

Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica

Martín E. Acosta, Carolina Mejía y Carlos W. Rodríguez

Resumen: Queremos responder a la necesidad de explicitar una práctica matemática que incorpora el software de geometría dinámica como modelo de actividad matemática por reproducir en el salón de clases. Así que presentamos un ejemplo de resolución de un problema de construcción en el que se utiliza el software de geometría dinámica para encontrar la solución y la demostración de dicha solución. En ese proceso de solución, utilizamos la *técnica de lugar geométrico* y la herramienta *lugar geométrico* del software. Mostramos la articulación de los aspectos intuitivos y formales de la actividad matemática de resolución de problemas y el papel del software en dichos procesos.

Palabras clave: matemática experimental, lugar geométrico, arrastre, construcción, demostración, praxeología matemática.

Abstract: We answer the need to explicit a mathematical practice which uses dynamic geometry software as a model of mathematical activity to reproduce in class. We present an example of construction problem solving in which we use dynamic geometry to find a solution and a proof of this solution. In the solution process, we use the *locus technique* and the *locus tool* of the software. We show the articulation between intuitive and formal aspects of the mathematical activity and the role of software in these processes.

Keywords: experimental mathematics, locus, dragging, construction, proof, mathematical praxeology.

Fecha de recepción: 30 de septiembre de 2012; fecha de aceptación: 13 de mayo de 2013.

1. INTRODUCCIÓN

En Acosta (2005), examinamos el problema de la integración en la enseñanza del software de geometría dinámica desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Según dicha teoría, la clase de matemáticas es un intento de reproducir una práctica matemática corriente en la comunidad de los matemáticos. Para describir esa práctica, Chevallard utiliza el término, *praxeología*, y lo define como el conjunto de tareas que la comunidad (la *institución* en términos de Chevallard) realiza, el conjunto de técnicas que pone en práctica para realizar las tareas y los discursos (*tecnologías* en términos de Chevallard) que describen y justifican esas técnicas. Una praxeología se construye sobre la manipulación de unos objetos ostensivos (objetos perceptibles por los sentidos: dibujos, símbolos, sonidos, gestos...); como las tareas, las técnicas y las tecnologías se construyen con respecto a dichos objetos ostensivos, cualquier cambio en el conjunto de objetos ostensivos implica una transformación de toda la praxeología (Bosch, 2001, p. 15). Si interpretamos la integración del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría como la introducción de unos objetos ostensivos nuevos, los dibujos dinámicos, podemos anticipar que dicha introducción requiere una modificación de las tareas, técnicas y tecnologías que se trabajan normalmente para tener en cuenta las características de dichos ostensivos dinámicos. Por tanto, no será un objetivo fácil de alcanzar, pues requiere la modificación de la praxeología matemática de los profesores. Además, como no existe una comunidad de referencia que utilice los ostensivos dinámicos en su práctica matemática, los profesores no pueden intentar reconstruir esa praxeología en sus clases. Se encontrarán entonces con una pérdida de control sobre lo que sucede en la clase y, por consiguiente, intentarán limitar fuertemente el uso de los ostensivos dinámicos.

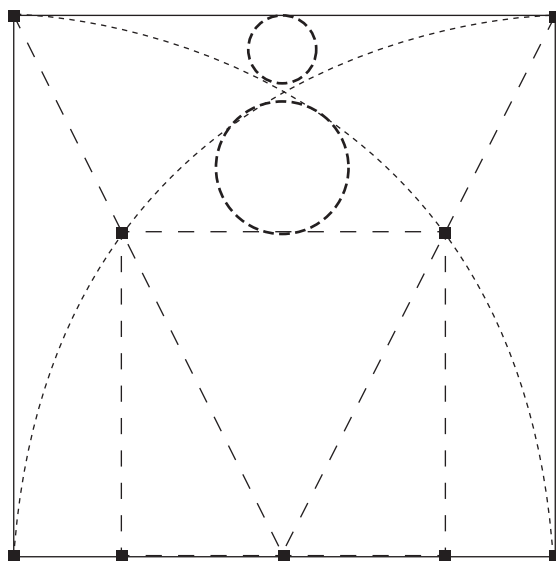
En este artículo queremos retomar esa idea y presentar una solución de un problema de construcción, utilizando una praxeología matemática con base en los dibujos dinámicos. En esta praxeología, que podemos calificar como “geometría experimental” (Acosta, 2005), los ostensivos informatizados se convierten en herramientas para descubrir una solución y para descubrir una demostración de dicha solución. De esta manera, podemos reunir intuición y rigor en nuestro proceso de solución. Además, implementamos la técnica de lugar geométrico, transponiéndola al contexto de los dibujos dinámicos.

Esperamos de esta manera contribuir a la incorporación del software de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría, mostrando una práctica

matemática que puede servir de referencia en el momento de reconstruir una praxeología matemática que incluya los dibujos dinámicos en una institución determinada.

2. EL PROBLEMA

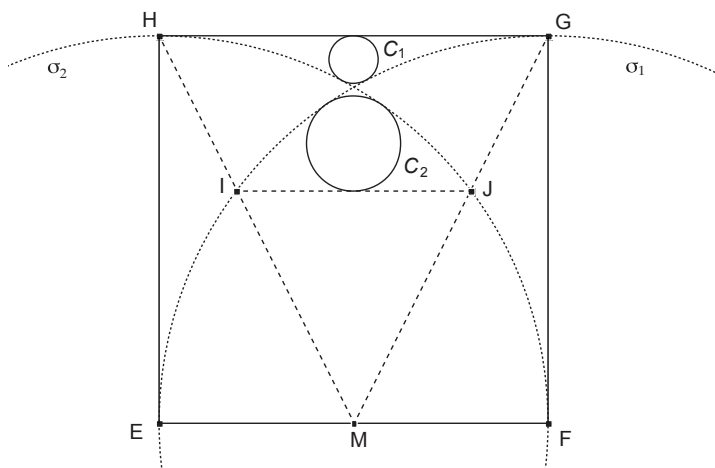
El problema es un *sangaku* (problema japonés de geometría), tomado de la página <http://www.albaiges.com/matematicas/algebraanalisis/sangaku.htm>



La reproducción de este *sangaku* no presenta dificultad, salvo por la construcción de los dos círculos tangentes a los arcos y a los cuadrados. Nos limitaremos entonces sólo a la construcción de los dos círculos C_1 y C_2 que describiremos de la siguiente manera: El círculo C_1 debe ser tangente al lado HG del cuadrado y debe ser tangente a los círculos σ_1 y σ_2 ; el círculo C_2 debe ser tangente al segmento II y a los círculos σ_1 y σ_2 como se muestra en la figura 1.

¹ Al pedir la reproducción de una figura, nos referimos a realizar una construcción que garantice que se cumplen las propiedades pedidas en todos los casos. En términos de geometría dinámica, la construcción debe "resistir el arrastre".

Figura 1



3. TÉCNICA DEL LUGAR GEOMÉTRICO

La técnica de lugar geométrico para la solución de problemas de construcción la describe Petersen (p. 6), quien dice que, si se quiere determinar la posición de un punto,

Consideramos de forma aislada las diferentes condiciones que debe satisfacer el punto buscado; a cada una de ellas corresponderá un lugar geométrico; y si son rectas o círculos, el problema está resuelto. Porque el punto deberá encontrarse a la vez sobre cada uno de ambos lugares, debe encontrarse en los puntos donde se cortan.

Podemos dar un ejemplo sencillo de aplicación de la técnica en el problema de construir un cuadrado $ABCD$ a partir del lado AB : una vez trazada la perpendicular a AB por A , se trata de determinar la posición de un tercer vértice del cuadrado. Podemos definir ese punto a partir de dos condiciones: *i)* debe estar sobre la recta perpendicular a AB por A , *ii)* la distancia de ese punto a A debe ser igual a la distancia de B a A . Si consideramos todos los puntos que cumplen la primera condición, tenemos nuestro primer lugar geométrico: la recta perpendicular a AB por A . Si consideramos todos los puntos que cumplen la segunda condición,

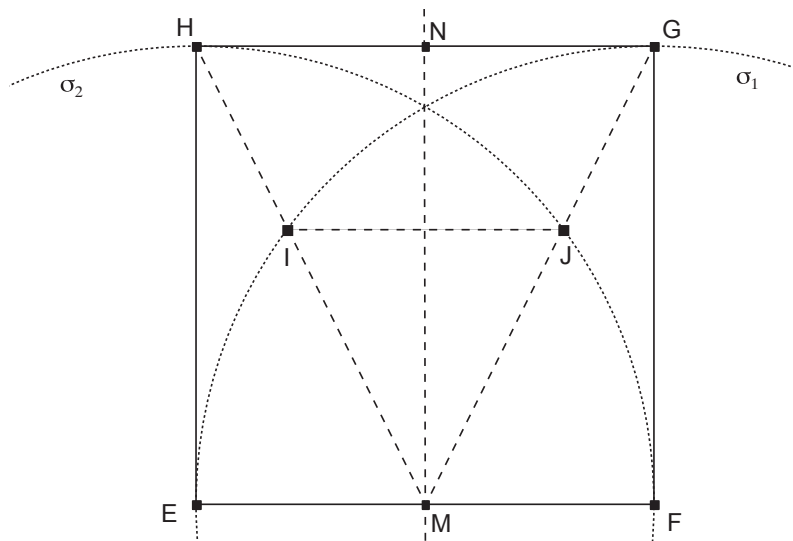
tenemos nuestro segundo lugar geométrico: el círculo de centro A que pasa por B . La intersección de esos dos lugares geométricos contiene todos los puntos que cumplen las dos condiciones: dos puntos que pueden servir para la construcción del cuadrado $ABCD$.

En Cabri, un lugar geométrico es un objeto que representa la trayectoria de un punto² que depende de la posición de otro punto con una trayectoria definida, es decir, que recorre un objeto dado. Por ejemplo, si tomamos un círculo c cualquiera, un punto fijo A sobre c y un punto B que recorre c , podemos construir el punto medio M de AB , punto que depende de la posición de B . El lugar geométrico de M con respecto a B será la trayectoria de M cuando B recorre el círculo c , es decir un círculo que pasa por A y por el centro de c .

Para transponer la técnica de lugar geométrico en el contexto de los dibujos dinámicos de Cabri, debemos tener en cuenta un parámetro extra: la dependencia de un punto con respecto a otro. Podemos enunciar la técnica transpuesta de la siguiente manera: cuando se quiere determinar la posición de un punto X en una construcción, se hace una construcción blanda (o ajustada), es decir, una construcción en la que una de las condiciones sólo se cumple al ajustar la posición de un punto que llamaremos punto de control, K . Si existe un punto Y dependiente de K , de tal manera que al ajustar K , Y quede sobre un objeto fijo y sea la posición buscada, entonces puede construirse el lugar geométrico de Y con respecto a K y la intersección de ese lugar con el objeto fijo será el punto X buscado. Puesto que las construcciones realizadas con base en los puntos de intersección de los lugares geométricos dibujados por Cabri contienen errores de precisión (al hacer cálculos de distancias y ángulos, por ejemplo), en nuestra praxeología utilizamos los lugares dibujados por Cabri únicamente para darnos idea de la forma y características del lugar; luego construimos un objeto que cumpla esas condiciones y determinamos su intersección con otros objetos para producir la solución. Esta restricción implica que los únicos lugares que pueden producirse como objetos de Cabri son las rectas, los círculos y las cónicas.

² En realidad de cualquier objeto de Cabri: recta, círculo, polígono, etcétera.

Figura 2



4. EXPLORACIÓN PARA LA CONSTRUCCIÓN

Observemos que la mediatriz del segmento EF corta al cuadrado en los puntos M y N , y es el eje de simetría de la figura. Por esto sabemos que el centro de cada uno de los círculos buscados estará sobre el segmento MN (véase la figura 2).

Construimos un círculo tangente a HG en N y con centro sobre la recta MN .³ Llamemos O a este centro. Si movemos O vemos que, en algún momento, este círculo es tangente a σ_1 . Existe pues una familia de círculos dentro de la cual se encuentra una solución al problema. Para poder aplicar la técnica del lugar geométrico, necesitamos caracterizar el punto de tangencia del círculo solución con σ_1 como parte de una familia de puntos que dependen del punto O .

Sean A y B los puntos de intersección del círculo con centro en O y el círculo σ_1 . Cuando estos dos círculos son tangentes, los puntos A y B coinciden. Necesitamos un punto que dependa de A y B pero que no esté en σ_1 . Si tomamos el punto medio C entre A y B , tenemos que C no está sobre σ_1 , pero coincide con A y B en el punto de tangencia. Por tanto, podemos caracterizar

³ Esta es la construcción blanda a la que nos referimos en la descripción de la técnica.

Figura 3

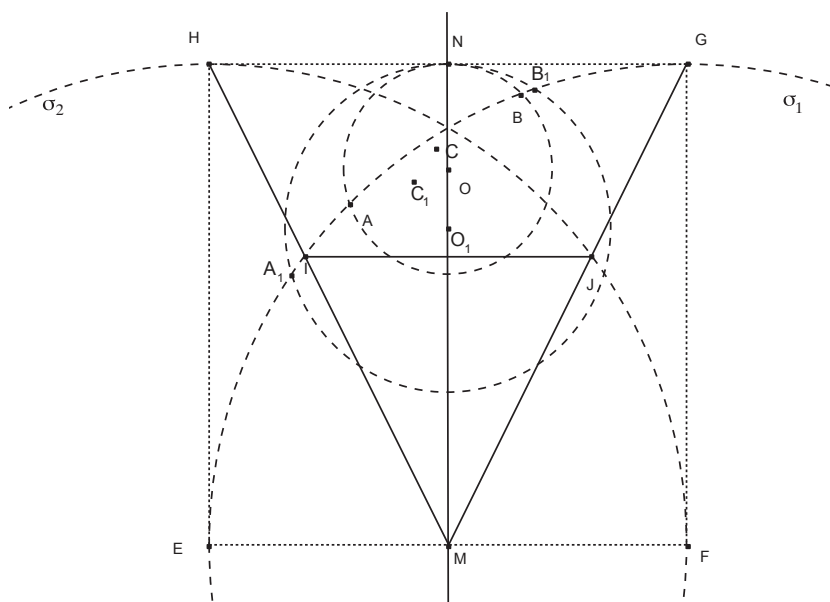


Figura 4

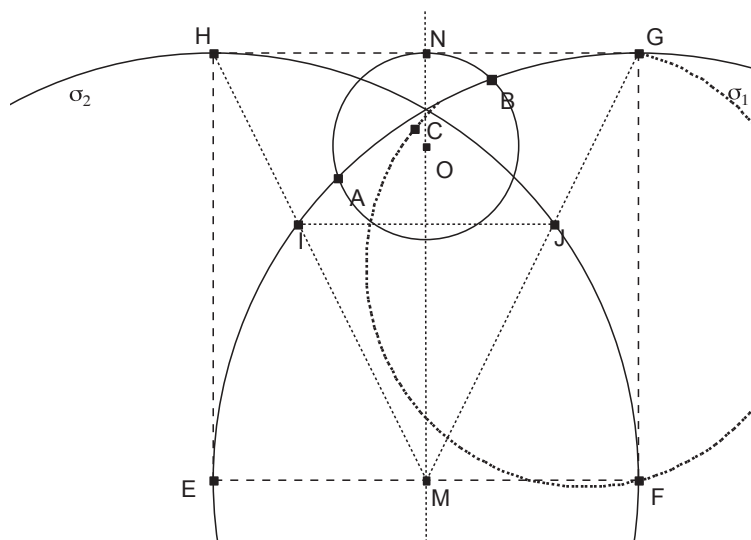


Figura 7

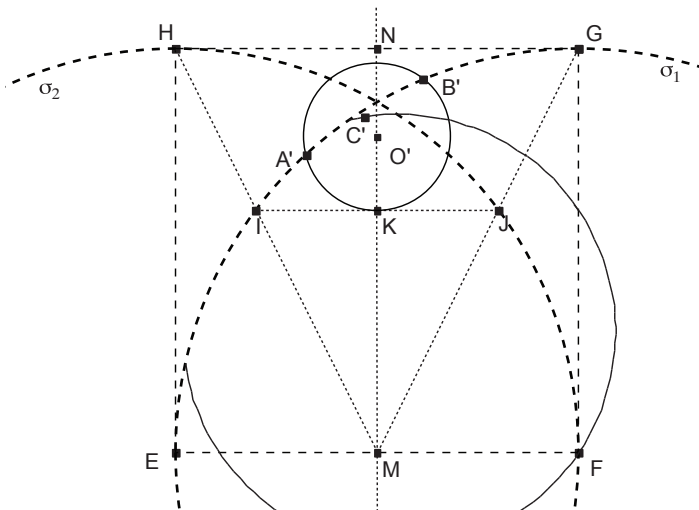
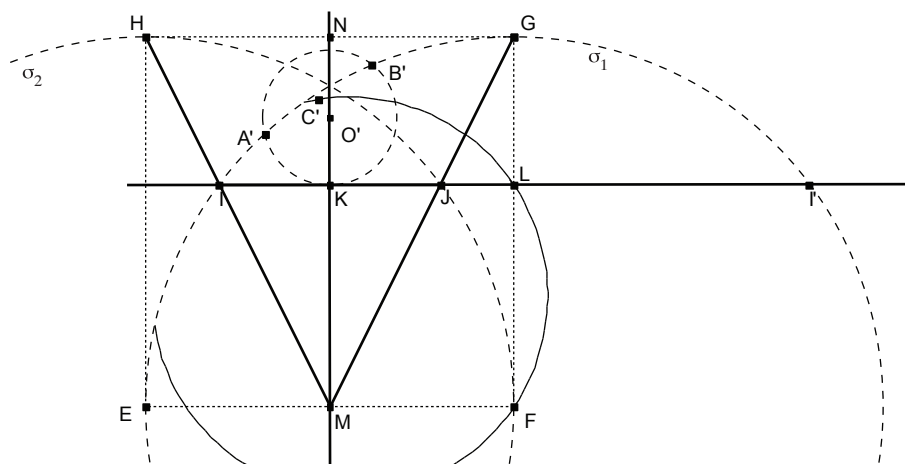


Figura 8

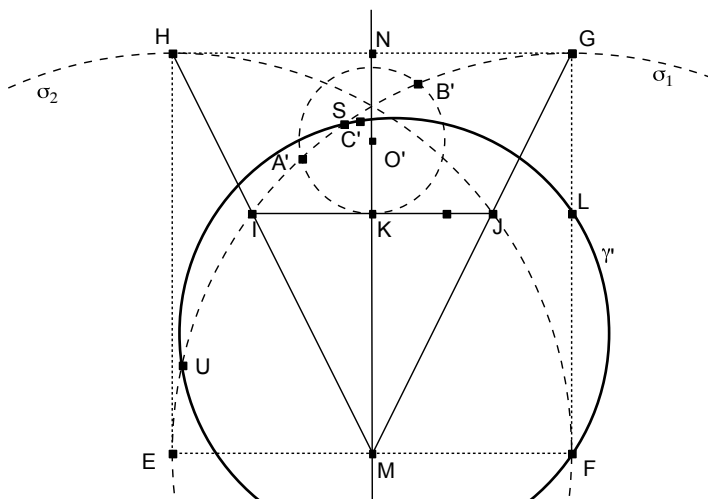


Ahora vamos a buscar la construcción del segundo círculo del problema, C_2 . Al igual que para el círculo C_1 , sabemos que este debe ser tangente a σ_1 , σ_2 y al segmento II . Nuevamente, el centro del círculo C_2 debe estar sobre la recta MN y el círculo debe pasar por el punto K de intersección entre II y MN . Construimos un círculo tangente a II en K y de centro O' sobre la recta MN . Al igual que para la solución de C_1 , vamos a considerar los dos puntos de intersección de este círculo con σ_1 (A' y B'), y su punto medio (C'). Cuando el círculo de centro O' sea tangente a σ_1 , los puntos A' , B' y C' coincidirán. Solicitamos a Cabri el lugar del punto C' con respecto a O' y constatamos que nuevamente es un arco de círculo (véase la figura 7).

Los puntos de corte de ese lugar geométrico con σ_1 serán los puntos de tangencia del círculo buscado. Para poder construirlos, necesitamos construir el círculo correspondiente al lugar geométrico y, por tanto, necesitamos conocer tres puntos, pero en la figura sólo podemos identificar claramente dos: F y C' . Sin embargo, mirando la figura, podemos conjeturar que el punto de corte de ese lugar geométrico con el lado FG es el punto de intersección de la recta II con FG , que llamaremos L (véase la figura 8).

Así construimos el círculo que pasa por C' , F y L que denotamos como γ' . Nuevamente este círculo corta σ_1 en dos puntos S y U , pero el que nos interesa es S , que será el punto de tangencia del círculo C_2 con σ_1 (véase la figura 9).

Figura 9



Esta recta es tangente a σ_1 y, por tanto, en este caso los puntos A y B coinciden con G (véase la figura 5).

De la misma manera, se tiene que C' es un punto sobre el lugar geométrico que él mismo genera, además, cuando el punto O' está en el punto del infinito de la recta MN , el círculo coincide con la recta ll . Como los puntos I y J son simétricos con respecto a MN y esta es paralela a FG , entonces ll es perpendicular a FG . Pero FG es un eje de simetría de σ_1 , por consiguiente, la intersección de FG con ll es el punto medio de la cuerda que define ll con respecto a σ_1 y, por tanto, es punto medio de los dos puntos I e I' de intersección de ll con σ_1 (véase la figura 8).

Pero no tenemos argumentos para justificar teóricamente que el lugar de C con respecto a O es un círculo, o que el lugar de C' con respecto a O' es un círculo. Así que retomamos la experimentación con la figura para buscar dichos argumentos.

5.1. EXPLORACIÓN PARA LA DEMOSTRACIÓN

Comenzamos esta segunda exploración intentando generalizar la construcción hecha: tenemos un círculo fijo y una familia de círculos tangentes en un punto, generada por un círculo móvil, y debemos demostrar que los puntos medios de las cuerdas comunes al círculo fijo y al círculo móvil recorren un círculo.

Si trazamos la recta que pasa por los puntos de intersección del círculo móvil y el círculo fijo (es decir, la cuerda común), al mover el centro del círculo móvil, observamos que aparentemente esas cuerdas comunes pasan todas por un mismo punto. Para verificar esta conjetura, activamos la traza de la cuerda común y nuevamente arrastramos el centro del círculo móvil (véase la figura 11).

Efectivamente, todas las cuerdas comunes pasan por un mismo punto. Este hecho sirve para justificar que el lugar estudiado es un círculo. En efecto, como la mediatriz de toda cuerda pasa por el centro del círculo, tenemos en realidad dos rectas móviles que pasan por puntos fijos y forman un ángulo recto. Por tanto, los puntos de intersección de esas dos rectas están sobre el círculo cuyo diámetro está definido por los dos puntos fijos.

Sólo nos falta justificar teóricamente que las cuerdas comunes pasan todas por un mismo punto. Hacemos una figura en la que tenemos dos de esas cuerdas comunes (véase la figura 12); el punto de intersección de esas cuerdas tiene igual potencia con respecto a los tres círculos, ya que cualquier

Figura 11

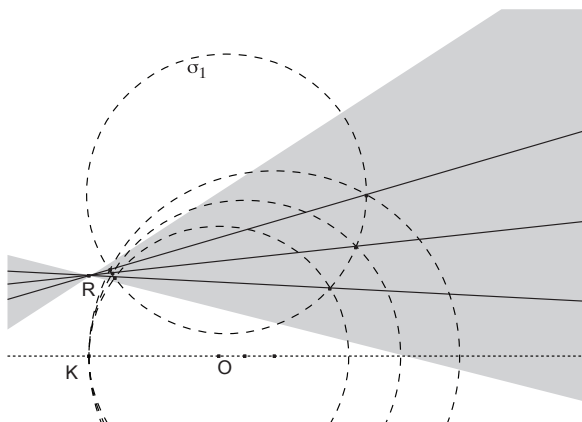
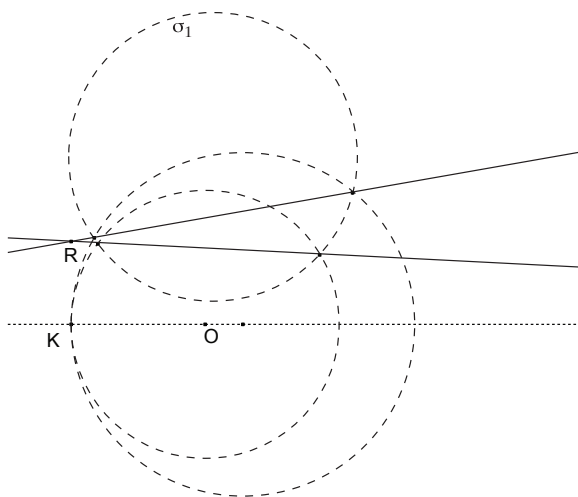


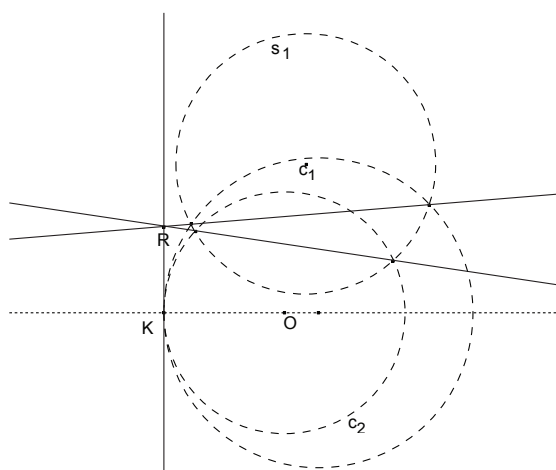
Figura 12



punto sobre una cuerda común a dos círculos tiene igual potencia con respecto a ambos círculos.

Por otra parte, los círculos tangentes entre sí tienen en común a la tangente en ese punto. Consideremos entonces dos círculos c_1 y c_2 , tangentes en un punto K y un tercer círculo σ_1 cualquiera. La tangente común de c_1 y c_2 será

Figura 13



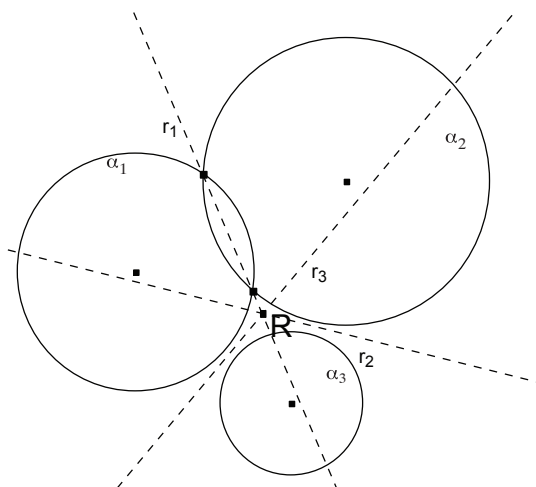
cortada por la cuerda común de c_1 y σ_1 . Llamemos R a ese punto de intersección (véase la figura 13). Como R está sobre la tangente común de c_1 y c_2 , tiene igual potencia con respecto a esos dos círculos (Moise, 1964, p. 455); y, como está sobre la cuerda común de c_2 y σ_1 , tiene igual potencia con respecto a esos dos círculos, por consiguiente, tiene igual potencia con respecto a c_2 y σ_1 , es decir, debe estar sobre la cuerda común de c_2 y σ_1 ; de esta manera, puede demostrarse que todas las cuerdas comunes al círculo móvil y el círculo fijo pasan por el mismo punto.

5.2. DEMOSTRACIÓN

Definición. Dados dos círculos, el *eje radical* es el lugar de todos los puntos que tienen igual potencia con respecto a los dos círculos.

Observación: si los círculos son secantes, el eje radical pasa por los puntos de intersección. Si los círculos son tangentes, el eje radical es la tangente común. Si los círculos no se cortan, el eje radical pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.

Figura 14



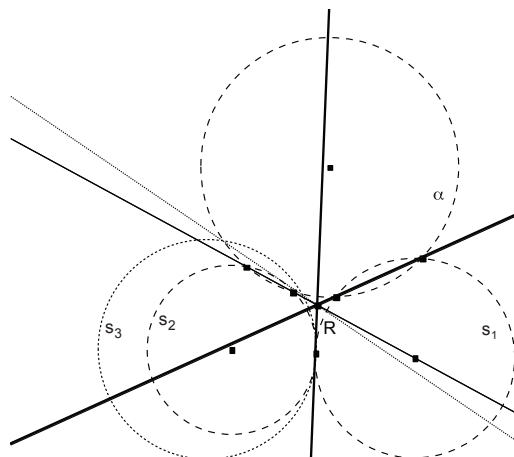
Lema 1. Dados tres círculos, no todos tangentes en un mismo punto, los tres ejes radicales son concurrentes.

Demostración. Sean α_1 , α_2 y α_3 los tres círculos dados. Llamemos r_1 el eje radical de α_1 y α_2 y r_2 el eje radical de α_2 y α_3 . Como α_1 , α_2 y α_3 no son tangentes en un mismo punto, entonces r_1 y r_2 son diferentes y se cortan en un punto R . Note que R tiene igual potencia con respecto a α_1 y a α_2 , y también con respecto a α_2 y a α_3 , por tanto, R pertenece al eje radical r_3 de α_1 y α_3 . Los tres ejes concurren en R (véase la figura 14).

Lema 2. Dado un haz de círculos tangentes en un punto y un círculo α que no está en el haz, las rectas que contienen las cuerdas comunes de α y cualquier círculo del haz pasan por un punto fijo.

Demostración. Observe que la recta tangente común a todos los círculos del haz es el eje radical de todos estos círculos. Sean s_1 y s_2 dos círculos tangentes que pertenecen al haz y α el círculo exterior al haz. Por el Lema 1, sus ejes radicales se cortan en un punto R . Si reemplazamos s_2 por cualquier otro círculo s_3 de la familia, el eje radical de s_3 y α también debe pasar por R , puesto que R es la intersección del eje radical de s_1 y s_3 y el eje radical de s_1 y α (véase la figura 15).

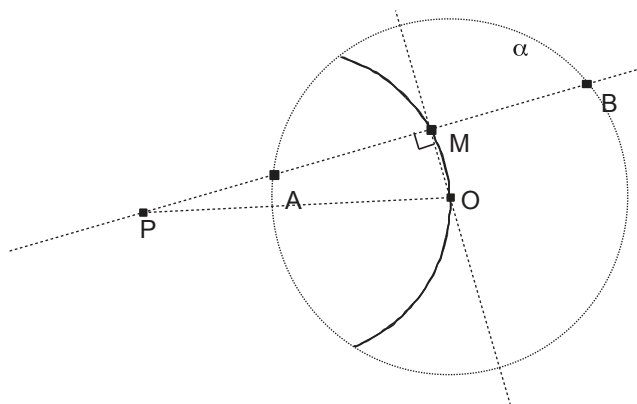
Figura 15



Lema 3. Dado un punto P y un círculo α de centro O , el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas definidas por las rectas que pasan por P es un círculo.

Demostración. Sea l una recta que pasa por P y corta a α en A y B . Sea M el punto medio de AB . La recta perpendicular a AB por M pasa por el centro O . Como el ángulo PMO es recto, el punto M está sobre el círculo de diámetro PO (véase la figura 16).

Figura 16



Teorema 1. Dado un haz de círculos tangentes en un punto y un círculo α que no está en el haz, los puntos medios de las cuerdas comunes al círculo α y los círculos del haz están sobre un mismo círculo.

Demostración. Por el lema 2 sabemos que las rectas que contienen las cuerdas comunes del círculo α y los círculos del haz pasan todas por un mismo punto. Por el lema 3 podemos concluir entonces que los puntos medios se encuentran sobre un mismo círculo.

Demostración de la construcción

1) *El círculo γ es el lugar geométrico de los puntos medios de los puntos de intersección del círculo σ_1 y los círculos tangentes en N .* Como los círculos son tangentes en N y σ_1 es un círculo que no pertenece a ese haz, por el Teorema 1 sabemos que el lugar geométrico buscado es un círculo. Ya habíamos demostrado que los puntos C , F y H pertenecen al lugar, por tanto, γ es el lugar buscado. (De la misma manera podemos demostrar que el círculo γ' es el lugar de los puntos medios de los puntos de intersección del círculo σ_1 y los círculos tangentes en K)

2) *El punto T de intersección de γ y σ_1 es el punto de tangencia del círculo σ_1 y uno de los círculos tangentes en F .* Como T está sobre γ , es el punto medio de los puntos de intersección del círculo σ_1 con uno de los círculos tangentes en N ; pero T está sobre σ_1 , por tanto, los puntos de intersección de los cuales T es punto medio deben coincidir con T , así que el círculo σ_1 y el círculo tangente en N son tangentes. (De igual manera podemos demostrar que el punto T' de intersección de γ' y σ_1 es el punto de tangencia del círculo σ_1 y uno de los círculos tangentes en K)

3) *El círculo C_1 construido es tangente a σ_1 y a H .* El centro de C_1 fue construido en la intersección de la mediatriz de TN y la recta NM ; por tanto, es equidistante de T y de N ; como el círculo pasa por T , también pasa por N ; como T es punto de tangencia entre σ_1 y uno de los círculos que pasan por N y tienen su centro en la recta NM , y C_1 es uno de esos círculos, entonces C_1 es tangente a σ_1 ; como C_1 tiene su centro en NM , NM es perpendicular a HG en N y C_1 pasa por N , C_1 es tangente a la recta HG . (De la misma manera, podemos demostrar que el círculo C_2 es tangente a σ_1 y a I .)

4) *El círculo C_1 es tangente al círculo σ_2 .* Como σ_2 es simétrico de σ_1 con respecto a NM y el centro de C_1 está sobre NM , si C_1 es tangente a σ_1 tiene que

ser tangente a σ_2 . (De la misma manera, podemos demostrar que el círculo C_2 es tangente al círculo σ_2 .)

6. CONCLUSIONES

Este ejemplo de trabajo experimental con Cabri para la solución de un problema de construcción ilustra la utilización de los dibujos dinámicos como actividad matemática: la posibilidad de hacer una construcción ajustada permite buscar relaciones teóricas que conducen a la construcción exacta y buscar también argumentos teóricos que justifiquen la relación entre las propiedades conjeturadas y la solución del problema. Así que la relación entre intuición y deducción no es necesariamente excluyente, como podría pensarse; además, el trabajo experimental no va en menoscabo del trabajo de demostración, sino que son complementarios. También ilustra la utilización de la técnica de lugar geométrico en el contexto de los dibujos dinámicos; como vimos, es necesaria una transposición de dicha técnica para tener en cuenta las características de la herramienta “lugar geométrico”; además, su uso no elimina la necesidad de justificar deductivamente lo que se observa en la pantalla.

Por supuesto, nuestra solución no es la única posible, y podrían utilizarse los ostensivos de Cabri para encontrar otras soluciones con otras técnicas posibles.

No es nuestra intención proponer este problema como actividad de clase, sino como práctica de referencia que sirva para:

- 1) Definir la técnica de lugar geométrico utilizando ostensivos dinámicos.
- 2) Resaltar la posibilidad de experimentar para encontrar una construcción y una demostración.
- 3) Resaltar la necesidad de formalizar los resultados encontrados experimentalmente como una forma de incorporarlos en el sistema teórico de referencia.

No podemos afirmar que este ejemplo constituya una praxeología matemática, pero sí es un ejemplo de la utilización de la técnica de lugar geométrico para la resolución de un problema de construcción, y de su correspondiente tecnología. Esperamos poder acumular suficientes ejemplos de este tipo para demostrar la existencia de dicha praxeología.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, M. (2005), "Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática", *Educación Matemática*, vol. 17, num. 3, pp. 121-140.
- Bosch, M. (2001), "Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática", en Luis Contrera (ed.): *Cuarto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación*, Universidad de Huelva, pp. 15-28.
- Cuppens, R. (1999), *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri Géomètre*. Brochure APMEP, núms. 124 y 125.
- Moise, E. y F. Downs, Jr. (1964), *Geometría moderna*, Massachusetts, Fondo Educativo Interamericano,
- Petersen, J., *Métodos y teoría para la resolución de problemas de construcción*. Traducido y publicado por Francisco Javier García Capitán, disponible en http://www.yair.es/multimedia/datos/lugares_petersen_053736_281110_7592.pdf

DATOS DE LOS AUTORES

Martín E. Acosta

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
martin@matematicas.uis.edu.co

Carolina Mejía

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
cmejiam@matematicas.uis.edu.co

Carlos W. Rodríguez

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
cwrodriguez@matematicas.uis.edu.co