ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

# Solución estratégica a problemas matemáticos verbales de una operación. El caso de la multiplicación y la división

**Alejandra García Alcalá, Jonathan Vázquez Maldonado y Luis Zarzosa Escobedo**

**Resumen:** La resolución de problemas matemáticos a partir de enunciados verbales constituye una práctica escolar básica para una enseñanza significativa de las matemáticas. Con base en un enfoque de enseñanza directa de estrategias, se amplió la validez del modelo de Xin, Wiles y Lin (2008) para la solución de problemas matemáticos verbales. Se instruyó a dos niños y una niña con deficiencias en solución de problemas matemáticos, los cuales tenían 9 años de edad y cursaban el 4º grado de educación básica. Se trataba de problemas matemáticos de multiplicación y división de una sola operación planteados de manera verbal. Se les enseñó a responder preguntas estratégicas y a usar un esquema con formato algebraico a fin de que detectaran la estructura común de los problemas y procedieran a su resolución. Los tres alumnos tuvieron mejoras sustanciales de la preprueba a la postprueba y dos de ellos aprendieron a resolver los problemas de división en menos ensayos. Se discute la importancia de la estrategia implementada en cuanto al tipo de aprendizaje que genera y la transferencia a problemas más complejos.

*Palabras clave:* estrategias; enseñanza; educación básica; multiplicación-división.

**Abstract:** Mathematical word problems are a common school practice for teaching meaningful mathematics. Based on a direct teaching strategy approach, the purpose of this study was to expand the external validity of the Xin, Wiles and Lin (2008) model for solving math word problems. Two boys and one girl about 9 years old, 4th graders struggling with mathematics, were instructed. The math problems were multiplication and division in the form of sentences. The

Fecha de recepción: 13 de abril de 2013; fecha de aceptación: 1 de noviembre de 2013.

students were taught to answer strategic questions and to use an algebraic outline so that they could detect the common structure of the math problems and solve them. The three students had great improvement from the pretest to posttest and two of them learned to solve division problems with fewer attempts. The significance, practical use and transfer to new problems are discussed.

*Keywords:* strategies; teaching; elementary school; basic math operations.

## INTRODUCCIÓN

### El problema de la falta de competencia matemática

Tanto en evaluaciones nacionales como internacionales de la competencia matemática, los estudiantes mexicanos están lejos de lo deseable para un país que intenta participar en igualdad de circunstancias con países que tienen un papel destacado en la economía y la sociedad global del conocimiento. En el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (estudios PISA) realizado por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), se considera la habilidad matemática como uno de los pilares de las competencias para la vida (OCDE, 2001).

De acuerdo con la información de los estudios PISA, México todavía se encuentra entre los cinco países que concentran el mayor porcentaje de sus estudiantes por debajo del segundo nivel de competencia (de seis posibles) (OCDE, 2010, pp. 14-15). En contraste, en los dos mejores niveles de la competencia matemática, México no alcanza 1% (0.7%) cuando el promedio de los países de la OCDE es de 12.7% (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2010).

En México, en los exámenes nacionales para la calidad y el logro educativo (Excale) de 2009, en el área de matemáticas se aprecia una disminución de alumnos que obtienen calificaciones debajo del nivel básico respecto de evaluaciones previas, pero quedan todavía 12% en esta condición. En el nivel *Avanzado*, en cambio, el porcentaje de alumnos no pasa de 8%. Si se considera la diferencia entre el sector público y el privado en este nivel *Avanzado*, los alumnos del sector privado alcanzan porcentajes entre 22 y 24% contra apenas 8% del sector público (INEE, 2010). Hay pues un rezago importante en la competencia matemática y una condición todavía más desfavorable para las escuelas del sector público.

## Dificultades para la solución del problema

La Reforma Integral para la Educación Básica en México busca, a través del Plan de Estudios 2011, mejorar la calidad de la atención educativa en concordancia con la idea de enseñar competencias ligadas a situaciones reales. En dicho plan se estipula explícitamente la necesidad de favorecer el desarrollo de competencias para la vida (Secretaría de Educación Pública, 2012, p. 17).

Cuando consideramos la enseñanza de las matemáticas, hay que pensar entonces en su vinculación con la solución de problemas. Se trata de que estos últimos estén vinculados con la realidad, lo cual cobra mayor importancia a partir del tercer grado.

La relación directa y situacional con los problemas matemáticos como recurso de enseñanza tiene la limitación de que no siempre es posible ponerse en contacto con contextos específicos que van más allá del *aquí* y *ahora*. Y como el aprendizaje y la transferencia de los principios y reglas matemáticas requieren múltiples ejemplos en contextos y circunstancias diversas, se tiene que recurrir a problemas planteados de manera verbal. Y es en estas circunstancias donde muchos alumnos tienen dificultades importantes.

Solucionar un problema matemático planteado verbalmente implica poner en juego varios recursos cognitivos: como comprender las sutilezas del lenguaje; identificar los hechos y datos sustanciales del problema; traducir el problema usando la información relevante para una representación mental adecuada; elaborar y monitorear un plan de solución y llevar a cabo los cálculos adecuados (Jitendra y otros, 2007, p. 115) verificando su pertinencia respecto al planteamiento original.

Si se han de poner en juego todas las capacidades señaladas, no es de extrañar que resolver problemas matemáticos se convierta en una fuente de dificultades educativas. Los niños con problemas de aprendizaje o en riesgo de tenerlos tienen especial dificultad con los problemas matemáticos verbales (Hanich, Jordan, Kaplan y Dick, 2001; Jordan y Montani, 1997; Pedrotty, Bryant y Hammill, 2000; Russell y Ginsburg, 1984) o su desempeño se ve perturbado ante pequeñas variaciones en el planteamiento del problema o en su formato (Fuchs y Fuchs, 2002; Parmar, Cawley y Frazita, 1996), pues con frecuencia tienen modos poco flexibles para solucionar problemas.

Para facilitar el aprendizaje, está ampliamente aceptado que es adecuado situar los problemas en contextos cotidianos como un recurso para hacerlos manejables y significativos. Sin embargo, esto es insuficiente, pues también es cierto que estos problemas pueden variar dentro de un amplio rango de dificultad, incluida la gran cantidad de tipos de problemas. De ahí que se requiera una identificación más detallada de sus fuentes de dificultad, a fin de diseñar una mejor estrategia de enseñanza que le vaya dando al alumno experiencias de éxito.

En algún momento, la información contenida en el planteamiento del problema puede rebasar los recursos cognitivos con que cuenta el estudiante o alejarse de los esquemas que resultaron pertinentes en casos más simples. Para ilustrarlo pongamos, por ejemplo, el siguiente problema: *Jorge tiene 25 pesos y Pedro tiene 10 pesos más que él. ¿Cuánto dinero tienen entre los dos?* El alumno tenderá a sumar las dos cantidades explícitas guiado por viejos esquemas y por alguna expresión clave (por ejemplo, la palabra "más" o "dinero entre los dos"), pero pasa por alto la operación intermedia para establecer la cantidad real de Pedro. La suma que resuelve el problema sólo procede cuando se determinó que Pedro tiene 35 pesos, y posteriormente se deben agregar los 25 de Jorge. Esta fuente de dificultad se deriva del hecho de agregar una operación intermedia adicional que no es explícita, pero que se detecta atendiendo a las sutilezas del lenguaje.

Existen también otras fuentes de dificultad que se han identificado en la literatura. Por ejemplo: la estructura semántica del problema (Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003; Bermejo y Rodríguez, 1987a; De Corte y Verschaffel, 1987b; Lean, Clements y Del Campo, 1990; Xin, Wiles y Lin, 2008); la inclusión de información irrelevante o redundante (Fung, 1990); el uso de lenguaje indirecto; pasos u operaciones adicionales (Parmar y otros, 1996); la presentación de la información en gráficos o imágenes; cantidades con más de un dígito (Fuchs y otros, 2010); información poco familiar (Xin y Zhang, 2009); el tipo de operación y la ubicación de la incógnita por despejar (García, Jiménez y Hess, 2006).

Con lo señalado hasta aquí, se puede estimar que el estudiante se enfrenta a una diversidad de situaciones de complejidad variada que pueden derivar en confusiones y representaciones equivocadas del problema planteado. Así, por ejemplo, Sabagh (2008) encontró que, dentro de la comunidad estudiantil con bajo desempeño en matemáticas, existe la tendencia a distorsionar la información verbal que implica relaciones cuantitativas. Es muy común observar que, ante los problemas matemáticos verbales, exista una precipitación para operar con los números contenidos en el problema para llegar más rápido a una supuesta solución, o fijarse en rasgos superficiales, como las claves sintácticas o léxicas, en vez de tener previamente una representación conceptual adecuada que organice y vincule los diferentes componentes del problema y marque la ruta de su solución. Una estrategia adecuada de enseñanza debería proporcionar estos marcos conceptuales en vez del aprendizaje por ensayo y error.

Hay pues, una falta de correspondencia entre la dificultad de la situación que enfrentan los escolares y los métodos habituales de enseñanza. Es muy probable que resulte insuficiente la mera exposición a situaciones prácticas, al igual que la demostración de la solución por parte del profesor, seguida de ejercicios de práctica, o bien, esperar el descubrimiento espontáneo de alguna estrategia (ya sea del alumno o del grupo). Se requiere la enseñanza de modelos conceptuales, aprender a reconocer niveles de dificultad de los problemas y desarrollar estrategias ordenadas de resolución; todo esto para hacer más probable la adecuada transferencia de lo que se aprende en la escuela a las situaciones cotidianas.

## La enseñanza directa basada en esquemas

Dada la complejidad de la situación, consideramos más pertinente y efectiva una enseñanza directa de estrategias, aunque el asunto se pueda abordar con otros enfoques como los de Kroesbergen, Van Luit y Maas (2004), Montague, Warger y Morgan (2000) o Shiah, Mastropieri, Scruggs y Fulk (citados en Fuchs y otros, 2008, p. 157). Una ventaja de la enseñanza directa de estrategias es la ayuda para identificar los elementos críticos para solucionar los problemas y, al mismo tiempo, favorecer la transferencia a problemas de la vida diaria (Fuchs, Fuchs, Finelli, Courey y Hamlett, 2004; Fuchs y otros, 2003a).

En la solución de problemas matemáticos verbales, al igual que en otras situaciones complejas de aprendizaje, el alumno enfrenta información abundante y variada que, además, es rica en elementos distractores. Ante estas condiciones, se suele echar mano de esquemas, modelos o formatos que permiten identificar lo esencial, ordenar y hacer más manejable la información. Esto suele hacerse mediante la identificación de la estructura de la situación o problema y, a partir de ahí, proceder a su resolución. Estos recursos auxiliares funcionan como si fueran una especie de prótesis temporal que, una vez que el alumno se apropia de ellos, se constituyen en estrategias eficaces para solucionar problemas complejos. Este recurso de aprendizaje fue planteado por Vigotsky desde la primera mitad del siglo XX (Vigotsky, 2003, pp. 87-94) y se ha concretado en casos como la estrategia denominada *Story grammar,* usada para la mejor comprensión de textos narrativos. En ella se enseña a identificar la estructura común de estos textos: *personajes, escenario, problema y meta, trama o acciones, y desenlace*, logrando mejoras sustanciales en la comprensión (Gurney, Gersten, Dimino y Carnine, 1990; Idol y Croll, 1987).

## Operaciones matemáticas básicas

Esta idea de esquemas auxiliares para identificar la estructura de los problemas, también se ha llevado a cabo en el campo de las matemáticas (Fuchs y otros, 2010; Fuson y Willis, 1989; Lewis, 1989; Littlefield y Rieser, 1993; Nesher, 1999; Xin, 2008), y son particularmente importantes para lograr una representación mental adecuada del problema. Por ejemplo, para el caso específico de la suma y la resta, se instruye a los estudiantes para que identifiquen la estructura del problema; las más comunes han sido: *combinación*, *cambio*, *comparación*, *igualación* (Aguilar y otros, 2003; Aguilar y Navarro, 2000; García y otros, 2006; Jitendra y Hoff, 1996; Jitendra y otros, 2007; Maza, 1990).

Un esquema o estímulo auxiliar debe ayudar en cuatro aspectos básicos: caracterizar la estructura del problema; la identificación de los elementos críticos; la operación matemática que corresponde, y la verificación del resultado con el planteamiento original. Un esquema sintetiza las relaciones expresadas en un problema y su conexión con las operaciones, y también puede facilitar la transferencia a nuevos problemas.

Uno de los recursos que cumplen con las características recién señaladas es el desarrollado por Xin y otros (2008) y Xin y Zhang (2009), al que denominan: "Solución de problemas basado en un modelo conceptual" (COMPS, por sus siglas en inglés). Este recurso hace las veces de un esquema o marco conceptual que sirve como freno a las soluciones impulsivas, dando causa a una estrategia de solución de problemas. Se basa en un esquema de tipo algebraico que subraya las relaciones matemáticas implicadas y permite identificar la estructura común de problemas muy diversos (Xin, 2008).

El método por lo general tiene cinco momentos claves: 1) instrucción para aprender a reconocer el tipo de formato del problema (ejemplo: cambio, distribución, multiplicación/comparación, etc.); 2) enseñar a hacerse preguntas críticas pertinentes a cada formato (por ejemplo: *"¿Qué enunciado o pregunta nos habla de una cantidad mayor o menor que otra?... escribe dicha cantidad dentro del cuadrado"* o *"¿Qué enunciado o pregunta nos dice el número de unidades?...*

*escribe dicha cantidad dentro del círculo"*); 3) ir colocando las respuestas en un esquema conforme se van respondiendo los cuestionamientos; las cantidades correspondientes se van escribiendo dentro de figuras geométricas que siguen el formato de una ecuación (véase la figura 1 en la sección "Método"); 4) considerando la ubicación de la incógnita, proceder a despejar la ecuación, y 5) finalmente cotejar el resultado con la lógica del problema original. Naturalmente que todo el procedimiento se lleva a cabo con múltiples y variados ejemplos y con la asistencia de un profesor y elementos adicionales de ayuda que gradualmente se van desvaneciendo hasta lograr un desempeño autónomo.

En su trabajo de 2009, Xing y Zhang usaron el modelo conceptual *factor-factor-producto*, para la solución de problemas matemáticos verbales de multiplicación y división con tres alumnos de tercero o cuarto grado con riesgo de problemas en matemáticas.[1] Para organizar la información contenida en los problemas, usaron el procedimiento señalado en el párrafo previo. Todo ello ocurría en una relación uno a uno entre alumno y profesor, quien apoya al estudiante en todos los pasos del proceso hasta ir logrando la independencia de éste. Naturalmente, la instrucción se iniciaba con los problemas más simples en los que la incógnita se localizaba en el producto final; más adelante fueron aumentando el nivel de dificultad con problemas donde faltaba alguno de los factores y donde una cantidad podía ser un múltiplo o parte de otra cantidad. Los problemas incluyeron situaciones de dinero, representación con imágenes, problemas de varios pasos, etcétera.

Los autores recién señalados reconocen la necesidad de estudios adicionales para agregar validez externa a sus hallazgos. Al respecto, Villegas (2012) realizó un estudio con nueve escolares mexicanos de tercer grado de educación básica de una escuela vespertina y con deficiencias importantes en matemáticas. Usó una adaptación del modelo COMPS de Xin y otros (2008). Esta autora trabajó con un grupo de nueve alumnos durante cinco semanas, una hora diaria de lunes a viernes y obtuvo mejoras muy importantes respecto a un grupo de control que continuó con sus clases ordinarias. De algún modo, sus resultados aportan validez al modelo COMPS. Sin embargo, el estudio fue poco sistemático respecto al orden, clase y cantidad de los problemas matemáticos con los que trabajó, al igual que el procedimiento para despejar las ecuaciones. Lo anterior hace necesario la confirmación de los hallazgos, pero mejorando estos aspectos.

[1] El criterio habitual para definir la condición de riesgo implica una calificación referida a una norma estadística; ya sea a través de una distribución normal donde el riesgo es para los niños que califican por debajo de la media, pero dentro de una desviación estándar; o también se hace mediante frecuencia acumulada, quedando ubicados debajo de la mediana, pero en el segundo cuartil.

Tanto en los trabajos de Xin y otros (2008) y Xin (2008) como en el de Xin y Zhang (2009), los participantes tuvieron mejoras importantes en la resolución de problemas de diferentes tipos, además de un efecto positivo sobre sus nociones prealgebraicas.

El presente estudio se vincula directamente con estos trabajos, pero se extiende en dos aspectos:

1. Agregar validez externa a la estrategia COMPS, confirmando los alcances del método en problemas de multiplicación/división con niños mexicanos del sector público de la educación, subsanando los problemas encontrados en el trabajo de Villegas (2012), ya que sus datos, aunque favorables, contenían irregularidades en los criterios para incluir tipos de problema.
2. Al final del informe de Xin y otros (2008, p. 176), se señala que, durante la instrucción, los estudiantes tuvieron dificultad en el manejo de los componentes de la ecuación; en particular, la función del signo "igual", la cantidad desconocida y la ubicación de la cantidad mayor (la cual solía ubicarse en el lado derecho como si se tratara del "total", al margen de la lógica del problema). Por ello, un propósito adicional del presente trabajo será evaluar la inclusión de un recurso mnemotécnico en forma de una narración, para ayudar a ubicar los componentes de la ecuación y aprender las reglas de solución de ésta y, así, observar si disminuyen las dificultades indicadas por estos autores.

## MÉTODO

### PARTICIPANTES

Se trabajó con tres alumnos: dos varones (participantes 1 y 2) y una mujer (participante 3), de una edad media de 9 años, que cursaban el 4° grado de educación primaria en el turno matutino de una escuela ubicada en un suburbio de la ciudad de México.

Se seleccionaron mediante una prueba que constaba de diez problemas matemáticos verbales planteados por escrito (para una muestra de ellos, véase el Anexo 1). La prueba se aplicó a todo un grupo escolar. Se calificó la cantidad total de aciertos y sólo se trabajó con los tres alumnos que obtuvieran los tres puntajes más bajos de todo su grupo; esto hizo así porque la enseñanza basada en esquemas ha resultado particularmente afortunada en el trabajo con estudiantes con dificultades académicas (Fuchs y otros, 2008; Jitendra, George, Sood y Price, 2010). En la intervención, cada niño trabajaba con uno de los investigadores.

### Tipo de problemas

Tanto en los casos de multiplicación como en los de división, se trabajó con números enteros dentro de problemas simples, los cuales se resuelven con una sola operación e implican el manejo de decenas y centenas. En ningún caso el resultado implicaba números negativos. En los problemas se hace referencia explícita al número de unidades, al valor unitario y al producto, pero con variantes en cuanto al orden de redacción de estos tres elementos y al lugar de la incógnita. Se limitó el número de expresiones no pertinentes e información redundante (véase el anexo 1).

### Escenario de la investigación

Debido a que sólo fueron tres los participantes y que la escuela funciona en condiciones precarias en cuanto a instalaciones, se trabajó durante el horario de clase, pero en las bancas que existen en el patio de la escuela para no interrumpir ni ser interrumpido por las clases en curso.

Es necesario señalar que el tiempo en el que se trabajó con los niños, ellos estaban libres de distracciones, puesto que los demás grupos se encontraban en sus salones de clase y no existía alguna otra actividad en el patio. Se trabajó individualmente con cada participante, cada uno separado en una banca con su instructor.

### Diseño de investigación: prueba inicial-instrucción-prueba final

#### *Prueba inicial*

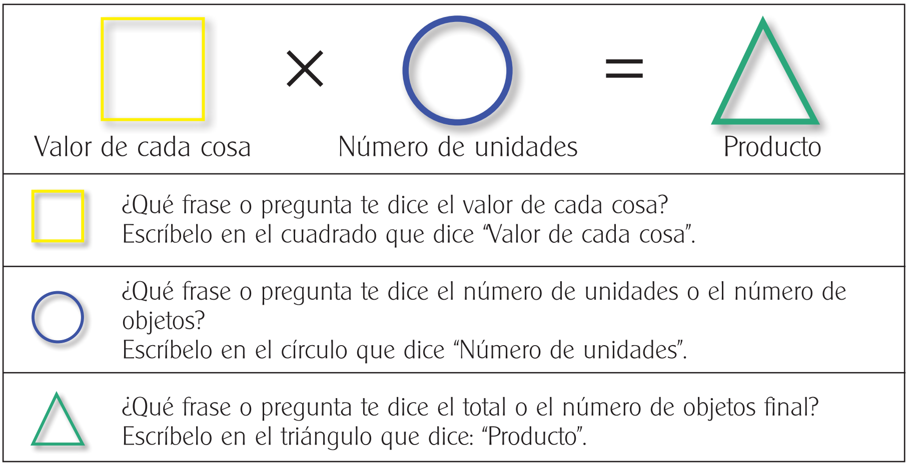
Se aplicó una prueba inicial (preprueba) de lápiz y papel con 10 problemas matemáticos escritos, diseñada para la elección de los participantes; la mitad eran problemas de multiplicación y la otra mitad de división. En el primer caso, la incógnita por despejar correspondía al total de la operación, la cual se ubicaba al lado derecho del signo "igual". En el segundo caso, la incógnita se encontraba del lado izquierdo y correspondía ya sea al valor de cada unidad o a la cantidad de unidades involucrada.

### *Instrucción*

Durante la instrucción se usó un número indeterminado de problemas hasta que se alcanzó el criterio de éxito. Dichos problemas se plasmaron en hojas de papel, cada una con dos problemas matemáticos escritos. Después del planteamiento del problema, se dejaba suficiente espacio para colocar encima la plantilla auxiliar que se describe enseguida.

Se usó una plantilla con un cuadrado, un círculo y un triángulo; cada figura tenía el contorno dibujado con un color diferente y con un hueco en el centro donde se escribían las cantidades del problema (véase la figura 1). En el interior de estas figuras el estudiante debería escribir las cantidades relevantes del problema y la incógnita por despejar de acuerdo con el modelo conceptual de Xing y Zhang (2009). La plantilla se colocaba sobre la hoja de modo que, al retirarla, quedaba escrita la expresión numérica del problema susceptible de resolverse como una ecuación algebraica.

**Figura 1** Plantilla auxiliar (adaptada de Xin, 2008) para aprender la estructura de los problemas de multiplicación y división



Se usaron lápices de colores que servían para que los niños subrayaran aquella frase o pregunta del problema que resultara crítica para su adecuada solución. El color con el que se subrayaba la expresión crítica correspondía al mismo color del contorno de la figura geométrica. De este modo se pretendía que relacionaran los elementos importantes del problema (cantidades) con los cuestionamientos críticos plasmados en la plantilla.

La plantilla sirve para irle mostrando al alumno la estructura y componentes básicos de los problemas al margen de información redundante, irrelevante o distractora. En el caso de la multiplicación y división, la estructura puede expresarse como relaciones factor-factor-producto y, de este modo, se contribuye a que el estudiante vaya formando un modelo conceptual. La plantilla también constituye un modo estratégico para aprender a convertir la información lingüística en una expresión matemática. Cuando se retira la plantilla, se opera directamente con la información numérica, pero queda clara la relación entre el problema y las operaciones. Al finalizar la instrucción, se puede probar si los alumnos ya pueden prescindir de la plantilla para resolver el problema por sí mismos.

El proceso de instrucción se llevó a cabo de manera individual. Cada sesión de trabajo consistió en la resolución de un mínimo de cinco problemas y un máximo de diez, según el ritmo de cada participante. La intervención inició con los problemas de multiplicación por ser los de más fácil solución, ya que la incógnita siempre se ubica en el producto final. Adicionalmente sólo hay que aprender a no distraerse con las sutilezas lingüísticas no pertinentes (vrg: *"al terminar de jugar...", "Lucía inició una colección de muñecas..."*, etc.). La incógnita siempre se representó en el esquema con la letra "a" (véase el Anexo 2 para ilustrar la manera en que funcionó).

La secuencia de instrucción consistió en cinco pasos:

1. Leer el problema.
2. Subrayar con colores diferentes las expresiones del problema que correspondían a los *factores* y al *producto* de acuerdo con las instrucciones de la plantilla.
3. Escribir las cantidades referidas en el interior de cada figura geométrica de la plantilla.
4. Retirar la plantilla, diciendo en voz alta qué representa cada número en el problema y llevar a cabo la operación matemática.
5. Leer el resultado, relacionándolo con el problema original.

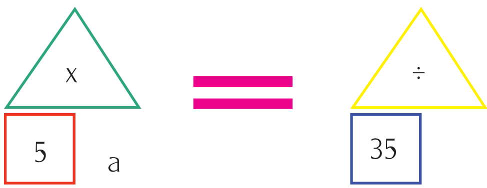
Seguir toda esta secuencia hasta llegar al resultado final de un problema se definió como un *ensayo*; de modo que hubo tantos ensayos como problemas resueltos. Durante todo este proceso, se fueron proporcionando explicaciones en cada uno de los cinco pasos hasta que se lograran resolver sin ayuda tres problemas consecutivos (véase el Anexo 2 para ilustrar como fluía la interacción didáctica).

Una vez que el alumno cumplía con el anterior criterio de éxito, se iniciaba la instrucción con los problemas de división usando la misma plantilla. En estos problemas siempre existe una cantidad total o *producto*, que se localiza a la derecha del signo "igual", y la incógnita se ubica ya sea en el valor de cada unidad o en el número de unidades. Al retirar la plantilla, se debe proceder a despejar la ecuación, siguiendo los procedimientos del algebra, cambiando la ubicación y signo del *producto* y procediendo a realizar la operación recíproca de la multiplicación, o sea, la división.

Puesto que la situación anterior representaba una fuente importante de dificultad para los participantes, se echó mano de un apoyo narrativo a manera de cuento y de estímulos de apoyo (figura 2) para que funcionaran como un esquema para realizar exitosamente las operaciones de solución del problema y reducir los problemas que informaron Xin y otros (2008, p. 176). Esto sucedió luego del 3$^{er}$ paso de la secuencia de instrucción y consistió en lo siguiente:

Se dividió la ecuación en dos partes separadas por el signo "igual". La parte izquierda, de acuerdo con la plantilla, contiene el signo de multiplicación y la información de los dos *factores*; y la derecha, la correspondiente al *producto*. Encima de cada una de estas dos partes se dibujaba "el techo de una casa", en cuyo centro se escribía ya sea el signo de multiplicación o el de división; la casa recibe entonces el nombre de "casa de la multiplicación" y "casa de la división".

**Figura 2** Estímulos de apoyo para la transformación visual de la ecuación en "la casa de la multiplicación" y "la casa de la división"



Posteriormente se procedía a narrar la siguiente historia: *"A las letras y los números no les gusta vivir juntos; la letra quiere vivir sola y los números deben estar juntos. Pero si la cantidad que vivía con la letra se cambia a la casa de la división, deben entonces dividirse las tareas de la casa entre las dos cantidades. El dueño de la casa se divide entre la cantidad del que llegó. Lo que resulte, es lo que estamos buscando del problema".* A continuación de esta narración se procedía a hacer los cambios y expresar la relación como ecuación algebraica.

$$\boxed{a} = \boxed{35 \div 5}$$

$$a = 7$$

Una vez que se encontraba el resultado, se releía el problema original verificando el dato final con el sentido del problema y el estado final de éste.

Nuevamente, a lo largo de la secuencia de instrucción se proporcionaban explicaciones y ayudas cuando era necesario. La instrucción concluía cuando el participante lograba la solución de tres problemas consecutivos usando la plantilla, pero sin ninguna ayuda adicional.

### *Prueba final o postprueba*

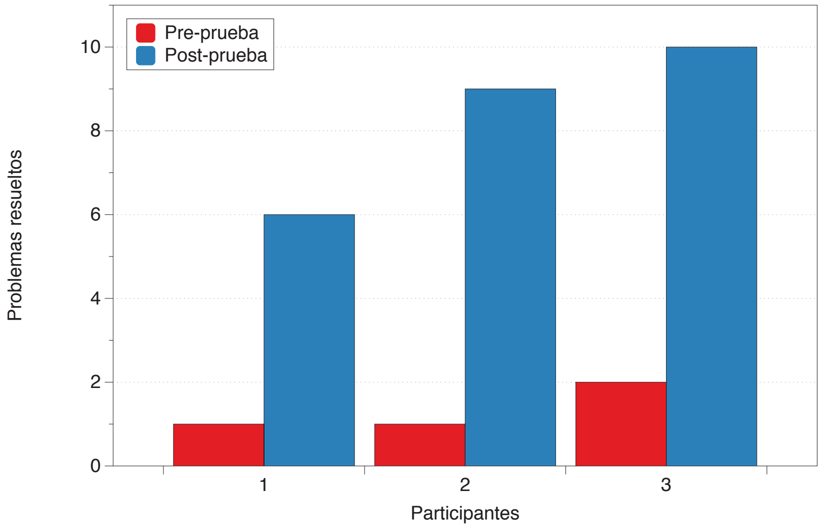
Se aplicó una prueba final al concluir la intervención: esta prueba era paralela a la prueba inicial, pero con problemas nuevos y se utilizó para estimar el impacto de la enseñanza (véase en el Anexo 1 una muestra de los problemas usados en las pruebas y en la instrucción).

Ya que se alcanzaba el criterio de éxito señalado, se aplicaba esta postprueba, en la que otra vez se resolvían cinco problemas nuevos de multiplicación y cinco de división, pero ahora sin la plantilla, a fin de observar si este esquema de apoyo había cumplido su función y logrado que finalmente el alumno resolviera los problemas de modo independiente.

## RESULTADOS

Uno de los objetivos del presente trabajo era extender la validez externa del modelo conceptual planteado por Xin y otros (2008) y Xin y Zhang (2009) con escolares mexicanos, que además tuvieran escasa competencia para la solución de problemas matemáticos. Si se comparan los resultados de la *preprueba* con la *postprueba*, como se muestra en la figura 3, se observa una marcada mejoría en la solución correcta de los problemas, pues en un inicio dos de los participantes sólo lograron resolver un problema y el tercero dos de diez posibles; al final, ya sin la plantilla y sin ninguna ayuda, se resolvieron: seis, nueve y diez problemas, respectivamente. Una ganancia relativa de +5 para el primer participante y +8 para los dos restantes.

**Figura 3** Comparación del número de problemas resueltos por participante en la preprueba y en la postprueba

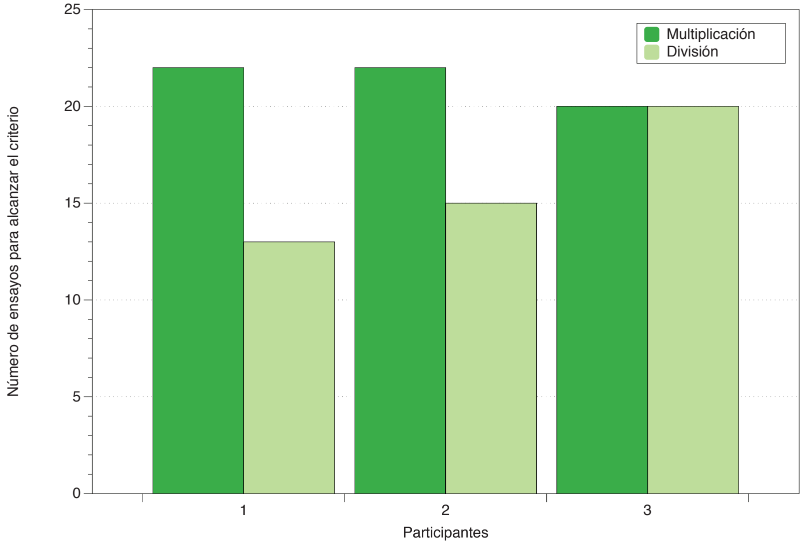



El segundo objetivo de la investigación tenía que ver con las dificultades que presentan los estudiantes para manejar los elementos de una ecuación y despejar la incógnita. Esto es especialmente cierto en el caso de la división, ya que la incógnita se encuentra en cualquiera de los factores y es necesario cambiar la ubicación y el tipo de operación de una de las cantidades (pasar de la condición de multiplicación a la de división) dejando sola la incógnita (representada por la letra "*a*"). Al haber mayor dificultad, cabía esperar que fuera necesaria una mayor cantidad de ensayos de instrucción.

Luego de leer los problemas de división y colocar las cantidades correspondientes usando la plantilla, se retiraba esta última y se procedía tanto a dibujar los techos de la multiplicación y la división como a narrar la historia que se describe enseguida de la figura 2.

Como se esperaba que con las divisiones se alcanzara el criterio de éxito con mayor dificultad, pero al mismo tiempo se pretendía evaluar el efecto de la narración de la historia, se procedió entonces a hacer una comparación entre la multiplicación y la división en cuanto al número de ensayos necesarios para alcanzar dicho criterio. Los resultados se muestran en la figura 4.

**Figura 4** Comparación entre el número de ensayos que se necesitaron para alcanzar el criterio de éxito para la multiplicación y división por cada participante




Como puede observarse en la figura 4, no se requirieron más ensayos para alcanzar el criterio de éxito con los problemas de división; antes bien, en dos de los participantes el éxito se alcanzó en menos ensayos: nueve menos para el primer participante y siete, para el segundo. Muy posiblemente este efecto facilitador es el producto combinado de la práctica que ya se tenía con el uso de la plantilla en los problemas de multiplicación más el resultado de la narración que se utilizó para ayudar a los participantes a despejar la ecuación.

## DISCUSIÓN

No hay que perder de vista que el presente trabajo se llevó a cabo con sólo tres participantes, lo que hace que se encuentre más cercano a un estudio de caso que a investigaciones donde se compara el desempeño entre grupos. Del mismo modo, para confirmar las bondades del procedimiento, hay que esperar estudios de mayor fortaleza experimental donde pueda haber un grupo de control o la comparación con otros métodos a fin de dejar más claras las relaciones causales implicadas. Sin embargo, el hecho de haberse encontrado resultados favorables con esta estrategia en otros países y en condiciones variadas le agrega puntos favorables a su generalidad.

Respecto a los objetivos planteados, se confirmó el efecto facilitador para resolver problemas matemáticos del modelo de Xin y otros (2008) y Xin y Zhang (2009); en este caso, con problemas de una sola operación tanto de multiplicación como de división. En esta estrategia se recurre a un esquema y preguntas críticas para identificar la estructura común de los problemas matemáticos. El formato de ecuación algebraica resulta adecuado, como se ha mostrado en otros estudios (Xin, 2008). En este caso funcionó con población mexicana y con niños deficientes en matemáticas. El desempeño en la postprueba, donde ya no se usaba la plantilla, revela hasta qué punto se logra prescindir finalmente de este esquema auxiliar en un tiempo relativamente corto.

Durante la intervención se descubrieron deficiencias de los alumnos en la parte operativa de las multiplicaciones o divisiones, especialmente cuando había involucradas cantidades con decenas o centenas. Por esta razón, se tuvo que agregar tiempo extra destinado a corregir este problema; el tiempo total de la instrucción se alargó y se tuvo que combinar con la enseñanza de procedimientos para que no hubiera errores en la parte operativa del problema.

La plantilla sirve para apoyar la identificación de los elementos críticos del problema y contempla estímulos de apoyo de diferente clase, como las figuras geométricas y los colores. Los niños pueden apoyarse en unos o en otros. En el caso del participante 2 se observó que se apoyó más en los colores.

El participante 1 fue quien ganó menos de la *preprueba* a la *postprueba*. Esto coincide con el hecho de que fue el participante que tuvo más dificultades con las operaciones matemáticas, de modo que fue quien consumió más tiempo atendiendo problemas tanto de tipo operativo como del uso de los estímulos auxiliares para la solución del problema; lo anterior repercutió en una mayor carga de aprendizaje. Adicionalmente, hay que señalar que cuando se pasó a los problemas de división, optó por prescindir de la ayuda narrativa para despejar la incógnita de la ecuación, declarando que él ya sabía que se tenía que hacer una división. La menor ganancia en la postprueba se pudo originar en los errores cometidos en la parte operativa de los problemas, pero también por no haber recurrido a la narración y a estímulos auxiliares. De cualquier modo, su ganancia hace suponer que, con una mayor práctica, se hubiera alcanzado mejor desempeño.

En cuanto al uso de un recurso auxiliar de tipo narrativo para ayudar a despejar la incógnita de la ecuación en el caso de las divisiones, hay indicios de su influencia positiva, pues, por un lado, no se presentaron confusiones del tipo que reportan Xin y otros (2008, p. 176), pero por otro lado, sólo respecto al participante 2 hay mayor confianza para afirmar que dicha situación auxiliar facilitó un aprendizaje más rápido con los problemas de división, ya que la participante 3 alcanzó el criterio de éxito en la misma cantidad de ensayos y el participante 1 optó por no usar este recurso. Queda entonces todavía abierta la incógnita sobre sus alcances y en espera de datos confirmativos en futuros estudios.

El recurrir a un formato algebraico para la solución de problemas puede tener la ventaja adicional de que el alumno empieza a desarrollar conceptos prealgebraicos desde grados escolares tempranos, como lo demostraron Xin (2008), Xin y Zhang (2009) y Xin y otros (2008). Así, cuando llegue a la educación secundaria, ya estará familiarizado con estas circunstancias y posiblemente podrá entender mejor lo propio del campo del álgebra. Lo anterior de ninguna manera significa que los niños como los de este estudio se están comportando algebraicamente como lo hace un estudiante más avanzado. Con el procedimiento seguido, los alumnos van aprendiendo que, a pesar de diferentes cambios en la parte superficial de los problemas, permanecen constantes los factores esenciales; esta circunstancia podrá tener un efecto preventivo para evitar soluciones precipitadas o basadas en aspectos superficiales de los problemas.

Otro aspecto que hay que considerar es si con el procedimiento usado sólo se alcanza una aparente solución mecanizada de los problemas. Esto no es tan cierto como pudiera pensarse, puesto que se pone énfasis en la relación entre el problema y las operaciones matemáticas, así como en la estructura común de los problemas. Al mismo tiempo, el desempeño observado en la postprueba, donde ya no hay estímulos auxiliares, es un dato que no apoya la idea de la solución mecánica. Y si bien se puede asumir, por ejemplo, que no hay una comprensión profunda de la naturaleza recíproca entre multiplicación y división, la actividad exitosa para solucionar los problemas constituye una experiencia para favorecer posteriormente dicha profundidad.

Hay dos preocupaciones adicionales que surgen cuando se usan estrategias como las de este trabajo. La primera tiene que ver con la vinculación que debe establecer el alumno entre las operaciones numéricas y el problema planteado lingüísticamente. Al respecto, cabe subrayar que ésta se promueve con las preguntas críticas contenidas en la plantilla para colocar las cantidades en el formato de la ecuación y también con la verificación del resultado numérico final con el sentido del problema original. Esta vinculación se podría reforzar agregando una actividad donde el alumno, una vez familiarizado con el uso de la plantilla, siga el camino inverso: en lugar de plasmar primero el problema y luego su expresión algebraica, partir de una expresión algebraica, para luego pedir que se esboce lingüísticamente un problema plausible que se ajuste a los términos de la ecuación y la incógnita.

La segunda preocupación tiene que ver con la transferencia de la estrategia cuando cambian la complejidad y los formatos de presentación de los problemas. En el presente trabajo sólo se demostraron las bondades de la estrategia con un formato básico y con problemas de una sola operación; sin embargo, a juzgar por trabajos que han seguido estrategias similares (Fuchs y otros, 2003a; Fuchs y otros, 2004; Powell, 2011) se podría esperar que los participantes tuvieran buenas posibilidades para transferir lo aprendido a nuevas situaciones. Por el momento no sabemos hasta dónde pueden llegar los alcances de la transferencia y los recursos pedagógicos adicionales para favorecerla.

Los resultados de este trabajo son de carácter descriptivo; pero respecto a la pretensión de probar la efectividad del método con escolares mexicanos de escuela pública y en situación grupal, encontramos gran coincidencia con los resultados de Villegas (2012), lo que abona a favor no sólo de la efectividad de los procedimientos, sino también de su viabilidad práctica. De acumularse más resultados que confirmen las bondades del procedimiento con problemas más complejos, con otras operaciones básicas y con buenos grados de transferencia, se podrá poner a prueba la instrucción con grupos completos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Aguilar, M., J. Navarro y C. Alcalde (2003), "El uso de esquemas figurativos para ayudar a resolver problemas aritméticos", *Cultura y Educación*, vol. 15, núm. 4, pp. 385-397.

Aguilar, V. M., y G. J. I. Navarro (2000), "Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños", *Revista de Psicología General y Aplicada*, vol. 53, núm. 1, pp. 63-83.

Bermejo, V., y P. Rodríguez (1987a), "Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición", *Infancia y Aprendizaje*, núms. 39-40, pp. 71-81.

De Corte, E., y L. Verschaffel (1987b), "The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 18, núm. 5, pp. 363-381.

Fuchs, L. S., y D. Fuchs (2002), "Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without co-morbid reading disabilities", *Journal of Learning Disabilities*, vol. 35, pp. 563-573.

Fuchs, L., P. M. Seethaler, S. R. Powell, D. Fuchs, C. L. Hamlett y J. M. Fletcher (2008), "Effects of preventative tutoring on the mathematical problem solving of third-grade students with math and reading difficulties", *Exceptional Children*, invierno, vol. 74, núm. 2, pp. 155-173.

Fuchs, L. S., D. Fuchs, R. Finelli, S. J. Courey y C. L. Hamlett (2004), "Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems", *American Educational Research Journal*, núm. 41, pp. 419-445.

Fuchs, L. S., D. Fuchs, K. Prentice, M. Burch, C. L. Hamlett, R. Owen y otros (2003a), "Explicitly teaching for transfer: Effects on third-grade students' mathematical problem solving", *Journal of Educational Psychology*, núm. 95, pp. 293-305.

Fuchs, L. S., R. O. Zumeta, R. F. Schumacher, S. R. Powell, P. M. Seethaler, C. L. Hamlett y D. Fuchs (2010), "The effects of schema broadening instruction on second graders' word-problems performance and their ability to represent word-problems with algebraic equations: A randomized control study", *The Elementary School Journal*, vol. 110, núm. 4, pp. 440-463.

Fung Lin, N. L. (1990), "The effect of superfluous information on children's solution of story arithmetic problems", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 21, pp. 509-520.

Fuson, K. C., y G. B. Willis (1989), "Second grader's use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems", *Journal of Educational Psychology*, vol. 81, núm. 4, pp. 514-520.

García, A. I., J. E. Jiménez y S. Hess (2006), "Solving arithmetic word problems: An analysis of classification as a function of difficulty in children with and without arithmetic LD", *Journal of Learning Disabilities*, mayo/junio, vol. 39, núm. 3, pp. 270-281.

Gurney, D., R. Gersten, J. Dimino y D. Carnine (1990), "Story grammar: Effective literature instruction for high school students with learning disabilities", *Journal of Learning Disabilities*, núm. 23, pp. 335-342.

Hanich, L. B., N. C. Jordan, D. Kaplan y J. Dick (2001), "Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties", *Journal of Educational Psychology*, núm. 93, pp. 615-626.

Idol, L., y V. J. Croll (1987), "Story-mapping training as a means of improving reading comprehension", *Learning Disability Quarterly*, núm. 10, pp. 214-229.

INEE (2010), *Base de datos para sexto grado de educación básica*, recuperado de: http://www.inee.edu.mx/index.php/bases-de-datos/bases-de-datos-excale/excale-06-ciclo-2008-2009, noviembre de 2012.

INEE (2010), *México en PISA 2009*, documento recuperado de: www.inee.edu.mx/index.php/component/content/article/4834, noviembre de 2012.

Jitendra, A. K., M. P. George, S. Sood y K. Price (2010), "Schema-based instruction: Facilitating mathematical word problem solving for students with emotional and behavioural disorders", *Preventing School Failure*, vol. 54, núm. 3, pp. 145-151.

Jitendra, A. K., C. C. Griffin, P. Haria, J. Leh, A. Adams y A. Kaduvettoor (2007), "A comparison of single and multiple strategy instruction on third-grade students' mathematical problem solving", *Journal of Educational Psychology*, vol. 99, núm. 1, pp. 115-127.

Jitendra, A. K. y K. Hoff (1996), "The effects of schema-based instruction on mathematical word-problem-solving performance of students with learning disabilities", *Journal of Learning Disabilities*, núm. 29, pp. 422-431.

Jordan, N. C., y T. O. Montani (1997), "Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with specific and general mathematics difficulties", *Journal of Learning Disabilities*, núm. 30, pp. 624-634.

Kroesbergen, E. H., J. E. H. van Luit y C. J. M. Maas (2004), "Effectiveness of explicit and constructivist mathematics instruction for low-achieving students in the Netherlands", *The Elementary School Journal*, vol. 104, núm. 3, pp. 233-251.

Lean, G. A., M. A. Clements y G. del Campo (1990), "Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: A comparative study", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 21, pp. 165-191.

Lewis, A. B. (1989), "Training students to represent arithmetic word problems", *Journal of Educational Psychology*, vol. 81, núm. 4, pp. 521-531.

Littlefield, J., y J. J. Rieser (1993), "Semantic features of similarity and children's strategies for identifying relevant information in mathematical story problems", *Cognition and Instruction*, vol. 11, núm. 2, pp. 133-188.

Maza, C. G. (1990), *Sumar y Restar. El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta*, Madrid, Visor Aprendizaje.

Montague, M., C. Warger y T. H. Morgan (2000), "Solve it! Strategy instruction to improve mathematical problem solving", *Learning Disabilities Research & Practice*, vol. 15, núm. 2, pp. 110-116.

Nesher, P. (1999), "El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal", *Suma*, núm. 31, pp. 19-26.

OECD (2001), *The Definition and Selection of Key Competencies. Executive Summary*, recuperado de: www.oecd.org/pisa/35070367.pdf, noviembre de 2012.

OECD (2010), *Strong Performers and Successful Reformers in Education: Lessons from PISA for Mexico*, p. 14.

Parmar, R. S., J. R. Cawley y R. R. Frazita (1996), "Word problem-solving by students with and without math disabilities", *Exceptional Children*, núm. 62, pp. 415-429.

Pedrotty, D., B. R. Bryant y D. D. Hammill (2000), "Characteristic behaviors of students with LD who have teacher-identified math weaknesses", *Journal of Learning Disabilities*, vol. 33, núm. 2, pp. 177-199.

Powell, S. R. (2011), "Solving word problems using schemas: A review of the literature", *Learning Disabilities Research & Practice*, vol. 26, núm. 2, pp. 94-108.

Russell, R. L., y H. P. Ginsburg (1984), "Cognitive analysis of children's mathematical difficulties", *Cognition and Instruction*, núm. 1, pp. 217-244.

Sabagh, S. (2008), "Solución de problemas aritméticos redactados y control inhibitorio cognitivo", *Universitas Psychologica*, vol. 7, núm. 1, pp. 215-227.

SEP (2012), *Plan de estudios 2011 de Educación Básica*, recuperado de: http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/index.php?act=frontlibros, noviembre de 2012.

Villegas, T. E. (2012), *El uso de una estrategia para la* solución *de problemas matemáticos planteados lingüísticamente*, tesis de licenciatura en Psicología, UNAM, FES Iztacala, recuperado del sitio web de la Universidad

Nacional Autónoma de México, Dirección General de Bibliotecas: http://oreon.dgbiblio.unam.mx:8991/F/HRGAMFNTMRMI8DE2AT15LG9QKHFM52T2U891Y1MCC8LVLGMX2B-40031?func=full-set-set&set_number=261270&set_entry=000001&format=999
Vygotsky, L. S. (2003), *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona, Crítica (Biblioteca de Bolsillo).
Xin, Y. P. (2008), "The effect of schema-based instruction in solving mathematics word problems: An emphasis on prealgebraic conceptualization of multiplicative relations", *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 39, núm. 5, pp. 526-551.
Xin, Y. P., y D. Zhang (2009), "Exploring conceptual model-based approach to teaching situated word problems", *The Journal of Educational Research*, julio/agosto, vol. 102, núm. 6, pp. 427-441.
Xin, Y. P., B. Wiles y Y. Lin (2008), "Teaching conceptual model-based word problem story grammar to enhance mathematics problem solving", *The Journal of Special Education*, noviembre, vol. 42, núm. 3, pp. 163-178.

## ANEXO 1. MUESTRA DEL TIPO DE PROBLEMAS USADOS PARA LAS PRUEBAS Y LA INSTRUCCIÓN

### Problemas de multiplicación

1. Para ayudar a prevenir la gripe en tiempos de frío, el gobierno compró 12 cargamentos de bufandas a $1 000 pesos cada cargamento. ¿Cuánto dinero gastó el gobierno?
2. Para la cena de Navidad de toda la familia, la mamá de Linda compró 2 pavos; si cada uno le costó $245, ¿cuánto gastó la mamá de Linda?
3. La abuelita de Mario compró 4 jaulas para sus aves, si cada jaula le costó $90 pesos, ¿cuánto pagó la abuelita de Mario?
4. La maestra tiene 30 gises, si sabemos que cada gis le costó 2 pesos, ¿cuánto pagó la maestra por los gises?
5. La tintorería cobra $40 pesos por lavar cada pantalón; si le llegaron 11 pantalones para lavar, ¿cuánto ganará la tintorería por lavar esos pantalones?
6. Moisés compró las cortinas para su nueva casa; si necesita 8 cortinas y cada una se la venden a $65 pesos, ¿cuánto dinero gastó Moisés?

7. Lucía inició una colección de muñecas; si consigue 3 muñecas cada día, ¿cuántas muñecas tendrá en una semana?
8. Un orfanato tiene 14 cuartos y 4 niños duermen en cada cuarto, ¿cuántos niños viven en el orfanato?
9. El repartidor de periódico pasa por 14 calles al día; si en cada calle hay 7 casas que reciben el periódico, ¿cuántas casas reciben el periódico diariamente?
10. ¿Cuántas rodilleras necesita el equipo de ciclismo si practican 40 ciclistas?

## Problemas de división

1. Armando fue a la tienda de la esquina y compró 5 chocolates para su mamá; si en total gastó $20 pesos, ¿cuánto valía cada chocolate?
2. María fue al mercado a comprar listones para sus amigas; si compró 13 listones y se gastó $39 pesos, ¿cuánto le costó cada listón?
3. En el negocio familiar de Julio se compraron 14 flautas de madera; si en total gastaron 210 pesos, ¿cuánto costó cada flauta?
4. Si jugando un videojuego en una maquinita, Pedro gastó 40 pesos para jugar 20 veces, ¿cuánto cuesta cada oportunidad de jugar en esa maquinita?
5. Ernesto tiene muchas canicas, tantas que ha decidido vender 10 de ellas; si en total ganó $30 pesos y vendió cada canica al mismo precio, ¿a cuánto vendió cada canica?
6. Un señor que vendía helados ganó un total de $600 en un día de trabajo; cada helado lo vendió en 6 pesos, ¿cuántos helados vendió el señor?
7. Durante 6 semanas Jorge juntó un total de 140 estampas; si juntó el mismo número de estampas cada semana, ¿cuántas estampas juntó por semana?
8. Cierta librería tiene 80 libros disponibles para vender, estos libros están acomodados en 4 estantes; si a cada estante le cabe el mismo número de libros, ¿cuántos libros están acomodados en cada estante?
9. Todos los días el lechero entrega un total de 240 litros de leche; en su recorrido diario pasa por 120 casas, si en cada casa entrega el mismo número de litros, ¿cuántos litros entrega en cada casa?
10. Si a Luis le pagan en su trabajo un total de 150 pesos por cada 5 días, ¿cuánto dinero le dan por día?

## ANEXO 2. MUESTRA DE LAS INTERACCIONES DIDÁCTICAS

1) Problema de multiplicación entre el participante 3 (P3) y el investigador (I). El problema en este ejemplo es el siguiente *"Para ayudar a prevenir la gripe en tiempos de frío, el gobierno compró 12 cargamentos de bufandas a $1 000 pesos cada una, ¿cuánto dinero gastó en total el gobierno?"*

*I:* Vamos a resolver el siguiente problema, te voy a pedir por favor que lo leas.
*P3:* Para ayudar a prevenir la gripe en tiempos de frío, el gobierno compró 12 cargamentos de bufandas a $1 000 pesos cada una. ¿Cuánto dinero gastó en total el gobierno?
*I:* Muy bien, ahora vamos a responder una por una las preguntas que vienen en la plantilla y a subrayar en el problema.
*P3:* La primera dice: ¿Qué frase o pregunta te dice el valor de cada objeto? Escríbelo en el cuadrado que dice "valor de cada objeto".
*I:* Muy bien. ¿Qué parte del problema te habla sobre el valor de algo?
*P3:* ...¿a $1 000 pesos cada una?
*I:* Correcto, entonces vamos a subrayar esa frase, por favor *(el participante la subraya)*; ahora vamos con la siguiente pregunta. ¿Qué frase o pregunta te dice el número de unidades o el número de objetos?
*P3:* Hm... ¿12 cargamentos de bufandas?
*I:* Muy bien, esa frase nos habla sobre el número de cargamentos de bufandas, subráyala por favor *(el participante la subraya)*. Vamos con la última. ¿Qué frase o qué pregunta te dice el total o el número de objetos final?
*P3:* Pues es la que dice ¿Cuánto dinero gastó en total el gobierno?
*I:* Perfecto, ahora subraya esa frase *(el participante la subraya)*. Ahora, en cada una de las tres frases que subrayaste aparece una cantidad, copia esa cantidad en la figura que sea del mismo color con el que subrayaste la frase *(el participante lo hace, se detiene en la última)*.
*P3:* En esta frase no hay un número.
*I:* Así es, cuando eso pase, pon una letra "a" en la figura que representa el número que nos hace falta *(el participante lo hace)*. Ahora, vamos a retirar la plantilla; copia el signo de multiplicación y el signo de *igual* entre las cantidades que escribiste, tal y como está en la plantilla (el participante lo hace). ¿Ahora qué operación tenemos que resolver?

*P3:* Una multiplicación.
*I:* Así es, vamos a resolverla, ¿cuánto es 12 × 1 000?
*P3:* sería... *(el participante hace la operación en el espacio que está libre después de la ecuación)*, el resultado es 12 000 porque sólo tomo el 12 y le agrego los tres ceros.
*I:* Muy bien, ahora escribe la operación que escribiste al principio, pero en vez de poner "a" pon el número que obtuvimos.
*P3:* *(El participante escribe la ecuación con el resultado)* Ya. Quedó que 12 × 1 000 = 12 000.
*I:* Ahora dime qué representa el 12 000 en el problema.
*P3:* Es el dinero que gastó en total el gobierno.
*I:* Así es y ¿qué representan los otros dos números?
*P3:* 12 es la cantidad de cargamentos que compró el gobierno y 1 000 es lo que le costó cada cargamento.

## Problema de división

El problema en este ejemplo es el siguiente *"Armando fue a la tienda de la esquina y compró 5 chocolates para su mamá, si en total gastó $20 pesos, ¿cuánto valía cada chocolate?"*

P3 lee el problema.
*P3:* "Armando fue a la tienda de la esquina y compró 5 chocolates para su mamá; si en total gastó $20 pesos, ¿cuánto valía cada chocolate?"
*I:* OK, ahora vamos con la primera pregunta, ¿qué frase o pregunta nos habla sobre el valor de cada objeto?
*P3:* Hm... la que dice "¿Cuánto valía cada chocolate?"
*I:* Correcto *(el participante lo dijo al momento que subrayó la pregunta)*. Vamos con la siguiente. ¿Qué frase nos habla sobre el número de objetos?
*P3:* ¿5 chocolates? *(subrayando la frase)*
*I:* Exacto, ahora ¿cuál nos habla sobre el total?
*P3:* "En total gastó 20 pesos."
*I:* Así es, ahora escribe las cantidades igual que en los problemas anteriores y, en la frase donde no hay ningún número, escribe una letra "*d*". *(el participante lo hace)*. Retiremos la plantilla y escribamos los signos de multiplicación e *igual (el participante lo hace mientras escucha la instrucción;*

*la ecuación resultante fue $a \times 5 = 20$).* Ahora necesitamos resolver esa operación, pero no podemos de momento, las letras no se pueden multiplicar por los números, así que hay que juntar las letras de un lado y los números de otro para poder resolverlos. Para cada ocasión en que tengas este problema, te voy a contar una historia que te ayudará a recordar cómo deben de ir los números. [Aquí el Investigador procedía con la narración y uso de los estímulos de apoyo (véase la figura 2) que se describen en la parte del "Procedimiento para los problemas de división".]

*P3:* ¿Entonces ahora que las letras y números están en lados diferentes ya se puede resolver?

*I:* Así es, resuelve la operación, por favor.

*P3:* El participante divide 20 entre 5, y queda un cuatro; enseguida escribe: "$a = 4$".

*I:* Muy bien, ¿qué significa ese resultado?

*P3:* Que cada chocolate costó 4 pesos y que si compró 5, entonces se gastó en total $20 pesos.

## DATOS DE LOS AUTORES

**Alejandra García Alcalá**
Universidad Nacional Autónoma de México, Campus Iztacala, México
idem_cas_cancer2@hotmail.com

**Jonathan Vázquez Maldonado**
Universidad Nacional Autónoma de México, Campus Iztacala, México
glalapalus@hotmail.com

**Luis Zarzosa Escobedo**
Universidad Nacional Autónoma de México, Campus Iztacala, México
zarzosae@unam.mx