Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria

Laura Conejo y Tomás Ortega

Resumen: El presente artículo describe un estudio teórico-práctico en el que se han analizado las actividades prácticas desarrolladas en las sesiones de matemáticas de un centro docente durante un periodo de cinco semanas. El objetivo del trabajo es configurar una herramienta de clasificación que, por un lado, permita analizar la adecuación de las actividades propuestas en un aula para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, por otro, la construcción de una buena colección de actividades por parte de los profesores de matemáticas. Para ello, hemos realizado un análisis de las concepciones de los términos "problemas" y "resolución de problemas" propuestas por varios autores y las clasificaciones de éstos realizadas por Borasi y Schoenfeld, y una primera clasificación de las actividades propuestas a alumnos de 3º y 4º (14-16 años) de Educación Secundaria Obligatoria. Hemos llegado a la conclusión de que las dos clasificaciones son insuficientes y esto nos ha llevado a una reformulación de ambas y a una nueva clasificación de las actividades descritas.

Palabras clave: problema, resolución de problemas, clasificación, matemáticas, tipología, elementos estructurales.

Abstract: This article describes a theoretical and practical study in which the practical activities carried out in the mathematics sessions at a school for a period of five weeks has been analyzed. The goal of this paper is to create a classification tool which allows, on the one hand, analyze if the activities proposed are appropriate for the learning and teaching process, and, on the other hand, select a good collection of mathematical activities by mathematical teachers. For that purpose, we have examined the conceptions of the terms "problem" and "problem solving" proposed by several authors and the classifications of these made by Borasi and Schoenfeld and a first classification of activities proposed

Fecha de recepción: 29 de diciembre de 2012; fecha de recepción: 31 de agosto de 2013.

to students of 3rd y 4th (14-16 years old) of Educación Secundaria Obligatoria. We conclude that both classifications were insufficient and we have, therefore, undertaken, firstly, a reformulation of both classifications and, secondly, a classification of the activities according to the new classifications.

Keywords: problem, problem solving, sorting, math, typology, structural elements.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas (RP) es un tema de investigación que ha recibido una atención especial de Didáctica de la Matemática, al menos desde la publicación de Polya (1945). Son numerosas las investigaciones realizadas en torno a este concepto, no sólo en Educación Matemática, sino en otras áreas, sin olvidar algunas herramientas de enseñanza basadas en la resolución de problemas (Aprendizaje Basado en Problemas). La importancia de la RP en el sistema educativo no es nueva, sino que se trata de una idea generalizada en el área científica, como se desprende de la siguiente cita: "La enseñanza en las ramas de ciencia tiene generalmente como fin alcanzar dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio" (Heyworth, 1999, p. 195).

Además, desde finales de la década de 1980, con la publicación de los Estándares Curriculares por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en 1989, las competencias PISA (OCDE, 1999) y el Danish KOM Project (DKP) de 1999 (Niss, 2002), la RP ha vuelto a acrecentar el interés por esta temática, sobre todo con la publicación de resultados de PISA 2003, donde se describen los marcos teóricos del proyecto y se vuelven a publicar con mayor énfasis las competencias matemáticas que deben ser adquiridas por los alumnos de estos niveles educativos, una de las cuales es *Plantear y Resolver Problemas*. Siguiendo el modelo de PISA, la RP ha sido incluida en los diferentes marcos curriculares, no sólo como metodología de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, sino como contenido en sí mismo, entre ellos en el currículo español de matemáticas. Por otra parte, el NCTM considera que saber matemáticas es saber resolver problemas y, como defiende Jonassen (2004), *aprender a resolver problemas es la destreza más importante que los estudiantes pueden aprender en cualquier lugar del mundo*. Así pues, consideramos que la RP es un contenido curricular de capital importancia y que la investigación de su enseñanza sigue siendo actual. Por esta razón, creemos que es interesante analizar ciertos aspectos que tienen que ver con su docencia como recurso vehicular para que los alumnos alcancen la correspondiente competencia. Con esta orientación nos formulamos las siguientes preguntas: ¿Cómo se trabaja la RP en el aula? ¿Los profesores eligen los mejores problemas y ejercicios para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos? ¿Dichos problemas contribuyen a desarrollar la capacidad resolutoria de los alumnos?

Todas estas cuestiones están fundamentadas en el fin último, que consiste en que estos alumnos adquieran la competencia de resolver problemas y, para ello, es crucial que los problemas planteados en la docencia sean adecuados para tal fin y nos preguntamos si lo son. Para dar respuesta a ésta y a las preguntas anteriores, necesitamos ciertos instrumentos de clasificación que nos permitan observar los problemas de forma global y desde diferentes puntos de vista. Por ello, hemos recurrido a diferentes marcos teóricos y curriculares para realizar una clasificación de los problemas propuestos en dos cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO): uno de 3º (14-15 años) y otro de 4º (15-16 años). Dichos problemas se registraron durante el periodo de prácticas del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Se trata de un máster profesional que deben cursar obligatoriamente todos los graduados que desean ser profesores en Educación Secundaria Obligatoria y no Obligatoria (12-18 años). La unidad de medida de este máster es el European Credit Transfer and Accumulation System (ECTS), equivale a 25 horas de trabajo del alumno y tiene un total de 60 ECTS. Consta de un módulo común de 12 ECTS formado por materias de Psicopedagogía y Sociología y, tras cursar estos créditos, aparecen las materias de especialización. En concreto, para la especialidad de matemáticas, que en su mayor parte es seguida por matemáticos o ingenieros, deben cursar 14 ECTS de materias de Matemáticas, 12 ECTS de materias de Didáctica de la Matemática, 6 ECTS de materias de Innovación e Investigación Educativa, 10 ECTS de Practicum y 6 ECTS de un Trabajo de Fin de Máster que consiste en la planificación e iniciación de una investigación práctica.

Durante las siete semanas del Practicum, una profesora de nuestra Universidad siguió la actividad docente en un Centro de Educación Secundaria, dedicando una atención especial a las actividades de propuesta y resolución de problemas. Durante este periodo se propusieron y resolvieron problemas de Geometría y de Estadística en el tercer curso, y de Geometría y Combinatoria en cuarto, ambos de ESO. A continuación, describimos los diferentes marcos y teorías utilizados en la clasificación, así como los resultados y las conclusiones obtenidas.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

El estándar de la RP ha sido tratado por diversos autores a lo largo de los años. Uno de los primeros y más reconocidos es Polya quien, en su libro *How to solve it* (1945), proporciona heurísticas generales para resolver problemas de todo tipo, no sólo los matemáticos. El libro incluye consejos para enseñar matemática a los estudiantes y una minienciclopedia de términos heurísticos. Para Polya (1961), *tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata*.

Los conceptos de "problema" y "resolución de problema" han tenido varias acepciones a lo largo de la historia. Schoenfeld (1992) nos da una clasificación para la RP según los objetivos que quiere alcanzar y dos tipos de definiciones que corresponden a lo que tradicionalmente entendemos por ejercicios y problemas. Más adelante, detallaremos tanto los objetivos como las definiciones.

Stanic y Kilpatrick (1989) describen la importancia de la RP en función de su uso, ya que puede ser empleada para alcanzar otros objetivos curriculares. Con esta práctica los alumnos adquieren la destreza que les permite resolver problemas propuestos por otros y, aludiendo a matemáticos y filósofos de forma generalizada, afirman que la RP constituye el corazón mismo de las matemáticas. Además, proporcionan una clasificación atendiendo a tres tipos según su uso:

1. RP como contexto. Dentro de este tema identifican cinco roles de los problemas.
   a. Como una justificación para enseñar matemáticas.
   b. Para dar una motivación específica a algunos contenidos: "Cuando termines esta lección, serás capaz de resolver estos problemas".
   c. Como pasatiempo, diversión.
   d. Como justificación para desarrollar nuevas destrezas.
   e. Como práctica (tareas).
2. RP como destreza. La RP no es sólo importante porque mejora la capacidad resolutoria de problemas propios de la matemática, sino porque también contribuye al desarrollo del razonamiento en otros dominios al tratar de matematizar situaciones problemáticas. De hecho, la RP contribuye a formar a los alumnos en competencias básicas relacionadas con la lengua, las ciencias sociales, el arte, las ciencias de la salud, etcétera.

3. RP como arte. Esta visión sostiene que la verdadera RP es el corazón de las matemáticas, si no es las matemáticas mismas, como defienden muchos matemáticos y filósofos.

Borasi (1986) proporciona unos elementos estructurales con la intención de aclarar la noción de problema y, de este modo, mejorar la enseñanza de la resolución de problemas. Dichos elementos estructurales son los siguientes:

- El contexto del problema, que hace referencia a la situación en la cual se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema o definición explícita de la tarea por realizar.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría utilizarse para alcanzar la solución.

Por otra parte, Castro (2008) hace una revisión de la invención, el planteamiento y la resolución de problemas de los últimos 30 años. Hablamos entonces de la capacidad de plantear los problemas y no sólo de resolverlos, ya sea creando un nuevo problema a partir de una situación dada o reformulando un problema durante el proceso de resolución. Esta actividad se puede dar antes, durante o después de resolver un problema dado, y comprende la identificación de problemas, el planteamiento, la reformulación y las variaciones de un problema. Sin embargo, en la docencia ordinaria de ESO, aunque los alumnos resuelven problemas, rara vez son la fuente de ellos, tesis que, salvando las distancias, es avalada por Ortiz, Rico y Castro (2004), quienes afirman que los profesores en ejercicio tienen dificultades para plantear problemas novedosos a sus alumnos y aseguran que la creación de enunciados no es tarea fácil. Silver (1994) señala seis propósitos para la invención de problemas en educación matemática:

- Como característica de la actividad creativa o de la capacidad matemática.
- Como característica de una enseñanza orientada a la indagación.
- Como característica de la actividad matemática.
- Como medio de mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas.
- Como una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes.

- Como medio de mejorar la disposición de los estudiantes hacia las matemáticas.

Ortega, Pecharromán y Sosa (2011, p. 102) establecen tres requisitos que deben satisfacer los problemas para ser considerados como tales. Éstos son:

- *Aceptación*. El individuo o grupo debe aceptar el problema; debe existir un compromiso formal que puede deberse a motivaciones tanto externas como internas.
- *Bloqueo*. Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.
- *Exploración*. El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Además, consideran que los problemas deben estar bien construidos y secuenciados, tanto en complejidad creciente como en la redacción, para evitar las dificultades que puedan surgir debido a la estructura semántica utilizada.

Hay que tener en cuenta, además, el lenguaje, ya que el punto de partida para la resolución de problemas es entender sus enunciados. A diferencia del lenguaje habitual, cuando utilizamos expresiones matemáticas, éstas tienen un significado particular y conviene tenerlo presente de cara a la comprensión del problema. Si un enunciado se aleja demasiado de la realidad cotidiana, el nivel de abstracción requerido es mayor, por lo que se dificulta su comprensión y, por tanto, su resolución.

De las tres condiciones anteriores, Ortega, Pecharromán y Sosa (2011, p. 102) establecen la siguiente definición de problema: *planteamiento de una situación de respuesta desconocida que no es inmediata, que el alumno tiene que resolver mediante métodos matemáticos y que, además, el alumno debe tener la voluntad de hacerlo*.

ANTECEDENTES CURRICULARES

Además de los antecedentes teóricos, existen otros que llamaremos curriculares, ya que repercuten directamente en la elaboración de los currículos de los diferentes sistemas educativos. Es el caso de los "Estándares Curriculares y de Evaluación" del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), del marco teórico del Project for International Student Assessment (OCDE, 2003) y del Danish KOM Project (Niss, 2002).

En el NCTM (2000) se establecen los componentes esenciales de un programa de matemáticas escolares de alta calidad. En él se propone una base común de conocimientos matemáticos para ser aprendidos por todos los estudiantes: los estándares curriculares. Uno de estos estándares es precisamente la RP y, según el NCTM, "la resolución de problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacer matemática" (NCTM, 2000, p. 5). Además de su estándar específico, en esta obra se vincula cada estándar de contenido con la RP y, lógicamente, en la RP son importantes la comunicación y el razonamiento.

Quizá siguiendo la estela de los estándares curriculares, a finales de la década de 1990 surgen en Europa dos proyectos con varias características en común: el Danish KOM Project y el PISA. Este último fue auspiciado por los países de la OCDE y, en la actualidad, en él están involucrados muchos países (65 en 2012) y ha repercutido notablemente en el currículo nacional español.

El KOM Project, dirigido por Niss, es un proyecto del Ministerio de Educación danés, que tiene el objetivo de crear una plataforma para profundizar la reforma de la educación matemática danesa, desde la escuela hasta la universidad, y que gira en torno a las competencias y el aprendizaje de las matemáticas. En él, se identifica a "un experto en matemáticas" con un individuo matemáticamente competente y se describe la competencia matemática como la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de intra y extracontextos matemáticos y situaciones en las cuales las matemáticas pueden desempeñar un papel crucial. Para concretar la competencia matemática, describe ocho subcompetencias matemáticas que formarían parte de ser matemáticamente competente:

- Pensar matemáticamente
- Plantear y resolver problemas
- Modelar matemáticamente
- Razonar matemáticamente
- Representar entidades matemáticas
- Manipular símbolos y formalismos matemáticos
- Comunicarse en, con y sobre las matemáticas
- Utilizar materiales y herramientas

Como vemos, una de las competencias es específicamente “plantear y resolver problemas”. Para el proyecto KOM, esta competencia comprende los siguientes procesos: identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos, puros, aplicados, de respuesta abierta o cerrada, y resolverlos, sean planteados por uno mismo o por otros y, llegado el caso, de diferentes maneras.

Por su parte, el proyecto PISA se creó en 1997 para evaluar el rendimiento académico de los alumnos de los países miembros de la OCDE y está claramente influido por el Proyecto KOM, ya que uno de los participantes en el proyecto es el propio Niss. La influencia del KOM Project se aprecia en la definición de las competencias matemáticas por parte de PISA, que coinciden casi literalmente con las del KOM Project.

PISA define competencia como la “capacidad para reflejar y aplicar su conocimiento y experiencia a los asuntos del mundo real [...] Se utiliza el término *competencia* para condensar esta concepción amplia de los conocimientos y destrezas” (PISA, 2003, p. 16).

Siguiendo pues este modelo, podemos concretar el significado de competencia para las matemáticas, entendiendo que cuando aplicamos éstas a la vida real, lo más importante es nuestra capacidad para hacer un razonamiento cuantitativo y establecer relaciones, y no que sepamos responder a preguntas típicas de los libros de texto. En resolución de problemas, la competencia se centra en ser capaces de reconocer un problema, saber cuál es su naturaleza, ser capaces de establecer una estrategia de resolución que se pueda llevar a cabo, encontrar la solución que mejor se adapte al problema original y, por último, comunicar dicha solución.

Contemplando estas definiciones como referentes, se hace evidente que la capacidad de resolver problemas no se reduce a ser capaces de resolver los ejercicios propuestos en los libros de texto, sino que va más lejos; se trata de *matematizar*. La *matematización*, según PISA (2003), es un proceso ligado a la RP en matemáticas que consta de cinco pasos: localización del problema en la realidad, sistematización de esta situación en términos matemáticos, reducción del sistema creado hasta convertirlo en un problema únicamente matemático, resolución del problema y vuelta a la realidad.

Por esto, PISA afirma que “aprender a *matematizar* debería constituir uno de los objetivos educativos más importantes para todos los alumnos” (PISA, 2003, p. 30).

Por otro lado, PISA define la RP como “la capacidad que tiene una persona de emplear los procesos cognitivos para enfrentarse y resolver situaciones interdisciplinares reales en las que la vía de solución no resulta obvia de modo inmediato, y en las que las áreas de conocimiento o curriculares aplicables no se enmarcan dentro de una única área de matemáticas, ciencias o lectura" (PISA, 2003, p. 147). Este apartado no se centra en problemas matemáticos o de contenido principalmente matemático, sino en problemas que pueden requerir destrezas matemáticas, pero también destrezas de otras áreas. Sin embargo, nos preocupamos de este aspecto porque son principalmente las matemáticas las que desarrollan la capacidad de resolver problemas.

PISA clasifica los problemas en los siguientes tipos:

- Toma de decisiones
- Análisis y diseño de sistemas
- Tratamiento de disfunciones

Además de esta tipología, los problemas poseen diferentes contextos, personal, profesional, social... y están relacionados con diversas disciplinas, las matemáticas, las ciencias, la literatura, las ciencias sociales, la tecnología y el comercio, lo cual proporciona una amplia variedad de problemas diferentes.

Nos encontramos, pues, con problemas:

- inmersos en la vida real,
- que corresponden a uno de los tipos mencionados anteriormente,
- inmersos en un contexto que influye en la motivación del resolutor, y
- que implica que éste posea destrezas de varias disciplinas.

EL CURRÍCULO

Como no podía ser de otra manera, los antecedentes curriculares influyeron en la elaboración de los currículos educativos de los diferentes países, incluida España. Si miramos hacia atrás, veremos que la RP ha ido cobrando importancia en las sucesivas leyes educativas promulgadas por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC); por ejemplo, en la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) aparecen numerosas referencias a la RP, tanto en los objetivos como en los contenidos y criterios de evaluación, especialmente en estos últimos (MEC, 1990). Además, en la modificación del currículo de enseñanzas mínimas de ESO, realizada en el año 2000, apreciamos un incremento de referencias a la RP como consecuencia de la influencia de los estándares curriculares anteriormente descritos.

En cuanto a la Ley Orgánica de Educación (LOE), el cambio más significativo con respecto a los currículos anteriores es la inclusión de las competencias básicas (MEC, 2006a). Esto se debe sin duda a la influencia de PISA y el KOM Project. Además, se considera la RP como un contenido más, algo que no ocurría en los periodos anteriores, lo que implica una mayor importancia del trato de la RP en el aula.

Entre los **objetivos** de etapa marcados por el Real Decreto (MEC, 2006b) que establece las enseñanzas mínimas para la etapa, encontramos referencias a la RP, ya que considera que un alumno debe ser capaz de reconocer, plantear y elaborar estrategias personales para abordar situaciones y problemas de la vida real y tener una actitud positiva ante ellos.

Dentro de las competencias básicas curriculares, en la competencia matemática aparecen numerosas referencias a la RP que destacan la habilidad de resolución aplicada a contextos sociales, el aprendizaje continuo, el uso continuo de razonamientos matemáticos, etc. Por tanto, parafraseando el Real Decreto "la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella" (MEC, 2006b, p. 686).

En el currículo español actual (MEC, 2006b), la RP se describe en el bloque de contenidos comunes, los cuales se encuentran organizados por tipos (estrategias, comunicación, capacidad de RP, ...), tal y como mostramos en el cuadro 1. Podemos apreciar las diferencias y similitudes que hay entre los cuatro cursos que componen la etapa.

Como vemos, la RP no sólo es importante por los antecedentes que hemos considerado o por las convicciones que poseamos sobre la RP, sino que, además, forma parte de los bloques de contenido a lo largo de toda la etapa secundaria y, por tanto, es obligatorio su tratamiento en el aula.

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE AULA

Una vez revisados los antecedentes teóricos, curriculares y el currículo de Educación Secundaria, nuestra intención es realizar una clasificación de los problemas utilizados en aulas de Educación Secundaria Obligatoria de acuerdo con ciertos criterios. Estos problemas fueron registrados durante las sesiones

Cuadro 1 Contenidos del currículo de Enseñanzas Mínimas que hacen referencia a la RP

Tipo de contenido	Curso	Contenidos comunes
Estrategias de RP	1º y 2º	Utilización de estrategias y técnicas simples en la **resolución de problemas**, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida.
	3º	Planificación y utilización de estrategias en la **resolución de problemas,** tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.
	4º	Planificación y utilización de procesos de razonamiento y estrategias de **resolución de problemas**, tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización.
Comunicación	1º y 2º	Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la **resolución de problemas**. Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre cantidades y medidas o sobre elementos o relaciones espaciales.
	3º	Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de **resolución** utilizando la terminología precisa. Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales.
	4º	Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de **resolución de problemas** con la precisión y rigor adecuados a la situación. Interpretación de mensajes que contengan argumentaciones o informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales.
Capacidad de RP	1º y 2º	**Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas**, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.
	3º y 4º	**Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas**, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.
Nuevas tecnologías	1º, 2º, 3º y 4º	Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

de prácticas del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Se trata de un total de 32 actividades organizadas de la siguiente manera:

- 21 actividades en 3º de ESO, de las cuales 15 corresponden a Geometría y las 6 restantes a Estadística.
- 11 en 4º de ESO, de las cuales 6 corresponden a Geometría y el resto a Combinatoria.

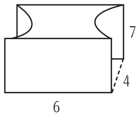
Para facilitar su clasificación hemos asignado a cada problema un código de la forma "*C.A.N.*", con las siguientes equivalencias:

- *"C"* puede tomar valor 3 o 4, dependiendo del curso de ESO al que corresponda la actividad.
- *"A"* se refiere al área a la que hace referencia, se asigna una "g" si es Geometría, una "e" si se trata de Estadística y una "c" si se trata de Combinatoria.
- *"N"* es la numeración asignada a cada actividad.

A continuación, en el cuadro 2, se muestran las actividades propuestas y posteriormente su clasificación.

Cuadro 2 Enunciados de los problemas propuestos en las aulas de 3º de ESO y 4º de ESO

Código	Enunciados
3g1	Calcular el área lateral y el volumen de una pirámide hexagonal cuya apotema lateral mide 13 cm y la apotema de la base mide 10 cm.
3g2	Calcular el área del icosaedro de arista 8.
3g3	Tenemos un cono inscrito en una semiesfera, cuya base coincide con la de la semiesfera. Si el cono tiene una altura de 5 cm, ¿cuál es el volumen entre el cono y la semiesfera?
3g4	Dados los puntos A(3,1), B(5,4), C(6,−1). Clasificar el triángulo y calcular el baricentro, el ortocentro y el circuncentro.

Código	Enunciados
3g5	Tenemos el siguiente cuerpo. Calcula el área y el volumen. 
3g6	Tenemos una caja que contiene pastas con forma cilíndrica. En la caja caben $7 \times 5 \times 4$ pastas. Cada pasta tiene un radio de 2 cm y una altura de 2 cm. ¿Cuánto papel necesitaríamos para envolver la caja?
3g7	Tenemos un cono hueco de radio 6 y generatriz 10 y lo llenamos de agua. A continuación, vertemos el agua en un cilindro de radio 4. ¿Qué altura alcanza el agua? Luego vertimos el agua en un cazo semiesférico y se llena. ¿Cuál es el radio?
3g8	Calcular el área de la cubierta de un libro, dadas sus dimensiones.
3g9	Se fabrican las pegatinas de un bote cilíndrico. Estas pegatinas miden 15 unidades de base y 12 de altura. ¿Cuál es el volumen del bote?
3g10	Calcular el volumen entre el cono inscrito en la semiesfera de área 56.52 cm^2 y dicha semiesfera.
3g11	Perímetro del tetraedro si el área mide 240.
3g12	Perímetro, área y volumen de un cubo cuya diagonal mide 10.
3g13	Consideramos los puntos A(1,4), B(−2,1) y C(3,1). Calcula el simétrico de A, A′ y de B, B′, respecto de C. ¿Qué relación existe entre los vectores AB y A′B′?
3g14	Sean B(0,2) y D(4,6) los vértices opuestos de un rombo. Uno de los vértices está en el eje de abscisas. Calcula A, C y el área del rombo.
3g15	Sean A(1,5), B(3,2) y C(−1,1). Calcula D para que formen un paralelogramo.
3e1	Un fabricante de tornillos desea hacer un control de calidad. Para ello, recoge 1 de cada 100 tornillos producidos y los analiza. ¿Cuál es la población? ¿Cuál es la muestra? ¿Cuáles son los individuos?
3e2	Una vez que ha recogido la muestra, el fabricante estudia en cada tornillo si es correcto o defectuoso, su longitud y el número de pasos de rosca. Di de qué tipo es cada una de esas variables y razónalo.

<table>
<tr><th>Código</th><th>Enunciados</th></tr>
<tr><td>3e3</td><td>El fabricante recoge una muestra de 50 tornillos y estudia los que son correctos y el número de pasos de rosca, construyendo las siguientes tablas, pero por error, algunos datos se han borrado. Complétalas.
<table>
<tr><th>Defectuoso</th><th>Correctos</th></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>Nº de pasos de rosca</th><th>f_i</th><th>h_i</th><th>F_i</th><th>H_i</th></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>0.1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>20</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>0.20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>50</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>3e4</td><td>Ahora toma una muestra de 50 tornillos. Mide la longitud de cada tornillo de la muestra y obtienen los siguientes datos. Ordénalos en una tabla agrupándolos en 6 intervalos.
2.95 2.75 3.21 3.12 2.70 3.01 2.92 3.1 3.29 2.76
3.30 2.87 2.74 3.16 3.02 2.96 2.91 3.22 2.88 3.19
2.78 2.99 3.12 3.24 2.76 2.78 2.75 3.14 3.26 3.30
3.15 2.95 3.04 3.08 2.96 2.78 2.87 3.10 3.11 2.71
3.21 3.12 2.99 3.00 2.90 2.71 2.72 3.29 3.28 2.76</td></tr>
<tr><td>3e5</td><td>Una vez completadas las tablas, representa cada variable con el gráfico adecuado. Observa la tabla del número de pasos de rosca.
a. Calcula el número medio de pasos de rosca que tiene los tornillos de la muestra estudiada.
b. Calcula la mediana y la moda.
c. Calcula la desviación típica.
d. Si el fabricante estudia otra muestra de 50 tornillos y obtienen que $x = 6.1$ y $\sigma = 0.9$, ¿qué muestra tiene los tornillos con número de paso de roscas más regular?</td></tr>
<tr><td>3e6</td><td>Observa la tabla que has obtenido para la longitud de los tornillos. Calcula la media y la mediana.</td></tr>
<tr><td>4g1</td><td>Dados A(1,2), B(3,0) y C(5,1), calcula el baricentro, el circuncentro y el ortocentro del triángulo que forman los tres vértices.</td></tr>
<tr><td>4g2</td><td>Dados A(1,0), B(3,2) y C(−1,3), calcula la mediana del lado AB, la mediatriz del lado AB, la ecuación de la recta que contiene a AB y el área del triángulo.</td></tr>
</table>

Código	Enunciados
4g3	Dadas las rectas: $x + (m - 1) \cdot y - 3 = 0$ $m \cdot x - 6 \cdot y + 2 = 0$ Calcular m tal que: a) las rectas sean paralelas. b) las rectas sean perpendiculares.
4g4	Dados A(1,0), B(3,2), C(x,y) y D(−1,3), calcula el área del cuadrilátero que forman.
4g5	Calcula las ecuaciones de la recta de las rectas perpendicular y paralela a $r \equiv 3x + 2y - 2 = 0$ por el punto de coordenadas (3,1).
4c1	En una carrera en la que participan 10 caballos existen dos tipos de apuesta: en la primera, hay que acertar quién va quedar primero, quién segundo y quién tercero; en la segunda, hay que acertar cuáles van a ser los cuatro primeros caballos en llegar, pero no su clasificación. ¿Cuál de los tipos de apuesta crees que es más sencilla?
4c2	¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?
4c3	¿Cuántos pentágonos se pueden construir con las marcas de las horas de un reloj?
4c4	Recuento de las matrículas de automóvil diferentes que se pueden hacer, tanto con el sistema de matriculación antiguo como con el nuevo.
4c5	Posibilidades que tiene el Real Valladolid de seguir en primera si examinamos los posibles resultados.
4g6	Problema heurístico. Se dan cinco puntos arbitrarios con coordenadas enteras positivas. Se unen entre sí de dos en dos y se halla el punto medio del segmento correspondiente. Prueba que se verifica que al menos uno de estos puntos medios tiene ambas coordenadas enteras.

Para analizar la adecuación de los problemas propuestos, hemos elegido los estudios de dos autores, Borasi (1986) y Schoenfeld (1992), que realizaron sendas clasificaciones de actividades atendiendo, en el primer caso, a ciertos elementos estructurales y, en el segundo, a la definición y el fin de éstas. Si hemos elegido a estos dos autores es porque el carácter de sus estudios se centra en la naturaleza de los problemas en sí, independientemente del área en que están propuestas las actividades y atendiendo a diversos aspectos. No ocurre así con otras clasificaciones, como la de Blanco (1993), que únicamente atiende al proceso de resolución de las actividades propuestas, la de Socas, Hernández y Noda (1997), que clasifican únicamente problemas aritméticos elementales verbales o la de Díaz y Poblete (2001), que distinguen entre problemas rutinarios y no rutinarios, y dentro de los rutinarios, los diferencian según su contexto. Estas clasificaciones sólo consideran aspectos que ya estaban incluidos en las clasificaciones de Borasi y Schoenfeld y, por consiguiente, la información que proporcionan estos autores es mucho más interesante. Nunokava (2005) plantea una clasificación de los procesos de enseñanza en función en cuatro tipos según cuatro énfasis de la docencia y, por tanto, tiene una orientación muy diferente de la nuestra. No se trata además de clasificar únicamente problemas en el sentido de Ortega, Pecharromán y Sosa (2011, p. 102), sino de cualquier actividad matemática relacionada con la RP y, por esta razón, incluimos los enunciados muy generales aunque no presenten un nudo resolutor y tan sólo requieran aplicar algún contenido matemático aunque sea directamente.

Por otra parte, aunque los dos modelos considerados son muy generales, existen diferencias sustanciales entre ellos, ya que mientras que Borasi basa su clasificación en los elementos estructurales (contexto, formulación, soluciones y método), Schoenfeld utiliza las dos definiciones establecidas por él y los objetivos de los problemas para los que son formulados.

La realización de esta clasificación nos permite examinar las actividades propuestas al detalle, lo que nos sirve para decidir si dichas actividades son adecuadas para nuestros objetivos de enseñanza, pero, a su vez, proporcionan una poderosa herramienta para la elección de una buena colección de actividades, ya que podemos buscar nuestros problemas atendiendo a ciertas características. Esta herramienta, utilizada de forma adecuada, puede facilitar y mejorar el trabajo de los profesores en ejercicio, proporcionándoles criterios fundamentados para la correcta elección de las actividades matemáticas.

A continuación, interpretamos los trabajos de Borasi (1986) y Schoenfeld (1992), hemos escrito ejemplos y hemos añadido o modificado algunas categorías, ya que consideramos que las clasificaciones son insuficientes, y proponemos una clasificación que se adapta mejor a las actividades de RP que se desarrollan en el aula.

Modelo de borasi

Los elementos estructurales (contexto, formulación, soluciones y método) considerados por Borasi (1986) le permitieron una clasificación de los problemas (en sentido amplio) según diversas interpretaciones de tales elementos; en concreto, Borasi considera los siguientes tipos de problema: *ejercicio, problema con texto, puzzle (rompecabezas), prueba de una conjetura, problemas de la vida real, situaciones problemáticas* y *situaciones*.

El contexto del problema es la situación en la cual está inmerso el problema. Su principal papel es proporcionar al resolutor de problemas la información suficiente para encontrar e interpretar la solución. Sin embargo, en los enunciados, el contexto puede aparecer de distintas formas e, incluso, no aparecer. Más concretamente, puede no existir o estar explícito total o parcialmente. También puede ocurrir que el contexto, sin estar explícito en el problema, se suponga suficientemente conocido por el resolutor.

Según Adams (1974), la formulación del problema es el primer paso para su resolución. Se define como la concreción explícita de la tarea por realizar. En un determinado problema, ésta puede aparecer de forma específica como la pregunta a la que hay que responder, o puede dejarse para que sea formulada por el resolutor del problema, lo que da lugar a diferentes respuestas en función de la interpretación que hace cada persona. Podemos encontrar entonces problemas que tengan una única formulación y que ésta esté explícita, que se encuentre parcialmente dada en el texto y dé lugar a diferentes alternativas, que se sugieran implícitamente diferentes formulaciones, aunque se especifique una, o que sea inexistente, es decir, que se describa una situación que permita formular problemas, pero que no aparezca ninguno como tal.

En cuanto a las soluciones, es evidente que éstas están condicionadas por la formulación del problema. Entendemos por "soluciones de un problema" el *conjunto de elementos que satisfacen las condiciones del problema propuesto*. No obstante, las posibles soluciones que tienen los problemas permiten hacer una clasificación de ellos según si: la solución es única y exacta; es general pero no única; tiene muchas soluciones posibles y son aproximadas; o no hay solución y ésta es la creación de un problema.

Por último, el método de aproximación a la solución también puede variar. En función de cómo resolvemos el problema y el número de estrategias posibles para hacerlo, nos permite también establecer varios niveles, dependiendo de cómo alcancemos la solución: utilizando una única estrategia, o una combinación de ambas; que haya varias estrategias diferentes o que debamos hacer un acto de búsqueda y exploración. No obstante, también consideramos dentro de esta categoría todos los métodos, estrategias o actividades que pueden ser útiles cuando abordamos un problema específico y lo intentamos resolver.

Borasi, en su trabajo, estableció las siete categorías mencionadas anteriormente eligiendo combinaciones de los cuatro elementos estructurales, aunque ya advierte que son sólo algunas de las combinaciones posibles, pero que no tienen por qué ser las únicas. Además, Borasi no clasifica únicamente problemas matemáticos, sino que también considera problemas de índole personal o profesional, por lo que, aunque nuestra primera intención fue clasificar las actividades de acuerdo con la clasificación propuesta por Borasi, ésta no se ajustaba a nuestras necesidades.

El primer elemento que nos dificulta clasificar las actividades en función de los criterios propuestos por Borasi es el contexto. La autora considera que, en los ejercicios, éste es inexistente, por ejemplo: *Encuentra el resultado de* $4 \times 2 + 6 \times 3$. Borasi especifica que en el ejemplo, el contexto "parece" ser inexistente, aunque argumenta que la estructura de las operaciones y las reglas aritméticas pueden considerarse una especie de contexto abstracto. Nosotros consideramos en esta categoría actividades en las que se apliquen directamente conocimientos que aparecen de forma explícita en el enunciado, cuya formulación sea única y explícita, y la solución sea única y exacta, por ejemplo:

1. Dado un dibujo de un triángulo, mide y halla el perímetro de la figura.
2. Hallar la descomposición factorial de 27.

Una vez descritas las actividades que no tiene contexto, vamos a considerar varias opciones para este último. Haremos una primera distinción entre contexto únicamente matemático y no necesariamente matemático. En las actividades con contexto matemático, las situaciones descritas están completamente contextualizadas en un área de las matemáticas (álgebra, geometría, combinatoria, estadística...) y suelen proponerse en el aula para aplicar los contenidos presentados. Por contexto no necesariamente matemático entendemos las actividades que se presentan en una situación artificialmente real y debidamente preparada para aplicar los contenidos presentados. En ambos casos, del enunciado de la actividad podemos deducir cómo aproximarnos a la solución, aunque haremos dos distinciones: por un lado, aquellas que se resuelvan mediante la aplicación inmediata de los contenidos presentados y cuya formulación sea única y explícita y, por el otro, las que requieran una combinación de etapas, así como de incógnitas intermedias o reformulación de la situación. Estas últimas, además, pueden presentar formulaciones alternas y varias soluciones. A partir de estas dos consideraciones, creamos las siguientes categorías y matizamos una de las existentes: *ejercicios contextualizados, problemas contextualizados, ejercicios con texto* y *problemas con texto*. Veamos una descripción y algunos ejemplos de cada una de ellas.

Por *ejercicio contextualizado* entendemos las actividades matemáticas en las que se aplican conocimientos de forma inmediata, es decir, no hay que buscar una combinación adecuada de éstos, pero no se indican de manera expresa en el enunciado; el contexto es puramente matemático y, además, podemos especificar en qué área se contextualiza cada actividad: geometría, álgebra...

1. Calcula el perímetro de un octógono de 3 m de lado.
2. Área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 y 5 u.
3. Área de un pentágono "tipo sobre" (figura de un sobre postal abierto) (me dan los lados del rectángulo y la altura del triángulo).
4. Halla el MCD de 27 y 32.
5. Al doble de 4.2 se le agrega el triple de 3.7. Halla el resultado final.
6. Resuelve la siguiente ecuación: $x^2 + x - 2 = 0$.
7. Hallar gráficamente $\sqrt{13}$.

Dentro de los *problemas contextualizados* clasificamos todas las actividades cuyo contexto también es matemático, es decir, son actividades propias del aula de matemáticas, pero que, a diferencia de los ejercicios, requieren una combinación de etapas o incógnitas intermedias para alcanzar la solución que no se indica en el enunciado.

1. Área de un polígono tipo sobre (me dan los lados del rectángulo y del triángulo).
2. Calcula la altura de un triángulo si su base mide 5 m y su área 15 m^2.
3. Calcula el área de un hexágono regular tal que su lado mide 6 cm.
4. Halla los cortes de la parábola de ecuación $y = x^2 + x - 2$ con el eje de abscisas.
5. Halla gráficamente.
   $\sqrt{2\sqrt{13}}$

Al igual que en el caso de ejercicio contextualizado, en los *ejercicios con texto* se aplican de forma inmediata conocimientos presentados en el aula, pero en este caso se describe una situación real hipotética que es la que nos permite dar con el algoritmo adecuado. No se trata de un contexto matemático.

1. María tiene 3 piñas y 5 peras. ¿Cuántas frutas tiene?
2. Pedro quiere dibujar un triángulo de 5 cm de base y 8 de altura. ¿Cuánto papel necesita?

Según Borasi, los *problemas con texto* se diferencian de los *ejercicios* porque hay un contexto aparente y encontramos la información suficiente para alcanzar la solución. Nosotros hemos considerado además que, si la repuesta no se obtiene de manera inmediata mediante la aplicación de una fórmula, algoritmo o cálculo que se indica en el ejercicio, y además posee un hipotético contexto real, que es el que induce a la utilización del método, entonces es un problema con texto. Salvo por el contexto, tiene las mismas características que el problema contextualizado.

1. María va a la frutería con 5 €. Quiere comprar piñas y peras. Las piñas cuestan 0.90 €, las peras 0.20 €, y María quiere comprar la mayor cantidad de piezas de fruta posibles. ¿Cuántas debe comprar de cada tipo?
2. Juan quiere adoquinar su patio rectangular con losetas con forma de hexágono regular. Estas losetas miden 12 cm de lado. Si su patio tiene unas dimensiones de 4 metros de largo y 2.5 de ancho y en cada caja hay 15 losetas, ¿cuántas cajas debe comprar Juan para adoquinar el patio?

Tanto en el caso de *problemas contextualizados*, como en *problemas con texto*, podríamos realizar una distinción más y clasificarlos en función del número de etapas necesarias para alcanzar la solución o, dicho de otra manera, el número de incógnitas intermedias que tenemos que averiguar para llegar a la incógnita final.

En cuanto al resto de categorías, mantenemos las propuestas por Borasi, aunque realizamos algunas matizaciones. En los *puzzles* debemos señalar que una característica que los diferencia de otras categorías es que el contexto y la formulación, a pesar de ser explícitos y contener toda la información en el texto, son desorientadores o, en cierto modo, engañosos. En las *pruebas de* *conjeturas*, aunque el contexto y la formulación están completamente dados en el texto, podría ser necesario el uso de otros teoremas o resultados matemáticos que no se indiquen. En los *problemas de la vida real* consideramos situaciones reales, que no están preparadas para ser resueltas en el aula, pero que podemos resolver con herramientas matemáticas.

1. Se recogieron 10 millones de firmas en contra de una resolución ministerial. Las firmas ocupaban tanto físicamente que fueron necesarias 10 furgonetas para poder llevar las firmas al Congreso de los Diputados (Gómez, 2012).
   a. Analizar la veracidad de la noticia.
   b. ¿Cuántas furgonetas son necesarias?

Por último, las situaciones problemáticas y las situaciones requieren reformulación del problema o incluso creación de éste, aunque el contexto puede ser matemático, o situaciones de índole profesional o personal. En el cuadro 3 presentamos un resumen de todas las categorías con una breve descripción de cada elemento estructural.

Cuadro 3 Ampliación y reformulación de la tabla de Borasi sobre los tipos de problemas

Tipos de problemas	Elementos estructurales			
	Contexto	Formulación	Soluciones	Método
Ejercicio	Inexistente	Única y explícita	Única y exacta	Aplicación inmediata de algoritmos conocidos. Están implícitos en el enunciado.
Ejercicio contextualizado	Contexto matemático. Implícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Aplicación inmediata de contenidos no implícitos en el enunciado.
Problema contextualizado	Contexto matemático. Implícito en el texto	Única o con varias alternativas	Única o varias	Combinación de etapas calculando incógnitas intermedias, creación de problemas.

Tipos de problemas	Elementos estructurales			
	Contexto	**Formulación**	**Soluciones**	**Método**
Ejercicio con texto	Contexto explícito, no necesariamente matemático	Única y explícita	Única y exacta	Aplicación inmediata de contenidos no implícitos en el enunciado.
Problema con texto	Contexto explícito, no necesariamente matemático	Única o con varias alternativas	Única o varias	Combinación de etapas calculando incógnitas intermedias, creación de problemas.
Puzzle	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Elaboración de un nuevo algoritmo. Acto de ingenio.
Prueba de una conjetura	Explícito en el texto sólo de forma parcial, teorías conocidas son asumidas	Única y explícita	Por lo general única, pero no necesariamente	Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos.
Problemas de la vida real	Explícito en el texto sólo de forma parcial	Parcialmente dada. Algunas alternativas posibles	Muchas posibles, de forma aproximada	Exploración del contexto, reformulación, creación de un modelo.
Situación problemática	Sólo parcial en el texto, problemática	Implícita, se sugieren varias problemáticas	Varias. Puede darse una explícita	Exploración del contexto, reformulación, plantear el problema.
Situación	Sólo parcial en el texto, no problemática	Inexistente, ni siquiera implícitamente	Creación del problema	Formulación del problema.

Una vez definidas todas las categorías que vamos a considerar, realizamos la clasificación de las actividades registradas en la docencia ya señalada. El cuadro 4 es una clasificación de todos los problemas que se hicieron en esa docencia. Una de las actividades, la 3e5, aparece en dos categorías, ya que consta de varios apartados, algunos de los cuales corresponden a ejercicio con texto y otros a problema con texto.

Cuadro 4 Clasificación de los problemas registrados según los nuevos tipos creados a partir de los elementos estructurales de Borasi

Tipos de problemas	Problemas registrados	Total
1. Ejercicio	3g5	1
2. Ejercicio contextualizado	3g1, 3g2, 3g3, 3g4, 3g10, 3g11, 3g12, 3g13, 4g1, 4g2, 4g3, 4g4, 4g5	13
3. Problema contextualizado	3g14, 3g15, 4c2, 4c3	4
4. Ejercicio con texto	3g8, 3e1, 3e2, 3e3, 3e4, 3e5*,3e6	7
5. Problemas con texto	3g6, 3g7, 3g9, 3e5*, 4c1	*5*
6. Puzzle		0
7. Prueba de una conjetura	4g6	*1*
8. Problemas de la vida real	4c4, 4c5	2
9. Situación problemática		0
10. Situación		0

Como podemos ver en el cuadro 4, cerca de 80% de las actividades se clasifican en las categorías *Problema en contexto matemático* y *Problema con texto*, repartiéndose las demás en *Ejercicios contextualizados* y *Puzzle,* y un ejemplo de *Problema de la vida real* y *Prueba de una conjetura*. No se plantean actividades en las que el alumno deba formular el problema o al menos hacer una reformulación. No se plantean unas actividades que tengan soluciones abiertas ni otras que sus enunciados no contengan toda la información detallada explícitamente. Además, desde la perspectiva del método, los problemas propuestos en 4º de ESO exigen estrategias más complejas para alcanzar la solución.

Borasi, en una de sus conclusiones, indica que los estudiantes deben ser expuestos no a muchos problemas diferentes del mismo tipo, sino a muchos tipos diferentes de problemas. Es decir, en lugar de contemplar problemas con pequeñas variaciones de una misma naturaleza, es preferible que se propongan problemas de muchos tipos y naturalezas diferentes. Por tanto, se deberían proponer problemas de los tipos *problemas de la vida real, situación problemática* o *situación, problemas con textos,...* No obstante, deberíamos preguntarnos si es factible proponer problemas de todos los tipos en todas las áreas de la matemática o si son adecuados en todos los niveles.

Modelo de Schoenfeld

Schoenfeld (1992) determina cinco objetivos que un profesor puede fijarse a la hora de proponer un problema y dos definiciones para problema. La primera de las definiciones, *algo que requiere ser hecho o que requiere hacer algo en matemáticas*, la vinculamos a la idea tradicional de tarea de la clase de matemáticas, ejercicios que se proponen para practicar los conocimientos presentados en clase. Tal y como describe Schoenfeld, el problema no es el objeto por resolver en sí mismo, sino un recurso para facilitar la consecución de otros objetivos.

Schoenfeld enuncia la segunda definición como *cuestión matemática que es confusa o difícil*. Nos acercamos a la idea de problema tal y como la consideramos a lo largo de todo el trabajo. Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) proponen otra definición que incluye la voluntad resolutoria: *planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida que no es inmediata (confusa o difícil), que el usuario tiene que resolver mediante métodos matemáticos y, además, tiene la voluntad de hacerlo*.

En cuanto a los objetivos, hemos considerado los propuestos por Schoenfeld, los cuales se describen en el cuadro 5, pero además de éstos, incluimos otro objetivo que nos parece interesante de tener en cuenta y que estaría muy ligado a una metodología innovadora de aprendizaje, el aprendizaje basado en problemas (ABP). Según Barrows (1986), el ABP es un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos. Este objetivo consiste en *proponer problemas como una estrategia de presentación de nuevos contenidos matemáticos*.

Este nuevo objetivo, y los cinco propuestos por Schoenfeld, conforman el cuadro 5, de doble entrada, que nos permite clasificar los problemas de aula. Algunos de los objetivos los hemos dividido en dos subobjetivos, como es el caso de los objetivos A y E que dan lugar a A1, A2, E1 o E2, y que hemos denotado de esta manera para reflejar la intención inicial de Schoenfeld. Cada una de las actividades puede aparecer en más de una fila, ya que un mismo problema puede plantearse para alcanzar más de un objetivo, aunque sólo corresponde a una de las dos definiciones. No es nuestra intención reflejar en principio la intencionalidad del profesor, pues la desconocemos, pero sí pretendemos determinar los objetivos que podríamos intentar alcanzar con un determinado problema. A continuación, se muestra la reclasificación de los mismos enunciados del caso anterior.

Cuadro 5 Cuadro de clasificación en función de los objetivos y las definiciones propuestos por Schoenfeld (1992) y Ortega y col. (2011)

Clasificación de los problemas según los criterios de Schoenfeld (1992)		
Objetivos / **Definiciones**	**1. Algo que requiere ser hecho, o que requiere hacer algo en matemáticas**	**2. Cuestión matemática que es confusa o difícil[1]**
A1. Para entrenar a los estudiantes a "pensar de forma creativa"		3g9, 4c2, 4c3, 4c4, 4c5
A2. Para desarrollar su habilidad para resolver problemas	3g10	3g3, 3g7, 3g9, 4c2, 4c3, 4c4, 4c5
B. Preparar a los estudiantes para competiciones de matemáticas como, por ejemplo, las olimpiadas matemáticas		4c1, 4c2, 4c3, 4c4, 4c5, 4g6
C. Para instruir en estrategias heurísticas	3g11, 3g12	4c1, 4c2, 4c3, 4c4, 4c5
D. Para aprender las técnicas estándar en dominios particulares, más frecuentemente en los modelos matemáticos	3g1, 3g2, 3g4, 3g5, 3g10, 3g11, 3g12, 3e3, 3e4, 3e5, 3e6, 4g1, 4g2, 4g5	3g3, 3g8, 3g9, 3g13, 3g14, 4g3, 4c1, 4c2, 4c3, 4c4, 4c5
E1. Para proporcionar en nuevo enfoque para recuperaciones matemáticas (habilidades básicas)		3g3, 3g6, 3g7,
E2. Para tratar de inducir estrategias de pensamiento crítico o de razonamiento analítico		3g13, 3g14, 4g4, 4g6
F. Para presentar nuevos contenidos matemáticos[2]	3e1, 3e2, 3e3, 3e4, 3e5	4c4, 4c5

[1] Definiciones de Schoenfeld (1992) y Ortega, Pecharromán y Sosa (2011), ya que no se indaga sobre la voluntad de los alumnos.

[2] Fin considerado por nosotros.

En el problema de tipo 1, se clasifica 50% de las actividades y, en el tipo 2, el otro 50%. De éstos vemos que las actividades de 3º están mayoritariamente en la definición 1 y las de 4º en la definición 2. Por áreas, todas las actividades de estadística se clasifican en la definición 1 y todas las de combinatoria en la definición 2, lo que nos induce a pensar que el área en la que estamos trabajando influye en el tipo de actividad que se propone. En cuanto a los objetivos que se persiguen con cada actividad, ya hemos comentado que en el cuadro no se refleja ni la intencionalidad del profesor ni la voluntad del resolutor, sino la utilidad de cada problema. Así, el objetivo más común es el *D (para aprender las técnicas estándar en dominios particulares, más frecuentemente en los modelos matemáticos)*, es decir, como práctica de los contenidos presentados en clase. Además, apreciamos que para la definición 2 aparecen ejemplos de todos los objetivos, pero no así para la definición 1. Como se refleja en el cuadro, no todas las entradas (definición-objetivo) tienen ejemplos, lo cual no quiere decir que no existan, pero no es fácil que se utilicen en la docencia de manera tan abundante. Por ejemplo, si consideramos una variación del problema 4c2 (¿Cuántas diagonales tiene un polígono de *n* lados?), en la que guiemos al alumno para encontrar la solución, pero induciéndolo a probar con casos concretos inicialmente, entonces nos encontramos con *algo que requiere ser hecho o que requiere hacer algo en matemáticas* (definición 1), que *entrena a los estudiantes para "pensar de forma creativa"* (objetivo A1).

Queremos destacar la importancia del objetivo F, *presentar nuevos contenidos matemáticos*, y consideramos que deberían presentarse más problemas con este fin, ya que proporcionan una motivación al alumnado para aprender los nuevos contenidos, pues sin éstos no sería posible la resolución de estos problemas o la explicación de ciertas situaciones: *¿Por qué un terremoto de amplitud 7.5 en la escala de Richter produce muchísimos más destrozos que otro de amplitud 7?* Para poder entender este fenómeno el alumno tiene que aprender el concepto y las propiedades de la función logarítmica.

CONCLUSIONES

Después de revisar qué entendemos como problema y resolución desde diversas perspectivas, curricular e investigadora, hemos adaptado algunas herramientas de clasificación de problemas a nuestras necesidades, las cuales nos han surgido tras un intento previo de clasificación. Dichas clasificaciones nos han servido para profundizar en los tipos de problemas que podemos plantear en un aula, así como estudiar el caso concreto de los problemas registrados durante el periodo de prácticas del Máster de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Debemos remarcar que la clasificación realizada depende en gran medida del nivel educativo en el que nos encontremos, y que los mismos problemas que hemos clasificado en una determinada categoría en esta ocasión, en un nivel diferente podrían corresponder a otra categoría distinta. Además, la clasificación que hemos realizado se basa únicamente en los enunciados de las actividades, sin tener en cuenta las producciones de los alumnos, por lo que hemos considerado en cada caso a un alumno ideal que se enfrentara al problema en un nivel educativo concreto.

En la clasificación realizada a partir de los elementos estructurales de Borasi, hemos creado tres categorías nuevas que nos han permitido considerar aspectos importantes, como la distinción entre un contexto matemático y otro que no lo es, y diferenciar entre problema y ejercicio. Como indica Borasi, el objetivo no debería ser proporcionar una gran cantidad de problemas a los alumnos, desde el punto de vista de la enseñanza, si éstos son del mismo tipo, sino una colección de actividades variada en cuanto al tipo al que pertenecen, para así proporcionar al alumno diferentes situaciones que le permitan mejorar su capacidad resolutoria. Este planteamiento no se sigue en la docencia que hemos considerado. En ella, la mayor parte de las actividades matemáticas son *ejercicios contextualizados* o *ejercicios con texto*, y no aparecen *situaciones problemáticas*, *situaciones* ni *puzzles*.

En cuanto a la clasificación realizada a partir de la teoría de Schoenfeld, hemos añadido una nueva categoría, *presentación de nuevos contenidos*, que consideramos muy importante desde el punto de vista metodológico, pues proporciona una motivación a los alumnos para estudiar ciertos contenidos y acerca las matemáticas escolares a lo que realmente son, una herramienta para resolver problemas. En el periodo de docencia descrito apenas se han encontrado actividades para presentar nuevos contenidos.

Los nuevos cuadros de clasificación permiten analizar la docencia desarrollada sobre resolución de problemas, ya que, al disponer de una herramienta en la que aparece toda la casuística de problemas, el profesorado puede cotejar de manera sistemática los problemas que ha trabajado en el aula, ver si ha cubierto todos los tipos y cómo ha sido su distribución. Así, el cuadro que clasifica los problemas que se realizaron en el aula de experimentación detecta una distribución un tanto descompensada, ya que hay apartados en los que la frecuencia es cero o muy baja.

Además, y como hemos mencionado anteriormente, podemos utilizar ambos cuadros de clasificación en el sentido inverso, es decir, como herramientas para decidir qué actividades se quieren proponer en un aula, buscando diversas tareas que correspondan a cada uno de los tipos descritos, y secuenciándolas en función de las necesidades docentes. La utilización de los cuadros en este sentido permite programar, de manera sistemática, actividades de resolución de problemas que estén equilibradas, tratando de favorecer los aprendizajes de los alumnos en forma amplia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, J. (1974), *Conceptual Blockbursting*, San Francisco, Freeman.

Barrows, H. S. (1986), "A Taxonomy of Problem-based Learning Methods", *Medical Education*, núm. 20, pp. 481-486.

Blanco, L. J. (1993), "Una clasificación de problemas matemáticos", *Epsilón*, núm. 25, pp. 49-60.

Borasi, R. (1986), "On the nature of problems", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17, núm. 2.

Castro, E. (2008), "Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España", *Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Badajoz, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, pp. 113-140.

Díaz, M. V., y A. Poblete (2001), "Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula", *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, núm. 45, pp. 33-41.

Gómez, B. (2012), Conferencia en el seminario de Educación Primaria, Santiago de Compostela.

Heyworth, R. M. (1999), "Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry", *International Journal Science Education*, vol. 21, núm. 2, pp. 195-211.

Jonassen, D. H. (2004), *Learning to solve problems. An instructional design guide*, San Francisco, Pfeiffer.

Ministerio de Educación y Ciencia (1990), Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre, Ordenación General del Sistema Educativo, *BOE*, núm. 238, pp. 28927-28942.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991), *Real Decreto 1007/1991*, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, *BOE*, núm. 152, pp. 21193-21195.

___________ (2006a), *Ley Orgánica 2/2006*, de 3 de mayo, Educación, *BOE*, núm. 106, pp. 17158-17207.

___________ (2006b), *Real Decreto 1631/2006*, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, *BOE*, núm. 5, pp. 677-773.

National Council of Teachers of Mathematics (1991), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, Sevilla, SAEM THALES (obra original publicada en 1989).

___________ (2000), *Resumen ejecutivo, Principios y estándares para la educación matemática*, trad. de Claudia Matus, Comité Interamericano de Educación Matemática (obra original publicada en 2000).

Niss, M. (2002), *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM Project*, tomado de http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf, consulta: 5 de mayo de 2012.

Nunokawa, K. (2005), "Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain", *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 24, pp. 325-340.

OCDE (1999), *Measuring Student Knowledge and Skills – A New Framework for Assessment*, París, OCDE.

___________ (2003), *Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas* /OCDE, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

Ortega, T., C. Pecharromán y P. Sosa (2011), "La importancia de los enunciados de los problemas matemáticos", *Educatio Siglo XXI*, vol. 29, núm. 2, pp. 99-116.

Ortiz, J., L. Rico y E. Castro (2004), "La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica. Un estudio con profesores en formación", en E. Castro y E. de La Torre (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Octavo simposio de la* SEIEM, A Coruña, España, Universidad de A Coruña.

Polya, G. (1945), *How to solve it*, Princenton, Princenton University Press.

___________ (1961), *Mathematical discovery*, vol. 1, Nueva York, Wiley.

Schoenfeld, A. H. (1992), "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics", en D. Grows (ed.) *Handbooks for Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, MacMillan, pp. 334-370.

Silver, E. A. (1994), "On Mathematical Problem Posing", *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, núm. 1, pp. 19-28.

Socas, M. M., J. Hernández y A. Noda (1997), "Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas", en L. Rico y M. Sierra (eds.) *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Zamora, Universidad de Salamanca.

Stanic, G., y J. Kilpatrick (1989), "Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum", en R. Charles y E. Silver (eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, Reston, NCTM, pp. 1-22.

DATOS DE LOS AUTORES

Laura Conejo
Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid, España
lconejo@am.uva.es

Tomás Ortega
Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid, España
ortega@am.uva.es