“Sé cómo se hace, pero no por qué”. Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria

Rocío Guadalupe Balderas Robledo, David Block Sevilla
y María Teresa Guerra Ramos

Resumen: En este trabajo se analizan los argumentos escritos que dan maestros de secundaria acerca de la presencia o ausencia de la proporcionalidad en diferentes problemas y, por medio de estos, se exploran también sus saberes explícitos acerca de las propiedades que definen la proporcionalidad. Para realizar el estudio, se diseñó y aplicó un cuestionario a 63 maestros con problemas de proporcionalidad, se analizaron los procedimientos de resolución, las características que explícitamente atribuyeron a las relaciones de proporcionalidad y algunas consideraciones que hicieron sobre la enseñanza del tema. La mayoría de los profesores obtuvo buenos resultados en la resolución de problemas e incluso algunos en la identificación explícita de la proporcionalidad. Sin embargo, mostraron una limitada argumentación en relación con la ausencia o presencia de la proporcionalidad, lo cual es un indicador de la necesidad de una mayor atención en este aspecto durante su formación inicial y continua.

Palabras clave: proporcionalidad, saberes de maestros, argumentación, educación matemática en secundaria.

Abstract: In this paper, we analyze the arguments that secondary teachers made about the presence or absence of proportionality in several written problems and, through these, we explore the explicit knowledge of the teachers about the properties that define proportionality. For the study we designed and administered a questionnaire to 63 practicing mathematics secondary teachers, we analyzed the procedures and some ideas about teaching the topic, as well as the characteristics attributed to proportional relationships. Most of teachers were successful

Fecha de recepción: 20 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 25 de mayo de 2014.

in solving problems and some in the identification of proportionality. However, they showed a limited argumentation regarding the presence or absence of the proportionality; this is an indicator of the need for greater attention to these aspects during the initial and continuing training of teachers.

Keywords: proportionality, teacher's knowledge, argumentation, secondary mathematics education.

INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad es una noción de aritmética que se encuentra presente en múltiples situaciones de la vida cotidiana y en prácticamente todas las disciplinas científicas, incluidas las sociales, y las artes. Además, la proporcionalidad está estrechamente vinculada con otras nociones matemáticas, como es el caso de los números racionales, los porcentajes, la semejanza y la escala, la trigonometría, la noción de función y la de razón de cambio, entre otras.

Por otra parte, numerosos estudios de corte cognitivo (Inhelder y Piaget, 1955; Hart, 1988; Noelting, 1980a, 1980b, 1981) y didáctico (Vergnaud, 1988; Block, 2001; Ramírez, 2004; Mendoza, 2007, entre otros) han evidenciado las dificultades que se presentan para resolver problemas de proporcionalidad, en particular, para sustituir el modelo aditivo por el multiplicativo. Dichos estudios concluyen que estas dificultades pueden deberse tanto a una cuestión de desarrollo del razonamiento proporcional como a una enseñanza deficiente.

Finalmente, considerando la dimensión curricular, cabe destacar que la enseñanza de la proporcionalidad ha tenido cambios importantes a lo largo del último siglo en los programas mexicanos, al igual que en los de otros países, esencialmente en la manera en que se reconstruye y se define la noción. Estos cambios han afectado el conocimiento que se tiene del tema, incluido el de los maestros (Block, 2006), pues dicho conocimiento es, en buena medida y a final de cuentas, producto del sistema de enseñanza. A su vez, esto influye en los contenidos que los maestros enseñan en su aula.

Lo anterior contextualiza nuestro interés por explorar los saberes con los que actualmente cuentan los docentes de secundaria para enseñar el tema de la proporcionalidad. En el estudio del que procede el presente artículo (Balderas, 2010), se analizan varios aspectos sobre dichos saberes: las técnicas que utilizan para resolver algunas situaciones que involucran proporcionalidad; la identificación de las magnitudes involucradas; la diferenciación que se hace entre las situaciones que ponen en juego relaciones de proporcionalidad y las que no, y la manera en que se argumenta dicha distinción. Además, se exploran los siguientes aspectos sobre la enseñanza de la proporcionalidad: las técnicas que el maestro prevé que los alumnos de secundaria podrían utilizar, las que considera que deberían ser objeto de enseñanza y, finalmente, el nivel de dificultad que asigna a las situaciones.

En este artículo centramos la atención en cómo un grupo de maestros de secundaria argumenta la presencia o ausencia de la proporcionalidad en diversas situaciones, ya que fue aquí donde se presentaron las mayores dificultades.

Antecedentes

Como se mencionó anteriormente, varios estudios han aportado a la comprensión de la noción de proporcionalidad y su enseñanza. Sin ser exhaustivos, hemos elegido reseñar aquí algunos trabajos que consideramos representativos del tipo de investigación que se ha hecho en este campo. Identificamos dos tipos sobresalientes de trabajos: los de perspectiva cognitiva y los de perspectiva didáctica.

Los estudios de perspectiva cognitiva se han centrado en lo que se suele llamar "razonamiento proporcional" y en su evolución, analizando aspectos que intervienen para resolver problemas de proporcionalidad. Piaget (en Block, 2001), desde la perspectiva de su teoría psicogenética, estudió la proporcionalidad utilizando una situación de dos variables linealmente independientes. Concluyó que la adquisición de la noción de proporcionalidad implicaba un proceso de desarrollo subordinado a la construcción de determinadas estructuras del pensamiento lógico: idéntica, inversa, recíproca y correlativa. Su coordinación diferenciaría el razonamiento adolescente e infantil y, por tanto, el pensamiento proporcional queda ubicado en el estadio de pensamiento formal. A partir de los años 1970, se multiplican los estudios sobre el razonamiento proporcional. Durante esa década las investigaciones tendieron a realizarse dentro de los paradigmas de los estudios piagetianos, en algunos casos precisando la teoría de los estadios y, en otros, cuestionándola. El trabajo de Noelting (1980a y 1980b) fue uno de los más importantes y representativos de este periodo.

Sin embargo, un tiempo después, los mismos estudios de corte psicogenético encuentran que el desempeño de los sujetos en tareas de proporcionalidad depende también de ciertas características de las propias tareas (Levain, 1997).

Son representativos de esta tendencia, por ejemplo, los trabajos de Karplus y Peterson (1970, en Fiol y Fortuny, 1990), que encontraron evidencia de que un gran número de alumnos preuniversitarios y universitarios no ponen en juego el razonamiento proporcional en la resolución de los problemas que se les plantearon. A partir de este tipo de estudios, se vio la necesidad de profundizar en las estrategias que realizaban los alumnos en función de determinadas características de los problemas, dejando de lado la preocupación por dar cuenta de una estructura cognitiva general. Algunos estudios sobresalientes al respecto fueron realizados por Karplus (1977) y Hart (1984), quienes propusieron las primeras clasificaciones de estrategias (en Fiol y Fortuny, 1990). Estos mismos autores identifican elementos en las tareas que propician el uso de las estrategias aditivas. Esto reorientó el interés hacia el estudio de las situaciones de enseñanza (Karplus, 1983 y Hart, 1988, en Block, 2001).

Los estudios de perspectiva didáctica son muy diversos. Uno de los aportes relevantes de la investigación de finales del siglo XX y principios del actual es el análisis epistemológico de la proporcionalidad con fines didácticos. Entre los trabajos destacados en este sentido está el de Bosch (1994), que realizó un análisis de la teoría de razones y proporciones en los textos clásicos de la disciplina matemática y en documentos curriculares, y estudió su evolución, los cambios en las técnicas de resolución, ciertas debilidades en el nivel teórico y su rivalidad con el álgebra. Comin (2002), por su parte, estudió la evolución de las condiciones de la enseñanza de la proporcionalidad a lo largo del tiempo y, con base en un análisis epistemológico amplio, propone un modelo en el que esquematiza y organiza los conocimientos de la proporcionalidad en tres marcos: el de las magnitudes, el de las magnitudes medidas y el de las variables numéricas. Este estudio, como varios más (Brousseau, 2014; Adjiage y Pluvinage, 2007; Block, 2001), explora alternativas para la enseñanza y pone en primer plano el papel de la proporcionalidad en la construcción de otras nociones, en particular, de los números racionales.

Desde otras perspectivas, se han realizado numerosos trabajos que dan cuenta del desempeño de los alumnos frente a diversas tareas; destacan, sobre todo, condiciones y momentos en que se producen errores. Van Dooren y cols. (2010), por ejemplo, estudiaron el desarrollo de habilidades de razonamiento aditivo y multiplicativo de estudiantes de 3º a 6º de primaria. Para ello, les pidieron resolver problemas de valor faltante; la mitad de ellos aditivos y los otros proporcionales; la mitad con razones internas y externas enteras y las otras, fraccionarias. Identificaron la prevalencia de dos métodos erróneos y analizaron su uso en función de la edad de los estudiantes. Se encontró que los alumnos utilizan procedimientos aditivos a edades tempranas y posteriormente usan procedimientos proporcionales sin distinguir entre el tipo de problemas. Entre estas dos etapas, muchos estudiantes pasan por una etapa intermedia en la que aplican tanto procedimientos aditivos como proporcionales de manera equivocada en función del tipo de datos numéricos dados en los problemas.

El trabajo de Fernández y Llinares (2012) se centra en identificar perfiles de respuesta en los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos y proporcionales. Los estudiantes resolvieron varios problemas aditivos y multiplicativos, en los que se consideraron la naturaleza de las cantidades: discretas y continuas; el tipo de razón: entera y no entera; se incluyó una versión proporcional y otra aditiva, y también se incluyeron algunos problemas distractores. En el análisis de las respuestas, encontraron distintos perfiles en los que pocos estudiantes respondían correctamente en todos los casos y la mayoría ofrecían respuestas erróneas en las que algunos tenían una clara tendencia a dar respuestas proporcionales o aditivas independientemente del tipo de problema; o a dar respuestas proporcionales si las razones involucradas eran enteras y respuestas aditivas si las razones eran fraccionarias. Informan también cómo estos perfiles varían en estudiantes de distintos grados de primaria y secundaria conforme avanzan los cursos.

Finalmente, algunos estudios de perspectiva didáctica se han centrado específicamente en los conocimientos de los maestros. Monteiro (2003) informa que, en el contexto de un programa de formación en matemáticas para maestros de educación básica, exploró las dificultades que tienen los docentes con los conceptos de razón y proporción, principalmente cuando resuelven problemas utilizando algoritmos. Por su parte, Buforn y Fernández (2013) realizaron un estudio para identificar las características del conocimiento especializado de un grupo de estudiantes para maestro de primaria en el dominio del razonamiento proporcional. Aplicaron un cuestionario con 13 tareas: en siete de ellas se revisa el conocimiento relativo a los significados de los números racionales (parte-todo, medida, razón, cociente y operador, y algunos modos de representación); en los otros seis, se revisan las formas de razonar en situaciones de proporcionalidad (pensamiento relacional, covarianza, identificación de situaciones proporcionales y no proporcionales, entre otras). El análisis de las respuestas les permitió agrupar a los maestros en cuatro perfiles, los cuales se caracterizaron por: *1)* dar respuestas basadas en un razonamiento cualitativo (26/66); *2)* realizar cálculos: regla de tres (16/66), *3)* manejar los significados de las fracciones, excepto el de operador (14/66), y *4)* inicio de desarrollo del razonamiento proporcional (10/66).

La revisión de estudios previos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad nos permite poner en perspectiva nuestro trabajo. De manera similar a otros aquí mencionados, nuestra investigación se centra en los saberes de los maestros pero, como ya anticipamos, nos interesó analizar sus argumentos acerca de la presencia o ausencia de la proporcionalidad en diversas situaciones, ya que es donde encontramos mayores deficiencias. Elegimos trabajar con una muestra de profesores de educación secundaria; pues específicamente en este nivel se desarrollan contenidos sustanciales relacionados con la proporcionalidad y nuestros resultados podrían llegar a aportar información relevante para los programas de formación de maestros de este nivel. Aunque utilizamos, al igual que en otros estudios, un cuestionario de lápiz y papel que contenía problemas, consideramos que hacemos una contribución al considerar preguntas enfocadas a poner de manifiesto determinados razonamientos y argumentaciones de los docentes; los cuales, asumimos, tienen algún efecto en lo que los profesores comunican a sus estudiantes en el aula. En síntesis, deseamos contribuir a construir un panorama más claro acerca de los saberes con los que cuentan actualmente los maestros para enseñar el tema de la proporcionalidad.

MARCO DE REFERENCIA Y METODOLOGÍA

El presente trabajo se propone caracterizar el saber relativo a la proporcionalidad tal como se manifiesta en la enseñanza, específicamente en las resoluciones y respuestas de profesores de secundaria a un conjunto de preguntas. Por esta razón, nos ha parecido oportuno situar el estudio en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). Desde esta perspectiva, toda actividad matemática institucional puede modelarse mediante la noción de praxeología (u organización) matemática. Su estructura se compone de: tareas, técnicas (bloque práctico-técnico: *praxis*), tecnologías y teorías (bloque tecnológico-teórico: *logos*) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Pretendemos caracterizar dos aspectos de las praxeologías de la proporcionalidad reveladas por los maestros: la *praxis*, formada por los tipos de problemas y las técnicas para resolverlos y el *logos*, en donde ubicamos el conocimiento explícito de las propiedades que definen la proporcionalidad, así como los argumentos que, apoyados en dichas propiedades, justifican la presencia o ausencia de la proporcionalidad en determinadas situaciones.

Puesto que un referente importante de las praxeologías de los profesores son las praxeologías que se presentan en los programas escolares, haremos un breve recorrido por estas últimas, identificando algunos aspectos de *transposición didáctica* de la noción de proporcionalidad, esto es, de los procesos de transformación que ha sufrido dicha praxeología para poder ser enseñada (Chevallard, 1992).

Los planteamientos anteriores sirvieron de base para la selección de los problemas de proporcionalidad presentados a los docentes; así como para orientar el análisis de las soluciones y argumentos proporcionados por ellos.

ASPECTOS DE LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LAS REFORMAS EDUCATIVAS EN MÉXICO

En las últimas cinco décadas, México ha tenido tres reformas curriculares importantes en secundaria, con distintos planteamientos para la enseñanza de las matemáticas. La proporcionalidad es uno de los contenidos que más han cambiado en estas reformas.

Las técnicas para resolver problemas de proporcionalidad, como la regla de tres, han salido de los programas oficiales de matemáticas (1932) probablemente por su carácter mecánico (Ramírez, 2004), pero luego han regresado (1960).

La enseñanza de la proporcionalidad estaba sustentada en una versión simplificada de la teoría clásica de las razones y proporciones, que se caracterizaba, entre otras cosas, por la aplicación de reglas, fórmulas y definiciones a un gran número de problemas estereotipados[1] (Bosch, 1996; Ramírez y Block, 2009).

Posteriormente, con influencia europea, surgen en la década de 1970 las "matemáticas modernas", cuyo enfoque era "iniciar al niño en las conceptualizaciones formales de la matemática y de la manipulación de situaciones, expresiones y objetos" (SEP, 1972, p. ix, en Ramírez, 2004). En esta reforma, la teoría elemental de las razones y proporciones fue sustituida por la idea de variación o dependencia funcional, aunque los términos de "razón" y "proporción" se siguieron usando de manera más o menos difusa (Ramírez, 2004). Este intento de modernización de los programas trajo consigo además una tendencia, muy cuestionada *a posteriori,* a dejar de lado los problemas que involucran magnitu-

[1] Valor faltante, regla de compañía, regla de interés, regla de descuento, regla de aligación, regla de falsa suposición, problemas de mezclas o aleaciones y problemas de seguros.

des a favor de los que se sitúan en un nivel puramente numérico o algebraico (Comin, 2000).

En la reforma de 1993 se consideraron los primeros aportes de la investigación de la didáctica de las matemáticas de origen constructivista, la cual presta especial atención a las condiciones y, más específicamente, a los problemas que podrían favorecer procesos de aprendizaje de las matemáticas. Se reintroducen las nociones de razón y proporción: se incluyen problemas de comparación de razones, la noción de variación (utilizando tablas de valores), identificación de problemas de proporcionalidad (Ramírez, 2004). Las magnitudes están de nuevo presentes. Esta propuesta trata de alejarse de la aplicación de "reglas", muchas veces establecidas directamente; en cambio, apuesta por presentar situaciones diferentes de un mismo conocimiento que permitan a los alumnos construir sus propias reglas y, aunque sea parcialmente, acercarse a algunas de las convencionales. Uno de los referentes teóricos que orientaron esta reforma estuvo dado por los aportes de estudios realizados en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), los cuales se empezaban a difundir en México a partir de los años 1980.

Por último, la reforma de los planes y programas de estudio de secundaria de 2006, aún vigentes, dio continuidad a la de los años 1990 al promover la resolución de problemas por parte de los estudiantes y la argumentación de los resultados como las principales vías para alcanzar conocimientos matemáticos (SEP, 2006, p. 9). En esta reforma se hicieron explícitas las *competencias* matemáticas que se espera que desarrollen los alumnos en su estudio: planteamiento y resolución de problemas, argumentación, comunicación y manejo de técnicas (SEP, 2006). Con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad, se destacaron sus vínculos con otras nociones de matemáticas, en particular, con la de multiplicación de números racionales. A través de la sección de "Orientaciones didácticas" en los programas, se amplió la diversidad de tipos de situación de proporcionalidad. Estos programas fueron el marco de la presente investigación.

En 2011 hubo una edición más de los programas, pero esta representó lamentablemente un retroceso, pues se retiraron las orientaciones didácticas.

El cuestionario y los aspectos explorados

Como mencionamos antes, el estudio general exploró elementos de las praxeologías relativas a la proporcionalidad que fueron puestos de manifiesto por los maestros en sus respuestas a un cuestionario.

El cuestionario completo exploró tres grupos de saberes de los maestros: los que tienen que ver con las tareas y las técnicas que utilizaron para resolver los ocho problemas planteados (bloque técnico-práctico); los que tienen que ver con las justificaciones de las técnicas usadas, de las ideas que sustentan sus argumentos, con los términos utilizados, con las propiedades que caracterizan a la noción en cuestión y con los temas que se relacionan con este (bloque tecnológico-teórico) y, por último, los conocimientos relativos a la enseñanza de la proporcionalidad. Aquí exploramos las percepciones que tienen los maestros acerca del conocimiento de sus alumnos y de las situaciones didácticas planteadas (véase la figura 1).

El análisis que presentaremos aquí se centra en la identificación y las justificaciones de la proporcionalidad en cada uno de los problemas de la Parte I: las ideas que sustentan sus argumentos, los términos utilizados, las propiedades que identifican, los otros saberes que vinculan con la proporcionalidad (elementos del bloque tecnológico-teórico). Los resultados completos y detallados se encuentran en Balderas (2010).

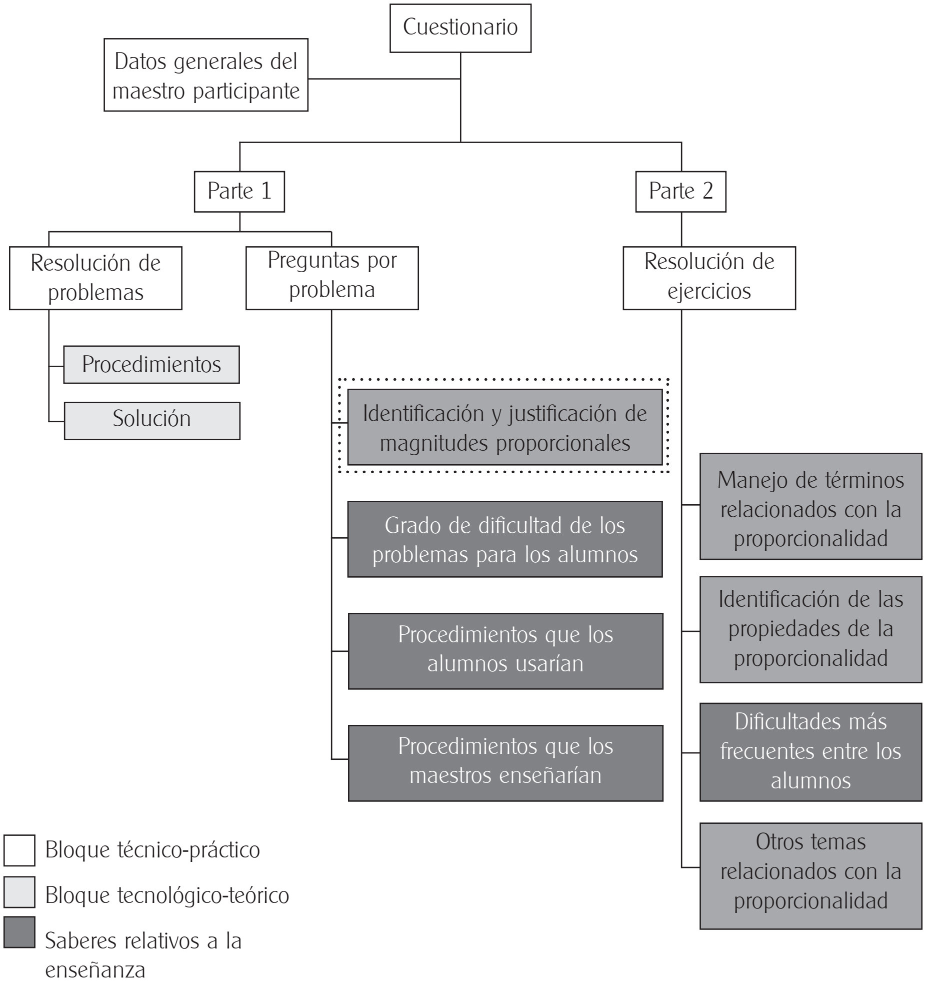
Los problemas del cuestionario fueron diseñados teniendo en cuenta el programa de estudios 2006 de primer grado de secundaria (SEP, 2006), así como otros estudios (Comin, 2000; Block, 2006; Monteiro, 2003). Se consideraron diferentes tipos de problemas en los que interviene la proporcionalidad,[2] y algunos en donde esta no se presenta (relación afín y aditiva), a fin de detectar en qué medida los maestros reconocen la presencia o ausencia de la proporcionalidad.

En cada problema se solicitó a los maestros que utilizaran varios procedimientos de resolución con el fin de explorar la diversidad de procedimientos que conocen. Además, en cada uno se les preguntó si las magnitudes involucradas eran o no proporcionales y que lo justificaran. Estas respuestas las detallaremos más adelante.

El cuestionario fue aplicado a 63 maestros del estado de Nuevo León, México, en el contexto de un taller para maestros. Todos eran docentes de matemáticas en escuelas secundarias públicas o privadas del estado y estaban impartiendo clases en el periodo 2007-2008 en primer grado.

[2] Solo se trabajó con proporcionalidad directa.

Figura 1 Estructura del cuestionario

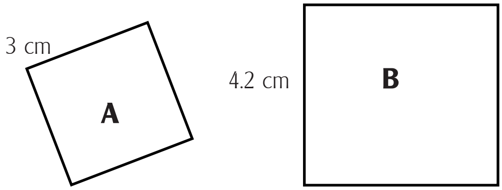


Posteriormente, tanto las resoluciones de los problemas como las justificaciones dadas por los maestros fueron clasificadas, unas de acuerdo con diversas categorías previstas y otras, formadas a partir de los propios datos. Esta clasificación sirvió para el análisis cuantitativo y cualitativo.

Los problemas

Los ocho problemas que se presentaron en el cuestionario fueron los siguientes:

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>1. En 2 kilogramos de dulces que compró Carlos hay 81 piezas. ¿Cuántas piezas habrá en 6 kilogramos de los mismos dulces?</td><td>Proporcional, valor faltante, medidas enteras, solo razón interna entera.</td></tr>
<tr><td>2. En la mañana, José fue a una casa de cambio de divisas y recibió 72 pesos a cambio de sus 6 dólares. ¿Cuántos pesos recibirá si por la tarde desea cambiar 10 dólares con la misma tasa de cambio?</td><td>Proporcional, valor faltante, medidas enteras, solo razón externa entera.</td></tr>
<tr><td>3. María hará una fiesta para sus alumnos. Ha pensado en dar de comer hot dogs. Así que María va al supermercado a comprar salchichas. Al llegar, se da cuenta de que hay dos presentaciones de la misma marca: un paquete de 8 salchichas que cuesta 26 pesos y otro de 10 a 35 pesos. ¿Cuál paquete es más conveniente comprar?</td><td>Proporcional, comparación de razones, medidas enteras, razón externa no entera.</td></tr>
<tr><td>4. En la siguiente tabla (tabla 1) se muestra la distancia recorrida en kilómetros y el costo en pesos de cuatro viajes que realizó un taxista durante la mañana:
<table>
<tr><th>Distancia (km)</th><th>Costo ($)</th></tr>
<tr><td>2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>5</td><td>27</td></tr>
<tr><td>8</td><td>39</td></tr>
<tr><td>11</td><td>51</td></tr>
</table>
Tabla 1. Datos del problema 4
Si por la tarde realiza un viaje de 10 kilómetros y el banderazo es de 7 pesos, ¿cuánto cobrará el taxista?</td><td>Relación afín, valor faltante, medidas enteras, costo fijo y razón de cambio enteros.</td></tr>
<tr><td>5. Ana y Jorge compraron 60 canicas. Ana cooperó con 80 pesos y Jorge con 20 pesos. Si desean repartírselas de acuerdo con lo que cooperaron, ¿cuántas canicas le tocan a cada uno?</td><td>Proporcional, reparto proporcional, medidas enteras, razones fraccionarias.</td></tr>
<tr><td>6. Luisa tiene ocho años. Su hermana tiene lo doble. ¿Cuántos años tendrá la hermana cuando Luisa cumpla 10 años?</td><td>Aditiva, valor faltante, medidas enteras, diferencia entera.</td></tr>
</table>

7. Una fotografía se reduce con una escala de $\frac{1}{2}$ y enseguida se reduce nuevamente con una escala de $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la reducción total que sufre la fotografía original?	Proporcional, composición de dos relaciones de proporcionalidad, escalas sucesivas, factores fraccionarios.
8. ¿El cuadrado B es un agrandamiento a escala del cuadrado A? (véase la figura 2)  **Figura 2.** Problema 8	Proporcional, en el contexto escala, medidas no enteras.

Resultados

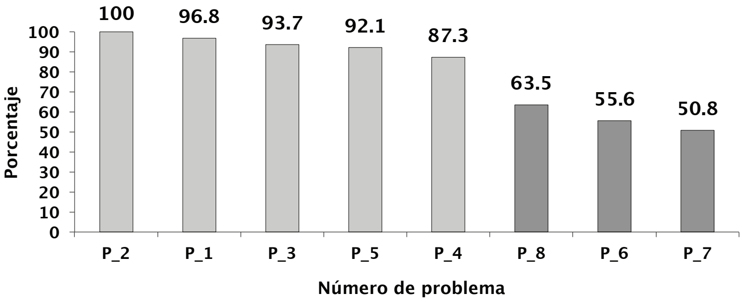
A partir de las resoluciones de los maestros, hicimos una primera clasificación atendiendo el grado de dificultad mostrado. Entre los problemas "fáciles", que la mayoría resolvió correctamente, están los de valor faltante, reparto proporcional, comparación de razones; y entre los difíciles, esto es aquellos en los que encontramos más errores, tenemos los que tenían que ver con factores sucesivos de escala, reconocimiento de escala y relación aditiva (véase la gráfica 1). Este último coincide con los resultados de otros estudios en los que se utilizan procedimientos multiplicativos en lugar de aditivos (Fernández, Llinares y Valls, 2012).

Por otro lado, considerando la cantidad de problemas resueltos correctamente por cada maestro, identificamos tres grupos de desempeño: alto, 30% resolvieron bien los ocho problemas; medio, 63% cometen entre 1 y 3 errores u omisiones, y bajo, 7% cometen más de tres errores u omisiones (véase la gráfica 2).

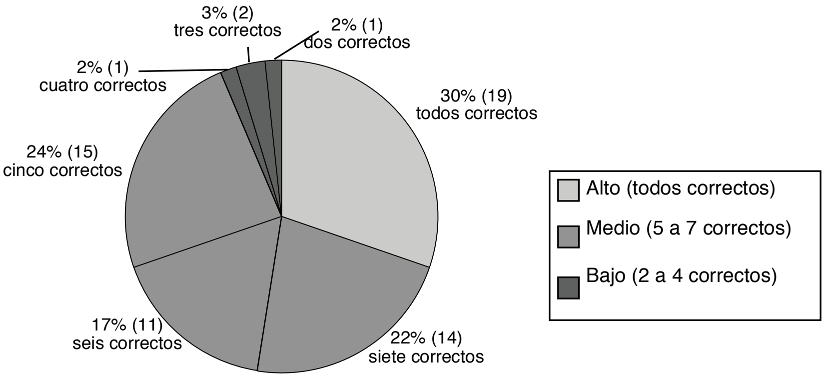
Además de observar estas tendencias en la ejecución de los profesores, llevamos a cabo un análisis de los argumentos que dieron en cada problema al cuestionarles:

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

Gráfica 1. Porcentaje de aciertos en cada problema (n = 63)



Gráfica 2. Soluciones del cuestionario (n = 63)

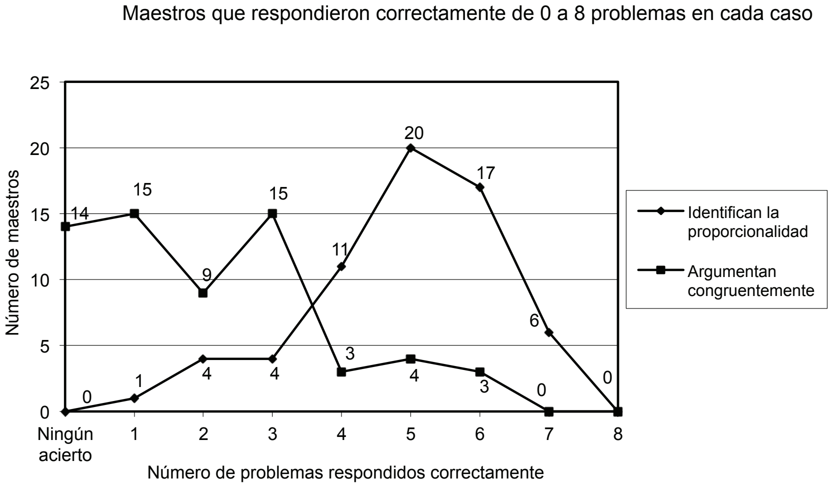


¿Considera que esas magnitudes son proporcionales? Sí/No. Justifique su respuesta.

Notamos que los profesores tuvieron dificultades para identificar si las magnitudes involucradas eran o no proporcionales y, sobre todo, para justificar su respuesta: la gráfica 3 muestra que la mayoría identificó correctamente la proporcionalidad en 4 a 6 problemas; mientras que en los argumentos, justificó congruentemente de 1 a 3 problemas, o bien, no justificó.

La tabla 2 muestra que los maestros tienen grandes dificultades para argumentar: en los problemas fáciles, el 1 y el 2, menos de 45% logró argumentar correctamente. En los demás, lo hicieron entre 3 y 31% de los maestros.

Gráfica 3. Distribución del total de maestros según el número de problemas respondidos correctamente en la Identificación de la proporcionalidad y en los argumentos



Problema (proporcionalidad presente o ausente)	Resuelven correctamente el problema	Identifican correctamente la presencia o ausencia de la proporcionalidad	Argumentan congruentemente
P_1 (presente)	61	61	26
P_2 (presente)	63	60	28
P_3 (ausente)	59	33	20
P_4 (ausente)	55	10	11
P_5 (presente)	58	54	10
P_6 (ausente)	35	18	13
P_7 (presente)	32	35	2
P_8 (presente)	40	37	18

Tabla 2. Maestros que respondieron correctamente la resolución, la identificación de la proporcionalidad y los argumentos en cada problema (n = 63)

Los argumentos se clasificaron en función de la congruencia que mantuvieron con la identificación de la proporcionalidad. Así, por ejemplo, un maestro contestó que en las magnitudes del problema 4 (tarifa de taxi, con "banderazo") sí había proporcionalidad, lo cual es incorrecto, pero en la justificación hizo explícito que esto era así si no se tiene en cuenta el banderazo, sino solo el costo por kilómetro, dando de este modo un argumento congruente. La situación anterior solo se presentó en los problemas 3 y 4.

Los argumentos se consideraron correctos cuando lo afirmado era correcto según el modelo de proporcionalidad y el contexto de la situación (más adelante precisamos esto). Así, de un total de 504 argumentos solicitados (ocho por cada uno de los 63 maestros), se obtuvo solo 25.4% de argumentos congruentes o correctos, 50% fueron argumentos incorrectos y los restantes 24.6% fueron respuestas omitidas.

Las categorías y subcategorías de los argumentos de los profesores se construyeron a partir de las mismas respuestas que obtuvimos de las justificaciones dadas. Primero, se hicieron categorías específicas por el tipo de problema y, posteriormente, comparamos las categorías entre todos los problemas y las agrupamos en categorías más generales que abordaban una misma temática independiente del problema.

Análisis de los argumentos congruentes o correctos (25.4%)

Se consideraron dentro de esta categoría todos los argumentos que enunciaran una propiedad extramatemática o una propiedad matemática necesaria y suficiente que justificara la presencia de la proporcionalidad, incluso se aceptaron aquellos argumentos que aludían a alguna manera de resolver, así como aquellas justificaciones en las que, a pesar de no ser correcta la identificación, la argumentación es congruente (ejemplo del taxi antes descrito). En el caso de indicar que no hay proporcionalidad, se consideró que un argumento es congruente si expresa la falta de alguna de las propiedades antes mencionadas. En síntesis, consideramos como correctas dos interpretaciones posibles a la pregunta ¿por qué hay (o no) proporcionalidad? Una, la que hace referencia a una propiedad del modelo matemático (propiedades que se cumplen o no) y otra, la que hace referencia al sistema modelado (características de la relación entre las magnitudes "reales"):

1. Los argumentos correctos que explican la proporcionalidad mediante una **propiedad extramatemática** aluden a una característica física de los objetos o a un proceso que existe en el mundo real, lo que deja implícita una propiedad matemática. Por ejemplo, en el problema 1, un maestro reconoció la proporcionalidad y argumentó lo siguiente:

   "Sí, porque se supone que es el mismo peso por pieza y aumenta en las mismas proporciones" (problema 1)

   El maestro afirmó que el aumento proporcional se debe a que los dulces tienen el mismo peso (refiriéndose a masa), con lo cual está atribuyendo la presencia de la proporcionalidad a una característica física de la composición de los dulces. El problema dice que se trata de los mismos dulces, por lo que el maestro supone que se tiene el mismo tamaño para cada uno, así como la misma masa. Dicha suposición es adecuada.

   En el problema 2, un maestro hizo referencia a un proceso de la vida cotidiana:

   "Sí, porque existe una tasa de cambio determinada mediante la cual podemos establecer cuántos pesos le corresponden a x cantidad de dólares" (problema 2)

   Asocia este hecho con la experiencia del mundo real, donde se sabe que la tasa no cambia (al menos en un día), por tanto, podía calcular la cantidad de pesos de cualquier cambio de dólares.

   En ambos casos, las propiedades extramatemáticas aluden implícitamente a una propiedad de la proporcionalidad: el valor unitario constante.

2. Los argumentos correctos que hacen explícitas las propiedades necesarias y suficientes para justificar la presencia o ausencia de la proporcionalidad fueron:
   - La constancia (o no) de la razón externa, es decir, la razón que hay entre las dos magnitudes involucradas:

     "Por cada dos kilos, hay 81 dulces y por cada 2 kilos que aumente, así lo harán los dulces (81 piezas)" (problema 1)
   - El mismo que el anterior, pero refiriéndose específicamente a la constancia del valor unitario:

     "Hay una relación constante entre pesos por dólar" (problema 2)

     "Los precios por salchicha en c/paq son diferentes" (problema 3)
   - Hacen referencia a la gráfica, que tiene que ser una línea recta que pasa por el origen (aunque este argumento es incompleto):

"Bueno aunque el aumento es lineal y en las mismas proporciones según me dijeron tiene que empezar de 0 la gráfica para ser proporcionalidad" (problema 4)

- La conservación de las razones internas, es decir, la razón de dos valores de la misma magnitud comparada con la razón formada con los dos valores correspondientes de la otra magnitud:

  "... si se duplican los kilos, se duplican las piezas, si se triplican los kilos, se triplican las piezas" (problema 1)

- La igualdad de los productos cruzados:

  "No hay proporción, puesto que los productos cruzados no coinciden" (problema 3)

3. Otros argumentos clasificados como congruentes fueron los que justificaron mediante alguna manera o técnica de resolver:

   "Para obtener la respuesta, tiene que encontrar que 6 es el triple de 2 entonces tiene que buscar el triple de dulces" (problema 1)

   "Se puede dividir 72 pesos entre los 6 dólares y se obtiene que cada dólar es de 12 pesos, misma proporción para la segunda razón" (problema 2)

   "Porque se puede resolver por la regla de tres simple" (problema 5)

Cabe destacar que estos argumentos pueden interpretarse como si los maestros supusieran que la técnica o la manera de resolver determinan la proporcionalidad, lo cual no es exacto. En realidad, el hecho de que haya proporcionalidad es lo que determina la técnica que se necesita utilizar para resolver el problema. Sin embargo, también puede tratarse de una dificultad de redacción.

Análisis de los argumentos incorrectos (50%)

En los argumentos incorrectos ubicamos cuatro subcategorías, las cuales presentamos y explicamos enseguida:

1. Los maestros destacan propiedades necesarias, pero no suficientes (14.1%) para determinar la presencia de la proporcionalidad.
   - El comportamiento de las magnitudes, cuando una de ellas aumenta o disminuye, la otra también:

"Sí, porque a mayor kg más unidades y viceversa" (problema 1)

- La condición de unicidad en la relación:
  "Sí, para cada valor existe una única respuesta" (problema 2)
- La representación gráfica de una relación de proporcionalidad:
  "Sí, porque si lo grafico, es una línea recta" (problema 4)
- La existencia de una relación entre las magnitudes que están en juego en la situación:
  "Sí, porque tienen una relación entre sí" (problema 5)
- Por ser una función:
  "Sí, porque es una función" (problema 6)

Si bien todas estas propiedades son ciertas y ocurren para cualquier relación de proporcionalidad, cualquiera de estas puede ocurrir sin que exista la relación de proporcionalidad, es decir, estas propiedades no aseguran la relación de proporcionalidad. Por ejemplo, podemos pensar en la relación $y = x^3$, la cual cumple que, mientras la variable x crece, la variable y también lo hace; también cumple que es una función; al ser una función, cumple con la unicidad y, sin embargo, no hay proporcionalidad.

2. Los argumentos incompletos, implícitos o circulares (14.5%) fueron aquellos que expresaban características poco precisas de la proporcionalidad, como por ejemplo, hacer referencia a la idea de una constancia, pero sin precisar qué tipo de constancia es la que está presente en las relaciones de proporcionalidad:

   "Sí, porque existe una constante" (problema 1)

   "Sí, porque la relación de ambas va cambiando constantemente" (problema 2)

   "No, ya que no aumentan de igual manera" (problema 3)

   "No, porque no es crecimiento uniforme completo" (problema 4)

   "Sí, porque varían igual" (problema 6)

   Otros usaron palabras redundantes o circulares como proporción, proporcionales, proporcionalmente, proporcionados, etc., como si estas dieran justificación por sí solas:

   "Sí, la cantidad de kilos es proporcional a las piezas" (problema 1)

   "Sí, porque va aumentando en forma proporcional" (problema 2)

   "No, no va en proporción el precio de la salchicha" (problema 3)

   "Sí, ya que va variando la tabla constantemente, es decir, es la misma proporción" (problema 4)

"Sí, la repartición es proporcional al porcentaje de la proporción que aportó cada una" (problema 5)

"Sí, porque la edad de una es proporcionalidad a la edad de la otra" (problema 6)

"Sí, siempre se reducirá en proporciones" (problema 7)

"Sí, la medida del dibujo va a ser proporcional a la escala" (problema 8)

En general, todos los argumentos de esta subcategoría dan por obvia, o dejan implícita, gran parte de su justificación. Parece que el término proporcionalidad y sus derivados son "naturalizados", como si su definición fuera conocida y entendida por todos y no existiera ambigüedad alguna al hablar de esta manera.

3. Los argumentos falsos (12.1%) fueron aquellos que expresaron ideas incorrectas del modelo matemático que define la proporcionalidad o del contexto de la situación. En algunos casos atribuían la existencia de la proporcionalidad a rasgos particulares de la situación pero no del modelo:

   "Sí, visto desde mi óptica de maestra sí, porque el número de salchichas en los 2 paquetes son pares" (problema 3)

   "Sí, ya que va de una escala mayor a una menor" (problema 7)

   "No, porque no se da una escala exacta" (problema 8)

   En otros casos, más relevantes, encontramos argumentos que identificaban correctamente los modelos implícitos en los problemas donde no había proporcionalidad, función afín (problema 4) y constante aditiva (problema 6), sin embargo, atribuían las características de dichos modelos al de proporcionalidad:

   "Sí, porque son producto de una función lineal $y = mx + b$" (problema 4)

   "Sí son proporcionales, ya que en cada caso el costo por km no varía (4 pesos), pero hay que considerar que hay un costo fijo (banderazo)" (problema 4)

   "Sí, siempre cobra el mismo precio el kilómetro, al total se agrega 7 de banderazo" (problema 4)

   "Sí, la edad de la hermana siempre va 8 años arriba" (problema 6)

   "Siempre va tener 8 años más" (problema 6)

   "Siempre le va a llevar 8 años más" (problema 6)

   Otros argumentos falsos que encontramos en el problema 6 (de las edades) fueron aquellos que tuvieron un manejo adecuado del modelo matemático (la proporcionalidad), pero lo aplicaron de manera no pertinente al contexto, es decir, aquellos que trataron al problema como si involucrara una constante multiplicativa y, como consecuencia, reconocieron la presencia de la proporcionalidad:

"Sí, porque siempre tendrá el doble" (problema 6)

"Sí, siempre existirá una relación de 2:1" (problema 6)

"Sí, por cada año que cumpla Luisa cumplirá 2" (problema 6)

Es probable que, al leer el problema, algunos de estos maestros extrapolan la situación real al plano matemático (erróneo), trabajan con este y ya no vuelven a la situación real a darle sentido a la respuesta. Cabe señalar que algunos sí lo hicieron, y parece que no se percataron de las conclusiones ilógicas que escribieron. Esto es quizás un ejemplo de la tendencia a prestar poca atención al contexto del problema, muchas veces provocada por la mecanización o automatización de las técnicas y fórmulas.

Otros argumentos falsos que encontramos fueron de aquellos maestros que respondieron incorrectamente el problema 7, debido a la confusa idea que hubo entre la escala de una figura y la reducción de área que esta provoca. La tabla 3 presenta algunas de las resoluciones incorrectas:

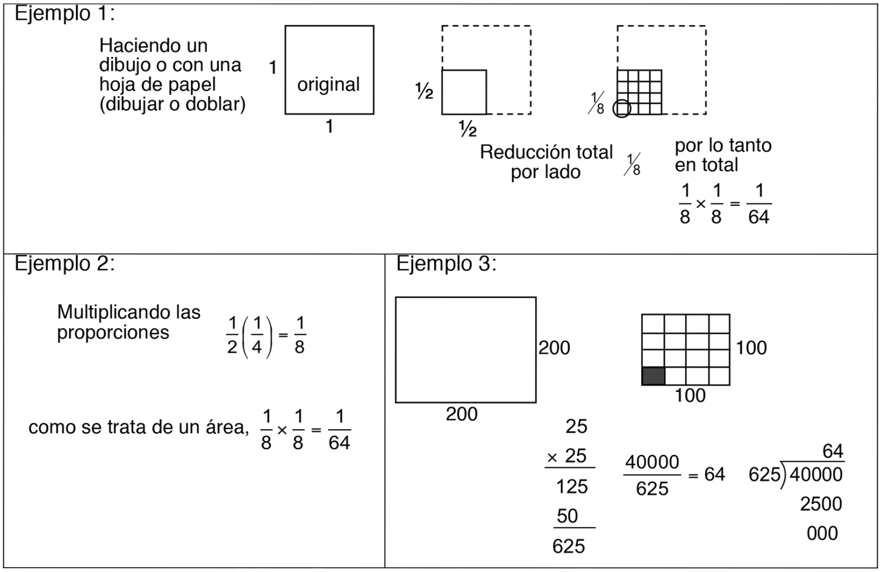


Tabla 3. Ejemplos de resolución del problema 7

Por tanto, sus argumentos fueron del siguiente estilo:

"No, porque al reducir la escala, se reduce en mayor proporción la foto original" (problema 7)

"No, el tamaño de la fotografía o el área cada vez es mucho menor, no es la mitad del tamaño anterior, aunque el lado cada vez se reduce a la mitad" (problema 7)

Podemos ver cierta ambigüedad en el concepto de escala. Algunos maestros afirman que no hay proporcionalidad porque observan que el comportamiento del área de la fotografía al reducirse no es igual que el de las longitudes de los lados, lo cual es correcto, pero no impide que los lados de cada figura sean proporcionales a los de las otras figuras, y esto último es lo característico de la escala.

4. Hubo otros argumentos que solo repitieron los enunciados de los datos o presentaron cuestiones fuera de contexto por lo que no podrían considerarse argumentos (9.3%).

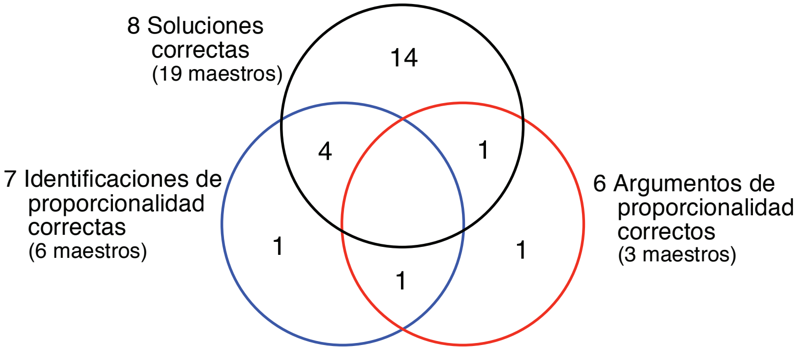
Relación de los argumentos con la resolución de problemas y la identificación de la proporcionalidad

Como ya se vio, el apartado de los argumentos fue el más complicado para los maestros en comparación con el de la resolución de los problemas y el de la identificación de la proporcionalidad, este último con menos diferencia.

Analizando la cantidad de maestros que obtuvieron el mayor número de aciertos en cada uno de estos apartados, tenemos que, de los 63 maestros, 19 obtuvieron la solución correcta de los ocho problemas; en la identificación de la proporcionalidad lo más que se obtuvo fueron siete identificaciones correctas hechas por solo 6 maestros; mientras que en los argumentos solo 3 maestros justificaron la presencia o ausencia de la proporcionalidad correctamente con un máximo de seis argumentos (véase la gráfica 4).

Ningún maestro obtuvo el máximo de identificaciones o de argumentos. En comparación con el apartado de las resoluciones, la cantidad de maestros que tuvieron el máximo en estos dos apartados fue notablemente más pequeña.

Ningún maestro obtuvo el máximo de respuestas correctas en los tres apartados. Quienes respondieron los ocho problemas correctamente no necesariamente pudieron identificar correctamente las relaciones de proporcionalidad y



Gráfica 4. Maestros con la mayor cantidad de respuestas correctas en cada apartado

menos argumentar. Sin embargo, sucede lo contrario para quienes identificaron o argumentaron la mayor cantidad de respuestas correctas, pues ellos tendieron a resolver bien los problemas, no necesariamente el máximo, pero los errores no fueron más de dos, y estos estuvieron en los definidos como difíciles.

CONCLUSIONES

La aplicación del cuestionario mostró, con respeto a las *praxeologías de la proporcionalidad* que los maestros ponen de manifiesto, una diferencia contundente entre los elementos del *bloque técnico-práctico*, donde la mayoría tuvo un desempeño favorable en la resolución de problemas, y los elementos del *bloque tecnológico-teórico*, donde los maestros mostraron serias deficiencias en el momento de identificar la proporcionalidad y argumentar su presencia o ausencia.

Los argumentos que los maestros expresaron en su gran mayoría presentaron deficiencias diversas: argumentación imprecisa, incompleta o implícita. Otros dejaron ver elementos tecnológicos inadecuados, como considerar que la propiedad de “a más, más” es suficiente para que haya proporcionalidad; o que las relaciones afines ($y = ax + b$), o incluso la constante aditiva, caracterizan la proporcionalidad.

La dificultad en el desarrollo de argumentos, en este caso escritos, es grave, más aún si se considera que en la última Reforma de 2006, se incorporan la comunicación (incluida la escrita) y la argumentación como dos de las cuatro competencias por desarrollar en educación (SEP, 2006).

Es muy probable que las carencias en las praxeologías que se han puesto en evidencia en este estudio, en particular con respecto a la definición y la justificación de la proporcionalidad, estén relacionadas con el desvanecimiento de dicho tema en los programas escolares de educación básica a partir de los años 1970, de lo que ya hablamos en el primer apartado. Si bien actualmente la presencia del tema es más clara, consideramos que todavía hay un trabajo de diseño curricular importante por hacer tanto en la secundaria como en la formación de maestros.[3] Uno de los aspectos que merece atención es la vinculación de la noción de proporcionalidad con la de función lineal. En ese marco, sería posible, además, redefinir y justificar la noción de proporcionalidad como un caso particular de función.

De esta manera, el conocimiento matemático por enseñar no se quedaría solo en el bloque técnico-práctico, sino que también abarcaría el bloque tecnológico-teórico.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Conacyt por el apoyo de una beca de maestría a la primera autora en el tiempo en el que realizó esta investigación.

También agradecemos a los árbitros anónimos que, con sus observaciones y sugerencias aportadas, mejoraron este escrito.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adjiage, R., y F. Pluvinage (2007), "An Experiment in Teaching Ratio and Proportion", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 65, pp. 149-175.

Balderas, R. (2010), *La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros,* tesis de maestría, México, Cinvestav-IPN.

[3] Naturalmente, el problema también concierne a la primaria. Un estudio realizado con maestros de ese nivel escolar muestra dificultades no solo en el nivel de la argumentación, sino también en el de la resolución (Ramírez, 2004).

Block, D. (2001), *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico,* tesis de doctorado, México, Cinvestav-IPN.

___________ (2006), "Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad", XIX Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Montevideo, RELME, pp. 675-680.

Block, D., y A. Álvarez (1999), "Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas", *Educación Matemática,* vol. 11, núm. 1, pp. 57-76.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad,* Memoria para optar por el grado de doctor, Departament de Matemàtiques. Facultat de Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona.

Brousseau, G. (2007), *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas,* Argentina, Libros Zorzal.

Brousseau, G., N. Brousseau y V. Warfield (2014), *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment,* Springer.

Buforn, A., y C. Fernández (2013), "Razonamiento proporcional: conocimiento especializado de contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria", *Actas del XV II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática-SEIEM.*

Chevallard, Y. (1992), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Argentina, Aique (Psicología cognitiva y educación).

___________ (1999), "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), "Matemáticas, alumnos y profesores. Las matemáticas en el aula", en Chavallard, Bosch y Gascón (eds.), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje,* Barcelona, Horsori.

Comin, E. (2000), *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire,* Francia, Université Bordeaux.

___________ (2002), "L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 22, núms. 2, 3, pp. 135-182.

Fernández, C., y S. Llinares (2012), "Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria", *Enseñanza de las Ciencias, Revista de Investigación y experiencias Didácticas,* vol. 30, núm. 1, pp. 129-142.

Fernández, C., S. Llinares y J. Valls (2012), "Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions", ZDM *Mathematics Education,* vol. 44, pp. 747-759.

Fiol, M., y J. Fortuny (1990), *Proporcionalidad directa. La forma y el número,* España, Síntesis.

Hart, K. (1988), "Ration and proportion", en J. Herbert y M. Beher (eds.), *Number Concepts and Operation in the Middle Grades,* Lawrence Erlbaum Associates NCTM, vol. 2, pp. 198-219.

Inhelder, B., y J. Piaget (1955), D*e la lógica del infante a la lógica del adolescente,* París, PUF.

Levain, J. (1997), "Faire des maths autrement", Harmattan Colección, Espaces Théoriques.

Mendoza, T. (2007), *Estudio didáctico de la noción de porcentaje,* tesis de maestría, México, Cinvestav-IPN.

Monteiro, C. (2003), "Prospective Elementary Teachers' Misunderstandings in Solving Ratio and Proportion Problems", ponencia presentada en 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Held Jointly with the 25th PME-NA, pp. 317-323.

Noelting, G. (1980a), "The development of proportional reasoning and ratio concept. Part I. Differentiation of state", *Educational Studies in Mathematics,* pp. 217-253.

____________ (1980b), "The development of proportional reasoning and ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages. Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring", *Educational Studies in Mathematics,* pp. 331-363.

____________ (1981), "Qualitative and quantitative aspects in the development of proportional reasoning", en M. P. Friedman, J. Das y N. O' Connor (eds.), *Intelligence and Learning,* Nueva York, Plenum Press.

Ramírez, M. (2004), *Análisis de situaciones de proporcionalidad en la escuela primaria,* tesis de maestría, México, Cinvestav-IPN.

Ramírez, M., y D. Block (2009), "La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares", *Educación Matemática,* vol. 21, núm. 1, pp. 63-90.

SEP (2006), *Educación Básica Secundaria, Programas de estudio 2006,* México, D.F.

Van Dooren, W., D. De Bock y L. Verschaffel (2010), "From addition to multiplication... and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills", *Cognition and Instruction,* vol. 28, núm. 3, pp. 360-381.

Vergnaud, G. (1988), "Multiplicative Structures", en J. Hiebert y M. Behr, (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Nueva York, NCTM, pp. 141-161.

DATOS DE LOS AUTORES

Rocío Guadalupe Balderas Robledo
Cinvestav Monterrey
rbalderas@cinvestav.mx

David Block Sevilla
Cinvestav Sede Sur
dblock@cinvestav.mx

María Teresa Guerra Ramos
Cinvestav Monterrey
tguerra@cinvestav.mx