ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Un aporte a la caracterización del comportamiento argumental y racional cuando se aprende a demostrar

Luis F. Lara y Carmen Samper

Resumen: En este artículo se informan algunos de los resultados obtenidos en un estudio de caso donde se analizaron las interacciones de un grupo de estudiantes (14-16 años) al resolver un problema geométrico dentro de un ambiente que propició actividad demostrativa. En particular, se describe e interpreta el comportamiento de los estudiantes con base en la propuesta de integración que Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010) hacen de los modelos de Toulmin y de Habermas. Con el primer modelo, se analiza la elaboración de argumentos (comportamiento argumental); mientras que, con el segundo modelo, se indaga sobre los tres aspectos que caracterizan un comportamiento racional (epistémico, teleológico y comunicativo). Este estudio permite establecer que los estudiantes, luego de haber sido partícipes de un curso de geometría en donde se favoreció la indagación y la justificación, tienen un comportamiento argumental y racional acorde con el de una persona con mayor madurez matemática cuando justifican la conjetura que formularon como solución a un problema.

Palabras clave: actividad demostrativa, tipo de argumento, comportamiento racional.

Abstract: In this article, we report some of the results obtained in a case study in which we analyze a group of high school (14-16 years old) students' interaction when they solve a geometric problem within an environment that favored proving activity. Particularly, the behavior of the students is described and interpreted using the integration of the Toulmin and Habermas models, proposed by Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010). With the first model, we analyze the formulation of arguments (argumentative behavior); with the second one, we study the three aspects that characterize rational behavior (epistemic, teleological, and communicative). This study permits establishing that the students, after having

Fecha de recepción: 4 de enero de 2014; fecha de aceptación: 4 de abril de 2014.

participated in a course where inquiry and justification are favored, have an argumentative and rational behavior that is in accordance with that of a person with greater mathematical maturity, as they justify the conjecture they formulated as solution to a problem.

Keywords: proving activity, type of argument, rational behavior.

1. INTRODUCCIÓN

La problemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración es un tema que ha suscitado gran interés en la investigación en educación matemática (Pedemonte, 2005, p. 313; Godino y Recio, 2001, p. 405). Hanna (1996, citada en Arzarello, Olivero, Paola, Robutti, 2007, p. 307) señala que, a pesar de ser un aspecto central de la matemática, la demostración no forma parte de todo el currículo escolar; al contrario, se restringe exclusivamente al estudio de la geometría, donde prevalece el aprendizaje memorístico; eso es una práctica incongruente con esa misma actividad realizada por matemáticos. Balacheff (2000, p. 4) afirma que el método de enseñanza de la demostración comúnmente usado por los profesores consiste en hacer demostraciones delante de los estudiantes, a fin de que imiten el proceso. Esto conlleva a que haya un bajo nivel en la comprensión y elaboración de demostraciones (Godino y Recio, 2001, p. 405). Jones (2000, p. 55) menciona que los estudiantes no ven la necesidad de hacer una demostración deductiva, pues se privilegia la verificación y se deja de lado la exploración y la explicación.

Para modificar esto, varios investigadores han hecho aportes a la enseñanza y aprendizaje de la demostración. Por ejemplo, Hanna (2000, p. 20) describe cuatro estudios que evidencian que el uso adecuado del software de geometría dinámica favorece la comprensión de la demostración. Jones (2000, p. 56) resalta algunos estudios en los cuales se concluye que los estudiantes pueden argumentar deductivamente si se tienen en cuenta las tareas que se desarrollan en el aula y se propician las interacciones entre estudiantes y entre estudiantes y profesor. Boero, Garuti y Lemut (2007, p. 252) proponen formular una trayectoria de aprendizaje donde los estudiantes puedan explorar una situación problema, formular una conjetura en forma de condicional y demostrarla. Perry, Samper, Camargo y Molina (2013, p. 17), basados en una perspectiva sociocultural, amplían la concepción de demostración y establecen estrategias metodológicas que permiten favorecer lo que denominan *actividad demostrativa,* tanto en el contexto universitario como en el escolar, propiciando con ello aprender a demostrar.

El presente artículo informa algunos resultados de un estudio (Fonseca y Lara, 2013, p. 9) cuyo objetivo fue analizar las acciones de un grupo de estudiantes de básica secundaria al aprender a demostrar. Haciendo caso a lo expuesto anteriormente, se realizó el curso de geometría dentro de un ambiente que favoreció la interacción social y el uso de geometría dinámica por medio de tareas que propiciaron exploraciones empíricas, la formulación de conjeturas y la argumentación para justificarlas (Perry *et al.,* 2013, p. 26). Mediante el desarrollo de las tareas, se establecieron las normas y los elementos teóricos necesarios para que los estudiantes pudieran construir argumentos matemáticos al querer justificar sus ideas. El propósito del estudio fue proveer una descripción detallada del comportamiento de los estudiantes al resolver un problema específico en el que debían descubrir, formular como conjetura y justificar que los puntos que equidistan de los lados de un ángulo conforman la bisectriz de este.

Para hacer dicho análisis, se emplearon los modelos de Habermas adaptado por Morselli y Boero (2009) para el comportamiento racional y de Toulmin para el comportamiento argumental. Se entiende como comportamiento racional pensar, evaluar, entender y actuar de acuerdo con ciertos principios, en este caso matemáticos, para lograr un objetivo particular. En cuanto al comportamiento argumental, se alude al uso de argumentos para defender o rechazar ideas o acciones. Boero *et al.* (2010, p. 180) consideran que la integración de estos modelos se convierte en una herramienta útil para analizar detalladamente los aciertos y dificultades que presentan los estudiantes cuando aprenden a demostrar. Además, justifican la necesidad de integrar dichos modelos porque, si se consideran por separado, cada uno se enfoca solo en un aspecto. El modelo de Toulmin sirve solamente para analizar la organización de los argumentos, pero no para indagar los planes que los estudiantes proponen ni la manera como ellos se comunican y validan sus ideas, aspectos que, según Habermas, forman parte del comportamiento racional.

El artículo se ha organizado en cuatro apartados. En el primero se presenta el marco teórico del estudio; luego se indica el proceso de investigación; el tercero muestra parte del análisis del comportamiento argumental y racional de tres estudiantes cuando justificaban una conjetura y, finalmente, se dan a conocer algunas conclusiones obtenidas en ese estudio.

2. MARCO DE REFERENCIA

Los constructos teóricos que sustentaron el estudio fueron: actividad demostrativa, modelo de Toulmin para el comportamiento argumental y modelo de Habermas para el comportamiento racional. A continuación, se exponen los aspectos más importantes de cada uno de ellos, con la intención de definir elementos que apoyen el desarrollo, análisis y conclusión del estudio que se realizó.

2.1. Actividad demostrativa

Se considera, en correspondencia con De Villiers (1993, p. 18), que la demostración, además de la validación, cumple otras funciones tales como ser medio de comunicación, explicación, sistematización y descubrimiento. El reconocimiento y aceptación de las diferentes funciones de la demostración determina que, tanto en el ámbito universitario como en el escolar, se debe aprender a demostrar y, a la vez, permite ampliar la concepción de demostración. Camargo, Samper y Perry (2006, p. 372) admiten la necesidad de acercar a los estudiantes a realizar acciones propias de la comunidad matemática, entre ellas, demostrar. En la búsqueda de alternativas para que la demostración (en geometría) tenga un papel importante y significativo en la enseñanza, las investigadoras proponen el constructo que denominan *actividad demostrativa.* Es decir, le asignan este término a una construcción teórica cuyo principio base es que la demostración en el ámbito educativo tiene dos funciones primordiales que son: promover la comprensión del contenido matemático específico y posibilitar la justificación correspondiente.

Teniendo en cuenta esta doble función de la demostración, la actividad demostrativa se compone de dos procesos que no son necesariamente independientes (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011, p. 74). En el primero, denominado *conjeturación,* se establecen conjeturas en forma de condicional (si-entonces), producto de la exploración empírica o teórica, con la cual se propicia la comprensión. Las acciones que conforman este proceso son: detectar y verificar propiedades, formular y corroborar conjeturas. En el segundo proceso, llamado *justificación,* se construye una argumentación deductiva que valide la conjetura formulada en el marco de un sistema teórico o con explicaciones empíricas, según el respectivo nivel escolar. Las acciones que forman parte de este proceso son: seleccionar elementos teóricos o empíricos, construir argumentos y formular la justificación.

2.2. Modelo de Toulmin para el comportamiento argumental

Investigadores como Pedemonte (2007, p. 27), Boero *et al.* (2010, p. 180), Perry *et al.* (2013, p. 19) consideran que el modelo de argumentación que propone Toulmin es una herramienta eficaz para analizar los argumentos que los estudiantes construyen durante el desarrollo de la actividad demostrativa. Un *argumento* es un enunciado oral o escrito, utilizado para convencerse o convencer a otros sobre la veracidad de un hecho particular. Según el modelo de Toulmin, un argumento consta principalmente de tres elementos, no todos necesariamente explícitos (Pedemonte, 2007, p. 27):

- unos *datos* o información;
- una *conclusión*, expresada como una afirmación que se cree que es consecuencia de los datos, y
- una *garantía*, que es una regla (axioma, definición o teorema) que relaciona los datos con la conclusión.

La manera como estos tres elementos se estructuran y relacionan al ser enunciados define tres tipos de argumentos (Perry *et al.*, 2013, p. 19-21):

- *Deductivo*, si a partir de los datos y usando la garantía se obtiene la conclusión.
- *Abductivo*, cuando conociendo la conclusión, se infieren los posibles datos y con ello la garantía que permite deducir dicha conclusión.
- *Inductivo*, con el cual se establece la garantía a partir de varios ejemplos para los cuales los datos y conclusión son los mismos.

2.3. Modelo de Habermas para el comportamiento racional

El constructo comportamiento racional de Habermas, en su versión adaptada por Morselli y Boero (2009, p. 211), permite estudiar asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Un primer aspecto que tuvieron en cuenta los autores para la contextualización de este constructo es el planteamiento de Balacheff (1982, citado en Morselli y Boero, 2009, p. 212) respecto a que la enseñanza de la demostración y de teoremas debe tener un doble objetivo: lograr que los estudiantes entiendan lo que es una demostración y que aprendan a producirla. De acuerdo con este planteamiento, Morselli y Boero (2009, p. 212) proponen que, en la enseñanza de la demostración, se debe considerar, por un lado, el aspecto *objeto*, es decir, la demostración como un producto que cumple ciertos requisitos de orden epistémico y comunicativo que se establecen en la comunidad matemática o en el aula escolar de matemáticas. Y por el otro, el aspecto *proceso*, entendido como un caso particular de la solución de problemas, que consta de acciones que apuntan a plantear una demostración como producto. Aunque esta dualidad no tiene una correspondencia directa con el constructo *actividad demostrativa*, sí está en consonancia con este.

Como segundo aspecto, en relación con el comportamiento racional, Habermas (2003, cap. 2, citado en Morselli y Boero, 2009, p. 212) establece tres componentes interrelacionados de este: el epistémico, el teleológico y el comunicativo. Estos tres componentes se pueden identificar en una práctica discursiva más específica como la de demostrar. Morselli y Boero (2009, p. 212) han decidido caracterizarlos como:

- *Aspecto epistémico:* tiene que ver con la validación consciente de las afirmaciones y el control de los requerimientos establecidos por la comunidad del discurso matemático de acuerdo con premisas compartidas y formas legítimas de razonamiento.
- *Aspecto teleológico:* relacionado con la solución de problemas y las elecciones conscientes que deben considerarse a fin de obtener el producto deseado. En otras palabras, se refiere a enfocarse en una meta, formular un plan o desarrollar uno (no necesariamente formulado) para lograr la meta, proponer estrategias que puedan contribuir a llevar a cabo el plan y tener la meta bajo control.
- *Aspecto comunicativo:* consiste en la adherencia consciente de reglas que garanticen tanto la posibilidad de comunicar los pasos de razonamiento como los productos (justificaciones) que se ajusten a las normas de una determinada cultura matemática. Tiene que ver con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático.

3. MARCO METODOLÓGICO

En este apartado se describe el proceso realizado durante el desarrollo del estudio, particularmente el tipo de investigación, el contexto donde se llevó a cabo y las fases que lo conforman.

3.1. Tipo de investigación

Se adoptó una metodología cualitativa centrada en la corriente descriptiva-interpretativa y corresponde a un estudio de caso, porque se describe e interpreta detalladamente el comportamiento racional y argumental de los estudiantes cuando resolvían un problema abierto. Según Cohen y Maníon (1990, pp. 164-168), este estudio de caso es de tipo no participante, porque el observador evitó ser miembro del grupo para no involucrarse durante los dos procesos de la actividad demostrativa. Además, fue estructurado, porque se usó la aproximación metodológica propuesta por Perry *et al.* (2013, p. 26), quienes aseguran que esta genera un entorno favorable para aprender a demostrar.

3.2. Contexto de la investigación

Se diseñó e implementó una secuencia didáctica en una institución educativa pública del sur occidente de Bogotá (Colombia), con estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria (14-16 años). Dicha implementación duró aproximadamente dos meses, con un total de 18 sesiones de clase de hora y media. La aproximación metodológica propendía por la generación de un ambiente favorable para aprender a demostrar, lo que, según investigaciones de Perry *et al.* (2013, pp. 26-32), se logra si, entre otras cosas, se tienen en cuenta tres elementos. Primero, *tareas* que favorezcan la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas en forma de condicional y la demostración de enunciados. Segundo, la *interacción social en el aula* entre estudiantes y entre profesor y estudiantes que permita la comunicación y discusión de ideas que se validan o rechazan mediante la argumentación; el profesor pasa de ser la autoridad que tiene el saber a ser un experto en la clase que dirige el proceso para desarrollar acciones propias de la práctica de la demostración en matemáticas (*i.e.* uso de términos, símbolos y maneras de comunicarse, conformación de argumentos ceñidos a un sistema teórico y obedeciendo reglas lógicas). Tercero, el *uso de la geometría dinámica* (Cabri) para favorecer la construcción y exploración de propiedades geométricas para que los estudiantes produzcan conjeturas que luego se organizan en un sistema teórico local con apoyo del profesor.

En el estudio de caso, se analizaron las intervenciones de un grupo de tres estudiantes del curso (Daniela, Dana y Carlos),[1] cuando formularon y justificaron una conjetura. Este grupo se conformó así porque sus integrantes trabajaron como grupo durante gran parte del desarrollo de la secuencia didáctica. En términos generales, Daniela siempre se destacó en matemáticas, mientras que Dana y Carlos eran estudiantes con rendimiento académico promedio.

3.3. Fases de la investigación

Para el desarrollo del estudio, se establecieron dos fases. En la primera fase, se diseñó e implementó la secuencia didáctica organizada en tres momentos: primero, conformación inicial de un sistema teórico, que incluía los criterios de congruencia de triángulos; segundo, ampliación del sistema teórico usando Cabri, y tercero, resolución de un problema que llevó a la formulación y justificación de una conjetura. Durante el desarrollo de la secuencia didáctica, uno de los autores del presente artículo era el profesor del curso. Los datos que se analizaron son las acciones e interacciones de los estudiantes durante el tercer momento. Algunos de los elementos teóricos introducidos tanto en el primer momento como en el segundo conformarían el sistema teórico local[2] necesario para resolver el problema del tercer momento y justificar la conjetura formulada. Además, en el segundo momento se buscaba que los estudiantes ganaran competencia con el uso de Cabri para que este se convirtiera en instrumento para el aprendizaje y en herramienta para resolver el último problema.

En la segunda fase, para la recolección de la información, se grabó en audio y video cada una de las sesiones del desarrollo de la secuencia didáctica, se recogieron las producciones escritas de los estudiantes y se transcribieron las últimas dos sesiones (tercer momento) concernientes a los procesos de conjetu-

[1] Se usaron seudónimos para mantener el anonimato de los estudiantes.

[2] Un sistema teórico local es la organización de hechos geométricos y definiciones que surgen en el estudio de un objeto o relación geométrica específica. Por ejemplo, en Perry, Samper, Molina, Camargo, y Echeverry (2012), se propone un experimento de enseñanza que propicia la generación de un sistema teórico local relacionado con el estudio de los ángulos.

ración y justificación relacionados con una situación particular. Para hacer un mejor análisis de los datos, se dividieron dichas transcripciones por episodios, determinados a partir de la acción principal realizada; se ilustraron las acciones de los estudiantes con gráficas capturadas de los videos y se escanearon sus producciones escritas; se hicieron anotaciones en paréntesis cuadrados para complementar las intervenciones que involucraron acciones no verbales; se eliminaron aquellas intervenciones que involucraron cuestiones ajenas a la solución del problema diseñado para el tercer momento de la secuencia didáctica; luego, se da a conocer el respectivo análisis.

3.4. Instrumento de análisis

De acuerdo con la propuesta de integración que Boero *et al.* (2010) realizan de los modelos de Toulmin y de Habermas, descritos en el apartado anterior, se establecieron las categorías de análisis que se presentan en el cuadro 1. Además, a fin de hacer más detallado el análisis del comportamiento argumental de los estudiantes, se proponen dos subcategorías en relación con la manifestación explícita o no de alguno de los tres elementos que conforman un argumento (datos, conclusión y garantía). De tal manera que son argumentos completos cuando están explícitos los tres elementos del argumento, y argumentos incompletos cuando falta alguno de ellos.

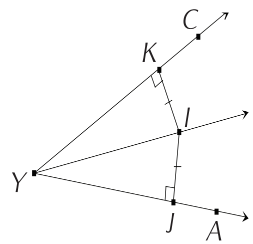
Cuadro 1 Categorías de análisis

Tipos de argumentos que caracterizan un comportamiento argumental		Aspectos que caracterizan un comportamiento racional
Deductivos Abductivos Inductivos	Completos Incompletos	Epistémico Teleológico Comunicativo

3.5. Ejemplo de codificación del comportamiento argumental y racional

Para ejemplificar el uso de estas categorías de análisis, en el cuadro 2 se presenta un fragmento de las intervenciones de Carlos y Daniela, quienes se dedican a justificar la congruencia del ΔIKY y del ΔIJY, al haber concluido previamente que $\overline{IK} \cong \overline{IJ}$, y que el $\angle IKY$ y el $\angle IJY$ son rectos (figura 1).

Figura 1 Representación



Cuadro 2 Ejemplificación de las categorías de análisis

Núm.*	Estudiante	Intervención	Categoría de análisis
848.	Daniela:	¡Ay, Gordo! Ahí es donde utilizamos lado, ángulo, lado [LAL]. [...]	Argumento deductivo completo Datos: $\overline{IK} \cong \overline{IJ}$ y el $\angle IKY$ y el $\angle IJY$ rectos. Garantía: hecho geométrico LAL para la congruencia de triángulos. Conclusión: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$
849.	Carlos:	Muéstreme. ¿Dónde está el lado? [Pregunta cuáles son los lados congruentes].	Aspecto epistémico: Carlos controla si se tienen los elementos para usar la garantía que propone Daniela.
1111.	Carlos:	Pero podemos sacar el de acá [señala el $\overline{YI}$]. Que digamos que de forma inversa. Es que no me acuerdo cómo se dice.	Argumento deductivo completo Datos: el $\overline{YI}$ que muestra en la figura. Garantía: la propiedad que él llama "inversa". Conclusión: $\overline{YI} \cong \overline{YI}$

* Los números indican el orden de intervenciones de las personas que participaron durante el segundo proceso de la actividad demostrativa: estudiantes y profesor.

<table>
<tr><th>Núm.</th><th>Estudiante</th><th>Intervención</th><th>Categoría de análisis</th></tr>
<tr><td>1112.</td><td>Daniela:</td><td>Aaah, la propiedad reflexiva.</td><td>Aspecto comunicativo: Daniela expresa de modo matemáticamente correcto la idea de Carlos.</td></tr>
<tr><td>1116.</td><td>Daniela:</td><td>Entonces sería ángulo, ¿lado, lado [ALL]? Pero eso no existe.</td><td rowspan="4">Aspecto teleológico: Daniela y Carlos proponen diferentes elementos teóricos que se podrían usar.

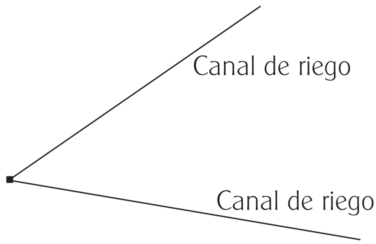
Aspecto epistémico: comparan lo que tienen con las condiciones exigidas en la hipótesis de cada criterio y descartan los que no cumplen.

Argumento abductivo completo
Conclusión: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$
Datos: $\overline{IK} \cong \overline{IJ}$, el $\angle IKY$ y el $\angle IJY$ son rectos, posiblemente la congruencia de otro ángulo o lado
Garantía: posiblemente criterios ALL o LAA o Hipotenusa-Cateto</td></tr>
<tr><td>1117.</td><td>Carlos:</td><td>No.</td></tr>
<tr><td>1118.</td><td>Daniela:</td><td>Entonces sería lado, ángulo, ángulo [LAA]. ¡Ah, no! Tampoco.</td></tr>
<tr><td>1119.</td><td>Carlos:</td><td>Entonces sería H, C [Hecho geométrico Hipotenusa-Cateto]</td></tr>
</table>

4. ANÁLISIS DE DATOS

El problema propuesto para el tercer momento fue: *Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales de riego. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma* (figura 2), relacionado con un contexto no geométrico. Los estudiantes representaron las matas con puntos equidistantes a los lados del ángulo, indicaron que son infinitos los puntos que cumplen esta condición y lograron formular una conjetura en forma de condicional que se aproximó al hecho geométrico que se quería que descubrieran: “Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual, entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo”. Luego, justificaron dicha conjetura con el uso de un esquema conformado por tres columnas tituladas: “Qué sé”, “Qué uso” y “Qué concluyo”, denominado por Samper, Molina y Echeverry (2011, p. 22) como *esquema-deducción,* en el cual consignaron en cada paso, respectivamente, el dato, la garantía que proviene del sistema teórico local conformado, y la conclusión de sus argumentos (véase la figura 6).

Figura 2 Representación de la situación



En seguida se presenta parte del análisis del comportamiento argumental y racional de los tres estudiantes (Daniela, Dana y Carlos) durante el segundo proceso de la actividad demostrativa. La justificación de la conjetura la realizaron en dos instantes. En el primero, del episodio 1 al episodio 3, los estudiantes formularon tres argumentos completos, ligados con la información suministrada en la conjetura, pero los cuales no encadenaron para convertirlos en pasos de la justificación respectiva. En un segundo instante, escogieron uno de los tres argumentos completos para usarlo como el primer paso de la justificación y elaboraron los primeros pasos de la justificación (episodios 4 y 5). Es importante resaltar que la mayoría de los argumentos son deductivos, porque los estudiantes están construyendo la justificación. Además, las intervenciones de Dana fueron escasas; desde un principio asumió el cargo de consignar en la hoja lo que Carlos y Daniela le dictaban.

4.1. Episodio 1: Comienzan a justificar la conjetura

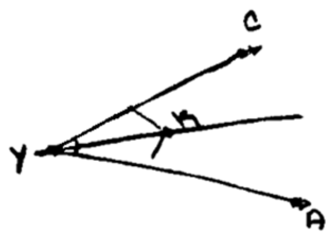
El profesor entrega al grupo una copia del sistema teórico local y les indica que de ese listado deberán sacar los elementos necesarios para justificar la conjetura. Sin recurrir a la construcción hecha en Cabri ni realizar una representación con lápiz y papel, los estudiantes mantienen una conversación en la que identifican qué saben (antecedente de la condicional) y qué deben justificar (consecuente de la condicional).

43.	Daniela:	Conjetura: [empieza a leer la conjetura que el grupo va a justificar]. Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual, entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. ¿Qué sé?
44.	Carlos:	Que la distancia del punto a cada lado es igual.
		[...]
47.	Daniela:	¿Sí?
48.	Carlos:	Entonces, ¿cómo se escribe?
49.	Daniela:	La distancia a cada lado de un ángulo es igual.
		[...]
52.	Carlos:	¿Qué uso?
53.	Daniela:	Espere [...] [Revisa el listado de hechos geométricos y definiciones].
54.	Carlos:	Distancia de un punto a una recta... [Revisa el listado de hechos geométricos y definiciones].
55.	Daniela:	[...] pues ¿sí? La distancia de un punto a cada lado de un ángulo... sí, esa.
56.	Carlos:	¿Segura?
		[...]
59.	Daniela:	[...] Sí, porque vea. Si acá dice: [lee el antecedente de la conjetura] la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual; y acá dice: [lee la definición de distancia de un punto a una recta] la distancia de un punto *P* a una recta *m* es la longitud del segmento perpendicular desde *P* hasta *m*... O sea, tiene algo de parecido, ¿sí? Sí, porque no hay nada más así de parecido.
60.	Carlos:	[Parece señalarle a Daniela la definición de bisectriz de un ángulo].
61.	Daniela:	Ah, la bisectriz de ángulo. [Lee]. Es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes.
62.	Carlos:	No.
63.	Daniela:	No. Efectivamente, usamos la definición de distancia de un punto a una recta.

El diálogo inicial entre Carlos y Daniela muestra un argumento deductivo incompleto cuyo dato es que la distancia del punto a cada lado de un ángulo es igual. La exploración teórica que hacen buscando una garantía que se relacione con dicho dato refleja el aspecto teleológico. Daniela establece como garantía la definición de distancia de un punto a una recta [59] justificando su decisión porque tanto la conjetura como la definición tienen el mismo antecedente. Carlos propone como garantía la definición de bisectriz de un ángulo [60], la cual posteriormente ambos rechazan.

En seguida, por sugerencia del profesor, Carlos representa la situación con lápiz y papel (figura 3), a fin de continuar la justificación de la conjetura. En el siguiente diálogo, hacen referencia a dicha representación.

Figura 3 Bosquejo de la situación



98.	Daniela:	[...] Si la distancia de un punto *K* ¿cierto?
99.	Carlos:	Sí.
100.	Daniela:	A cada lado de un ángulo. Entonces, *C, Y* y *Y, A*, entonces los colocamos con...
101.	Carlos:	[Escribe sobre una hoja blanca]. $\overline{CY}$ y $\overline{YA}$.
102.	Daniela:	Si la distancia... pues eso es lo que sabemos.
103.	Carlos:	¿Qué es lo que tenemos que concluir? El punto está sobre la bisectriz. O sea, que aún no sabemos la bisectriz. O sea, no hemos sacado esto [borra el rayo que parece ser la bisectriz del $\angle CYA$]. Aún no hemos sacado esto. Hasta el momento sabemos esto.
		[...]
108.	Daniela:	Entonces lo que sabemos lo podríamos escribir así: escribir la distancia de... la distancia del punto *K* a *C, Y* y *Y, A*, ¿no? Pues eso es lo que sabemos.

[...]

112.	Daniela:	Ah... espere, espere, argumentemos bien.
		[...]
116.	Daniela:	Es lo que sabemos. La distancia del punto *K* es igual a los lados del ángulo que son *C, Y* y *Y, A*.

En el diálogo anterior, cuando Carlos y Daniela revisan de nuevo el antecedente de la conjetura observando la representación hecha en lápiz y papel, se evidencia el aspecto comunicativo, pues [101] Carlos simboliza correctamente aquello a lo que Daniela se refiere [100] sobre los segmentos. La intervención [103] corresponde al aspecto epistémico, pues Carlos distingue claramente entre lo dado y la conclusión de la conjetura, a tal punto que Carlos borra el rayo que quieren mostrar que es la bisectriz del $\angle CYA$ porque, según él, aún no saben si la bisectriz existe. Aquí se identifica lo que denominamos *conflicto epistémico,* porque Carlos no comprendió que dibujar el rayo no significa que tiene la propiedad de ser bisectriz, cuestión que debe justificar. Puesto que este conflicto se presentó nuevamente en los episodios 3 y 4, el profesor tuvo que intervenir para aclarar la situación. La intervención [112] de Daniela no tiene que ver con la formulación de un argumento, sino que se refiere, según afirma en [116], a establecer ideas claramente, utilizando los nombres de los elementos geométricos involucrados (aspecto comunicativo).

Para seguir con la justificación de la conjetura, Dana presta atención a lo que Daniela dice y escribe en la columna *Qué sé* de la tabla: "La distancia del punto *K* es igual a $\overline{CY}$ y $\overline{YA}$". En seguida, Carlos propone otra idea para escribir en esta columna.

128.	Carlos:	[Le susurra a Daniela]. Y, ¿por qué no cogemos, primero, digamos es igual a la distancia de ese... y sacamos un *Qué uso*, un *Qué concluyo*? Y luego, sacamos con el otro. ¿No nos queda más fácil?
129.	Profesor:	Carlos, otra vez, porque no le alcanzamos a escuchar.
130.	Carlos:	Que digamos que mejor escribimos, o sea, no escribir los dos segmentos [rayos del $\angle CYA$] al tiempo, sino escribir el primero, sacar el que *Qué uso, Qué concluyo*. Luego, escribimos con el otro lado casi lo mismo.

La idea de Carlos [128] refleja el aspecto teleológico de su comportamiento racional, porque formula un plan para iniciar la justificación de la conjetura que consiste en establecer una garantía y una conclusión, correspondiente a los datos que tiene. Luego, aclara su estrategia [130]: consiste en formular dos argumentos de tipo deductivo, uno con respecto al $\overline{CY}$ y otro con respecto al $\overline{YA}$ (datos).

4.2. Episodio 2: Mencionan el aspecto relacionado con la medida

El profesor interviene para redirigir el trabajo que deben desarrollar los estudiantes, porque no saben cómo escribir las ideas que hasta el momento han expresado. Para ello, pregunta: "¿gráficamente cómo es la distancia del punto *K* a cada lado del ángulo?" Por un lado, Carlos señala la representación hecha sobre la hoja (figura 3) y responde: "Igual, gráficamente". Por otro lado, Daniela señala los segmentos de la representación mencionada y dice: "Vemos que tiene la misma distancia a cada lado del ángulo". Luego, Carlos y Daniela amplían esa idea.

162.	Carlos:	[Escribe sobre la hoja en la que representó inicialmente la conjetura: La distancia del punto *K* es igual a la dis. Luego borra: es igual a la dis]. ¿Cómo se escribe congruente?
		[...]
166.	Daniela:	Ah, Gordo, ¿será que no se le puede colocar una medida a eso? [Señala los segmentos que trazó anteriormente].
167.	Carlos:	Pues, se puede. Pero, ¿para qué? O, ¿para qué vamos a usar la medida? Porque de poder, sí se puede y acá ya lo tenemos medido [indica la longitud de los segmentos en la pantalla del computador].
168.	Daniela:	Pues podríamos colocar que la distancia del punto *K* es 5 digamos 5 cm al segmento *C, Y*. Y eso es lo que sabemos [...]
169.	Carlos:	Y, ¿qué usamos?
		[...]
172.	Daniela:	Ayyy... segmentos congruentes.
173.	Carlos:	Aaaah, entonces ¿sí ve que es por la congruencia?

[...]

181. Daniela: Ah, sí son segmentos, pero que no están nombrados.

182. Carlos: Claro que están nombrados.

183. Daniela: ¿Esto? [Señala un segmento con extremo el punto *K*].

184. Carlos: El segmento se llama *Y, C* y el otro *Y, A* [señala con el lápiz los extremos de $\overline{YC}$ y $\overline{YA}$].

185. Daniela: No sea bobo. Yo estoy diciendo estos segmentos [retiñe los dos segmentos cuyo extremo es el punto *K*].

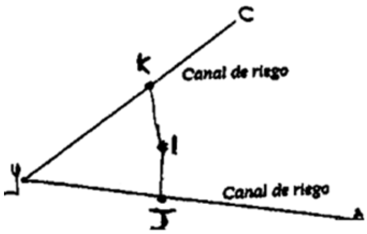
186. Carlos: Pues, lo mismo, ¿no?

187. Daniela: No, porque debe tener un nombre diferente [a los lados del $\angle CYA$].

En [162] Carlos intenta redactar el primer argumento de la justificación. Al borrar la expresión "es igual a la dis" y preguntar "¿cómo se escribe congruente?", se puede ver la preocupación que tiene por escribir su idea empleando la notación matemática establecida (aspecto comunicativo). Al analizar la pregunta que hace Daniela en [166], sin tener en cuenta las siguientes intervenciones, es difícil decidir si esta intervención es de carácter teleológico o epistémico. Es teleológico si Daniela está sugiriendo colocarle una medida específica, porque así podrían resolver el problema en el que se encuentran. Pero, es epistémico si está preguntando si es teóricamente aceptable asignarle medidas a los segmentos para poder proceder con la justificación. Después de que Carlos cuestiona el plan de Daniela [167], él le indica que sí se puede colocar medidas a los segmentos; la explicación que él hace es con respecto al asunto teleológico ya mencionado. Sin embargo, la intervención que ella hace en [168] parece indicar que no entiende por qué es inútil asignar medidas a los segmentos, pues reitera su plan (aspecto teleológico), esta vez diciendo que la distancia del punto *K* al $\overline{CY}$ es 5 cm. Más adelante, en el episodio 5, Carlos le aclara a Daniela por qué no se puede colocar una longitud específica a los segmentos, explicación relacionada con el asunto epistémico. Cuando ella indica que los segmentos congruentes no están nombrados, Carlos refuta su planteamiento, pues asigna a estos los nombres de los lados del $\angle CYA$. Por tal razón, ella le explica [185] que *C* y *A* no son necesariamente los extremos del segmento (aspecto comunicativo).

Atendiendo lo que destaca Daniela, Carlos nombra los extremos de cada segmento que están en los lados del ángulo y cambia el nombre del punto común sobre la representación que acompaña el enunciado del problema, donde ella había hecho algunos trazos (figura 4).

Figura 4 Representación del problema con puntos nombrados



193.	Daniela:	[...] Vea. Lo que sabemos. Entonces lo que sabemos... ¡ay, la distancia! Digamos que este tiene 5 cm y acá 5 cm [asigna al $\overline{KI}$ y al $\overline{IJ}$ la longitud de 5 cm].
194.	Carlos:	Nooo...
195.	Daniela:	[Escribe en el esquema a tres columnas]. La distancia del punto *K* es 5 cm al segmentooo [escribe en la columna *Qué sé* para completar el primer argumento: La distancia del punto *K* es 5 cm]. ¡No! Pailas. No se puede. [Risas].
196.	Carlos:	El segmento *I, K* y el segmento *I, J* son congruentes. Sabemos eso. ¿Por qué? Porque miden lo mismo.
197.	Daniela:	Entonces utilizaríamos la definición de segmentos congruentes.
198.	Carlos:	Ah. Hágale.
199.	Daniela:	Uyyyy. ¡Ah! Si no es eso, mejor dicho [borra en la columna *Qué sé* del primer argumento: La distancia del punto *K* es 5 cm]. ¿Qué? ¿Qué sabemos?
200.	Carlos:	Que el segmento *K, I* y el segmento *I, J* son congruentes.
201.	Daniela:	Yo no sé. [Aunque muestra duda en la afirmación de Carlos, escribe en la columna *Qué sé* del primer argumento: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$; y en la columna *Qué uso:* Definición segmentos congruentes].
		[...]

204.	Carlos:	¿Cómo así la misma distancia? Daniela.
205.	Daniela:	¿Cómo así?
206.	Carlos:	Pues sí. Dice que: [lee la definición de segmentos congruentes] los segmentos congruentes son dos segmentos...
207.	Daniela:	Que tienen la misma medida.
208.	Carlos:	Y la misma distancia, ¿no?

La objeción que le hace Carlos a Daniela, sobre asignarle una medida específica a la longitud de cada segmento, podría ser de índole epistémica como ya se mencionó. En [196] Carlos plantea como conclusión de un argumento, que está construyendo la congruencia entre el $\overline{IK}$ y el $\overline{IJ}$, y como datos, que esos segmentos tienen la misma longitud. Daniela, en [197], proporciona como garantía la definición de segmentos congruentes. La intervención de Daniela muestra una preocupación epistémica, porque proporciona la garantía que Carlos no incluyó en su argumento. Ahora, respecto a las intervenciones [204-208], hay una preocupación epistémica de Carlos, pues, al leer la definición de segmentos congruentes, se cuestiona si hablar de "la misma medida", como aparece en esta definición, es lo mismo que "igual distancia", como lo menciona el problema.

A continuación Daniela y Carlos revisan nuevamente el argumento deductivo anterior.

234.	Carlos:	Esto [señala $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$ en la columna *Qué sé*] lo hubiéramos escrito acá [señala la columna *Qué concluyo*], acá [señala la columna *Qué sé*] tendríamos que haber escrito: *KI*...
235.	Daniela:	Que tienen la misma medida.
236.	Carlos:	Son congruentes. Tenemos que escribir... ¡Ay, Dios mío!
237.	Daniela:	Acá, en *Qué concluyo*, es eso [escribe en la columna *Qué concluyo* del primer argumento: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$. Luego, borra dicha congruencia de segmentos en la columna *Qué uso*]. ¿Qué sabemos? Que *K*, *I* tiene la misma medida [escribe en la columna *Qué sé*: $\overline{KI}$].
238.	Carlos:	No.
239.	Daniela:	¿No? Está bien. [Borra en la columna *Qué sé*: $\overline{KI}$].
240.	Carlos:	Escriba esto [*KI* tiene la misma medida que *IJ*], sólo que escrito, escrito.

241. Daniela: Por eso, y ¿qué estoy haciendo?

242. Carlos: Tienen la misma medida.

[...]

251. Daniela: [Escribe en la columna *Qué se:* $\overline{KI}$ tiene la misma medida].

[...]

258. Daniela: [Lee la conjetura]. Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual, entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. Pero como todavía no podemos utilizar esa parte del *entonces* [señala el consecuente de la conjetura], porque eso es lo que debemos concluir, al final.

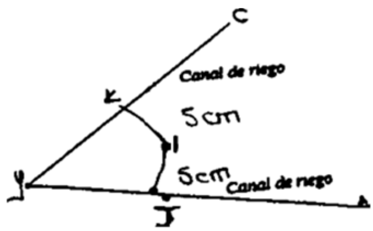
259. Carlos: Entonces, debemos saber esto [$\overline{KI}$ tiene la misma medida que $\overline{JI}$], solo que lo debemos saber escribir [realiza una marca que señala el inicio y el final del antecedente de la conjetura: *Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual*].

Con la revisión del primer argumento deductivo, Carlos se da cuenta del error que cometieron al consignarlo en el esquema [234]. En este caso, se tiene el aspecto epistémico, porque se da cuenta de que la manera como han colocado los datos y la garantía no puede dar lugar a la conclusión que ellos querían. Luego, se evidencia el aspecto comunicativo cuando Carlos solicita que se escriba "*KI* tiene la misma medida que *IJ*" (datos) de manera matemática [240] y ante la imposibilidad de hacerlo lo escriben con palabras. Mientras que Daniela afirma en [258] que no se puede usar la conclusión de la conjetura, Carlos dice que se debe partir del antecedente [259]. Se evidencia en ambos casos el aspecto epistémico, porque ellos reconocen cuál es el papel de cada parte de la conjetura. Además, en esta última intervención, surge de nuevo la preocupación de carácter comunicativo para expresar la equidistancia de manera matemática.

4.3. Episodio 3: Formulan el segundo y tercer argumento relacionado con la situación

En un primer instante, Carlos propone involucrar ángulos, comprobando empíricamente en la calculadora la perpendicularidad entre los segmentos con extremos en el punto y en los lados del $\angle CYA$. Por su parte, Daniela señala que no es necesario revisar dicha propiedad, porque en la construcción se empleó la herramienta de recta perpendicular. Luego, ella traza nuevamente en la representación en papel los segmentos, de modo que se vea que se cumple esa propiedad (figura 5). En un segundo momento, tanto Daniela como Carlos formulan argumentos distintos en torno a la perpendicularidad mencionada. A continuación, Carlos plantea el segundo argumento ligado a la situación del problema.

Figura 5 Representación del problema con segmentos perceptualmente perpendiculares a los lados del ángulo



358. Carlos: [...] El ángulo *I, K* y *C* sabemos que mide 90° [borra de la columna *Qué sé* del segundo argumento: *IK*. Luego escribe: ∠*IKC* 90°]. ¿Cierto?

359. Daniela: ¿Cuál ángulo? ¿Cuál está haciendo? Ah, sí, sí... ya vi cuál ángulo es.

360. Carlos: Y el ángulo *I, K* y *Y* también mide 90° [continúa escribiendo en la columna *Qué sé*: ∠*IKY* 90°].

361. Daniela: Ajá.

362. Carlos: Puedo sacar esto [señala la columna *Qué uso* del segundo argumento: definición de rectas perpendiculares]. ¿Cierto?

363. Daniela: Y llegamos a que...

[...]

368. Carlos: Entonces, podemos concluir que la recta *I, K* [escribe en la columna *Qué concluyo* del segundo argumento: $\overline{IK} \perp$] es

369. Daniela: El segmento.

370. Carlos: El segmento *I, K*

371. Daniela: Es perpendicular a

[...]

Carlos: [...] *Y, C* [...]. Eso es lo que ya [...] concluimos. Y se puede sacar la misma conclusión con el de abajo [$\overline{IJ} \perp \overline{YA}$].

Carlos muestra el aspecto epistémico del comportamiento racional, porque elabora un argumento deductivo completo de la siguiente manera: escribe $\angle IKC$ 90°, $\angle IKY$ 90°, [358, 359] respectivamente (datos); señala la definición de rectas perpendiculares escrito en la columna *Qué uso* (garantía) [362], y escribe que $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ (conclusión) [368-384]. En [384] él propone que también se puede concluir que $\overline{IJ} \perp \overline{YA}$, pero no lo registra en el esquema-deducción como tercer argumento (aspecto teleológico). Pese a que Daniela no contribuyó en la elaboración de este argumento, ella se preocupa porque Carlos exprese correctamente su idea, pues le corrige el término recta por el de segmento [369], que es lo que involucra este argumento (aspecto comunicativo).

Luego, Carlos y Daniela escriben el tercer argumento.

394. Carlos: La definición de ángulos congruentes. Cópiela que esa es la que vamos a hacer. La que vamos a usar.

395. Daniela: [Escribe definición de ángulos congruentes en la columna *Qué uso*, correspondiente a la tercera línea].

396. Carlos: Aaaah. Pues lo mismo que acá [señala la columna *Qué sé* del segundo argumento: $\angle IKC$ 90°, $\angle IKY$ 90°].

397. Daniela: Que son ángulos rectos. Algo así había dicho.

398. Carlos: Sí.

[...]

405. Daniela: Ya, ya, ya. [Escribe $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos]. ¿Entonces? ¿Qué concluiríamos? Que el ángulo *C, K, I* es congruente con *Y, K, I* [escribe $\angle CKI \cong \angle YKI$]. Tenemos tres hipótesis.

Carlos y Daniela desarrollan un argumento deductivo completo; ella no lo escribe como lo establecen porque, en lugar de escribir que $\angle CKI$ y $\angle YKI$ tienen medida igual a 90°, escribe que dichos ángulos son rectos (datos). Al inicio de este diálogo, Carlos le solicita a Daniela que coloque como garantía la definición de ángulos congruentes [394] y, al final, Daniela escribe que $\angle CKI \cong \angle YKI$ (conclusión) [405]. Lo que hace Carlos en [394] evidencia el aspecto epistémico, porque proporciona un elemento teórico para la formulación de este argumento. Daniela intenta decir que deben determinar cómo van a organizar la justificación con los tres argumentos escritos en la hoja [405], lo cual es muestra del aspecto teleológico.

En el siguiente diálogo, ellos hacen referencia a los tres argumentos completos que diligenciaron en el esquema-deducción y que no están encadenados para poder justificar la conjetura (figura 6).

Figura 6 Transcripción de los tres primeros argumentos escritos por los estudiantes

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
$\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$	D. Segmentos congruentes	$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$
$\angle IKC$ 90° $\angle IKY$ 90°	D. Rectas perpendiculares	$\overline{IK} \perp \overline{YC}$
$\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos	D. Ángulos congruentes	$\angle CKI \cong \angle YKI$

408.	Carlos:	O sea, con base en esas hipótesis, tenemos que sacar más hipótesis para llegar a esta conclusión.
409.	Profesor:	¿Cuál, Carlos?
410.	Carlos y Daniela:	A la de: el punto está sobre la bisectriz del ángulo.
411.	Carlos:	Que aún no la tenemos.
412.	Daniela:	Ajá. Hasta ahora estamos haciendo lo del *Si*.
413.	Carlos:	Pero la podemos sacar.

Esta conversación es de un alto nivel epistémico, puesto que los dos reconocen tanto las partes de la conjetura que están tratando de justificar como el proceso que deben desarrollar para llegar de una parte a la otra. La intervención de Carlos en [408] se trata de un asunto epistémico, porque sabe que para justificar la conjetura se necesitan más argumentos aparte de los tres argumentos que ya se formularon. En [411] parece ser que se presenta nuevamente el conflicto epistémico de Carlos respecto a la existencia de la bisectriz.

4.4. Episodio 4: Asuntos relacionados con el primer paso de la justificación

Para continuar con la construcción de la justificación, Carlos les recuerda a sus compañeras que, con base en lo que se sabe (antecedente de la condicional), se debe justificar lo que plantea la conjetura (consecuente de la condicional). Cuando él menciona que se pueden formular más argumentos, Daniela propone elegir uno de los tres argumentos completos escritos en el esquema como primer paso de la justificación (aspecto teleológico). Después, Daniela y Carlos identifican algunos elementos geométricos en la construcción hecha en el computador.

463.	Carlos:	[...] Aquí hay otros ángulos congruentes.
464.	Profesor:	¿Cuáles?
465.	Carlos:	Claro.
466.	Daniela:	Dos triángulos.
467.	Carlos:	No. Dos ángulos congruentes aparte de los que usted dijo.
468.	Daniela:	Yo veo dos triángulos.
469.	Carlos:	Yo veo dos ángulos. *I, J, A*. *I, K, C*. Son dos ángulos congruentes.
470.	Daniela:	Y yo...
471.	Carlos:	Y ambos miden 90°.
472.	Daniela:	Y yo veo que son dos triángulos congruentes: *J, Y, I* y *I, K, Y*.
		[...]
475.	Carlos:	No, porque esta línea aún no existe [indica con el cursor la bisectriz del ángulo].
476.	Daniela:	Ocúltela.
477.	Carlos:	Esta línea aún no existe [oculta el rayo] [...]

Al inicio de este diálogo, se evidencia un asunto teleológico, porque Carlos y Daniela recurren a la estrategia de describir qué se ve en la representación. Pero el conflicto epistémico de Carlos sobre la existencia de la bisectriz afecta el desarrollo de la justificación cuando oculta el rayo. Como resultado, se deja de lado la congruencia de los dos triángulos señalada por Daniela y que es parte esencial de la justificación. Este conflicto, que se convirtió en un obstáculo para desarrollar la justificación, hizo que el profesor les aclarara a los estudiantes que dibujar el rayo no implicaba asegurar la propiedad de ser bisectriz.

Después, el profesor interviene para destacar que los tres argumentos que ellos escribieron en la hoja podrían ser útiles en la construcción de la justificación. Además, informa que la propuesta de Daniela de comenzar con el primer argumento que ellos establecieron (la congruencia de los segmentos correspondientes) es correcta, pero que debe explicar por qué lo es. Inmediatamente, Carlos le pide a Daniela que justifique las razones de su elección.

480.	Carlos:	Justifique. La que aplaude. Justifique. Porque nosotros le estábamos pidiendo la justificación y usted no nos la quiso dar.
481.	Daniela:	Pues yo decía que era por intuición.
482.	Carlos:	No, porque usted debe decir un por qué, una razón, porque nosotros no vamos a decir: "por intuición, no mire, ahí hay es una bisectriz intuicitivamente" [intuitivamente].
483.	Dana:	"Intuicitivamente" [risas]. Sí.
484.	Profesor:	[...] pero por qué escribiste como... esa es la primera afirmación de la justificación para esa conjetura. ¿Por qué planteaste esta primera afirmación?
		[...]
494.	Daniela:	Pues yo sé por lo que [el punto] debía tener la misma distancia a cada lado del ángulo, entonces pues sí, porque estos son los segmentos [$\overline{KI}$ e $\overline{IJ}$].

En este caso se evidencia el aspecto epistémico del comportamiento racional cuando Carlos exige que Daniela dé una explicación teórica y no la que ella ofrece.

4.5. Episodio 5: Elaboran el segundo y tercer paso de la justificación

Para el desarrollo del segundo paso de la justificación, el profesor indaga sobre qué van a escribir en el esquema-deducción.

677.	Daniela:	La definición de distancia de un punto a una recta [escribe en la columna *Qué uso* del segundo paso: Definición Distancia de un punto a una recta]. Gordo, ahora concluya.
678.	Carlos:	No, pero dígame usted por qué escribió esa definición. Pues sí, necesito saber para concluir. Si el ángulo... ¿qué dice ahí? [...]
679.	Daniela:	*I, J, Y*
680.	Carlos:	Si el ángulo *I, J, Y* y el ángulo *I, K, I* [$\angle IKY$] son ángulos rectos. No son ángulos rectos. No sabemos si son ángulos rectos.
681. - 685.		[Carlos pide que se borre en la columna *Qué sé* del segundo paso: $\angle IJY$ y $\angle IKY$ son ángulos rectos. Pero Dana borra lo escrito en la columna *Qué uso* del mismo paso: Definición Distancia de un punto a una recta].

Al inicio de este diálogo, las intervenciones de Carlos reflejan un control epistémico en el proceso de justificación. Por un lado, le pide a Daniela [678] una explicación de por qué se usa la definición de distancia de un punto a una recta como garantía, requisito para que él pueda establecer la conclusión respectiva. Por otro lado, Carlos comprende que en la columna *Qué sé* se escribe solamente aquello que ha sido conclusión de un paso anterior, razón por la cual solicita que se borre: "$\angle IJY$ y $\angle IKY$ son ángulos rectos", pues, según él, no se sabe si dichos ángulos son rectos.

Daniela escribe nuevamente como garantía del segundo paso la definición de distancia de un punto a una recta y le pregunta a Carlos cuál es el dato correspondiente. Enseguida él exige un control en la escritura de lo que, creen ellos, es el segundo paso de la justificación.

696.	Carlos:	Hay que utilizar un *Qué sé* antes de *Qué uso*. [...]
697.	Daniela:	Que, ¿qué podría concluir?
698.	Carlos:	¿Cómo así? Pero primero hay que tener un *Qué sé*, ¿no?
699.	Daniela:	Ahí es donde se sabe de por qué es perpendicular, pero no sé. La distancia de un punto *P* a una recta *m* [lee la definición de distancia de un punto a una recta]. Ah, entonces es esto, Gordo. La distancia, digamos de un punto *P* a una recta *m*, ¿no? [En la representación del problema, retiñe el punto *I* que tiene igual distancia a cada uno de los lados del $\angle CYA$]. Pues yo digo, es la

longitud del segmento perpendicular [continúa leyendo la definición]. O sea, la medida del segmento, ¿no? longitud del segmento. Desde *P* hasta *m*. O sea, la medida de este segmento [señala el $\overline{KI}$]. Pues eso es lo que yo

[...]

705 Carlos: No le entiendo. No, no sé. No entiendo.

706. Daniela: Pues vea. Que es que acá dice: la distancia de un punto *P* [lee la definición distancia de un punto a una recta.] entonces acá se llama punto *I* [señala en la representación del problema]. Entonces, es como si se llamara él *P* a una recta *m* [continúa leyendo la definición.], esta es la recta [señala el $\overrightarrow{YC}$], digamos que es la *m*. Entonces es la longitud del segmento perpendicular [sigue leyendo]. O sea, la medida del segmento [$\overline{IK}$] desde *P* hasta *m*. Eso es lo que están diciendo.

[...]

711. Carlos: Ah, ¿qué sabemos?

712. Daniela: Entonces sabemos que... la longitud de *KI* es 5 cm [señala la representación del problema]. ¿No?

713. Carlos: No, porque puede ser, puede ser 5, pueden ser 20, pueden ser 100 cm, pueden ser...

[...]

753. Daniela: Pero, ¿cuál es la medida?

754. Carlos: Aaah, pues la medida es cualquiera.

755. Daniela: Entonces sería *IK*.

Las intervenciones de Carlos [696, 698] se relacionan con el aspecto epistémico, porque él afirma que primero es necesario reconocer los datos antes de establecer la garantía. Sin embargo, este comportamiento también se puede considerar como comunicativo, porque, al registrar cada paso de la justificación en el esquema-deducción, se debe completar de izquierda a derecha. Las intervenciones de Daniela [699, 706] también reflejan el aspecto epistémico, porque justifica el uso de la definición de distancia de un punto a una recta (garantía) al relacionar los elementos geométricos de la representación del problema con los mencionados en la definición. En cuanto a los datos que exige Carlos, Daniela retorna al trabajo empírico ocurrido en el episodio 5 y menciona que "la longitud de *KI* es 5 cm". Aunque Carlos le aclara que el segmento puede tener cualquier longitud [713, 754] (aspecto epistémico), la pregunta que ella hace en [753] permite afirmar que no ha entendido que la medida es irrelevante. La aceptación de Daniela de usar el símbolo *IK*, establecido en clase para representar la longitud del segmento, es una muestra del aspecto comunicativo y de su aceptación de la irrelevancia de usar un valor específico.

En el diálogo que sigue, los estudiantes completan el segundo paso y proponen un tercer paso de la justificación.

798. Daniela: [En la columna *Qué sé* del segundo paso, cambia *IC* por *IK*]. Y ahora, ¿qué concluimos?

799. Carlos: Ay, yo no sé [susurra]. Tenemos que llegar a que el punto *P* es perpendicular al segmento este [señala el $\overline{IK}$ en la representación de Carlos]. Eso es a lo que tenemos que llegar.

800. Daniela: ¿Qué?

801. Carlos: Pues según, si utilizamos esta definición tenemos que concluir que el punto *I* es perpendicular a esto [señala el $\overrightarrow{YC}$].

[...]

804. Profesor: ¿Un punto puede ser perpendicular a otro?

805. Carlos: Tiene que ser perpendicular a un segmento. Pero...

806. Profesor: Miren la figura y díganlo bien.

[...]

811. Carlos: Que el segmento *I, K* es perpendicular al segmento *Y, C*.

[...]

814. Daniela: *I, K* es perpendicular a *Y, C* [En la columna *Qué concluyo* del segundo paso, escribe $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$]. Rayo es con una cosa así [flecha en la parte superior], ¿cierto? Una flechita así. Ya. Uyyy, uy no. Ahora. Ahora escribimos eso [$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$] acá [en la columna *Qué sé* del tercer paso].

[...]

817. Carlos: Se hace lo mismo con el de abajo [con el $\overrightarrow{YA}$ para plantear que $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$].

[...]

822. Daniela: Sí. [Como tercer paso, escribe en la columna *Qué sé: IJ* distancia del punto a la recta; *Qué uso:* Definición Distancia de un punto a una recta; *Qué concluyo:* $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$]. Ya. Ahora, eso sí lo escribimos aquí abajo [en la columna *Qué sé* del cuarto paso], esas conclusiones. Que es ahora lo que sabemos, ¿no?

Para completar el segundo paso, Carlos reconoce que la conclusión de este paso debe involucrar la perpendicularidad, pero él no se expresa correctamente [799, 801]. Esto muestra un asunto problemático de tipo comunicativo que el profesor saca a la luz [806]. La intervención de Daniela en [814] evidencia dos aspectos: el comunicativo, pues se preocupa por usar correctamente la notación para rayos, y el epistémico, porque menciona que la conclusión que acaban de obtener pasa a ser ahora el dato de otro paso. Así se evidencia que ella comprende que una justificación es el encadenamiento de argumentos. De esta manera, queda establecido el segundo paso de la justificación. Carlos rechaza la propuesta de Daniela de colocar como dato del tercer paso $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y propone formular el mismo argumento con respecto al $\overline{IJ}$ y el $\overrightarrow{YA}$ (aspecto teleológico). Pero es Daniela quien lo escribe en el esquema como el tercer paso [822] (aspecto epistémico): datos, *IJ* distancia del punto a la recta; garantía, definición Distancia de un punto a una recta; conclusión, $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$. Cuando termina de escribir este paso, se reitera la comprensión de Daniela de lo que es una justificación cuando sugiere colocar como datos en otro paso las conclusiones que acaban de obtener (aspecto epistémico), lo cual la lleva a proponer un plan para continuar dicha justificación (aspecto teleológico).

5. CONCLUSIONES

Con el uso del marco teórico integrado por los modelos de Toulmin y de Habermas, propuesto por Boero *et al.* (2010, p. 180), se puede concluir que dos de los estudiantes tienen un comportamiento argumental y racional que les permitió justificar una conjetura, pese a su poca madurez matemática. Se cree que esto fue posible en el contexto escolar, debido a la aproximación metodológica usada, que tuvo en cuenta lo que proponen Perry *et al.* (2013, p. 26) para favorecer la interacción social y, a la vez, la argumentación. Para asegurarlo, sería necesario realizar otra investigación en la que se indagara sobre el comportamiento de un grupo de estudiantes, miembros de un curso desarrollado con otra metodología, ante un problema abierto semejante.

Particularmente, con el análisis del comportamiento argumental de los estudiantes, se obtuvieron dos resultados. Primero, que es usual que los estudiantes se apoyen para construir argumentos. Por ello es necesario considerar dentro de la tipología descrita en el marco de referencia si los argumentos que construyen son *argumentos individuales* o *argumentos colectivos*. De esta manera, se puede analizar si la argumentación, al formular y justificar una conjetura, se ve favorecida por un trabajo individual o colectivo entre sus integrantes. Segundo, la justificación que construyeron los estudiantes no fue lineal. Inicialmente elaboraron argumentos ligados con la situación del problema, pero que no formaban una cadena deductiva; luego, plantearon argumentos que fueron pasos de la justificación.

Para realizar el análisis del comportamiento racional de los estudiantes, según la adaptación que Morselli y Boero (2009, p. 212) hacen del modelo de Habermas, fue necesario precisar con mayor detalle las acciones que evidencian los aspectos epistémico, teleológico y comunicativo, ya que estos investigadores solamente los caracterizaron de manera general. Esto llevó a establecer algunos indicadores puntuales de cada aspecto del comportamiento racional (cuadro 3). Se presentan aquí como otro resultado de la investigación, pues podrían ser útiles en futuras investigaciones que pretendan caracterizar la participación de los estudiantes cuando están aprendiendo a demostrar, dando respuesta a cuestionamientos tales como: ¿se preocupan por validar sus ideas? (aspecto epistémico), ¿proponen planes que los lleven a construir una conjetura y demostrarla? (aspecto teleológico), ¿expresan sus ideas de forma clara y concisa usando el lenguaje matemático? (aspecto comunicativo).

Como conclusión general, se puede decir que los dos estudiantes tuvieron un comportamiento racional y argumental que refleja que aprendieron a demostrar. Las acciones de los estudiantes que dan cuenta del comportamiento racional no surgen de forma autónoma ni inmediata, porque son, tal vez, producto de lo que se vivió en clase durante la preparación para el tercer momento; son necesarias para poder construir justificaciones matemáticamente correctas. Las acciones que se refieren al aspecto epistémico, porque apoyan la construcción de argumentos completos correctos y el encadenamiento de ellos para que, partiendo de la hipótesis de la conjetura, puedan deducir la tesis respectiva. También porque obligan a desarrollar un trabajo sujeto al sistema teórico que se tiene, siguiendo las reglas de deducción que establece la comunidad matemática. Las acciones

Cuadro 3 Indicadores de cada aspecto del comportamiento racional

Aspecto	Indicadores usados
Epistémico	• Proporciona garantías provenientes del sistema teórico para la formulación de argumentos. • Elabora argumentos completos. • Reconoce las partes de una proposición condicional (si-entonces) y el papel de cada una. • Comprende el proceso para justificar una conjetura con el uso del esquema-deducción. • Comprende la información dada en un elemento del sistema teórico cuando lo usa como garantía para construir un argumento. • Solicita explicaciones de las ideas que permiten justificar una conjetura. • Deduce información correcta de una representación gráfica.* • Comprende que el uso del nombre de un punto de una figura es reconocer que este tiene ciertas propiedades.
Teleológico	• Propone exploraciones teóricas sobre el sistema teórico conformado para establecer la garantía que se relaciona con los datos de un argumento. • Propone un camino a seguir para construir la justificación de una afirmación. • Sugiere exploraciones empíricas, asignándole medidas a las figuras geométricas de una representación gráfica. • Consigue información geométrica de una figura por medio de la visualización.
Comunicativo	• Expresa correcta y brevemente las ideas empleando la notación matemática establecida. • Usa el lenguaje y la notación geométrica precisa cuando se refiere a elementos geométricos involucrados en una situación o representación gráfica. • Se refiere a elementos del sistema teórico local con los nombres correctos. • Le asigna el estatus teórico correcto a los elementos del sistema teórico. • Registra correctamente, en una representación gráfica, la información que conoce.

* La propuesta de este indicador se relaciona con el conflicto epistémico de Carlos respecto a la existencia de la bisectriz.

relacionadas con el aspecto teleológico, porque favorecen la comprensión de las relaciones geométricas que se registran en la conjetura. Además, las exploraciones empíricas o teóricas pueden proporcionar ideas para justificar la conjetura. Finalmente, las acciones relativas al aspecto comunicativo facilitan la interacción, pues logran comunicar las ideas de manera clara y concisa, apoyándose correctamente en representaciones geométricas. Si un profesor está interesado en enseñar a demostrar, entonces debe, además de diseñar tareas que motiven a los estudiantes a hacer actividad demostrativa, fomentar y exigir las acciones descritas en los indicadores. Con ello favorece un comportamiento racional de sus estudiantes que lleva a realizar comprensivamente una de las actividades matemáticas más importantes: demostrar.

Para finalizar este apartado, cabe resaltar que uno de los integrantes del grupo se dedicó exclusivamente a escribir en la hoja que se debía entregar lo que los demás miembros le indicaban. Es decir, no interactuó con los estudiantes ni aportó argumentos para justificar la conjetura. Surgen por lo tanto algunas preguntas. ¿Será que la presencia de una tercera persona facilitó la interacción entre las otras dos? Sin ella, ¿habrían trabajado colaborativamente las otras dos personas o lo habrían hecho individualmente de manera competitiva? Es decir, ¿se habría afectado la comunicación continua que tuvieron dos de los estudiantes mediante la cual elaboraban sus argumentos y propusieron los planes para poder justificar la conjetura?

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., F. Olivero, D. Paola y O. Robutti (2007), "The transition to formal proof in geometry", en P. Boero (ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*, Rotterdam, Holanda, Sense Publishers, pp. 305-323.

Balacheff, N. (2000), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas,* Bogotá, Colombia, Universidad de los Andes, Una empresa docente.

Boero, P., R. Garuti y E. Lemut (2007), "Approaching theorems in grade VIII. Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them", en P. Boero (ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice,* Rotterdam, Holanda, Sense Publishers, pp. 249-264.

Boero, P., N. Douek, F. Morselli y B. Pedemonte (2010), "Argumentation and proof:

A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation", en M.F.F. Pinto y T.F. Kawasaki (eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Belo Horizonte, Brasil, PME, vol. 1, pp. 179-209.

Camargo, L., C. Samper y P. Perry (2006). "Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica", *Lecturas Matemáticas,* vol. 27 (especial), pp. 371-383.

Cohen, L. y L. Manion (1990), *Métodos de investigación educativa,* trad. de Francisco Agudo López, Madrid, España, Ediciones La muralla (primera edición en inglés, 1989).

De Villiers, M. (1993), "El papel y la función de la demostración en matemáticas", *Épsilón,* vol. 26, pp. 15-29.

Fonseca, J. y L.F. Lara (2013), *Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa,* tesis de maestría, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional.

Godino, J. y A.M. Recio (2001), "Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 19, núm. 3, pp. 405-414.

Jones, K. (2000), "Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 44, núms. 1-3, pp. 55-85.

Molina, Ó., C. Samper, P. Perry y L. Camargo (2011), "Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema", *Integración,* vol. 29, núm. 1, pp. 73-96.

Morselli, F., y P. Boero (2009), "Proving as a rational behavior: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof", en V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (eds.), *Proceedings of CERME 6,* Lyon, Francia, vol. 2, pp. 211-220.

Pedemonte, B. (2005), "Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration", *Recherche en Didactique des Mathématiques,* vol. 25, pp. 313-348.

Pedemonte, B. (2007), "How can the relationship between argumentation and proof be analysed?", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 66, 23-41.

Perry, P., C. Samper, Ó. Molina, L. Camargo y A. Echeverry (2012), "La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa", *Épsilon,* vol. 82, pp. 41-56.

Perry, P., C. Samper, L. Camargo y Ó. Molina (2013), "Innovación en un aula de geometría de nivel universitario", en C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje*, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 13-36.
Samper, C., Ó. Molina y A. Echeverry (2011), *Elementos de geometría*, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional.

DATOS DE LOS AUTORES

Luis F. Lara
Secretaría de Educación Distrital, Bogotá, Colombia
luisfernandolara26@yahoo.es

Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia
csamper@pedagogica.edu.co