pertinencia del TLP en ese contexto. El profesor supone que ella tiene en mente a qué se quiere llegar y que la forma hipotética en cómo se usaría el TLP para "localizar" un punto no garantiza la posición del rayo requerido. Pese a esto, reconoce que a la respuesta de María le falta precisión y explicitación. Ella habla de medida de un rayo, pero no precisa a qué rayo se refiere (i.e., no especifica que el número debe ser la medida del $\angle BAC$, o aquel que le corresponda con el número asignado al rayo *AB*) ni explicita el hecho geométrico (PRYN) que permite relacionar el rayo con un número; además, aunque alude al uso hipotético del TLP (y con ello intenta referirse a la no pertinencia de su uso en este contexto), no menciona en qué situaciones genéricas se puede usar tal teorema.

De este interpretante se infiere como objeto dinámico del profesor el mismo odd_1 presentado antes, dado que el profesor espera la misma precisión en las respuestas de los estudiantes. Al ponerse en juego ese odd_1, tiene lugar la siguiente interacción entre el profesor y Antonio:

7. Profesor: Pero, ésa no es una razón muy buena, María. Hay algo más. ¿Por qué sí o no Teorema Localización de Puntos?

8. Antonio: No se puede.

9. Profesor: ¿Por qué no se puede?

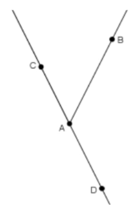
10. Antonio: <u>Porque el Teorema Localización de Puntos es ubicar un punto en un rayo que ya está, ubicar un punto con una medida</u>, es darle a ese punto un número.

11. Profesor: ¿En dónde? Y ¿en dónde queda?

12. Antonio: En un rayo.

13. Profesor: En un rayo. Acá, ¿por qué la cosa no funciona?

14. Antonio: Porque todavía no tenemos el rayo. Tenemos que sacar el rayo. Por decir, si vamos a utilizarlo en ese caso (señala hacia el tablero donde se ve una figura como la que se presenta aquí)... sería por decir: ubicar un punto E en el rayo AD o en el rayo AB, pero no podemos sacar de ahí...



Con el sv-p [7] se concreta el odd_1, y se vislumbra el respectivo objeto inmediato que, por el momento, no ha cambiado (i.e., sigue siendo oi_2-p). Como respuesta a esta pregunta, Antonio provee un signo vehículo [8 y 10]. Con ello, el estudiante profiere un objeto inmediato (oi_1-A) que en principio no se corresponde con oi_2-p: *El consecuente del TLP*. Posiblemente, Antonio tiene alguna de las siguientes dos interpretaciones de aquel teorema que, en cualquier caso, le sería suficiente para fundamentar su argumentación, pues, en esencia, ambas relacionan un punto (no un rayo) con un número. Específicamente, tales interpretaciones son: i) el TLP permite ubicar un punto en un rayo que ya se tiene, a partir de una medida [se infiere de lo subrayado en la intervención 10] y ii) el TLP permite asignar un número a un nuevo punto [se infiere de lo no subrayado en la intervención 10]. Con lo dicho, el objeto dinámico de Antonio (od_1-A) asociado, sería: *El uso del TLP en la situación no permite argumentar la existencia del rayo deseado, puesto que tal Teorema provee un punto*. Este od_1-A estaría en consonancia con oi_2-p.

De cada una de las dos posibles interpretaciones de Antonio, se vislumbra el significado que puede tener del TLP para ese momento: el Teorema o bien permite localizar un punto en un rayo dado, con base en un número, o bien permite asignar un número a un punto dado. Estos dos usos no son equivalentes. Ello sugiere una confusa comprensión del TLP en este punto de la interacción o una comunicación no adecuada de lo que Antonio quiere decir. Cabe comentar que el primer significado no es del todo acertado por cuanto no precisa las condiciones del número con el cual se ubica el punto (P) en el rayo dado y con respecto a qué punto (Q) ese número se establece como la distancia PQ; queda la duda de si ese número representa una distancia o sencillamente es un número sin alguna condición.

Con respecto a la intervención de Antonio, el profesor genera un interpretante en el que posiblemente reconoce que el estudiante se aproxima a lo esperado: el TLP no es pertinente para justificar el paso del procedimiento en cuestión aludiendo al consecuente de este hecho (el Teorema permite ubicar un punto en un rayo que ya se tiene a partir de una distancia dada). No obstante, se percata también de que su respuesta acarrea la imprecisión mencionada. En relación con esto, el profesor genera un segundo objeto dinámico didáctico (odd_2), que específica el odd_1: *precisión del antecedente y consecuente del TLP para decantar por qué no es pertinente su uso en este caso*.

El odd_2 se intenta poner en juego con la pregunta (sv-p) que el profesor dirige a Antonio [13]. El objeto inmediato (oi_3-p) acarreado en ese signo es *justificación* (*solicitada*) *de la no pertinencia del uso del TLP como garantía teórica de la existencia de un rayo, mediante rotación, que conforma un ángulo congruente a otro*. Como se evidencia, el oi_3-p es una especificación del oi_2-p.

Ante tal pregunta, Antonio provee su segundo signo vehículo [14]. Él quiere precisar la *no congruencia entre las condiciones del TLP y los datos de la situación, razón por la cual el TLP no es pertinente* (oi_2-A), objeto inmediato que se corresponde con el del profesor (oi_3-p) y el odd_2. Para construir la justificación, probablemente Antonio ahora tiene en su interpretante parte de las condiciones del antecedente del TLP para poder usarlo: tener un rayo. Él parece decir que lo que se necesita en esta situación es construir un rayo, no partir de él, como exigíria el Teorema. Si este se usara, se localizaría un punto en los rayos que tiene a su disposición según la situación ($\overrightarrow{AD}$ o $\overrightarrow{AB}$ por ejemplo), razón por la cual no existiría un nuevo rayo. En síntesis, el od_2-A inferido se corresponde con los od_1-Ay od_1-M antes mencionados: *un uso hipotético del* TLP *conllevaría a un resultado que no se corresponde con lo deseado, razón por la cual tal Teorema no permite argumentar la existencia de rayo.*

Cabe resaltar que Antonio, al aludir parcialmente tanto a las condiciones del antecedente del TLP como a sus consecuencias necesarias (ubicar un punto en un rayo), da su significado de tal Teorema en este punto de la interacción, hecho que nos permite descartar la segunda interpretación inferida antes: el TLP permite asignar un número a un nuevo punto. Es probable que la insistencia del profesor con sus preguntas fuera exitosa en términos de la obtención de una precisión del significado del TLP por parte de Antonio.

Ciclo 4. ¿Por qué no es pertinente el uso del tlp? -Respuesta de Juan

El intercambio con María y Antonio, al parecer, lleva al profesor a interpretar como insuficientes las precisiones hechas: se ha dicho, casi de manera completa, qué permite obtener el TLP y qué se quiere obtener en el caso actual, pero no se ha explicitado que la garantía teórica para lograrlo es el ítem ii del PRYN y no el TLP, y que se requiere tener un número entre 0 y 180 y un rayo. El profesor sabe que María, en su momento, aludió tácitamente al postulado (menciona que el rayo que aparece debe tener la medida de otro), y que Antonio se refirió a la necesidad de construir un rayo (dice que hay que sacar el rayo), aun cuando no explicitó cómo hacerlo. Posiblemente, el profesor infiere que los signos interpretantes de los estudiantes permitirían, en conjunto, acercarse a su oi_3-p (Justificación –solicitada- de la no pertinencia del uso del TLP como garantía teórica de la existencia del rayo). En tal sentido, produce un nuevo objeto dinámico didáctico (odd_3) con el cual pretende complementar el odd_2 y, con ello, que los estudiantes complementen lo dicho por Antonio. El odd_3 tiene que ver con la *precisión de* i) *los antecedentes y consecuentes del* TLP *y* PRYN *y* ii) *las razones por las cuales es pertinente el uso del Postulado y no el del Teorema en la situación en cuestión.* La siguiente interacción intenta poner en juego tal odd_3.

15. Profesor: Ahiii más o menitos la cosa. ¿Alguien quiere decir algo en relación con lo que dice Antonio?

[...]

18. Juan: Para tener un ángulo tenemos que tener dos rayos no colineales, entonces con la localización de puntos pues voy a tener un punto y ahí, si tenemos el rayo, van a ser dos rayos colineales.

El sv-p [15] no es interpretado por Juan en el sentido que el profesor quiere, y con su respuesta (sv-J) sólo clarifica lo dicho por Antonio (su objeto inmediato y dinámico coinciden con oi$_1$-A y od$_2$-A, respectivamente). Con su intervención, hay indicios de que Juan ha comprendido el ejemplo de Antonio, le sigue la idea y la explica. Su interpretante debe contener algo como lo que sigue: Juan parte del hecho de que para tener un ángulo se necesitan dos rayos no colineales. Si se usara el TLP para construir un rayo que junto con otro (e.g., $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ o $\overrightarrow{XD}$) forme ese ángulo, lo que se lograría es ubicar un punto (por ejemplo E) sobre alguno de esos rayos. Consecuencia de lo anterior, con el punto E se construiría un rayo colineal ($\overrightarrow{AE}$ o $\overrightarrow{XE}$) a cualquiera de los dados; en otros términos, el "nuevo" rayo construido y el que se tenía, serían un mismo rayo, razón por la cual no habría ángulo, objeto que es el que se quiere determinar. De lo anterior, inferimos que la idea de Juan no es distinta a la de Antonio y su análisis es parecido al hecho por María en su momento; su intervención no aporta en relación con lo pretendido por el profesor en su odd$_3$.

Ciclo 5. Significado pretendido del TLP en términos de su uso

Luego de la intervención de Juan, el profesor parece interpretar como no afortunada su pregunta en relación con su odd$_4$, razón por la cual su siguiente intervención pretende centrar la atención de los estudiantes en los aspectos que fueron mencionados en tal objeto dinámico didáctico. Para ello, y teniendo presente las intervenciones, con explicaciones no completas, de Antonio, María y Juan, pregunta explícitamente a los estudiantes sobre el uso del TLP. Así surge un nuevo objeto dinámico didáctico (odd$_4$) mucho más preciso que el odd$_3$: *situaciones genéricas donde es pertinente el uso del TLP para no aplicarlo inadecuadamente*. La siguiente interacción, pone en juego tal odd$_4$.

19. Profesor: [...] oiga, en términos generales, ¿para qué utilizamos el Teorema Localización de Puntos? [...] Díganme ustedes, en términos generales. Ya ustedes ubicaron las situaciones y abstraigo y digo, de manera general, yo como que utilizo esto para qué, ¿para qué lo utilizamos?

20. Laura: Para copiar una medida.

21. Profesor: Medida de ¿qué?

22. Laura: ¡Ja! [Cara de desconcierto].

23. Profesor: ¿Para copiar medidas de qué?

24. Laura: De segmentos... de rayos... Pues es que se pueden copiar medidas con tal de tener un rayo y un punto ¿no? [Cara de inseguridad].

El odd$_4$ se manifiesta en el sv-p[19] en el cual el oi$_4$-p acarreado es *el para qué del TLP*. Laura comprende la pregunta del profesor y profiere su sv-L[20]. Claro, ante la solicitud de precisión del profesor [21 y 23], ella complementa su signo vehículo [24] acarreando el oi$_1$-L: *Repuesta dada sobre para qué se usa el TLP aludiendo a su antecedente*. Con esto, la estudiante afirma que el TLP permite copiar medidas de segmentos o rayos y lo argumenta diciendo, con inseguridad, que es posible copiar medidas siempre que se tenga un rayo y un punto. Parece no tener claro aquello que respecta a los rayos: probablemente recuerda que el TLP alude a un rayo y a un número positivo que se convertirá en una distancia, pero no recuerda bien el asunto (i-L). Así, el od$_1$-L es que el TLP permite copiar medidas relacionadas con segmento y con rayos, hecho que coincide con el oi$_4$-p.

El profesor interpreta que la estudiante, aunque tiene una idea general sobre para qué se usa el TLP, le falta precisión de los objetos que se pueden copiar a través de su medida mediante el TLP, razón por la cual hace otra pregunta en la que solicita especificidad, claro, en el marco del odd$_4$:

25. Profesor: Pero entonces dime, ¿de rayos?, ¿medidas de rayos o medidas de segmentos?

26. Antonio: [En voz baja] De segmentos.

27. Profesor: De segmentos, entonces.

28. Laura: [Cara de decepción].

29. Profesor: O... ¿no?

30. Laura: Sí.

31. Profesor: Bueno, entonces vuelve a decir cómo sería la cosa, ¿para qué utilizas en general el Teorema Localización de Puntos?

32. Laura: Para copiar la medida de un segmento [ademán con índice y dedo del corazón de mano derecha evoca acción con compás].

El profesor profiere el sv-p[25] buscando precisión en lo que ha dicho Laura. Específicamente, quiere que se manifiesten los objetos que se pueden copiar mediante su medida a través del TLP (oi_5-p). El profesor valida la intervención tímida [27] de Antonio (sv-A) pero al ver la cara de desconcierto de Laura, a ella se dirige para ver si tiene algo más qué decir; Laura reafirma lo dicho por Antonio. Probablemente, la respuesta de Antonio persuade a Laura y ella logra precisar que un rayo no tiene medida y que el TLP se ha usado para copiar segmentos, es decir, construir un segmento con igual medida de otro dado (i-L). Ante la reafirmación de Laura, y con el objetivo de que quede claro para la clase y para ella misma para qué se usa el TLP, el profesor genera su sv-p [31]. La respuesta de Laura, nuevo sv-L [32] acarrea un oi_2-L (*el TLP permite copiar medida de segmentos*) que precisa oi_1-L. Para este caso, od_2-L coincide con oi_1-L (Objetos –dados- que permite copiar el TLP: medidas de segmentos).

El profesor termina este episodio, haciendo una intervención en la que, a manera de síntesis, apoya lo establecido por Laura y ejemplifica cómo se utiliza el TLP de manera general, para construir un segmento congruente a otro dado. El profesor espera que este sea un significado en uso del TLP. Hasta este momento, se ha precisado para qué se usa el TLP, pero no se ha explicitado por completo la no pertinencia del uso TLP para responder a la tarea de la clase, esto es: dado que la situación involucra medidas de ángulos, pues se pide construir un ángulo congruente con otro dado, el TLP no es útil. Hacer esta explicitación se convierte en el odd_5. Para ello, el profesor termina su intervención de síntesis, con una pregunta. En seguida tiene lugar una interacción entre él y estudiantes:

33. Profesor:	[...] ¿Acá [señala en el tablero el paso del procedimiento donde se construye un rayo a partir de una rotación de otro] estamos pensando en equidistancias o segmentos congruentes?
34. Antonio:	[En voz baja] Igualdad de medidas.
35. Profesor:	En igualdad de medidas, es cierto (dirigiéndose a Laura) por eso yo te pregunté... igualdad de medidas, pero ¿de quién? ¿Acá en este caso es medidas de quién?
36. Ángela:	[Voz baja] De los ángulos.

37. Profesor: Medidas de ángulos, pero sin miedo, y acá... el Teorema Localización de Puntos es otro tipo de medidas. Entonces, te vuelvo a decir (dirigiéndose a Dina) Dina, ¿será que la propuesta tuya Localización de Puntos aplica?

38. Dina: [Mueve la cabeza de lado a lado].

39. Profesor: Definitivamente no aplica...

Con el sv-p [33], el profesor quiere que los estudiantes noten que el contexto exige un tratamiento con medidas de ángulos y no de segmentos. Así, *la mención de que la situación demanda involucrar medidas de ángulos y no de segmentos* se convierte en el oi_6-p. Antonio tímidamente profiere un sv-A en el que alude a *igualdad de medidas*, pero no específica los objetos que se relacionan con tal igualdad. El profesor entonces complementa su sv con otra pregunta [35]. Ángela profiere un sv-Án [36] siguiendo la conversación del profesor. Lamentablemente, el profesor no indaga sobre la respuesta de Ángela para precisar lo que ella puede estar interpretando al respecto. Se infiere que el oi_1-Án es *la situación que involucra igualdad de medida de ángulos*; en consecuencia, el profesor parece entender que para todos es clara la no pertinencia del TLP, razón por la cual hace una afirmación, a manera de conclusión, en la que da a entender que ante el hecho de que la situación alude a medidas de ángulos, no es pertinente usar el Teorema Localización por cuanto este se usa para medidas de otro tipo de objetos (segmentos) [37]. Como resultado de lo anterior, y para cerrar el episodio, el profesor se dirige a Dina, estudiante que aludió al TLP para justificar teóricamente la construcción de un rayo, para tener alguna idea de comprensión sobre todo lo que había pasado producto de su intervención [37]. Ella no articula respuesta alguna; sólo mueve la cabeza de lado a lado, quizá desconcertada o quizá porque aún no tiene claro lo ocurrido. El profesor no indaga qué puede haber detrás del gesto de Dina; concluye diciendo "Definitivamente no aplica". Probablemente supone que para todos, incluyendo Dina, el proceso previo es suficiente para dar claridad sobre la no pertinencia del TLP en este contexto.

Casi de manera inmediata, Camilo alude al PRYN para justificar la construcción de ángulos y ahora la clase se orienta hacia lo que el profesor había planeado.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS Y ALGUNAS CONCLUSIONES FINALES

Hemos analizado un episodio que nos resultó de interés porque ilustra un caso de rara ocurrencia en la clase que sirve de escenario a esta investigación. Por lo regular, la conversación instruccional pública a través de la cual participan los estudiantes en el desarrollo de los temas se da acorde con lo planeado por el profesor, es decir, las respuestas de los estudiantes van, en alguna medida, por el camino previsto por el profesor. En esta ocasión no fue así. La insólita respuesta de Dina lleva al profesor a guiar una semiosis colectiva enfocada en el TLP, teorema estudiado y utilizado en clases anteriores, y no en el PRYN, que es la garantía teórica de la justificación que estaban emprendiendo. El profesor ve en el error de Dina una oportunidad para indagar sobre el significado personal de los estudiantes relativo al TLP. En relación con esto último, de los objetos dinámicos y algunas veces de los interpretantes, inferimos distintos significados presentes en cierto momento de la interacción. En la siguiente tabla, resaltamos en negrilla tales significados; presentamos el estudiante que profiere un sv, su i y su od inferidos. Además, los odd y los oi del profesor, para intentar hacer comentarios respecto de la convergencia de los od de los estudiantes a estos oi.

Ciclo 1

<table>
<tr><td colspan="3">oi$_1$-p: Garantía teórica (solicitada) que permite justificar la existencia de un rayo producto de la rotación de otro.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DINA</td><td>i</td><td>i) Para construir un rayo que forme un ángulo con un rayo dado se debe “localizar” un punto con ubicación especial; esto se garantiza con el TLP; o ii) la aplicación del TLP requiere de un rayo y una medida. El TLP se usa para transferir medidas. Aquí tengo un rayo y una medida que debo transferir, entonces el TLP me sirve; o iii) en los últimos problemas abordados en clase, el TLP siempre surge como justificación de un paso de un procedimiento. Este caso no debe ser la excepción.</td></tr>
<tr><td>od$_1$-D</td><td>El TLP permite justificar teóricamente la rotación de un rayo en Cabri.</td></tr>
</table>

Ciclo 2

odd$_1$: *Pertinencia del TLP para la construcción de un rayo como rotación de otro.*		
oi$_2$-p: *Justificación (solicitada) del uso o no del TLP como garantía teórica para la rotación de un rayo.*		
MARÍA	i	Razonamiento en el que intenta invalidar el uso del TLP en la situación. Si el TLP se usa, aparecería un nuevo punto en un semiplano, pero no se sabe exactamente dónde, quizá más arriba. Si es así, el rayo que se determinaría con tal punto no sería el que se necesita. Este debe guardar relación con un número, debe tener la medida de otro rayo; con el punto nuevo, no se sabría si el rayo que aparece tiene la medida del otro rayo.
	od$_1$-M	**Uso hipotético del TLP conllevaría a un resultado que no se corresponde con lo deseado.**

Ciclo 3

odd$_1$: *Pertinencia del TLP para la construcción de un rayo como rotación de otro.*		
oi$_2$-p: *Justificación (solicitada) del uso o no del TLP como garantía teórica para la rotación de un rayo.*		
ANTONIO	i	i) El TLP permite ubicar un punto en un rayo que ya se tiene a partir de una medida, o ii) el TLP permite asignar un número a un nuevo punto.
	od$_1$-A	**El uso del TLP en la situación no permite argumentar la existencia del rayo deseado.**
odd$_2$: *Precisión del antecedente y consecuente del TLP para decantar por qué no es pertinente su uso en este caso.*		
oi$_3$-p: *Justificación (solicitada) de la no pertinencia del uso del TLP como garantía teórica de la existencia de un rayo, mediante rotación, que conforma un ángulo congruente a otro.*		

ANTONIO	i	Una de las condiciones del antecedente del TLP: tener un rayo. En esta situación se necesita construir un rayo, no partir de él. Si este se usara, se localizaría un punto en los rayos que tiene a su disposición según la situación, razón por la cual no existiría un nuevo rayo.
	od_2-A	**Un uso hipotético del TLP conllevaría a un resultado que no se corresponde con lo deseado, razón por la cual tal Teorema no permite argumentar la existencia de rayo.**

Ciclo 4

odd_3: *Precisión de i) los antecedentes y consecuentes del TLP y PRYN y ii) las razones por las cuales es pertinente el uso del Postulado y no el del Teorema en la situación.*
oi_3-p

JUAN	i	Al usar el TLP para construir el rayo en cuestión, lo que se lograría es ubicar un punto sobre alguno de los rayos dados. En consecuencia, con el punto se construiría un rayo colineal a cualquiera de esos rayos; el rayo "nuevo" construido junto con el que se tenía, serían el mismo. No habría ángulo.
	od_1-J	**Un uso hipotético del TLP conllevaría a un resultado que no se corresponde con lo deseado, razón por la cual tal Teorema no permite argumentar la existencia de rayo.**

Ciclo 5

odd_4: *Situaciones genéricas donde es pertinente el uso del TLP para no aplicarlo inadecuadamente decantando específicamente para qué sirve.*
oi_4-p: *El para qué (solicitado) del TLP.*

LAURA	i	El TLP permite copiar medidas de segmentos o rayos. Probablemente recuerda que el TLP alude a un rayo y a un número positivo que se convertirá en una distancia.
	od_1-L	**TLP permite copiar medidas relacionadas con segmento y con rayos**.

odd$_4$		
oi$_5$-p: *Objetos (solicitados) que se pueden copiar mediante su medida a través del TLP.*		
LAURA	i	Es persuadida y logra precisar que un rayo no tiene medida y que el TLP se ha usado para copiar medida de segmentos; i.e., para construir un segmento con igual medida de otro dado.
	od$_2$-L	**El TLP permite copiar medida de segmentos**.
odd$_5$: *Complementación de por qué no es pertinente usar el TLP en este caso; falta explicitar que esta situación involucra medidas de ángulos y no de segmentos.*		
oi$_6$-p: *Explicitación (solicitada) de que la situación demanda involucrar medidas de ángulos y no de segmentos.*		
VARIOS	i	La situación implica el uso medidas de ángulos y el TLP involucra distancias entre puntos; en otras palabras, medidas de segmentos. Probablemente, los estudiantes piensan que no es pertinente usar el TLP en la situación.
	od-E	**La situación involucra igualdad de medida de ángulos, luego el TLP no es pertinente en esta situación**.

A continuación exponemos comentarios generales respecto de tales significados. En relación con los primeros cuatro ciclos, resaltamos que los estudiantes participantes en ellos, salvo Dina, tienen cierta afinidad en el significado del TLP. En el caso de Dina, no se evidencia una comprensión acertada del consecuente o antecedente del Teorema (ver interpretantes i y ii de Dina, respectivamente). Si nos valemos de tales interpretantes, podríamos esbozar dos posibles significados otorgados al TLP:

El TLP permite localizar primero un punto para luego determinar el rayo.
El TLP se aplica para transferir medidas, sin importar a qué objeto se le atribuirá la medida, y para aplicarlo se deben tener un rayo y un número.

Resaltamos que aunque la respuesta de Dina no es la que el profesor espera (alusión al PRYN), ella responde al oi_1-p ya que provee una garantía teórica para validar la existencia del rayo en cuestión. Hay una correspondencia entre la respuesta dada y la pregunta del profesor en el sentido de proveer una garantía, pero no la hay en términos del contenido geométrico.

Para el caso de María, Antonio y Juan, sus objetos dinámicos (od_1-M, od_2-A y od_1-J) convergen entre sí y, de alguna forma, con los objetos inmediatos del profesor oi_2-p y oi_3-p. Decimos que convergen entre sí dado que todos aluden a la no pertinencia del TLP para justificar teóricamente la existencia de un rayo como rotación de otro; además, coinciden en que al suponer un uso del Teorema en la situación, se obtiene un resultado que contradice hechos ya establecidos en el sistema. Si se quiere determinar un significado del TLP a la luz de tales objetos dinámicos (y de los interpretantes), el mismo sería algo como lo que sigue:

> El TLP no es útil para garantizar teóricamente la existencia de un rayo que surge por rotación de otro en Cabri, dado que el Teorema provee la existencia de un punto (María) en su consecuente y precisa de un rayo y un número en su antecedente (Antonio y Juan).

Mencionamos que existe cierta convergencia entre los objetos inmediatos del profesor con los objetos dinámicos de los estudiantes, puesto que ellos dan respuestas al SV del profesor, intentando precisar la no pertinencia del TLP para la existencia del rayo; sin embargo, estas no son lo suficientemente satisfactorias para el profesor.

En relación con el Ciclo 5, dilucidamos dos significados otorgados al TLP. Uno asociado a od_1-L y otro asociado al od-E (el cual fue construido con las intervenciones de varios estudiantes):

> El TLP permite copiar medida de segmentos.

> El TLP no es pertinente en una situación que involucra igualdad de medida de ángulos.

El primero de estos significados está en consonancia con el oi_4-p y oi_5-p, mientras que el segundo se corresponde parcialmente con el oi_6-p. Para el último caso, decimos que hay una correspondencia parcial dado que los estudiantes tímidamente aluden a que la situación en cuestión involucra medida de ángulos, pero es el profesor quien complementa la idea diciendo que el TLP se usa para otro tipo de medidas, movido por las respuestas de Laura en su intervención inmediatamente anterior. El profesor, quizá, no da espacio para que algún estudiante conjugue los significados 1, 2 y 3 de manera tal que se provea una respuesta completa, como la que él espera: que explique la **no** pertinencia del TLP en la situación. Probablemente supone que para todos, incluyendo Dina, el proceso previo es suficiente para dar claridad sobre el asunto y tener un significado más o menos completo de tal Teorema, a saber:

> El TLP no es útil para garantizar teóricamente la existencia de un rayo que surge por rotación de otro en Cabri, dado que el Teorema exige un rayo y un número **positivo** en su antecedente y provee en su consecuente la existencia de un punto **en el rayo cuya distancia al extremo del rayo es tal número.** Así, en esencia, el TLP permite copiar medida de segmentos, razón por la cual su uso no es pertinente en una situación que involucra igualdad de medida de ángulos.

Resaltamos con letra negrilla elementos que nunca se precisaron en las intervenciones de los estudiantes y a la cuales el profesor aludió implícitamente en su intervención 31. Se resalta que aun cuando el profesor quiso involucrar en dos objetos dinámicos didácticos (odd_2 y odd_3) esas condiciones, los estudiantes no le correspondieron. A partir de este último hecho y con el ánimo de plantear un asunto para reflexión, hacemos un comentario final con respecto a la mediación del profesor. Si bien explotó el error cometido por Dina para indagar significados del TLP y en tal sentido, hay momentos en que los sv-p son afortunados (v.g., en el Ciclo 3, la insistencia del profesor con sus sv, condujo a precisar el significado que Antonio tenía del TLP en ese momento), hay otros episodios en los que tales sv no fueron completamente eficaces. Como dijimos, cuando el profesor intenta poner en juego su odd_3 en el Ciclo 4, definitivamente su sv parece no cumplir su objetivo, puesto que Juan sólo sigue la argumentación de Antonio y nunca precisa los antecedentes y consecuentes del TLP o PRYN, que era lo que el profesor pretendía. El hecho de que los sv-p no sean siempre eficaces, muestra un asunto interesante en la mediación de un profesor; nos referimos a la tensión que tiene cuando debe decantar qué tanto sugiere, en sus sv, las respuestas de los estudiantes, de manera tal que ellos, autónoma y genuinamente, aludan al aspecto del objeto que el profesor intenta poner en juego, así sea parcialmente. Queda la tarea de hacer un estudio que intente dar respuesta a la pregunta.

AGRADECIMIENTOS

Nuestro proyecto de investigación, del cual se ha obtenido el reporte acá presentado, ha sido financiado por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia, Colciencias, y el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP). Las opiniones y conclusiones expresadas aquí son responsabilidad de los autores y no de las instituciones.

REFERENCIAS

Godino, J. y S. Llinares. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática, 12* (1), 70-92.

Perry, R. (2009). Desde Peirce: invitación a ampliar nuestro concepto de signo. En A. Oostra y F. Zalamea (Eds.), *Cuadernos de Sistemática Peirceana*, núm. 1. Bogotá, Colombia: Centro de Sistemática Peirceana.

Perry, P., L. Camargo, C. Samper, A. Sáenz-Ludlow y Ó. Molina. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 409-416). Vancouver, Canadá: PME.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática, 12* (1), 51-69.

Sáenz-Ludlow, A. y S. Zellweger. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter- interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Tomado de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.

DATOS DE LOS AUTORES

Óscar Molina
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

Patricia Perry
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
pperryc@yahoo.com.mxs

Leonor Camargo
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Carmen Samper
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
csamper@pedagogica.edu.co