

Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial

Patricia Sureda y María Rita Otero

Resumen: En este trabajo se describe el proceso de conceptualización de cuatro grupos de alumnos del colegio secundario (115 alumnos de 15-16 años) en el campo conceptual de las *funciones exponenciales* en una dinámica de estudio que prioriza la participación del alumno en la construcción del conocimiento. En particular, se utilizan los constructos teóricos propuestos por la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, 1996, 2007a, 2007b, 2011) para describir las respuestas de algunos alumnos cuando se les proponen problemas relativos a las funciones exponenciales. Se describe el proceso de conceptualización de dicha función, identificando cinco niveles relacionados con los sistemas de representación empleados por los estudiantes.

Palabras clave: conceptualización, enseñanza, funciones exponenciales, sistemas de representación, secundaria.

Abstract: This paper describes the process of conceptualization of four groups of pupils in high school (121 students around the age of 15-16 years), and the way they study the conceptual field of *exponential functions* with a dynamic of study, in which the first aim is the participation of the pupil in the construction of knowledge. The theoretical constructs proposed by Vergnaud's Conceptual Fields Theory (1990, 1996, 2007a, 2007b, 2011) are specially used to describe the answers of some pupils when a problem that is solved through means of exponential models is proposed. The analysis of the protocols shows a process of conceptualization, linked to the different systems of representation of the exponential function, which is possible to describe by five stages.

Keywords: concept, systems of representation, exponential function, teaching, secondary.

Fecha de recepción: 6 de junio de 2012; fecha de aprobación: 8 de junio de 2013.

INTRODUCCIÓN

Las situaciones son claves en el aprendizaje de conceptos, pues como dice Vergnaud (1990, p. 133), “es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para el niño”. En la construcción de un concepto matemático, es importante el desarrollo de invariantes operatorios explicitables y formalizables que se relacionen con el sistema de representación en que el que se propone la tarea. Por otra parte, y desde otros referenciales teóricos (Douady, 1986; Janvier, 1987; Kaput, 1987; Dubinsky y Harel, 1992; Duval, 1999; García y Llinares, 1994; Font, 2001; Rico, 2009; etc.), se advierte que el estudio de conceptos complejos, como el de función, requiere para su total comprensión el empleo y juego combinado de más de un sistema de representación. Así, si se está interesado en la enseñanza de conceptos complejos, como el de función exponencial, se debe tener en cuenta que el diseño de las situaciones tendrá que involucrar más de un sistema de representación.

En este contexto, y con el propósito de enseñar las funciones exponenciales con sentido para los alumnos en la escuela secundaria, se planificó, diseñó, implementó y analizó un conjunto situaciones que involucraba cinco sistemas de representación. Éstos son el sistema de representación numérico (SRN), el algebraico de primer orden (SRA1), el algebraico de segundo orden (SRA2), el analítico-gráfico (SRG) y el verbal escrito (SRVE).

DIFICULTADES ASOCIADAS A LA ENSEÑANZA DE VARIACIONES NO LINEALES

Una de las dificultades vinculada con la enseñanza de variaciones no lineales es que los alumnos tienden a resolver los problemas no lineales como si fueran lineales. Así, en un estudio realizado con 400 alumnos de la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina), 50% utilizó esquemas lineales para resolver problemas exponenciales (Villarreal, Esteley y Alagia, 2005). La propensión a sobregeneralizar el empleo de modelos lineales más allá de su rango de aplicación está presente también en el nivel medio. Por ejemplo, los estudios de De Bock, Von Doorem y Verschaffel (2011), De Bock, Von Doorem, Janssens y Verschaffel (2002) y De Bock, Verschaffel y Janssens (2002, 1998) realizados con estudiantes secundarios (12 a 16 años), revelan una tendencia fuerte y resisten-

te al cambio, al aplicar modelos lineales para resolver situaciones problemáticas que involucran longitud y área de figuras planas semejantes.

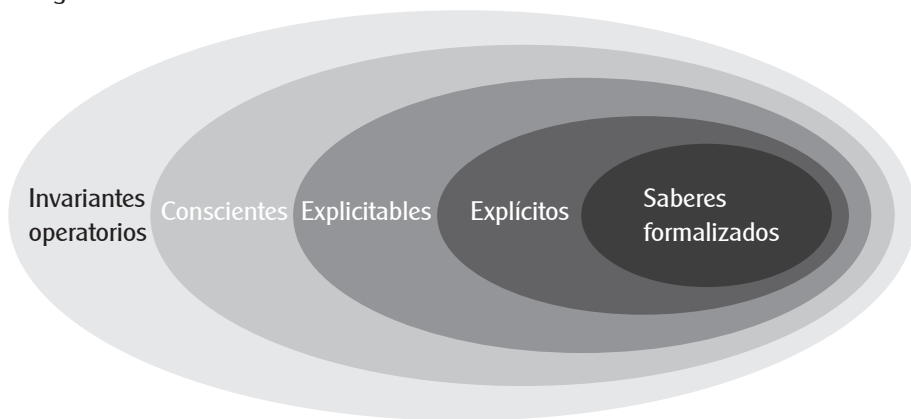
La sobregeneralización de modelos lineales en diversos tipos de problemas y contextos de la enseñanza secundaria y universitaria, denominada también extensión de modelos lineales a contextos no lineales, ha sido informada por diversos trabajos (Karrer y Magina, 2000; Sessa y Vilotta, 2008). En este último, se presenta a un grupo de alumnos de la escuela secundaria un problema sobre el crecimiento de bacterias con el propósito de introducir la noción de función exponencial, los autores advierten una tendencia general de los alumnos a abordar las cuestiones con procedimientos que sólo son válidos en el modelo lineal.

Sin embargo, estos trabajos no documentan si esas primeras estrategias se modifican a lo largo del estudio ni cómo se modifican. En este trabajo se muestran las acciones de los alumnos al abordar situaciones relativas a un concepto no lineal complejo como las funciones exponenciales y cómo se modifican éstas a medida que se avanza en el estudio de la función exponencial. En particular, se identifican cinco etapas en el proceso de conceptualización, vinculadas con los diferentes sistemas de representación. Se describe cada una de las etapas en profundidad, a la vez que se muestra cómo se construye el concepto de función exponencial en cada sistema de representación.

VINCULACIÓN ENTRE INVARIANTES OPERATORIOS Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los *invariantes operatorios* son definidos por Vergnaud (1990, p. 148) como conceptos en acto y teoremas en acto. Un concepto en acto es una categoría pertinente y, como tal, no es susceptible de verdad o falsedad, sino solamente de la pertinencia o de la no pertinencia. En cambio, un teorema en acto es una proposición tenida por verdadera en la actividad. Los invariantes operatorios son los que dan significado al concepto. Por otra parte, un concepto en acto no es un concepto, ni un teorema en acto es un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad. Éste no es necesariamente el caso para los invariantes operatorios. Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la conceptualización, pero sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios implícitos, esta parte visible no sería nada. Los invariantes operatorios son, en

Diagrama 1



particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los esquemas, ya que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta por atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación (Vergnaud, 1990, p. 148). En consecuencia, las decisiones que tome un alumno ante una determinada situación van a depender del esquema activado, pero más específicamente de los conceptos en acto y teoremas en acto de los que disponga el sujeto para enfrentar la situación. Los invariantes operatorios son, pues, los que hacen operatorio el esquema. Cuando los conceptos y teoremas en acto se hacen explícitos, se convierten en objetos de reflexión cuya validez se puede discutir, pues se los aproxima a los conocimientos científicos. Por otra parte, todos los conocimientos científicos tienen sus raíces en teoremas y conceptos en acto, que son la base de toda la conceptualización. Los conocimientos científicos, como los conocimientos matemáticos, son conocimientos formalizados que no forman más que una parte de los conocimientos explícitos en la actividad, los cuales no son más que un subconjunto de los conocimientos explicables. En el diagrama 1, Vergnaud (2007b, p. 299) evidencia este hecho.

Este diagrama 1 también permite distinguir entre los conocimientos que se pueden poner en palabras, *forma predicativa del conocimiento*, y los que no, *forma operatoria del conocimiento* (Vergnaud, 2007a, p. 286). La forma operatoria permite actuar en situación y a la larga tener éxito, mientras que la forma predicativa es la que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones. Este trabajo, por centrarse en el análisis de las producciones escritas de los alumnos en la clase de matemática, se centra

en el conocimiento predicativo de la conceptualización. Éste, aunque es una dimensión esencial del conocimiento, sólo da cuenta imperfectamente del conocimiento operatorio que se pone en acto en situación.

Por otra parte, los invariantes también forman parte de los conceptos. Vergnaud (1990, p. 140) define los conceptos como un triplete de tres conjuntos: $C(S; IO; SR)$. La referencia (S) es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto, aquí la situación tiene el carácter de tarea; el significado (IO) es el conjunto de invariantes operatorios, y el signifiante (SR) son los sistemas de representación. Así, la construcción pragmática de un concepto involucra tanto los invariantes operatorios como las tareas que componen cada situación y los sistemas de representación involucrados. En particular, en la escuela secundaria, la explicitación y formalización de los conceptos matemáticos en diferentes sistemas de representación cobra vital importancia. Puesto que es durante el proceso de explicitación de los conceptos cuando los sistemas de representación están más fuertemente presentes, este trabajo se centra en el análisis de aquellos invariantes operatorios explicitables que pueden ser explícitos y formalizables en cada sistema de representación.

PREGUNTA DE LA INVESTIGACIÓN

¿Qué características de la conceptualización, relativas al estudio en la escuela secundaria del campo conceptual de las *funciones exponenciales*, es posible inferir a partir del conocimiento explicitado por los alumnos en las resoluciones de situaciones problemáticas mediante los sistemas de representación?

METODOLOGÍA Y CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

En primer lugar, se reconstruyó el campo conceptual de las funciones exponenciales para cuarto año (15-16 años) del colegio secundario. Luego, en el marco de la teoría, se planificó y diseñó un conjunto de diez situaciones, dos síntesis, tres conjuntos de ejercicios y una evaluación.

Debido a la relevancia de los sistemas de representación en la conceptualización y explicitación de los conceptos, las tareas de las situaciones se diseñaron en torno a los siguientes sistemas de representación:

- *Sistema de representación numérico (SRN)*: refiere tanto a las tablas como a los cálculos con números.
- *Sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1)*: involucra aquellos procedimientos algebraicos en los que los parámetros están inicializados. Por ejemplo, $2 \cdot 5^x = 3$.
- *Sistema de representación algebraico de segundo orden (SRA2)*: refiere únicamente a los procedimientos algebraicos en los que los parámetros no están inicializados. Por ejemplo, $a \cdot b^x = c$.
- *Sistema analítico-gráfico (SRG)*: refiere a la construcción gráfica en ejes cartesianos.
- *Sistema verbal escrito (SRVE)*: son las formas lingüísticas escritas, sean situaciones, aseveraciones, etcétera.

Se llevó a cabo un estudio piloto en clases de matemática de un curso de cuarto año compuesto por 37 alumnos. Luego de la prueba piloto, el conjunto de situaciones fue readaptado e implementado en dos cursos de cuarto año (15-16 años) durante dos meses y medio en clases de matemática de una escuela de la ciudad que atiende a sectores urbanos medios. El primero de los cursos corresponde a la modalidad de Ciencias Naturales (31 alumnos) y se caracterizó por contar con una gran cantidad de alumnos que tienen interés en aprender. El segundo curso corresponde a la modalidad de Economía y Gestión de las Organizaciones (28 alumnos). Éste era un curso más disperso y mostraba menos predisposición para aprender. En ambos grupos de clase se gestionó desde el principio del año lectivo una dinámica de estudio que priorizaba la participación del alumno en la construcción del conocimiento. Así, para el momento de la implementación, los alumnos de ambos cursos estaban acostumbrados a estudiar en grupos. La implementación en ambos cursos se realizó durante el mismo periodo y por la misma profesora, quien forma parte del grupo de investigación.

Se registraron las clases en audio y se recogieron los protocolos de los estudiantes clase por clase. Una vez escaneados, los protocolos eran devueltos. La recolección sistemática de los protocolos clase por clase es indispensable para el estudio de la conceptualización, ya que para ello resulta imprescindible tener acceso a las primeras estrategias formuladas por los estudiantes, pues éstos suelen borrar y/o modificar las primeras estrategias por otras “más pertinentes” o consensuadas con el grupo de clase. También resultó relevante, a la hora de analizar los protocolos, el poder distinguir entre las estrategias propias del

alumno en situación y las consensuadas con el grupo de clase. Solicitar a los alumnos que no borren nada de lo que escriben y que señalen mediante la separación por una recta las resoluciones propias de las del grupo de clase resultaron estrategias adecuadas para este fin. A partir de los protocolos, se realiza todo el análisis de los datos.

Terminada la implementación y con el propósito de describir las características de la conceptualización, se analizaron las respuestas escritas de los alumnos a todas las situaciones. La conceptualización involucra una relación dialéctica entre las situaciones y los conceptos: las situaciones dan sentido a los conceptos y un mayor desarrollo conceptual del sujeto le permite abordar situaciones más complejas. El análisis de la *conceptualización*, que se hace a partir de los esquemas, pasa inevitablemente por el análisis de la *actividad*, cuyas conductas observables son una parte muy pequeña, pues aunque el *esquema* no es una conducta, tiene la función de generar la *actividad* y la conducta en *situación*. En consecuencia, es posible estudiar los componentes que permiten el funcionamiento del *esquema*, esto es, los *invariantes operatorios*, mediante el análisis de las conductas, en particular por medio de las resoluciones escritas de los alumnos cuando enfrentan un problema.

La respuesta de 59 alumnos al conjunto de tareas compuesto por las situaciones, las síntesis y los ejercicios produjo 885 protocolos. Un protocolo es la respuesta de un alumno a una situación, síntesis o ejercitación. Las respuestas de los alumnos fueron analizadas protocolo por protocolo y clasificadas según se muestra en el cuadro 1. La agrupación de las respuestas a las primeras situaciones en torno a las primeras etapas y su desplazamiento hacia las etapas finales a medida que se desarrollaba la implementación permitió reconocer en la conceptualización de la función exponencial un proceso compuesto por cinco etapas (cuadro 1). Este proceso resultó común a ambos grupos de clase. Es decir, a pesar de las diferencias descritas entre los cursos, las estrategias de los alumnos al resolver las situaciones eran similares y permitieron generar las mismas etapas. Así, y aunque la construcción de las etapas se realizó a partir de las estrategias de resolución de cada uno de los alumnos involucrados en esta investigación, en este trabajo se describe un proceso de conceptualización común a todos ellos.

La comprensión de conceptos matemáticos complejos, como el de función exponencial, requiere el empleo y juego combinado de más de un sistema de representación. Y puesto que no es posible discutir el significado de conceptos totalmente implícitos, su explicitación, discusión y formalización en cada sistema

Cuadro 1

Etapas	Indicador
Lineal	Respuesta lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente no lineal	Respuesta no lineal en por lo menos un sistema de representación.
No lineal	Respuesta no lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente exponencial	Respuesta exponencial en por lo menos un sistema de representación.
Exponencial	Respuesta exponencial en todos los sistemas de representación.

de representación resulta un aspecto central de la enseñanza de la matemática escolar actual. Por otra parte, durante el proceso de explicitación de los conceptos es donde los sistemas de representación están más fuertemente presentes, pues no es posible explicitar un concepto matemático complejo si no es mediante un sistema de representación. Así, la caracterización de las etapas que forman parte del proceso de conceptualización se construyó a partir de la explicitación que los alumnos realizaban en cada sistema de representación. Esto permitió describir un proceso que comienza en la etapa totalmente lineal y se va complejizando a medida que los alumnos logran la explicitación del concepto en cada uno de los sistemas de representación involucrados en la situación.

Una vez caracterizadas las etapas, se tomaron decisiones sobre el ajuste de la propuesta de enseñanza que, debido al nuevo diseño curricular, debió considerar también la reubicación de los contenidos en quinto año y, por tanto, se implementó en dos cursos de quinto año (16-17 años) de la misma escuela. Los cursos correspondían de igual manera a Naturales (27 alumnos) y Economía (29 alumnos). El análisis de la resolución de los 56 alumnos clase por clase evidencia que el proceso de conceptualización de la función exponencial se desarrolló en las cinco etapas ya descritas.

LAS TAREAS Y SU ANÁLISIS

La implementación del conjunto de situaciones en los dos cursos de cuarto año se realizó luego de que los alumnos habían estudiado las funciones lineales

vinculadas con el interés simple y habían calculado porcentajes y la tasa de interés en el modelo lineal. Ya que las primeras tres situaciones refieren a un problema vinculado con la capitalización de dinero puesto a interés compuesto, se acordó que, si se colocaba dinero con una tasa de interés de 1%, cada mes, se obtenía 1% más que el mes anterior. Convenido esto, se les propuso la siguiente situación.

Situación 1

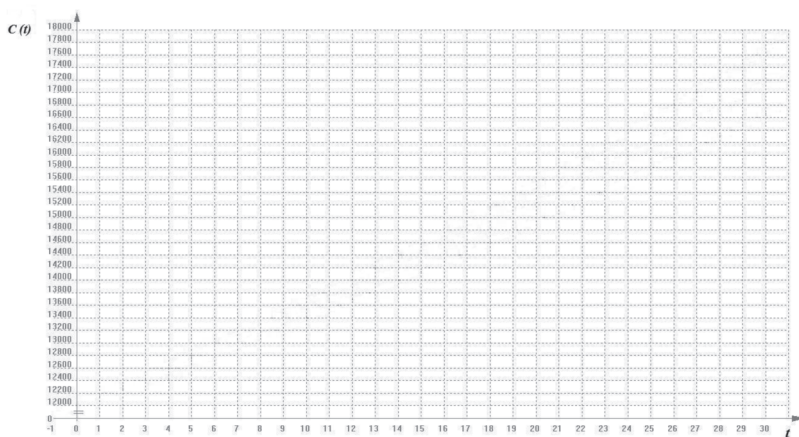
Un grupo de chicos tiene \$12 000 para su viaje de egresados y los quiere poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 0.011 y les permite tener \$12 132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 2** es de 0.012 y les permite tener \$12 144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de 0.013 y les permite tener \$12 156 cumplido el primer mes.

- ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?
- Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco, calculando al menos tres valores.



- ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

Recuerda que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja y no borrar nada de lo que escribas.

Las tareas y los sistemas de representación típicamente involucrados en cada una de ellas, se describen en el cuadro 2.

A continuación, se presentan y describen las resoluciones de cinco alumnos: A26, A19, A6, A14 y A22, que resultan ser representativas de las cinco diferentes etapas de conceptualización construidas.

Cuadro 2

Tarea	Sistema de representación
T1: ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?	Numérico (SRN) Verbal escrito (SRVE)
T2: Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.	Gráfico (SRG) Numérico (SRN)
T3: ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?	Verbal escrito (SRVE)

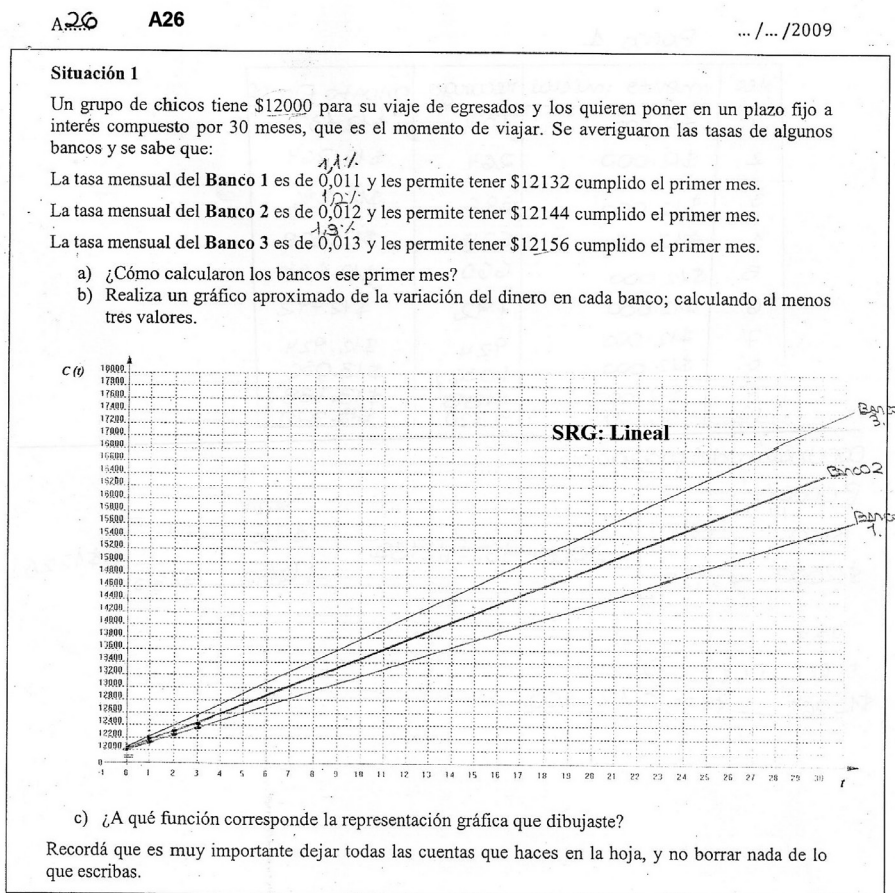
ETAPA LINEAL

Se dice que la etapa es totalmente lineal, cuando la respuesta del alumno a una situación dada es lineal en cada uno de los sistemas de representación que elige para resolver la tarea. Un tercio de las respuestas a la primera situación en las dos implementaciones que se realizaron en cuarto año fueron totalmente lineales. Pero este tipo de respuestas desaparece luego de la segunda situación.

Por ejemplo, en la figura 1 el alumno A26 considera que el aumento en la cantidad de dinero es una cantidad constante y formula la expresión algebraica lineal: Banco 1 = $12000 + 132 \cdot t$. Así, se tiene que las acciones de A26, en esta tarea, son lineales y parecen estar dirigidas por la proposición “Es posible calcular el dinero puesto a IC mediante una expresión algebraica lineal”. Esta proposición, que parece guiar las acciones de A26 en el sistema de representación (SRA1), es lo que Vergnaud (1990, pp. 138-139) denomina “teorema en acto”. Esto permite inferir que los invariantes operatorios que guían su resolución en este sistema de representación son lineales.

En la segunda tarea, calcula el dinero para los primeros tres meses mediante la fórmula expresada como si aumentara 132 pesos cada mes y obtiene un aumento lineal en la cantidad de dinero. Luego, dibuja tres rectas en el sistema de ejes cartesianos. Así, las acciones de A26 son también lineales en los sistemas de representación numérico y gráfico (SRN y SRG). Finalmente, cuando se le pregunta qué función dibujó, él afirma: “es una función lineal” (figura 1).

Figura 1



a) BANCO 1 = $\$12.000 + 132 \cdot t$
 BANCO 2 = $\$12.000 + 144 \cdot t$
 BANCO 3 = $\$12.000 + 156 \cdot t$

b)

Banco	1 mes	2 mes	3 mes
Banco 1	12.132	12.264	12.396
Banco 2	12.144	12.288	12.432
Banco 3	12.156	12.312	12.468

$t = \text{tiempo}$

SRA1: Lineal $\frac{12.000 \times 1,1}{100} = 132$
 $\frac{12.000 \times 1,2}{100} = 144$
 $\frac{12.000 \times 1,3}{100} = 156$

SRN: Lineal

c) Es una función lineal, porque su gráfica es una recta y tiene dominio y imagen. SRVE: Lineal

Cuadro 3

SRA1	SRN	SRG	SRVE
T.AA1: "Es posible calcular el dinero puesto a IC mediante una expresión algebraica lineal"	T.AN: "Aumenta lo mismo cada mes"	T.AG: "Es posible unir dos puntos mediante una recta" T. AG: "La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC es una recta"	T.AG: "Es una función lineal porque la gráfica es una recta"
Lineal			
Totalmente lineal			

A partir de estas resoluciones, se infieren teoremas en acto que parecen guiar las acciones de A26 en cada sistema de representación (cuadro 3).

En síntesis, estas resoluciones muestran que los invariantes operatorios involucrados en cada sistema de representación son lineales, pues tal como establece la teoría de los campos conceptuales (TCC), los *invariantes operatorios* guían la selección de la información y la acción. Se evidencia así un conjunto de esquemas lineales complejo y completo, que se expresa en todos los sistemas de representación, lo cual permite inferir que, cuando el conocimiento de un campo conceptual es avanzado, esto se evidencia en todos los sistemas de representación. Esto es lógico y muestra que la posesión plena del campo exponencial deberá involucrar los diferentes SR ligados al concepto.

ETAPA PARCIALMENTE NO LINEAL

Se dice que una respuesta es parcialmente no lineal, cuando es no lineal en al menos un sistema de representación. Dos tercios de las respuestas de las cuatro implementaciones (las dos realizadas en cuarto año y las dos realizadas

en quinto año) a la primera situación fueron no lineales en al menos un sistema de representación. Esta cantidad disminuye a la mitad en la segunda situación y desaparece a partir de la situación tres.

El protocolo del alumno A2, que se presenta en la figura 2, corresponde también a la respuesta de un alumno de cuarto año de la escuela secundaria argentina (15-16 años) a la situación uno. En ella, A2 calcula el dinero para los primeros tres meses mediante el cálculo recursivo del interés simple. Esta recursividad, que en realidad es el germen de una acción exponencial, le permite obtener la capitalización compuesta requerida. Así, las acciones de A2 son no lineales en el sistema de representación numérico (SRN).

En la segunda tarea, dibuja tres rectas para mostrar la variación del dinero puesto a interés y, al preguntarle qué función graficó, afirma que es una función lineal. Así, A2 es no lineal en su procedimiento de cálculo (SRN), pero lineal al graficar (SRG) y explicar qué función es (SRVE). La inconsistencia entre la respuesta en el sistema de representación numérico y los sistemas gráficos y verbal escrito de la misma situación muestra, por una parte, que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación son diferentes y, por otra parte, que los SR no evolucionan juntos y tienen sus propias complejidades.

El análisis de las respuestas permite inferir que los teoremas en acto que guían las acciones de A2 en cada sistema de representación son los que aparecen en el cuadro 4.

El cuadro 4 muestra que, aun cuando las proposiciones que guían la acción en los distintos sistemas de representación son contradictorias, esto no es advertido por los alumnos.

ETAPA NO LINEAL

Una respuesta se categoriza como no lineal si la respuesta es no lineal en cada uno de los sistemas de representación de la situación. Es decir, si la respuesta, sin ser exponencial, tampoco es lineal. Respuestas de esta etapa sólo están presente en algunas respuestas que alumnos de quinto año formularon a la primera situación.

El protocolo que se presenta en las figuras 3 y 4 corresponde a las respuestas que formuló el alumno A6 de quinto año de la escuela secundaria argentina (16-17 años) a la primera situación. Los alumnos de quinto año, a diferencia de los de cuarto, habían estudiado las funciones lineales, cuadráticas, polinómicas

Figura 2

A... (...; ...)

Gusto 6
10/8/2009

2

Situación 1

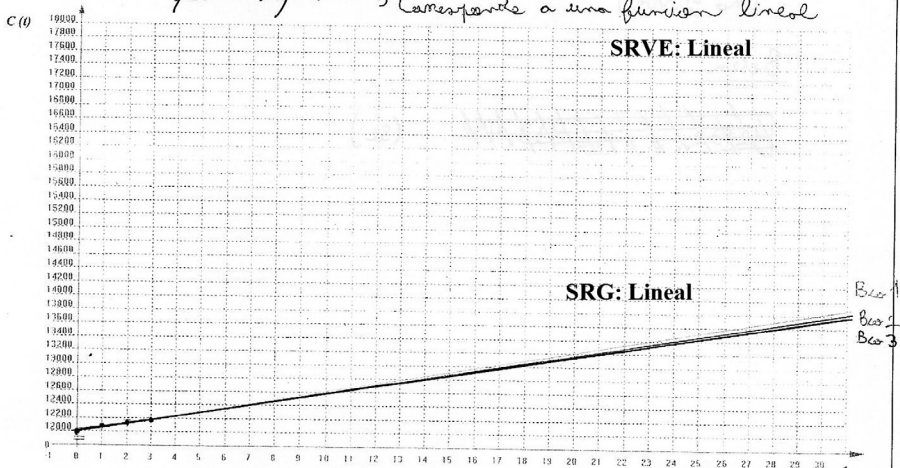
Un grupo de chicos tiene \$12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de ^{1,1}0,011 y les permite tener \$12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 2** es de ^{1,2}0,012 y les permite tener \$12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de ^{1,3}0,013 y les permite tener \$12156 cumplido el primer mes.

- ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?
- Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores. *¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste? → Corresponde a una función lineal*



Recordá que es muy importante dejar todas las cuentas que haces en la hoja, y no borrar nada de lo que escribas.

Mes	Ban. 1	Ban. 2	Ban. 3
1	$12000 \cdot 0,011 + 12000 = 12132$	$12000 \cdot 0,012 + 12000 = 12144$	$12000 \cdot 0,013 + 12000 = 12156$
2	$12132 \cdot 0,011 + 12000 = 12266,32$	$12144 \cdot 0,012 + 12000 = 12292,8$	$12156 \cdot 0,013 + 12000 = 12442,8$
3			

SRN: No Lineal

A) los bancos multiplicaron el monto inicial por los chicos tenían por el interés que ~~usaban~~ *ellos* las abren. El resultado que les dio el interés de los sumaron al monto inicial.

SRVE: No Lineal

Cuadro 4

SRN	SRVE	SRG	SRVE
T.AN: "El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	S.RN: "El aumento del dinero puesto a interés compuesto no se calcula de la misma forma que el interés simple"	T.AG: "La representación gráfica del aumento del dinero puesto a IC es una recta" T.AN: "El aumento del dinero puesto a IC es constante"	T.AG: "El aumento del dinero puesto a interés compuesto es una función lineal"
No lineal	No lineal	Lineal	Lineal
Parcialmente no lineal			

y racionales. Por esto, se les pidió desde la primera situación la expresión algebraica y se quitaron los ejes cartesianos. La implementación empezó también con una conversación sobre lo que era poner dinero a plazo fijo con un interés compuesto.

El alumno A6 calcula el dinero para los primeros tres meses mediante un cálculo recursivo de la regla de tres simple, lo que le permite obtener la capitalización compuesta del dinero. Esta estrategia de cálculo es el germen de una acción exponencial. Luego formula la expresión algebraica $x + (1.1\% \cdot x)$, que aparenta ser lineal, pero no lo es, pues al ser x la variación del monto inicial, la expresión es en realidad una algebrización desacertada del procedimiento de cálculo, que es no lineal. Así, aun cuando en ambos sistemas de representación (SRN y SRA1) las acciones de A6 son dirigidas por invariantes operatorios no lineales, las respuestas muestran que los SR no evolucionan juntos y tienen sus propias complejidades, en este caso, la escritura prealgebraica.

Acordada la expresión algebraica con el grupo de clase, los alumnos construyen las representaciones graficas. El alumno A6 construye una gráfica no lineal mediante la unión de puntos previamente calculados. Luego, afirma que la gráfica no corresponde a una función lineal. Así, este alumno ha resuelto toda la situación mediante estrategias no lineales.

Figura 3

A...06

G=06

... / ... / 2011

Situación 1

Un grupo de chicos tiene \$12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de interés que pagan algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 1,1% y les permite tener \$12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 2** es de 1,2% y les permite tener \$12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de 1,3% y les permite tener \$12156 cumplido el primer mes.

- ¿Cuánto dinero tendrán al momento de viajar?
- Realicen una representación gráfica aproximada de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos veinte valores.
- ¿Corresponde la variación del dinero en el banco a alguna de las funciones que han estudiado?

Recuerden que es muy importante dejar todas las cuentas que hacen en la hoja, y no borrar nada de lo que escriban.

A) 100% — 12132 100% — 12156,45 SRN: No Lineal
 1 mes 1,1% — 12132,45 1 mes 1,1% — X = 134,91

3 meses 12400,36 — 100% 4 meses 100% — 12536,76
 136,40 — 1,1% 1,1% — 137,90

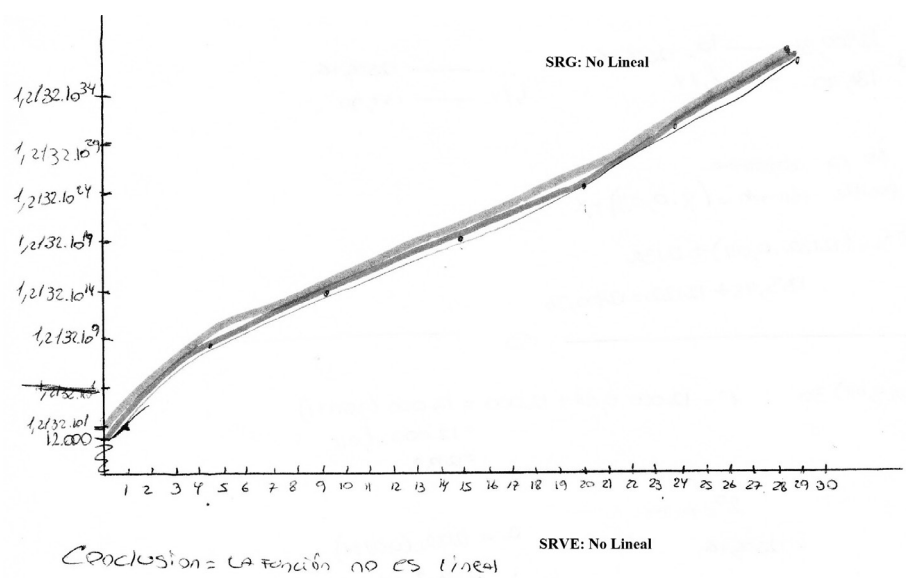
No es constante
 posible fórmula = $(X \cdot 0,011) + X$ SRA1: No Lineal

$E = (12132 \cdot 0,011) + 12132$
 $133,45 + 12132 = 12400,36$

En el cuadro 5 se describen los teoremas en actos que parecen guiar las acciones de este alumno en cada sistema de representación.

Las resoluciones de estas etapas muestran que, tal como señala la TCC, la explicitación de los invariantes operatorios utilizados en la acción aparece más tardíamente en la conceptualización.

Figura 4



Cuadro 5

SRA1	SRN	SRG	SRVE
T.AN: "El aumento del dinero puesto a IC se calcula sobre el monto del mes anterior"	T.AN: "El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	T. AG: "La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC no es una recta"	T.AN: "El aumento del dinero puesto a interés compuesto no es una función lineal"
No lineal	No lineal	No lineal	No lineal
No lineal			

ETAPA PARCIALMENTE EXPONENCIAL

Se dice que la resolución es parcialmente exponencial si es exponencial en al menos un sistema de representación. Las primeras resoluciones parcialmente exponenciales son formuladas por alumnos de cuarto año (16-17 años) como respuesta a la segunda situación. En la situación cuatro, este tipo de resoluciones supera la mitad de las respuestas, pero desaparece en la situación cinco, donde las respuestas son totalmente exponenciales. Luego reaparece en grandes cantidades en las situaciones siete y diez. En la siete, por ejemplo, cerca de la mitad de los alumnos volvieron a dibujar gráficas no lineales, aun cuando en los sistemas de representación numérico (SRN) y algebraico de primer orden (SRA1) habían formulado respuestas exponenciales.

La segunda situación es una ampliación de la primera. En ella, se presenta la tasa de interés de los tres bancos, el dinero obtenido luego del primer mes de capitalización, y una tabla con la variación mensual del dinero en el banco 1.

Situación 2

Un grupo de chicos tiene \$12 000 para su viaje de egresados y lo quiere poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento del viaje. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del **Banco 1** es de 1.1% y les permite tener \$12 132 cumplido el primer mes.

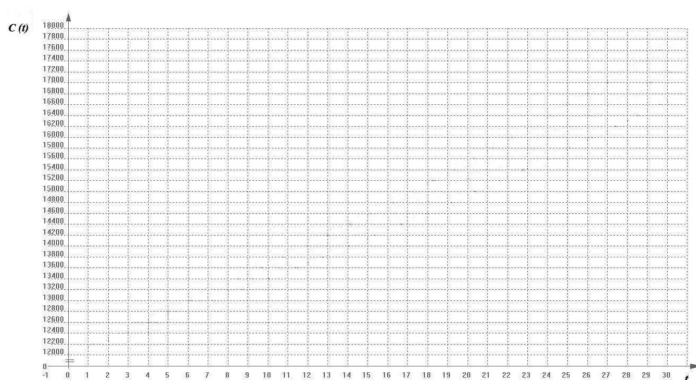
La tasa mensual del **Banco 2** es de 1.2 % y les permite tener \$12 144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del **Banco 3** es de 1.3% y les permite tener \$12 156 cumplido el primer mes.

También se ha conseguido el siguiente resumen del **Banco 1**, donde se muestra como varía el dinero para algunos meses.

Mes (t)	Monto final del periodo $C(t)$	Monto al inicio del periodo $C(t-1)$	Interés en cada periodo I ($((t-1); t)$)	Tasa $i = \frac{R}{100}$
0	$C(0) = 12000$	--	--	--
1	$C(1) = 12132$	$C(0) = 12000$	$I(0; 1) = 132$	0.011
2	$C(2) = 12265.452$	$C(1) = 12132$	$I(1; 2) = 133.452$	0.011
3	$C(3) = 12400.37197$	$C(2) = 12265.452$	$I(2; 3) = 134.919972$	0.011
4	$C(4) = 12536.77606$	$C(3) = 12400.37197$	$I(3; 4) = 136.4040917$	0.011
5	$C(5) = 12674.6806$	$C(4) = 12536.77606$	$I(4; 5) = 137.9045367$	0.011
6	$C(6) = 12814.10209$	$C(5) = 12674.6806$	$I(5; 6) = 139.4214866$	0.011
7	$C(7) = 12955.05721$	$C(6) = 12814.10209$	$I(6; 7) = 140.955123$	0.011
8	$C(8) = 13097.56284$	$C(7) = 12955.05721$	$I(7; 8) = 142.5056293$	0.011
9	$C(9) = 13241.63603$	$C(8) = 13097.56284$	$I(8; 9) = 144.0731912$	0.011
10	$C(10) = 13387.29403$	$C(9) = 13241.63603$	$I(9; 10) = 145.6579963$	0.011
11				
12				
...				
30				

- Calcula los valores que faltan; y escribe la expresión que utilizó el **Banco 1** para calcular los montos $C(t)$. ¿Y los otros dos bancos?
- Construye una tabla similar para cada uno de los bancos.
- ¿Cuál es el dominio de validez y la imagen, de cada expresión para que sea función? ¿Cuál es el banco que paga mayor interés?
- Representa gráficamente cómo varía el dinero en cada banco.



- ¿Cuál es la diferencia entre este modelo y el que tú habías planteado en la situación anterior?

Las tareas y los sistemas de representación típicamente involucrados se describen en el cuadro 6.

En la figura 5 se muestra la respuesta del alumno A14 de cuarto año de la escuela secundaria argentina (16-17 años). Este alumno calcula el dinero en forma no lineal con las estrategias construidas en la primera situación. Luego, formula la expresión algebraica $M_i (1 - i)^t = M_f$. Cuando se le pregunta cómo la construyó, el alumno afirma: “si multiplican los valores de la segunda columna, por 1.011 te da el siguiente. Por ejemplo, 1 200 por 1.011 da 12 132, y si a 12 132 lo multiplican por 1.011 da 12 265.452 y si a ese resultado lo multiplican por 1.011 les da el próximo. Entonces multiplicamos por t , pero como multiplicando no salía, entonces probamos con las potencias”. Así, se tiene que A14 logró formalizar mediante una expresión algebraica exponencial (SRA2) un procedimiento no lineal desarrollado en el sistema de representación numérico (SRN).

Una vez acordada la expresión algebraica con el grupo de clase, se les solicitó que representaran la variación del dinero gráficamente. La figura 6 muestra que A14 propone una variación gráfica lineal del dinero puesto a interés compuesto. Así, A14 resolvió en forma no lineal en el sistema de representación

Cuadro 6

Tarea	Sistema de representación
T1: Calcula los valores que faltan, y escribe la expresión que utilizó el Banco 1 para calcular los montos $C(t)$. ¿Y los otros dos bancos?	Numérico (SRN) Algebraico de primer orden (SRA1)
T2: Construye una tabla similar para cada uno de los bancos.	Numérico (SRN)
T3: ¿Cuál es el dominio de validez y la imagen, de cada expresión para que sea función? ¿Cuál es el banco que paga mayor interés?	Algebraico de primer orden (SRA1) Verbal escrito (SRVE)
T4: Representa gráficamente cómo varía el dinero en cada banco.	Gráfico (SRG)
T5: ¿Cuál es la diferencia entre este modelo y el que tú habías planteado en la situación anterior?	Verbal escrito (SRVE)

numérico (SRN), exponencial en el sistema de representación algebraico de segundo orden (SRA2) y lineal en el sistema de representación gráfico (SRG).

En síntesis, aun cuando A14 logró formalizar la expresión algebraica exponencial, no modificó la representación gráfica. Por una parte, esto muestra que comprender un problema en un sistema de representación y poder resolverlo no implica su comprensión en otro. Por otra parte, muestra que los acuerdos establecidos en dicho sistema de representación no son inmediatamente reinterpretados en otro sistema de representación, al menos cuando el conocimiento del campo conceptual es incipiente.

En el cuadro 7 se enuncian los teoremas en acto que parecen dirigir las acciones de A14 en cada sistema de representación. Esto permite inferir que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación (SR) son diferentes y contradictorios entre sí. Así, se infiere que, al principio, coexisten esquemas contradictorios entre sí para el mismo concepto. Esto también muestra la fuerza que tienen los esquemas lineales en el momento de generar la respuesta a una situación nueva.

El análisis de las respuestas parcialmente exponenciales muestra que la conceptualización de la función exponencial involucra tanto el desarrollo

Figura 5

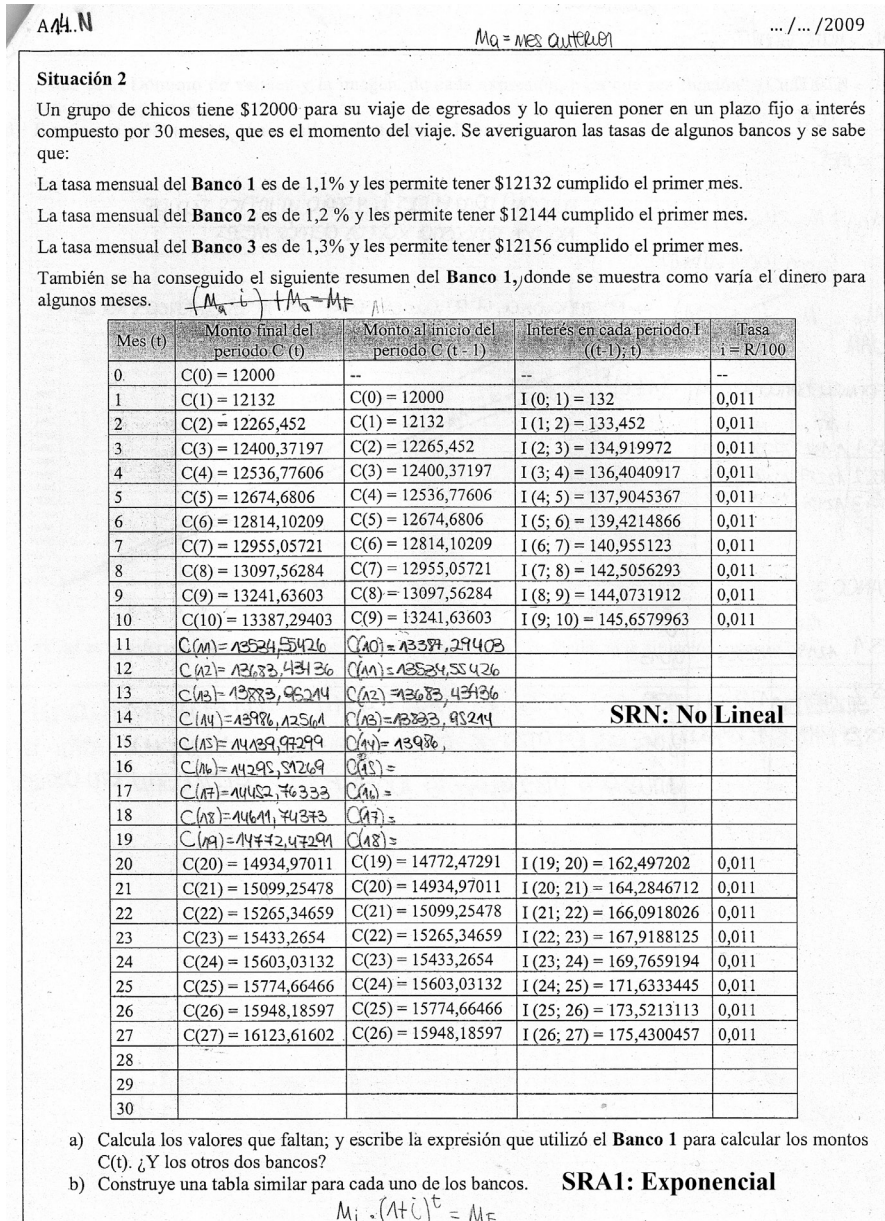
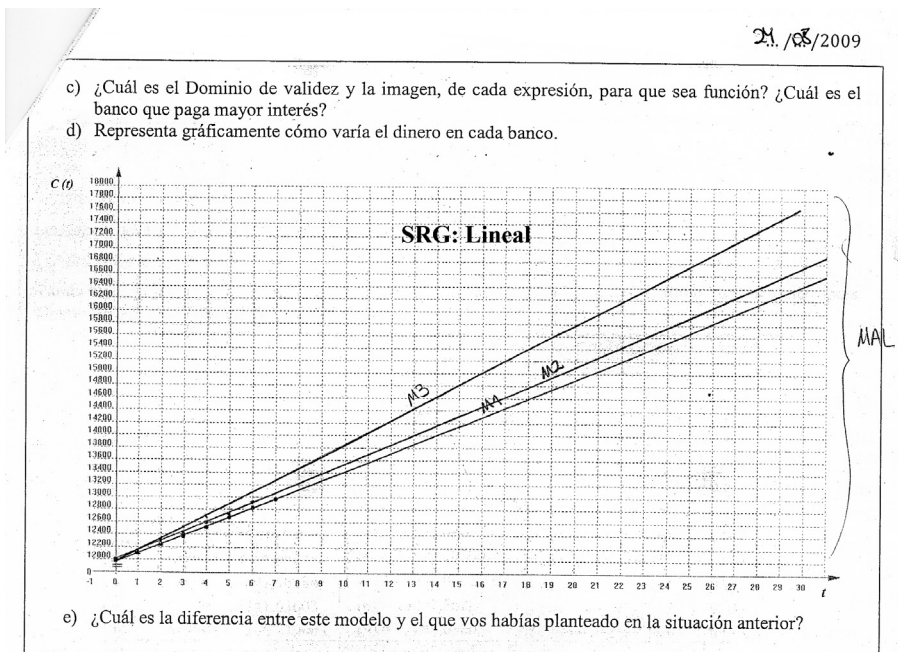


Figura 6



La diferencia es que el interés simple presenta una pendiente constante. En el interés compuesto la pendiente varía de esta forma al graficar el interés simple resulta una línea recta, y al graficar el compuesto una curva.

conjunto de los sistemas de representación como el desarrollo en cada uno de ellos, y esto está íntimamente vinculado con las tareas que se les proponen a los alumnos en cada sistema de representación.

ETAPA EXPONENCIAL

Refiere a las resoluciones que son exponenciales en todos los sistemas de representación. Las resoluciones vinculadas al interés compuesto, por ser un caso particular de función exponencial, son también exponenciales. Este tipo de respuestas aparece por primera vez en la situación cuatro y se generaliza en la situación cinco, pero sin estabilizarse.

Cuadro 7

SRN	SRA1	SRVE	SRVE
T.AN: "El dinero puesto a IC no aumenta lo mismo cada mes"	T.AN: "Si a cada monto lo multiplicamos por 1.011 obtenemos el próximo resultado"	T.AG: "Es posible unir dos puntos mediante un segmento recto" T.AG: "La representación gráfica del crecimiento del dinero puesto a IC no es una recta"	T.AN: "El aumento del dinero puesto a IC se grafica mediante una curva no recta"
No lineal	Exponencial	Lineal	No lineal
Parcialmente exponencial			

La situación cuatro refería a un problema vinculado con la gripe AH1N1. El problema presentaba una situación en la que tres personas que habían contraído gripe, contagiaban a cinco personas cada hora.

Situación 4

El virus de influenza humana "AH1N1" o gripe porcina se contagia por contacto. Al darse la mano o besarse en la mejilla; y por la nariz, boca y ojos. Tres amigos contrajeron el virus en una fiesta y contagiaron a más personas. Sabiendo que la expansión se produjo de la siguiente manera:

Cada amigo contagió 5 personas la primera hora, y cada una de estas personas contagió otras 5 para la segunda hora. Luego, cada una de estas personas contagió 5 para la tercera hora, y esta situación se repitió en cada persona contagiada.

- ¿Podrías dar una expresión que te permita calcular la cantidad de nuevos contagiados, en una cierta hora cualquiera?
- Construye, una tabla que permita observar la cantidad de nuevos contagiados en cada hora; para las primeras 24 hs.
- ¿Podrías inventar una nueva tasa de contagio y explicar que pasaría?
- Determina para cada caso, el dominio de validez y la imagen para que sean funciones; y represéntalas gráficamente.

(*) No es un modelo epidemiológico exacto, sino simplificado.

Cuadro 8

Tarea	Sistema de representación
T1: ¿Podrías dar una expresión que te permita calcular la cantidad de nuevos contagiados en una cierta hora cualquiera?	Algebraico de primer orden (SRA1)
T2: Construye una tabla que permita observar la cantidad de nuevos contagiados en cada hora para las primeras 24 hs.	Númérico (SRN)
T3: ¿Podrías inventar una nueva tasa de contagio y explicar qué pasaría?	Algebraico de primer orden (SRA1) Verbal escrito (SRVE)
T4: Determina para cada caso el dominio de validez y la imagen para que sean funciones y represéntalas gráficamente.	Algebraico de primer orden (SRA1) Gráfico (SRG)

Las tareas y los sistemas de representación típicamente involucrados en cada una de ellas, se describen en el cuadro 8.

En la figura 7 se presenta la resolución a la cuarta situación del alumno A22. En el sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1), formula una sucesión de expresiones que procuran dar respuesta al problema planteado, pero sin lograrlo.

Una vez acordada con el grupo de clase la expresión algebraica que permitiría calcular la cantidad de personas que se contagiaban por hora, A22 calcula algunos valores y construye la representación gráfica. En ambos casos las respuestas son exponenciales. Así, se tiene que A22 reconoce la función exponencial en el sistema de representación numérico (SRN) como la función que no aumenta lo mismo entre cualquier x y $x + 1$, y en el sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1) como la expresión de la forma: $f(x) = ka_x$. Así, todas las resoluciones parecen estar guiadas por invariantes operatorios exponenciales.

En el cuadro 9 se describen los teoremas en acto que parecen dirigir la acción de A22 en cada sistema de representación. El cuadro 9 muestra que este alumno ha logrado extender sus esquemas lineales en una dirección no lineal primero, y ahora exponencial.

Figura 7

A.22.

A22

27/CE/ 2009

Situación 4

El virus de influenza humana "AH1N1" o gripe porcina se contagia por contacto. Al darse la mano o besarse en la mejilla; y por la nariz, boca y ojos. Tres amigos contrajeron el virus en una fiesta y contagiaron a más personas. Sabiendo que la expansión se produjo de la siguiente manera:

Cada amigo contagió 5 personas la primera hora, y cada una de estas personas contagió otras 5 para la segunda hora. Luego, cada una de estas personas contagió 5 para la tercera hora, y esta situación se repitió en cada persona contagiada.

- ¿Podrías dar una expresión que te permita calcular la cantidad de nuevos contagiados, en una cierta hora cualquiera?
- Construye, una tabla que permita observar la cantidad de nuevos contagiados en cada hora; para las primeras 24 hs.
- ¿Podrías inventar una nueva tasa de contagio y explicar que pasaría?
- Determina para cada caso, el dominio de validez y la imagen para que sean funciones; y represéntalas gráficamente.

(*) No es un modelo epidemiológico exacto, sino simplificado.

a) - ~~$3 \cdot 5^t$~~ $y = 3 \cdot 5^t$ ~~$3 \cdot 5^t$~~
 ~~$3 \cdot 5^t - 5 \cdot t$~~
 ~~$3 \cdot 5^t - 3 \cdot 5^{t-1}$~~

~~$1 Hs = 3 + (3 \cdot 5)$~~
 ~~$2 Hs = 3 + (3 \cdot 5) \cdot 5 =$~~
 ~~$3 Hs = 3 + (3 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 5$~~
 ~~$4 Hs = 3 + (3 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$~~

SRA1: Exponencial

Hora (t)	Cantidad de Infectados	Nuevos contagiados
0	3	0
1	18	15
2	93	75
3	468	375
4	2343	1875
5	11718	9375

SRN: Exponencial

~~$= 3 \cdot 5^3$~~
 ~~$= 375 + 44$~~

c) $C(t) = 3 \cdot 6^t$

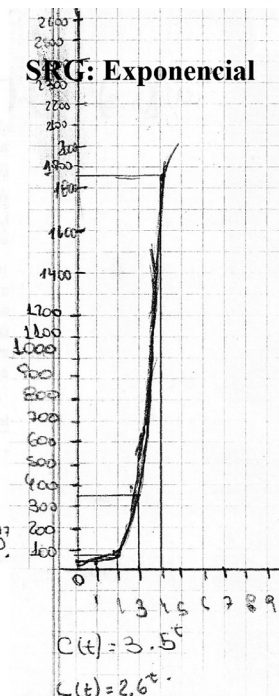
a) $3 \cdot 5^t \rightarrow$ Dominio = $[0, 24]$

Imagen = $[3, 1,789139343 \times 10^7]$

$3 \cdot 6^t \rightarrow$ Dominio $[0, 24]$

Imagen $[3, 24]$

SRG: Exponencial



Cuadro 9

SRN	SRG	SRA1
T.A.N: "El aumento se calcula sobre la cantidad de personas contagiadas la hora anterior"	T.A.G: "La representación gráfica del aumento de la cantidad de personas contagiadas es una curva creciente"	T.A.N: "El aumento se calcula sobre la cantidad de personas contagiadas la hora anterior" T.AA1: "La expresión algebraica es: $f(t) = k \cdot a^t$. Donde t es la hora para la cual se quiere saber la cantidad de contagiados; a es la tasa de crecimiento y k la cantidad inicial de personas contagiadas"
Exponencial	Exponencial	Exponencial
Exponencial		

El análisis de los protocolos muestra que la conceptualización de la función exponencial es una tarea compleja que no se realiza en todos los sistemas de representación a la vez y que demanda mucho más que los dos meses y medio que demandó la implementación, sobre todo si se quiere llegar a que, en el proceso de explicitación de los invariantes operatorios (Vergnaud, 2007b, p. 299), los alumnos dominen el nivel que Vergnaud llama de formalización.

CONCLUSIONES

La conceptualización es más que la forma predicativa del conocimiento o que el conocimiento explicitable (Vergnaud, 2007b, p. 299), pero puesto que en la escuela secundaria, la explicitación y formalización de los conceptos matemáticos en diferentes sistemas de representación cobra vital importancia, el aspecto central de este trabajo ha sido caracterizar el proceso de conceptualización de la función exponencial y su relación con los sistemas de representación, sobre

todo en un contexto escolar, a partir de la forma predicativa del conocimiento. La caracterización realizada a partir de la base empírica (el estudio de 115 alumnos durante el periodo en que éstos estudiaban las funciones exponenciales) permite sugerir la existencia de una progresividad en la conceptualización, que va desde los esquemas lineales hasta los exponenciales, de la función exponencial vinculada con los sistemas de representación. Las etapas son las siguientes:

Lineal: son lineales aquellas producciones que involucran todos los sistemas de representación lineales. Este tipo de resolución evidencia un sistema de esquemas lineales complejo y completo que se expresa en todos los sistemas de representación. Esto muestra que, cuando el estudiante sólo está en posesión de esquemas lineales, los utiliza coherentemente en todos los sistemas de representación.

Parcialmente no lineal: la respuesta es parcialmente no lineal cuando la resolución es no lineal en al menos un sistema de representación y lineal en el resto. La inconsistencia entre las respuestas dadas en sistemas diferentes de representación muestra que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación son diferentes y contradictorios entre sí. Así, se infiere que, al principio, coexisten esquemas contradictorios entre sí para el mismo concepto. Esto también muestra la fuerza que tienen los esquemas lineales en el momento de generar la respuesta a una situación nueva.

No lineal: la respuesta es no lineal cuando es no lineal en todos los sistemas de representación, pero no es todavía una respuesta exponencial. Por ejemplo, en el sistema de representación gráfico (SRG) la respuesta no es una recta, pero tampoco es una curva estrictamente creciente. En el sistema de representación algebraico, la fórmula no es una función lineal, pero tampoco es exponencial; etc. La interacción con el profesor y el grupo de clase resultó fundamental a la hora de avanzar sobre estas estrategias.

Parcialmente exponencial: son parcialmente exponenciales aquellas respuestas que son exponenciales en al menos un sistema de representación, pero no exponenciales en el resto. Por una parte, el análisis de estas respuestas muestra que, en un principio, las ideas exponenciales y no exponenciales coexisten. Por otra parte, muestra que comprender un problema en un sistema de representación y poder resolverlo no implica su comprensión en otro. Esto se evidencia en que, aun estableciendo acuerdos en un sistema de representación como por ejemplo la fórmula de la función exponencial, éstos no son inmediatamente reinterpretados en otro sistema de representación, al menos cuando

el conocimiento del campo conceptual es incipiente. En síntesis, los sistemas de representación no evolucionan juntos y tienen sus propias complejidades.

Exponencial: las respuestas son exponenciales cuando son explícitamente exponenciales en todos los sistemas de representación. Este tipo de respuestas aparece por primera vez en la situación cuatro, pero sin estabilizarse, pues en el sistema de representación donde los alumnos no tenían seguridad de la respuesta retomaban estrategias no exponenciales. La aparición tardía de este tipo de resoluciones y las dificultades que presenta su estabilización resaltan la complejidad del proceso de conceptualización de variaciones no lineales en general, y de la función exponencial en particular, en la escuela secundaria. En esta etapa los alumnos logran diferenciar una función exponencial de una que no lo es en los cuatro sistemas de representación (SRN, SRA1, SRG y SRVE). En el sistema de representación numérico (SRN), como la función que no aumenta lo mismo entre cualquier x y $x + 1$. En el sistema de representación algebraico de primer orden (SRA1), como la expresión de la forma: $f(x) = k \cdot a^x + b$. En el sistema de representación verbal escrito (SRVE), como la función que tiene la variable independiente en el exponente, y en el sistema de representación gráfico (SRG), como la función cuya representación gráfica posee una asíntota horizontal y es una curva no recta, creciente (o decreciente) en todo el dominio.

Así, y aunque este trabajo no permite afirmar si el proceso de conceptualización particular de cada alumno transita necesariamente por cada una de las etapas, sí se ha encontrado que la explicitación, discusión y formalización de los conceptos en cada sistema de representación resulta un aspecto central de la transición entre lo lineal y lo exponencial, y que este proceso se encuentra íntimamente vinculado con las tareas que se les proponen a los alumnos en cada sistema de representación. En esta dirección resta estudiar cómo se desarrolla el proceso de conceptualización en cada sistema de representación y cómo se desarrolla la vinculación entre ellos en la construcción del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- De Bock, D., L. Verschaffel y D. Janssens (1998), "The Predominance of the Linear Model in Secondary School Pupils' Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 35, núm. 1, pp. 65-83.
- _____ (2002), "Improper Use of Linear Reasoning: An in-Depth Study

- of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 50, núm. 3, pp. 311-334.
- De Bock, D., W. van Doorem, D. Janssens y L. Verschaffel (2002), "The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 4, núm. 1, pp. 65-89.
- De Bock, D., W. van Dooren y L. Verschaffel (2011), "Students' Over-use of Linearity: An Exploration in Physics", *Research in Science Education*, vol. 41, núm. 3, pp. 389-412.
- Douady, R. (1986), "Jeux de cadres et dialectique outil-object", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 5-31.
- Dubinsky, E. y G. Harel (eds.) (1992), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Notes 25, MAA.
- Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*, Cali, Colombia, Universidad del Valle.
- Font, V. (2001), "Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola", *Revista EMA*, vol. 6, núm. 2, pp. 180-200.
- García, M. y S. Llinares (1994), "Algunos referentes para analizar tareas matemáticas", *Suma*, núm. 18, pp. 13-23.
- Janvier, C. (1987), "Translation Processes in Mathematics Education", en C. Janvier, (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, New Jersey, Estados Unidos, Lawrence Erlbaum, pp. 27-32.
- Kaput, J. (1987), "Representation systems and mathematics", en C. Janvier (ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Hillsdale, New Jersey, Estados Unidos, Lawrence Erlbaum, pp. 19-26.
- Karrer, M. y S. Magina (2000), "Uma sequencia de ensino para a introdução de logaritmo: estudo exploratório usando a calculadora", *Boletim de Educação Matemática*, vol. 13, núm. 14, pp. 18-31.
- Rico, L. (2009), "Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática", *PNA*, vol. 4, núm. 1, pp. 1-14 (consultado el 21 del junio de 2013 en <http://hdl.handle.net/10481/3501>).
- Sessa C. y D. Vilotta (2008), "Un espacio para discutir en el aula propiedades y dominio de validez de la función exponencial", en *II Reunión Pampena de Educación Matemática*, Santa Rosa, La Pampa, Argentina, pp. 123-134.
- Vergnaud, G. (1990), "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, núms. 2/3, pp. 133-170.

- _____ (1996), "Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica", *Revista Perspectivas*, vol. 26, núm. 1, pp. 195-207.
- _____ (2007a), "Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento", en M. R. Otero, I. Elichirebehety, M. Fanaro, A. Corica y P. Sureda (eds.), *Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina.
- _____ (2007b), "¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? (In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?), *Investigações em Ensino de Ciências*, vol. 12, núm. 2, pp. 285-302.
- _____ (2011), "La construcción de la racionalidad", en M. R. Otero, I. Elichirebehety y M. Fanaro (eds.), *I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y del II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, pp. 268-274.
- Villarreal, M. E., C. B. Esteley y H. R. Alagia (2005), "As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares", *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, vol. 18, núm. 23, pp. 23-40.

DATOS DE LAS AUTORAS

Patricia Sureda

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT),
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil,
Argentina

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
psureda@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT),
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil,
Argentina

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina
rotero@exa.unicen.edu.ar