ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal

Tulio R. Amaya de Armas y Antonio Medina Rivilla

Resumen: En este trabajo se exploran las dificultades presentadas por 50 estudiantes colombianos del grado once –grado escolar que antecede al ingreso a la universidad– al hacer conversiones entre diferentes registros de representación de una función. La investigación fue desarrollada en tres etapas: revisión documental, diseño de instrumentos y exploración, y análisis e interpretación de resultados. En ella se presentaron seis situaciones problema a los estudiantes, pero aquí sólo se analizan los resultados correspondientes a uno de dichos problemas. Se encontraron serias dificultades relacionadas con: el reconocimiento de los elementos de una función y cómo se relacionan éstos; el establecimiento de congruencias entre los elementos de dos o más registros; el tránsito al interior de un registro, y la complejidad intrínseca del propio concepto.

Palabras clave: registro figural, registro analítico, representación semiótica, función, conversión entre registros.

Abstract: The present research explores the difficulties encountered by 50 Colombians students in 11th grade –the school grade before the admission to the university– in their transit across different function representation registers. The research has been developed in three stages: literature review, tools' design and exploration, and results analysis and interpretation. It introduced six situations problems to students, but we only analyze the results for each of these problems. Serious difficulties were encountered relating to function elements recognition and their relationship, the establishment of congruence between the elements

Fecha de recepción: 11 de febrero de 2013; fecha de aceptación: 27 de junio de 2013.

of two or more registers, the transit into a register, and the intrinsic complexity of the concept itself.

Keywords: registration figural, analytical register, semiotic representation, function, conversion between register.

INTRODUCCIÓN

Los trabajos que involucran funciones resultan problemáticos para estudiantes de diferentes niveles (Nájera, 2008); sin embargo, brindan una gran oportunidad para explorar diferentes representaciones del mismo objeto en un mismo ambiente, lo que facilita su estudio. Por tanto, "hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización, etc." (Font, Godino y D'Amore, 2007, p. 1).

En este marco, el trabajo con situaciones contextualizadas que involucran funciones aparece como una alternativa que, por una parte, facilita hacer transformaciones de tipo conversión (hacer transformaciones al cambiar de registro) y/o de tipo tratamiento (hacer transformaciones sin cambiar de registro), y por otra, permite relacionar los elementos de los registros involucrados y asignarle significado y sentido a cada una de estas representaciones en relación con las otras (Amaya y Gulfo, 2009). Lo anterior facilita el estudio de funciones, y éste se potencia si se realiza en un ambiente natural de camaradería y cooperación mutua.

Este trabajo nace del análisis de la teoría de Duval (1999, 2004), lo propuesto en los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (2000) y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) (2005), frente a resultados de investigación sobre dificultades de los estudiantes al hacer el tránsito entre diferentes registros de representación de una función (Dolores, 2004; Gatica, Maz-Machado, May, Cosci, Echevarría y Renaudo, 2010; Hitt, 2000, 2003) y sobre el abordaje de tal concepto por parte de los estudiantes. Dichos resultados ponen en evidencia una descompensación al identificar y luego relacionar los elementos de una representación en uno o varios registros, lo que podría impedir el desarrollo del pensamiento variacional, indispensable para el acceso al cálculo (Hitt, 2003).

La falta de asociación por parte de los estudiantes del contenido de dos o más registros puede resultar problemático al considerar la importancia de las representaciones semióticas como medio de acceso al conocimiento matemático, para el cual se requiere la integración sinérgica entre dos o más registros

(Duval, 2004). Esta falta de asociación también puede impedir la comprensión de conceptos como el de función, el cual prepara a los estudiantes para conceptualizar el límite, la continuidad, la derivada y la integral definida como límite de una suma (MEN, 2005). Por lo anterior, cobra importancia el análisis de las dificultades que presentan los estudiantes en el abordaje de situaciones problema que involucren funciones como elemento para la implementación de estrategias que faciliten la comprensión de este concepto.

A partir del contexto descrito y de la relevancia de las representaciones semióticas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, la investigación se orientó con la siguiente pregunta: ¿Qué dificultades presentan los estudiantes del grado once al hacer transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento entre registros de representación de una función? En este artículo sólo se presenta el análisis de uno de los problemas planteados en ella.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se parte del hecho de que la actividad matemática suscita en muchos alumnos dificultades de aprendizaje que no se encuentran en otras áreas del conocimiento, quizás porque la actividad matemática requiere un modo del funcionamiento cognitivo, especificado por el papel central que desempeñan las representaciones semióticas en el desarrollo de los conocimientos matemáticos y del cual los alumnos deben tomar conciencia (Duval, 2012).

El recurso a las representaciones semióticas en el aprendizaje en educación matemática es inevitable. Duval (1999) considera que no hay noesis sin semiosis, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, sobre todo en matemáticas por cuanto "el acceso a los objetos matemáticos se hace únicamente mediante la producción de representaciones semióticas" (Duval, 2012, p. 15). Lo anterior permite establecer lo fundamental de este concepto y su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En otras palabras, si el trabajo de establecer congruencias entre los elementos de un concepto matemático al hacer el tránsito entre diferentes registros de éste es la única forma de comprenderlo, entonces es necesario hacerlo.

Un sistema semiótico de representación es una manera de materializar una idea, de expresar externamente un concepto. Para Duval (1999), un sistema semiótico de representación es un registro de representación si permite las siguientes actividades cognitivas asociadas a la semiosis: *1)* la presencia de una representación identificable; *2)* el tratamiento de una representación, que es la transformación dentro del propio registro en el que ha sido formada, y *3)* la conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Conforme a los planteamientos de Duval (1999), los registros de representación se pueden entender como un medio de expresión caracterizado por signos que le son propios y por formas de organización y tratamiento que también le son propias.

Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas, o sea, que el contenido de una representación en un registro dado puede resultar diferente al contenido de esa representación en otro registro, por lo que es necesario tener en cuenta esta heterogeneidad si se quiere que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos.

Duval considera que los fenómenos de congruencia y no congruencia merecen una especial atención porque son en sí mismos dificultades intrínsecas de la conversión, y ésta es condición necesaria para la conceptualización, porque "la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros" (Duval, 2012, p. 16). Esto es, la actividad matemática requiere una coordinación interna que ha de ser construida entre los diversos registros de representación que puedan ser elegidos y usados. Sin esta coordinación, dos representaciones diferentes significan dos objetos diferentes sin ninguna relación entre sí.

Una conversión puede ser congruente en un sentido y no serlo en el otro (Duval, 2004), es decir, se pueden encontrar fácilmente elementos en el registro de llegada que correspondan a elementos en el registro de partida y no encontrarlos en el sentido contrario; estas incongruencias son muy comunes en conversiones que involucran el registro algebraico.

De lo anterior, puede deducirse que el análisis de las diferentes representaciones de un objeto matemático y de las interacciones entre éstas podría propiciar el éxito en los procesos de enseñanza y aprendizaje en Matemáticas. Éste es un asunto de suma importancia pues, como se ha venido argumentando, la posibilidad de movilizar y coordinar varios registros de representación semiótica en una situación dada es esencial.

Para tener acceso a cualquier conocimiento matemático, Duval (2004) considera que se deben conectar por lo menos dos de los sistemas de representación del objeto que se aprende, por lo que la adquisición de un concepto en un individuo se dará en el momento en que haya una coordinación libre de contradicciones entre las diferentes representaciones del objeto representado (Hitt, 2000).

Lo anterior implica que, en el marco de la teoría de Duval, la comprensión integral de un concepto se basa en la coordinación de al menos dos registros de representación de dicho concepto. Coordinación que se manifiesta mediante el uso rápido y espontáneo de la conversión cognitiva, es decir, del reconocimiento de un mismo elemento en diferentes registros de representación del objeto estudiado (Gatica *et al.*, 2010). Por tanto, se necesita cierta congruencia entre las representaciones estudiadas para que al aprendiz se le facilite la identificación de un mismo elemento en un registro de partida y en otro de llegada y sea capaz de movilizarlo dentro del registro en que se esté trabajando.

El docente de matemáticas, en su función de orientador y facilitador de ambientes de aprendizaje con la sola actividad de hacer conversiones o tratamientos, puede propiciar que los estudiantes logren avances significativos en su formación matemática. Esta formación ha preocupado en los últimos años a educadores matemáticos e investigadores en educación matemática, cuyos resultados de indagación ofrecen una visión de las matemáticas y su enseñanza y unos recursos educativos que pueden guiar a docentes de matemáticas a conseguir por lo menos los niveles mínimos de desempeño de los estudiantes. En este sentido, el National Council of Teachers of Mathematics (2000, citado en Godino, Batanero y Font, 2003, p. 105) sugiere:

- Comprometer a los estudiantes en tareas que impliquen la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación.
- Comprometer a los estudiantes en el discurso matemático que amplía su comprensión de la resolución de problemas y su capacidad para razonar y comunicarse matemáticamente.
- Aplicar transformaciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.

En Colombia, el MEN (2005) considera que:

> El estudio de los patrones está relacionado con nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra,

> y con los distintos tipos de modelos funcionales [...] Y uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos para el aprendizaje con sentido del cálculo. El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente.
>
> Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de un patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula [...] Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica, es muy apropiado analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia, intentar generalizarlas; estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica (p. 67).

De lo planteado por el MEN (2005), se deducen las múltiples relaciones que pueden derivarse entre la producción de patrones de variación, el proceso de modelación y muy particularmente el estudio de las nociones de variable y función, como las perspectivas más adecuadas para utilizar el registro figural, el algebraico, el geométrico, el analítico y el del lenguaje materno como andamios para el acceso al cálculo en la Educación Media.

Por otro lado, uno de los tópicos de mayor importancia en cualquier proceso de aprendizaje que se pretenda lo constituyen los errores cometidos por los estudiantes, por lo que la necesidad de analizarlos es evidente. "Esto permite determinar los medios para corregirlos y concientizar al estudiante de que los comete, y así convertirlos en un medio en el proceso de construcción del conocimiento" (Vergnaud, 1991, citado en Carrión, 2007, p. 19).

Brousseau (1999) sostiene que el error y el fracaso no tienen el papel simplista que a veces se les quiere hacer representar. Brousseau considera que:

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino que es el efecto de un conocimiento anterior que tuvo su interés, su éxito y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado (p. 3).

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede deducir que los errores son imprescindibles a la hora de retroalimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje con el fin de mejorar los resultados del aprendizaje de los estudiantes. Además, los errores parecen ser connaturales de cualquier proceso matemático, en particular de los procesos asociados a las transformaciones de representaciones de una función.

Carrión (2007) considera que "todo proceso de instrucción potencia la generación de errores" (p. 20), y clasifica en tres tipos los cometidos al operar expresiones algebraicas:

1) Errores de entrada, en éstos los estudiantes, aunque realizan los cálculos de manera correcta, operan una expresión diferente a la que se les propone, es decir, eligen el proceso correcto, pero presentan errores en su proceso de solución, por ejemplo, cambiar los términos de las expresiones o alterar el uso de los paréntesis o inventar números que no están en la expresión. Estos errores por lo general conducen a resultados incorrectos.
2) Errores de operación, en los que los estudiantes distorsionan el proceso de obtener el resultado de cada operación realizada de manera independiente por mal uso de las operaciones o de los signos.
3) Errores de escritura que se presentan al comunicar el procedimiento de transformación de la expresión, aunque se escojan las operaciones adecuadas y éstas se realicen correctamente. En los errores de este tipo, el estudiante realiza los cálculos secuencialmente sin cometer errores en la ejecución de las operaciones y es muy común que se obtengan resultados correctos.

METODOLOGÍA

En este trabajo se analizan las dificultades presentadas por los estudiantes del grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función, partiendo del registro figural como registro principal. Se hizo un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010) con un enfoque empírico cualitativo. El estudiante debía identificar el contenido de la representación figural de una función y hacer conversiones o tratamientos. Aquí se analizan las dificultades de comprensión invocando sus concepciones, esto es, los errores conceptuales al hacer transformaciones en el registro principal o desde éste hacia otro registro solicitado.

El estudio fue desarrollado en tres etapas:

- *Revisión documental:* se buscaron bases para el análisis de las dificultades de los estudiantes con el concepto de función, ya fuera por transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento.
- *Diseño y exploración del instrumento:* se elaboró un instrumento tipo cuestionario, compuesto por algunas indicaciones por escrito y una hoja de papel en blanco. Se partió de una representación en el registro figural como registro principal, se pidió hacer algunas transformaciones tipo tratamiento y tipo conversión para observar si las variaciones en el registro principal eran percibidas como tales en el registro de llegada y analizar las dificultades que presentaran los estudiantes al hacer la transformación. La validación del cuestionario se realizó a través de pares del área de matemáticas y un pilotaje aplicado a ocho estudiantes. El cuestionario se aplicó a todos los estudiantes luego de algunos ajustes buscando claridad y adecuación en el tiempo de solución.
- *Análisis e interpretación de resultados:* se hizo el análisis de las resoluciones de los estudiantes, teniendo en cuenta las categorías de análisis previas que se presentan en el cuadro 1 y las inductivas producto de las variaciones en las respuestas como resultado de la gran variedad de éstas a cada una de las cuestiones planteadas (Andréu, 2001). Se tuvo en cuenta también si las dificultades se dieron al hacer conversiones o tratamientos.

Se reitera, respecto de la metodología, que en este artículo sólo se analizaron las respuestas a un único problema, el cual se presenta más adelante.

Categorías de análisis

Se establecieron como unidades de análisis los resultados de las resoluciones de los estudiantes a las diez cuestiones que se les plantearon en el cuestionario. Las categorías de análisis previas se obtuvieron al enlistar los indicadores que permitieran determinar la relación de la situación funcional con el contexto sociocultural de los estudiantes y analizar cuáles de ellos se prestaban más para contextualizarlos por medio de preguntas en la situación planteada. Se seleccionaron los siguientes indicadores: reconocer los elementos de la situación funcional en el registro figural; identificar cómo se relacionan éstos; modelar la situación funcional; encontrar un patrón de regularidad y crecimiento; utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita y describir los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas.

Las categorías de análisis resultaron de las diferentes variantes en las respuestas dadas a cada una de las cuestiones planteadas y se fueron deduciendo paso a paso (Andréu, 2001). La relación establecida entre los elementos de la función obedeció más a la interconexión de los conceptos involucrados en las perspectivas de la situación propuesta que a la suma de éstos para englobar la función como un todo.

Participantes

La población objeto de estudio la constituyó un grupo de 50 estudiantes de undécimo grado de la media académica de una institución educativa de carácter oficial de Sincelejo, Colombia, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de pre-cálculo de fin de bachillerato. Ellos ya habían estudiado conceptos básicos de funciones en dos cursos previos y al comienzo del curso durante el cual se desarrolló la investigación.

Instrumento

Por parte del docente que impartía el curso, a cada estudiante del grupo se le entregó una hoja de papel de área A y se les dio la siguiente instrucción: la hoja de papel se corta por la mitad y una de las dos mitades se aparta, el pedazo que queda se corta también por la mitad, uno de los dos pedazos se aparta y

Cuadro 1 Categorías de análisis y modelo del tipo de preguntas planteadas a los estudiantes en cada situación

Núm.	Categorías de análisis	Tipo de preguntas o cuestiones planteadas
1	Identificación de los elementos de una función	¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuál es el área total de los pedazos apartados después de un corte *n* cualquiera? ¿Es posible terminar este proceso? ¿En qué corte? ¿Cuántos cortes es posible hacer?
2	Relación entre los elementos de una función	¿Cuáles de las cantidades varían y cuáles permanecen fijas (constantes)? ¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?
3	Modelación de una situación funcional	Encuentra una expresión matemática (una fórmula) que modele esta situación.
4	Identificación y uso de un patrón de regularidad y crecimiento de una función	¿Cuál es el área de los pedazos cortados en los cortes 6, 12, 15, 20 y 30?
5	Utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita	Si el área total de los pedazos apartados es $\frac{1023A}{1024}$, ¿en qué corte estamos?
6	Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas	Describe el proceso que seguiste para responder la pregunta *k*.

así sucesivamente. En seguida se muestran dos secuencias con las áreas de los pedazos cortados y apartados hasta el cuarto corte (véase la figura 1).

Para el diseño de la situación, se pusieron en juego los registros geométrico, aritmético, algebraico y del lenguaje materno, cada uno con sus propias

Figura 1 Secuencias presentadas a los estudiantes

Corte	1	2	3	4
Área del pedazo cortado	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{8}$	$\frac{A}{16}$
Área total de los pedazos apartados	$\frac{A}{2}$	$\frac{3A}{4}$	$\frac{7A}{8}$	$\frac{15A}{16}$

reglas y procedimientos; de manera que por medio de las propiedades de uno se reconocieran y pudieran trabajar las del otro o, de otro modo, que con las contribuciones de cada uno se aportara al logro de los propósitos de la tarea. Con el diseño de la situación y su implementación se pretendió el análisis de dificultades de los estudiantes con nociones como variable, dependencia, incógnita, ecuación, dominio, rango, secuencias, patrón de regularidad, modelación y concepción de infinito.

En cada ítem se trató de involucrar algún elemento de la función. El estudiante debía identificarlo y tratar de encontrarle una representación en otro o en el mismo registro. Se buscaba analizar las dificultades del estudiante en el abordaje que hacía de cada elemento al tratar de dar una respuesta. Por ejemplo, al darles el valor de la función en un corte determinado y pedirles que determinaran el corte en que se estaba, se involucró el concepto de incógnita y, en su proceso de solución, se esperaba que el estudiante pudiera identificar los elementos de la secuencia en la representación figural y lograra coordinarlos con elementos congruentes en alguno de dos registros: haciendo una conversión al registro algebraico mediante el concepto de ecuación, o también por conversión al registro analítico aritmético resolviéndolo por tanteo.

Técnicas de recolección y procesamiento de la información

Se utilizaron cuatro tipos de técnicas: cuestionarios escritos con preguntas abiertas, observación participante, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión. Se observó cuidadosamente a los estudiantes mientras solucionaban el cuestionario, atendiendo cualquier dificultad con la prueba. Se entrevistó sólo a aquellos estudiantes cuyos resultados presentaron interpretación dudosa o resultaron de interés. Las entrevistas se hicieron tomando como base las preguntas del cuestionario. El trabajo se realizó durante el segundo semestre de 2012, se aplicaron seis cuestionarios, aquí se presentan sólo los resultados de la situación en la que se tomó el registro figural como registro principal.

Finalmente, se pidió a los estudiantes que se organizaran en grupos de tres o cuatro, según sus propias preferencias. Organizados de esta manera discutían las respuestas que cada miembro del grupo había dado a la situación, de tal modo que entre ellos develaran sus dificultades al informar sus hallazgos a sus compañeros (Roig, Llinares y Penalva, 2011) y escuchar sugerencias de éstos.

Las transcripciones de los registros orales, y también la de los escritos, fueron trabajadas siguiendo técnicas de análisis de contenido de acuerdo con un conjunto de ideas básicas (Bernárdez, 1995): segmentación en unidades por criterios temáticos y temporales; agrupamiento sobre la base de las categorías definidas, identificando las distintas modalidades. Se agruparon en un cuadro las respuestas con los porcentajes de aciertos por categorías de análisis; posteriormente se describen cualitativamente las características de tales dificultades.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En el cuadro 2 se muestra el porcentaje de aciertos por cada categoría de respuestas dada por los estudiantes a la situación que se les presentó.

A continuación se muestran algunos de los resultados del proceso por categorías de análisis:

Identificación de los elementos de una función

A pesar de que en el momento de la aplicación de esta prueba los estudiantes ya habían estudiado funciones, 36% no pudo identificar los elementos de la función en el registro figural; 52% no dio cuenta de cómo se relacionan dichos elementos, como ha informado Dolores, confunden los elementos del dominio con los del rango (Dolores, 2004), al no identificar los coeficientes y en algunos casos confundirlos con los exponentes, lo que lleva a cometer errores de escritura, entrada u operación (Carrión, 2007). Estos errores impidieron encontrar las respuestas solicitadas o relacionar adecuadamente los elementos de la función al hacer las transformaciones.

En cuanto al reconocimiento del dominio y el rango de la función analiza-

Cuadro 2 Resultados para la situación dada en una representación figural

Categorías de las respuestas	Núm. de estudiantes	%
Identificación de los elementos de una función	32	64
Relación entre los elementos de una función	24	48
Modelación de una situación funcional	18	36
Identificación y uso de un patrón de regularidad y crecimiento de una función	36	72
Utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita	4	8
Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas	13	26

da, en el registro analítico –secuencias numéricas– sólo 8% de los estudiantes identificó el dominio y el rango. En el registro figural, los estudiantes mostraron una visión limitada de estos elementos. Para ellos, los intervalos de variación de la función no van más allá de lo visible, lo que probablemente ocasionó que ningún estudiante pudiera identificarlos; esto evidencia falta de conexión entre los dos registros de representación que ellos mismos habían realizado y manipulado (Meel, 2003).

Relación entre los elementos de una función

Al relacionar los elementos de cada secuencia, por ejemplo, muchos estudiantes consideraban que $^1/_4$ es mayor que $^1/_2$, porque 4 es mayor que 2, decían el doble que, queriendo decir la mitad de, es decir, confundían la terminología usual al referirse a los términos de la secuencia, lo que indica que las dificultades fueron causadas por el pobre manejo de las normas internas en estos registros de representación (Meel, 2003), las que, según Duval (2004), son bien distintas en cada uno de ellos.

Al manipular los trozos de papel sobreponiéndolos sobre una hoja sin partir para que los relacionaran con mayor facilidad, uno de ellos dijo que $^1/_2$ era mayor porque medio pan es más que un cuarto de pan. Esto lleva a pensar que los estudiantes tienen dificultades para ver propiedades geométricas en los objetos; esto es, sin "ojo geométrico" desarrollado (Sinclair, 2003, citado en Fujita, Jones y Yamamoto, 2004), recurren a realizar manipulaciones concretas para inferir ciertas propiedades y hacer las transformaciones en este registro (Meel, 2003) o para establecer conexiones con otros, como el analítico. En otras palabras, los estudiantes, en su mayoría, no lograron establecer congruencias entre los elementos de una función cuando se pasa del registro figural al analítico o viceversa. Esto evidencia sólo una interpretación local de la situación (Benítez, 2010), al identificar elementos de la secuencia que les permitió movilizarse en ella, mas no establecer conexiones con el registro figural (Duval, 2004).

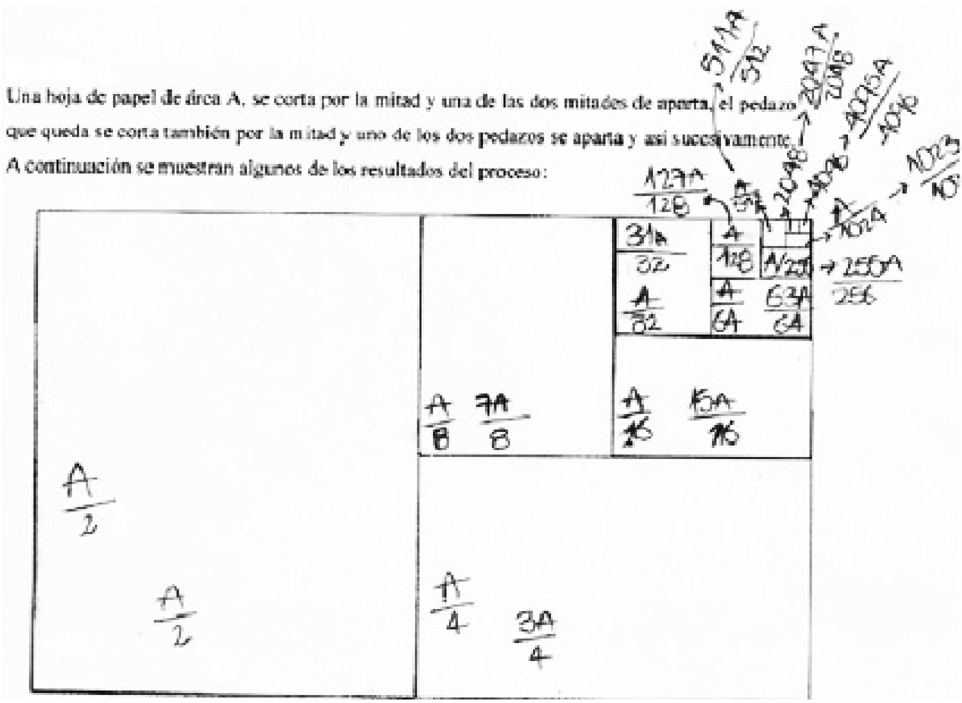
A continuación, se muestra el manuscrito de un estudiante que no pudo relacionar adecuadamente los valores de la secuencia con los trocitos de papel correspondientes, pues asocia $^1/_4$ con $^3/_4$, $^1/_8$ con $^7/_8$ y $^1/_{16}$ con $^{15}/_{16}$ (véase la figura 2), como si fueran fracciones equivalentes, según él, porque tienen el mismo denominador. Cabe destacar que este estudiante reconoció los elementos de la función en el registro figural y los asoció con una de las dos secuencias; sin embargo, no pudo coordinar las secuencias numéricas entre sí ni encontrarles equivalencia con las que resultaron en el registro figural.

De los estudiantes, 48% presentó dificultades al hacer el emparejamiento de los elementos de las secuencias numéricas con los trozos de papel, particularmente en la segunda secuencia, en la que muy pocos pudieron disponer los términos $^3/_4$, $^7/_8$, $^{15}/_{16}$, etc., en papel, y tampoco pudieron asociarlos a su equivalente en la secuencia numérica; quizás porque ésta se formaba por acumulación de los trocitos de papel y para conformar un término había que deshacer el anterior. Este hecho no deja de ser preocupante, ya que tal coordinación, según Duval (2012), es condición necesaria para la comprensión en matemáticas.

Modelación de una situación funcional

En cuanto a la modelación de la situación, llamó mucho la atención una estrategia que utilizó 72% de los estudiantes: "sumar el numerador con el denominador da el numerador, y el denominador más el denominador da el denominador", lo que puede comprobarse al darle valores a n en la expresión $\frac{2^n - 1}{2^n}$. Esta estrategia, que fue usada como referencia para lo que se trataba de comprender, es

Figura 2 Respuesta dada por un estudiante a la situación planteada.



una acción que busca volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo (MEN, 2005). Aunque esta respuesta no es del todo explícita porque no se hacía referencia a cuál de las dos secuencias se referían, sí es un indicio bien claro de que los estudiantes encontraron un patrón de regularidad fuera de toda expectativa. Es decir, intuitivamente encontraron un modelo, que expresaron con algo de dificultad en el lenguaje materno. Aquí la dificultad estuvo en el paso de la representación figural a la analítica, facilitándoseles más el paso a la del lenguaje materno, que tradicionalmente ha sido tan problemática como la analítica.

Identificación y uso de un patrón de regularidad y crecimiento de una función

De los estudiantes, 72% siguió el patrón propuesto en la situación, pero 16% no terminó el proceso y 56% no logró dar la respuesta solicitada, no obstante identificar el patrón de regularidad de la situación; es decir, determinaron la regla de comportamiento de la situación (Ursini y Trigueros, 2006), pero no la utilizaron exitosamente para dar sus respuestas.

Descripción de los procesos realizados tratando de dar respuesta a las preguntas o cuestiones planteadas

En cuanto a la descripción de los procesos realizados, se puede afirmar que las dificultades estuvieron relacionadas con las inconsistencias en las descripciones, con los propios procedimientos o con ambos. Al tratar de describir los procedimientos que habían realizado, se limitaban a repetir nuevamente dichos procedimientos (Chaucanés, Amaya, Escorcia, Teherán, López y Medrano, 2009). Algunos describieron un procedimiento errado y otros ni siquiera intentaron describirlo.

Utilizar el concepto de ecuación para encontrar una incógnita

Las soluciones en el registro analítico fueron de tipo aritmético y sólo 8% de los estudiantes utilizó la letra como incógnita al identificar el corte *n*-ésimo como la cantidad desconocida, dado el valor de la función $\left(\frac{1023\ A}{1024}\right)$, es decir, encontrar el corte en que se está cuando se sabe el valor de la secuencia –determinar los valores de la variable independiente dados los de la variable dependiente–, es decir, interpretaron los símbolos literales como número generalizado o como variable. Este grupo, además, obtuvo y utilizó la fórmula $\frac{1}{2^n}$ y $\frac{2^n - 1}{2^n}$ para modelar la situación, utilizándola para dar respuestas a otras preguntas que se les plantearon, por lo que se les facilitó resolver la totalidad del cuestionario.

A los estudiantes se les dificultó demasiado aceptar que el área de la hoja fuera *A* y no una cantidad fija dada. La dificultad estuvo asociada al uso de la letra como variable en relación funcional (Ursini y Trigueros, 2006) y a su comprensión en este contexto que le permitiera resolver la ecuación (Ochoviet y Oktaç, 2011), ya que no pudieron determinar el área de cada trozo de papel en cada corte –los valores de la variable dependiente, dados los de la variable independiente. Además, 64% de los estudiantes consideraron que los valores de la secuencia dependían del tamaño original de la hoja de papel.

CONCLUSIONES

Aunque los alumnos participantes ya habían tenido numerosas experiencias que involucraban conversiones y tratamientos entre registros de una función, los resultados de esta investigación permiten concluir que tienen serias dificultades al hacer transformaciones con el registro figural como registro de partida a cualquiera de los otros registros en los que se les pidió hacerlo.

Las dificultades estuvieron relacionadas con tres aspectos específicos: *1)* el reconocimiento de los diferentes elementos de una función y cómo se relacionan éstos; *2)* el establecimiento de congruencias entre los elementos del registro de partida y los del registro de llegada, y *3)* la complejidad intrínseca del concepto en estudio (Hitt y Morasse, 2009).

En el primer caso, específicamente, se muestra la dificultad que tienen los estudiantes para identificar los elementos de una función en cualquiera de sus registros y, por tanto, para poder establecer relaciones de dependencia entre ellos. También se muestran las dificultades para identificar las cantidades que intervienen en una situación, cuáles de ellas cambian y cuáles permanecen fijas, lo que les pudo impedir hacer transformaciones en el interior de dicho registro.

En el segundo caso, se refiere la dificultad para elaborar un registro a partir de los elementos identificados en el registro figural, es decir, para establecer congruencias entre este registro y aquellos a los que se migró; esto evidencia que la conversión entre registros no se realiza de manera espontánea (Duval, 2012; Gatica *et al.*, 2010; Hitt, 2003). Especialmente, se observa la dificultad en el paso del registro figural al algebraico, mas no al del lenguaje materno.

En el tercer caso, la dificultad radica en que los estudiantes tienen dificultades para concebir la letra como variable en relación funcional (Ursini y Trigueros, 2006), la cual ha sido reportada entre las diversas dificultades que se presentan con el concepto de función en los procesos de aprendizaje y enseñanza (Dolores, 2004; Quintero y Cadavid, 2008). Estos resultados ratifican que el aprendizaje de la noción de variable debe ser uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza del cálculo, sobre todo por cuanto es imprescindible para la comprensión de conceptos tales como continuidad, límite o derivada de funciones (Gatica *et al.*, 2010).

REFLEXIONES FINALES

Por los resultados expuestos en este trabajo, sería deseable que mediante la enseñanza se dieran las conexiones entre los subconceptos involucrados en una función, al establecer congruencias entre sus elementos en diferentes registros que faciliten el aprendizaje de tal concepto y el acceso al cálculo. Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender y atender las dificultades de los estudiantes al manipular cada una de esas representaciones, sino también el análisis de las tareas de tratamiento y conversión entre representaciones que se proponen a los estudiantes (Duval, 1999, 2004, 2012).

Hitt (2003) considera que es importante no priorizar el recurso a algún registro en detrimento de otros cuando se está promoviendo un proceso de construcción de algún concepto matemático. Además, hay que tener presente que, según Duval (2004), la conversión de las representaciones semióticas constituye una actividad cognitiva que no es espontánea y que es difícil de realizar para la gran mayoría de los alumnos; pero a su vez es una de las actividades más importantes para el aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, que es imprescindible para la conceptualización amplia de los objetos matemáticos, ¿puede haber algo de mayor preponderancia en el aprendizaje de las matemáticas?

Teniendo en cuenta las tareas de conversión al promover un mejor entendimiento de las funciones y permitir el desarrollo de procesos de visualización, deberían establecerse conexiones más potentes entre los elementos de una función en sus diferentes registros de representación para propiciar una mejor comprensión del concepto.

Al comparar los resultados de la exploración realizada mediante este trabajo con los referentes teóricos que la sustentaron, reiteramos lo que ya algunos investigadores han señalado: que sería deseable que el estudio de las funciones en la escuela se abordara desde todos los registros de representación de la función, proponiendo transformaciones entre tantos registros como sea posible y dentro del registro en que se esté trabajando. Por lo que se debería iniciar este tipo de trabajo en la escuela desde los grados inferiores hasta lograr la iniciación al cálculo, donde el uso de tales tratamientos y conversiones entre registros se vuelva cotidiano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albert, A. (1997), "Introducción a la epistemología", en *Serie Antologías*, México, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, pp. 1-28.

Amaya, T. y J. Gulfo (2009), "El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría", en P. Leston (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, núm. 22, pp. 895-901.

Andréu, J. (2001), *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*, http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf (recuperado el 14 de marzo de 2013).

Benítez, A. (2010), "Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3", *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 1, pp. 5-29.

Bernárdez, E. (1995), *El papel del léxico en la organización textual*, Madrid, Universidad Complutense de Madrid.

Brousseau, G. (1999), "Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas", traducido por Hernández y Villalba del original: G. Brousseau, (1983), "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4, núm. 2, pp. 165-198.

Carrión, V. (2007), "Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales", *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 11, pp. 19-57.

Chaucanés, A., T. Amaya, J. Escorcia, A. López, A. Medrano y E. Terán (2009), "Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional", en P. Leston (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, núm. 22, pp. 739-746.

Del Castillo, A. (2003), *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*, http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf (recuperado el 9 de marzo de 2013).

Dolores, C. (2004), "Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 7, núm. 3, pp. 195-218.

Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano*, Cali, Colombia, Universidad del Valle.

____________ (2004), *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*, Cali, Colombia, Universidad del Valle.

____________ (2012), "Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica", en U. Malaspina (coord.), *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales*, Lima, Pontificia Universidad Católica del Perú, pp. 14-17.

Font, V., J. Godino y B. D'Amore (2007), *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*, http://www.webpersonal.net/vfont/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf (recuperado el 7 de noviembre de 2012).

Fujita, T., K. Jones y S. Yamamoto (2004), *Geometrical Intuition and the Learning and Teaching of Geometry*, ponencia presentada en el Topic Study Group 10 del 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhague, julio.

Gatica, N., A. Maz-Machado, G. May, C. Cosci, G. Echevarría y J. Renaudo (2010), "Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas", *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 22, pp. 121-131.

Godino, J., C. Batanero y V. Font (2003), *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*, Granada, Universidad de Granada.

Hitt, F. (2000), "Representations and Mathematics Visualization", en M. L. Fernández (ed.), *Proceedings, PME-NA 22*, Tucson, Arizona, pp. 131-147.

____________ (2003), "Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. 10, núm. 2, pp. 213-223.

Hitt, F. y C. Morasse (2009), "Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función", *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, vol. 7, núm. 17, pp. 243-260.

Ministerio de Educación Nacional (2005), *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia*, http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf (recuperado el 22 de abril de 2013).

Meel. D. (2003), "Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 6, núm. 3, pp. 221-271.

Nájera, V. (2008), *¿Las gráficas una representación natural?*, http://www.valois.com.mx/archivos/Valois_Najera_Graficas_Y_Representaciones_2008.pdf (recuperado el 6 de noviembre de 2012).

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principios y estándares para la educación matemática*, traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, Proyecto Sur.

Ochoviet, C. y A. Oktaç (2011), "Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 3, pp. 91-121.

Quintero, C. y L. Cadavid (2008), "Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado", 10° Encuentro de Matemática Educativa, http://funes.uniandes.edu.co/705/1/construccion.pdf (recuperado el 5 de noviembre de 2012).

Roig, A., S. Llinares y M. Penalva (2011), "Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 3, pp. 39-65.

Servan, P. e I. Servan (2010), "Intervención en la familia. Estudios de caso", en G. Serrano (coord.), *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas*, Madrid, Narcea, pp. 221-252.

Ursini, S. y M. Trigueros (2006), "¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?", *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 3, pp. 5-38.

DATOS DE LOS AUTORES

Tulio R. Amaya de Armas
Facultad de Educación de la Corporación Universitaria del Caribe, Colombia
tuama1@hotmail.com

Antonio Medina Rivilla
Universidad Nacional de Educación a Distancia, España
amedina@edu.uned.es