La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones

José Luis Cortina, Claudia Zúñiga y Jana Visnovska

Resumen: Se plantea la conjetura de que el uso de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones constituye un obstáculo didáctico. Retomando los análisis del concepto de fracción realizados por Hans Freudenthal, Patrick Thompson y Luis Saldanha, se explica por qué es razonable esperar que la equipartición oriente a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales.

Palabras clave: fracciones, obstáculo didáctico, equipartición, números racionales.

Abstract: We advance the conjecture that equipartition constitutes what Brousseau's calls a *didactical obstacle* in the fraction realm. Building on Hans Freudenthal, Patrick Thompson and Luis Saldanha´s analyses of the fraction concept, we explain why it is reasonable to consider that equipartition orients pupils to develop ways of conceiving fractions that interfere with the development of a mature understanding of rational numbers.

Keywords: fractions, didactical obstacle, equipartition, rational numbers.

INTRODUCCIÓN

En la década de 1980, los números racionales se convirtieron en un tema importante para el campo de la educación matemática. Desde entonces, el interés no ha disminuido. Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y otras formas de representar a los racionales continúan ocupando un lugar importante en revistas y congresos especializados.

Aunque el tema ha sido extensamente investigado, sigue habiendo gran

Fecha de recepción: 14 de noviembre de 2012; fecha de aceptación: 28 de junio de 2013.

insatisfacción respecto a los niveles de comprensión de las fracciones que los estudiantes típicamente logran y, más importante, respecto a lo que se sabe acerca de lo que se debe hacer para mejorarlos. La siguiente cita de Davis, Hunting y Pearn (1993) expresa bien el ánimo de esta insatisfacción: "La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones no sólo es muy difícil; en el esquema más amplio de las cosas, es un triste fracaso" (p. 63). Para respaldar esta afirmación, los autores se refirieron a los resultados obtenidos por Hart en un estudio realizado en Inglaterra y publicado en 1981, en el que se evaluaron los conocimientos matemáticos de un amplio número de estudiantes de entre 11 y 16 años de edad.

Al paso del tiempo, la situación no ha cambiado mucho; por ejemplo, Bills (2003) replicó parte del estudio de Hart y encontró que, 20 años después, los adolescentes británicos tenían confusiones muy similares sobre el significado de las fracciones. Resultados obtenidos en otras partes del mundo muestran un panorama análogo; por ejemplo, Hannula (2003), en un estudio que implicó la aplicación de 1 154 pruebas a estudiantes finlandeses de quinto grado, encontró que 46% de ellos no fueron capaces de sombrear correctamente $^3/_4$ de una barra dividida en ocho partes iguales. Gould, Outhred y Mitchelmore (2006) documentaron una situación análoga en una investigación con estudiantes australianos.

En el caso de los países iberoamericanos, Backhoff, Andrade, Sánchez, Peon y Bouzas (2006), utilizando una muestra representativa, identificaron que únicamente 5.3% de los estudiantes mexicanos de sexto grado tenían 67% o más de probabilidad de reconocer una fracción como $3\ ^2/_5$ como mayor que $3\ ^1/_4$ pero menor que $3\ ^1/_2$. También en México, en un estudio que implicó la aplicación de 297 cuestionarios en 13 escuelas a alumnos de sexto grado, Cortina, Cardoso y Zúñiga (2012a) encontraron que 20% de ellos aún no asociaba de manera consistente la inscripción $^1/_2$ con la noción de mitad.

La situación descrita justifica que se revisen algunos de los supuestos básicos que han guiado el diseño de actividades y estrategias de enseñanza que buscan favorecer el aprendizaje de las fracciones. Uno de estos supuestos consiste en considerar la equipartición, si no como el único, sí como el contexto más favorable para apoyar el desarrollo inicial de nociones fraccionarias en los niños.

En este artículo se explora la posibilidad de que este supuesto sea inadecuado. Para ello proponemos la siguiente conjetura: los conocimientos que desarrollan los estudiantes como consecuencia de involucrarse en actividades basadas en la partición y repartición equitativa de artículos alimentarios (por ejemplo, pasteles y galletas) y otros objetos divisibles constituyen obstáculos didácticos (Brousseau, 1997) en el proceso de lograr una *comprensión madura de las fracciones* (Thompson y Saldanha, 2003). Con base en el análisis fenomenológico de Freudenthal (1983) y el conceptual de Thompson y Saldanha sobre el concepto *fracciones*, explicamos por qué la conjetura puede ser cierta.

OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS

La noción de obstáculo didáctico de Brousseau (1997) forma parte de la transposición que este autor hizo de la noción de *obstáculo epistemológico* –propuesta por el filósofo francés Gastón Bachelard– al universo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Según Brousseau, los obstáculos no son producidos por la ignorancia de un saber ni por una comprensión errónea. En lugar de ello, los obstáculos implican la (adecuada) adquisición de saberes específicos; los cuales posteriormente dificultan y obstruyen la adquisición de saberes más complejos.

Para Brousseau (1997), los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden tener tres orígenes distintos, siendo uno de ellos el desarrollo cognitivo (obstáculos de origen ontogenético). Asumiendo un punto de vista piagetiano, este autor reconoce que los conocimientos que van desarrollando los niños conllevan limitaciones que, mientras no se tornan evidentes para ellos, pueden obstaculizar el desarrollo de conocimientos más complejos. La reorganización de los conocimientos desarrollados mediante la asimilación y la acomodación es necesaria para poder superar esas limitaciones.

Brousseau (1997) reconoce que hay un segundo tipo de obstáculos que tiene su origen en la propia disciplina matemática (obstáculos de origen epistemológico). Estos obstáculos se presentan cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo. Por ejemplo, en la literatura sobre fracciones, múltiples autores han considerado que el conocimiento que los estudiantes desarrollan de los números naturales interfiere con la comprensión de los números racionales (cf. Streefland, 1991; Post y otros, 1993; Kieren, 1993).[1]

Para los propósitos de este artículo, es importante señalar que, en términos

[1] Es importante aclarar que esta hipótesis no es del todo aceptada; en particular, Steffe y sus colaboradores (e.g., Steffe y Olive, 2010) han argumentado en contra de ella.

pedagógicos, tanto los obstáculos de origen ontogenético como los de origen epistemológico no pueden ni deben ser evitados. Frente a ambos casos, la tarea educadora consiste en ayudar a los estudiantes a superar los obstáculos; esto es, si se acepta que el aprendizaje matemático es un proceso que implica reorganizar conocimientos y requiere, en ciertos momentos, conciliar ideas y nociones que parecieran ser incoherentes entre sí.

Según Brousseau (1997), hay un tercer tipo de obstáculos que tienen su origen no en el desarrollo cognitivo ni en la propia disciplina, sino en las estrategias que se utilizan en la enseñanza para procurar apoyar el aprendizaje de nociones matemáticas específicas (obstáculos de origen didáctico). Se trata de conocimientos cuya adquisición por los estudiantes puede ser relacionada con las metáforas, representaciones y otros recursos didácticos utilizados por los educadores matemáticos en su labor.

Más adelante en este artículo explicamos por qué nosotros consideramos que algunos de los conocimientos que los estudiantes desarrollan sobre las fracciones, y que dificultan el logro de una comprensión madura del concepto, podrían constituir *obstáculos didácticos*, atribuibles al uso de la equipartición como modelo principal para apoyar la adquisición inicial de nociones fraccionarias. Por lo pronto, es importante mencionar que una diferencia significativa entre los obstáculos de origen didáctico y los de origen ontogenético y epistemológico es que los primeros –a diferencia de los otros dos– sí pueden (y deben) ser evitados. Por tratarse de obstáculos que tienen como origen las estrategias de enseñanza, el reto pedagógico consiste en utilizar estrategias distintas que apoyen el aprendizaje de nociones específicas sin orientar a los estudiantes a desarrollar conocimientos que habrán de obstaculizar innecesariamente sus aprendizajes futuros.

A continuación, retomando los análisis de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003), describimos tres imágenes de las fracciones que es razonable esperar que se formen los estudiantes como resultado de ser introducidos en el concepto mediante la equipartición. Explicamos por qué estas imágenes deben ser consideradas obstáculos didácticos. Ello implica que esas imágenes no sólo obstruirían el desarrollo de nociones maduras de las fracciones, sino que también podrían ser evitadas por tener su origen en la didáctica de las matemáticas y no en la propia disciplina ni necesariamente en el desarrollo cognitivo.

LA EQUIPARTICIÓN

La equipartición ha sido considerada por múltiples autores que trabajan el campo de las fracciones como el único o el más ventajoso medio de introducir a los educandos en el tema (cf. Mack, 1990; Kieren, 1993; Steffe y Olive, 2010; Pitkethly y Hunting, 1996; Confrey y Maloney, 2010).[2] Esta consideración se fundamenta en el reconocimiento de que las actividades que implican la partición, separación o doblez de objetos divisibles –tales como pasteles, chocolates y pliegos de papel– pueden resultar significativas con relativa facilidad para los niños, incluso desde edades tempranas. Además, este tipo de actividades son útiles para provocar en los estudiantes formas de razonar consistentes con nociones fraccionarias básicas, tales como el tamaño relativo de las fracciones unitarias (es decir, $^1/_4 < ^1/_2$) y las equivalencias (o sea, $^2/_4 = ^1/_2$).

Con base en los análisis realizados por Freudenthal (1983) y por Thompson y Saldanha (2003), identificamos tres imágenes de las fracciones que es razonable esperar que sean adquiridas por los educandos cuando se utiliza la equipartición como el medio principal para introducir el concepto. Se trata de tres imágenes que, como lo explicamos a continuación, obstaculizarían el desarrollo de una comprensión madura de las fracciones.

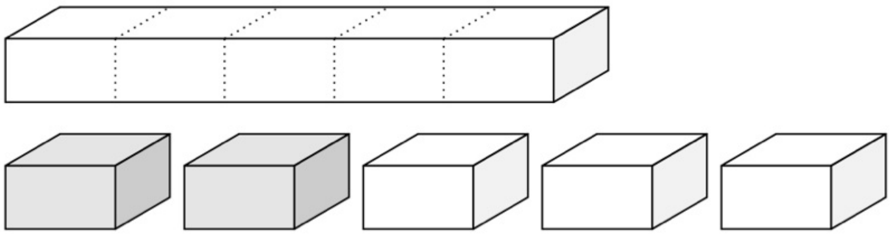
PRIMERA IMAGEN: LA FRACCIÓN COMO RESULTADO DE TRANSFORMAR UN OBJETO

Según Freudenthal (1983), la manera más concreta de acercarse a las fracciones en la enseñanza es la de *fracción como fracturador*. Ésta implica la matematización de situaciones que implican un entero que “ha sido o es rebanado, cortado, quebrado o coloreado en partes iguales” o que “es experimentado, imaginado, pensado como tal” (p. 140). Este autor consideró que estas situaciones que se basan en la equipartición son “de una concreción convincente y fascinante” (p. 147), pero también “mucho muy restringidas” (p. 144).

Una de las limitantes que Freudenthal reconoció en las actividades de enseñanza que se fundamentan en la equipartición es que, por lo general, el entero es representado como un objeto susceptible de ser partido fácilmente (por ejemplo, una barra de dulce, una galleta o un pastel) y la fracción unitaria como el

[2] Una excepción importante es Guy Brousseau quien, junto con Nadine Brousseau, diseñó una secuencia de situaciones didácticas en las que se introduce la noción de fracción sin aludir a equipartición (cf., Brousseau *et al.*, 2004). Esta secuencia la comentamos más adelante en este artículo.

Figura 1 La fracción $^{2}/_{5}$ representada como el resultado de partir un objeto en cinco pedazos iguales y seleccionar dos



producto de la partición (es decir, rebanadas de pastel). En estas situaciones, no sólo sería posible, sino también tentador para los educandos asociar las fracciones con la necesidad de transformar, física e irreversiblemente, un objeto.[3] En esta manera de imaginarse las fracciones, una fracción como $^{2}/_{5}$ implicaría la existencia de cinco pedazos (es decir, cinco pedazos de dulce) de lo que solía ser un objeto íntegro (o sea, una barra de dulce; véase la figura 1).

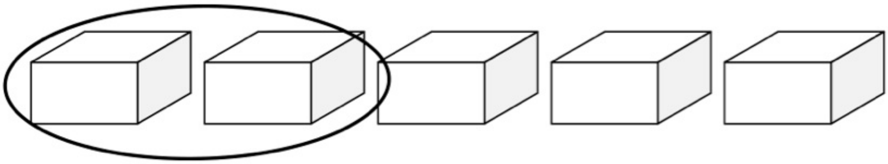
Orientar a los estudiantes a asociar las fracciones con acciones que transforman los objetos de manera irreversible podría interferir con la posibilidad de que, a la larga, comprendieran las relaciones recíprocas (es decir, que 1 es cinco veces el tamaño de $^{1}/_{5}$). También podría llevar a los educandos a que concibieran las fracciones como números que cuantifican conjuntos de elementos discretos. Las consecuencias de que esto suceda las revisamos a continuación.

Segunda imagen: la fracción como tantos de tantos

Clarke y Roche (2009) explican que los estudiantes "típicamente identifican el denominador como el número de partes en que se corta el entero y el numerador como el número de partes que se toman del entero" (p. 136). En esta imagen, como lo explican Gould, Outhred y Mitchelmore (2006), tanto el numerador como el denominador se interpretan como números que expresan el resultado de un conteo. El denominador da cuenta del número de elementos en un con-

[3] Nótese que no existe una acción simple por la cual sea posible hacer que un pastel vuelva a su forma original después de haber sido partido.

Figura 2 La fracción $^2/_5$ representada como el resultado de crear un subconjunto de dos elementos de un conjunto de cinco pedazos



junto y el numerador del número de elementos en un subconjunto. Así, una fracción como $^2/_5$ implicaría la creación de un subconjunto de dos elementos que pertenecerían a un conjunto de cinco (véase la figura 2).

Thompson y Saldanha (2003) utilizan la frase *tantos de tantos* para describir esta manera de concebir las fracciones. Ellos señalan que es de naturaleza aditiva, no multiplicativa, ya que no conlleva la noción de tamaño relativo. Ello quiere decir que una expresión como "$^2/_5$ de una barra de dulce" no implicaría para los alumnos de manera inmediata que la cantidad de dulce equivaldría a menos de $^1/_2$ de la barra (razonando que 2 es menos que la mitad de 5). En lugar de ello, sería más probable que la expresión "$^2/_5$ de una barra de dulce" les provocase un razonamiento aditivo; por ejemplo, cuando se agrupan dos elementos de un conjunto de cinco, tres elementos quedan fuera del subgrupo.

Tercera imagen: la fracción como incluida en un entero

La última de las imágenes reconocible en los análisis realizados por Freudenthal (1983) y por Thompson y Saldanha (2003) consistiría en concebir una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero. Para Thompson y Saldanha (2003), esta imagen se origina en la anterior. Ellos sostienen que la imagen tantos de tantos "conlleva una sensación de inclusión –que el primer tantos debe estar incluido en el otro tantos–" (p. 105). Según estos autores, los estudiantes que conciben las fracciones de esta manera,

> no aceptarán la idea de que se puede hablar del tamaño de una cantidad como siendo una fracción de otra cuando no tengan nada físicamente en común. Ellos aceptarán "¿El número de chicos *[boys]* es qué fracción del

número de niños *[children]*?", pero se confundirán con "¿El número de chicos es qué fracción del número de chicas?" (p. 105).

Así, para Thompson y Saldanha (2003), la imagen de una fracción como algo que necesariamente está contenido dentro de un entero limitaría tanto el tipo de situaciones en las que se pueden utilizar las fracciones como las cantidades de las que pueden dar cuenta (únicamente ≤ 1).

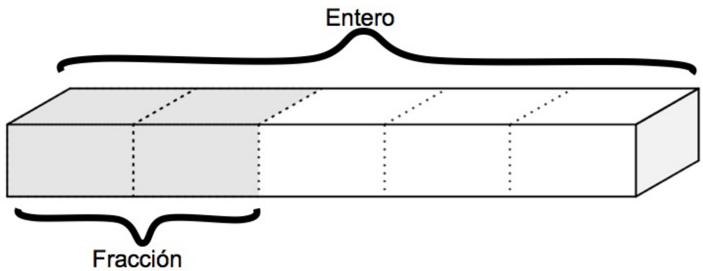
Freudenthal (1983), asumiendo un punto de vista diferente, reconoció la matematización de situaciones que implican la equipartición de objetos como una aproximación didáctica que presenta las fracciones como entes contenidos dentro de un entero. Para este autor, esta representación estaría presente incluso si las particiones se entendieran como entidades de tamaño relativo respecto al tamaño de un entero; esto es, no únicamente cuando se concibieran como elementos discretos que forman conjuntos y subconjuntos.

Freudenthal consideró que la aproximación didáctica a la fracción "como fracturador" tendría limitaciones muy importantes. Para él, esta aproximación a las fracciones sería, en términos pedagógicos, "un comienzo muy limitado" (p. 144). Explicó que, en la equipartición, "la enésima parte es vista o imaginada exclusivamente dentro del entero" (p. 147). En consecuencia, las actividades de enseñanza que se basan en la equipartición podrían ser útiles para apoyar que los estudiantes razonen sobre la acumulación de la magnitud cuantificada por una fracción unitaria (es decir, m veces $^1/_n$), siempre y cuando la magnitud acumulada no exceda del entero ($m \leq n$; véase la figura 3).

Freudenthal también reconoció una importante limitación matemática en las actividades que procuran la matematización de la equipartición de objetos, ya que implican "un concepto de equivalencia muy restringido" (p. 147). Explicó que la partición, como operación, produce siempre un número limitado de elementos en cada clase de equivalencia; esto es, al partir una magnitud A en n partes iguales, se producen n elementos equivalentes, no más.[4] Reconoció que este concepto de equivalencia es inconsistente con la definición de una fracción unitaria ($^1/_n$) como el tamaño de una magnitud que es susceptible de acumulación irrestricta ($^m/_n$, entendido como m veces $^1/_n$ donde m no tiene que ser menor o igual que n).

[4] Vale la pena mencionar que esta limitación también aplicaría cuando la magnitud que se va a partir equitativamente incluyera varios enteros. Por ejemplo, si la magnitud en cuestión fuera $2A$, el número de elementos equivalente que se podrían obtener al partir cada entero en n partes iguales sería $2n$, no más.

Figura 3 $^{2}/_{5}$ como una fracción contenida en un entero



Para Freudenthal, el uso de actividades que implicasen la equipartición de objetos sería inadecuado para ayudar a los estudiantes a que concibiesen las fracciones como números que pueden cuantificar cantidades mayores que uno. Según él, estas actividades de equipartición (fracción como fracturador) conducirían a "las fracciones propias únicamente" (Freudenthal, 1983, p. 147). Freudenthal consideró que, para utilizar las fracciones como fuente de los números racionales, se necesitan modelos didácticos que permitan "una equivalencia de mayor alcance, así como el acceso irrestricto a elementos en cada una de las clases de equivalencia" (Freudenthal, 1983, p. 147).

El análisis de Freudenthal sirve para especificar la limitación que la equipartición podría tener como contexto para apoyar el desarrollo de una comprensión madura de fracción en los estudiantes. Incluso si fuera posible hacer que los estudiantes superasen fácilmente las imágenes de fracción como resultado de transformar un objeto y de fracción como tantos de tantos –logrando que las entendieran como números que cuantifican magnitudes de tamaño relativo a un entero–, sería razonable esperar que las concibieran como números que necesariamente cuantifican tamaños menores o iguales que uno. Esta forma de entender las fracciones, entre otras cosas, obstruiría el hecho de que los estudiantes entendieran las fracciones como números que pueden cuantificar el tamaño de algo relativo a algo más que está separado (por ejemplo, "El número de chicos es $^{5}/_{3}$ del número de chicas").

PROPUESTAS PARA SUPERAR LAS LIMITACIONES DE LA EQUIPARTICIÓN EN LA ENSEÑANZA

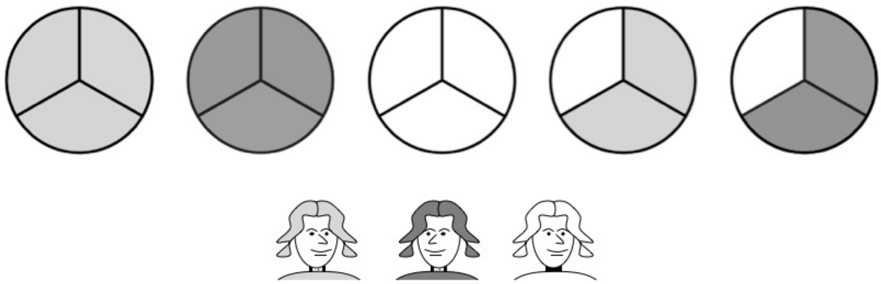
En la literatura especializada que propone el uso de la equipartición como vía para introducir el concepto de fracción, se pueden reconocer tres estrategias didácticas principales que han sido utilizadas para ayudar a los estudiantes a que le encuentren sentido a formas de utilizar las fracciones que serían inconsistentes con las imágenes descritas en el apartado anterior. En las tres estrategias, estas imágenes se tratan de manera consistente con lo que Brousseau (1997) considera obstáculos ontogenéticos y epistemológicos. En consecuencia, el reto pedagógico ha implicado encontrar modos de ayudar a los estudiantes a superarlas.

La primera de las estrategias implica el uso de situaciones en las que se reparten equitativamente múltiples enteros (Streefland, 1991; Confrey y Maloney, 2010). En estas situaciones, típicamente se pide a los educandos que averigüen la ración equitativa que cada una de varias personas recibiría al repartir cierto número de objetos divisibles (por ejemplo, pastelillos). Con el uso de ese tipo de situaciones, se espera brindar a los educandos contextos en los que puedan explorar la equivalencia entre fracciones y, sobre todo, darles sentido a las fracciones impropias. Por ejemplo, la equivalencia entre $^{2}/_{3}$ y $^{4}/_{6}$ se podría determinar estableciendo que la ración que un individuo recibiría al repartir dos pastelillos entre tres personas sería la misma que al repartir cuatro pastelillos entre seis personas) si la repartición se hiciera dando a cada individuo una fracción equitativa de cada pastelillo. Una situación que implicara repartir cinco pastelillos entre tres personas serviría para ayudar a los educandos a reconocer la manera en que se podría generar una fracción como $^{5}/_{3}$ y cómo ésta es equivalente a $1\ ^{2}/_{3}$ (véase la figura 4).

Entre las críticas más fuertes que se le han hecho a esta estrategia está la de Tzur (2007), quien reconoce en el uso de estas situaciones una problemática didáctica importante, sobre todo en las etapas iniciales de enseñanza. Tomando como base el éxito limitado reportado por Streefland (1991) en su experimento de enseñanza, Tzur propone que estas actividades podrían requerir el desarrollo previo, por parte de los estudiantes, de las nociones cuyo aprendizaje se espera apoyar.

Esto es, Tzur considera que, para poder encontrarle sentido a estas situaciones, los estudiantes ya tendrían que concebir la fracción unitaria como un número que expresa el tamaño de un atributo susceptible de ser acumulado y que puede ser iterado incluso más allá del tamaño del entero. Así, para este

Figura 4 La repartición equitativa de cinco pastelillos entre tres personas



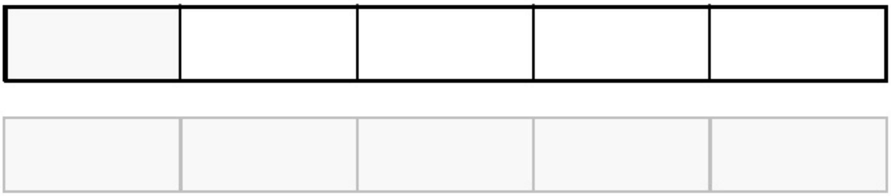
autor, las actividades en las que se reparten equitativamente múltiples enteros implicarían una "paradoja potencial" (p. 278).

Una segunda estrategia que puede ser identificada en la literatura implica familiarizar a los alumnos con el uso de las fracciones en situaciones del tipo parte/todo, para después ampliar sus oportunidades de aprendizaje familiarizándolos con otras ramificaciones del concepto (Mack, 1990); esto con la intención de que "los niños puedan hacerse una idea de la naturaleza esencial de los números racionales" (Lamon, 2007, p. 636). En general, las propuestas de enseñanza de las fracciones, que se han basado en las investigaciones de Kieren (1993, 1980, 1976) y del *Rational Number Project* (cf. Behr *et al.,* 1983; Behr *et al.,* 1992), han asumido esta estrategia. En estas propuestas se procura que los estudiantes tengan experiencias con las fracciones, no sólo como partes de enteros, sino también como medidas, razones, cocientes y operadores (Lamon, 2007).

Entre las críticas que se le han hecho a esta segunda estrategia está la de Thompson y Saldanha (2003), quienes consideran que implica la expectativa de que los estudiantes incorporarán múltiples significados y representaciones en una gran idea que aún no han desarrollado. En consecuencia, para estos autores, se corre el riesgo de que los educandos conciban los racionales como números utilizados en contextos y situaciones múltiples e independientes; por ejemplo, cuando se reparte equitativamente, cuando se mide y cuando se determina el tamaño relativo de algo. Ello sin que desarrollen una comprensión integral del concepto.

La tercera estrategia está presente en los experimentos de enseñanza conducidos por Leslie Steffe y sus colegas (cf. Hackenberg, 2007; Steffe y Olive, 2010;

Figura 5 Un quinto de una "papa a la francesa" representado como una partición equitativa de un tamaño tal, que cinco iteraciones de su longitud equivalen a la longitud de un entero

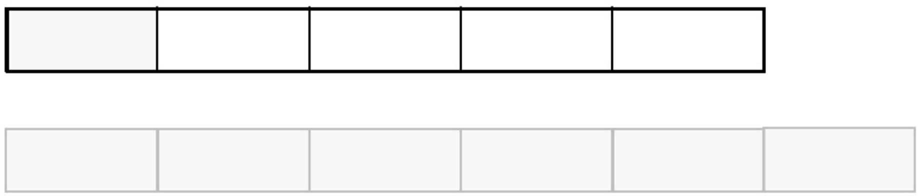


Tzur, 1999; Wilkins y Norton, 2011). En estos experimentos, se procura apoyar el aprendizaje de las fracciones, representando como longitudes las magnitudes que se van a fraccionar, independientemente de que se traten de masas (la masa de una "papa a la francesa") u otra cosa. Además, la iteración se utiliza como recurso didáctico para ayudar a los estudiantes a razonar sobre el tamaño de las partes en las que se divide un entero (véase la figura 5).

Los resultados obtenidos por Steffe han servido para identificar una trayectoria de aprendizaje de las fracciones que implica el desarrollo de al menos cinco esquemas fraccionarios (cf. Steffe y Olive, 2010; Norton y Wilkins, 2009). En esta trayectoria, los estudiantes inician concibiendo las fracciones como partes discretas de un entero (*esquema fraccionario de parte-todo*). Posteriormente, las entienden como partes que representan un tamaño específico respecto a las otras partes ("todas las partes son del mismo tamaño"; *esquema fraccionario de unidad partitiva*). Después, como partes cuyo tamaño se puede acumular para formar el entero (por ejemplo, "cinco iteraciones de un quinto se acumulan para formar algo del mismo tamaño que un entero"; *esquema fraccionario partitivo*). Y todavía más tarde, como partes cuyo tamaño se puede acumular para formar entidades menores que el entero y de tamaño relativo (por ejemplo, "$^3/_5$ es el resultado de iterar tres veces algo que, si fuera iterado cinco veces, formaría algo del mismo tamaño que un entero"; *esquema fraccionario partitivo reversible*).

El quinto esquema implicaría concebir una parte equitativa de un entero como un tamaño susceptible de ser iterado sin restricciones (*esquema fraccionario iterativo*), sin importar "cómo fue producido (por ejemplo, dividiendo algo en seis partes) o las operaciones que se realizaron en él" (Tzur, 1999, p. 410). Por ejemplo, implicaría reconocer que un quinto puede ser iterado más de

Figura 6 Seis quintos como seis iteraciones de la longitud de la quinta parte de un entero



cinco veces y que, cuando éste es el caso, la magnitud acumulada es mayor que la magnitud del entero (véase la figura 6). En las palabras de Steffe (2002), al desarrollar este esquema fraccionario, un estudiante logra "liberar" la fracción unitaria "del entero que la contiene" (p. 299).

Los resultados obtenidos por Steffe y sus colegas corroboran que la equipartición puede servir de base para el desarrollo de concepciones fraccionarias relativamente complejas. También muestran que el proceso puede resultar tortuoso para los estudiantes, al grado de que muchos pueden no lograr recorrerlo todo. En particular, Norton y Hackenberg (2010) reconocieron en la trayectoria dos transiciones particularmente difíciles de concretar, a las que llamaron *barreras cognitivas*. Como explicamos a continuación, es posible reconocer en ambas barreras la presencia de las imágenes descritas en el apartado anterior.

Norton y Hackenberg (2010) identifican la primera barrera en la transición entre el esquema fraccionario de parte-todo y los esquemas partitivos. Consumar esta transición implica lograr concebir una parte equitativa de un entero no sólo como una parte material de un objeto (por ejemplo, uno de cinco pedazos de una papa a la francesa que fue partida en partes iguales; *esquema fraccionario de parte-todo*), sino también como el tamaño de algo que puede ser iterado (*esquema fraccionario de unidad partitiva*) para formar algo del mismo tamaño que el entero (*esquema fraccionario partitivo*) o menor que éste (*esquema fraccionario partitivo reversible*). En términos de las imágenes descritas, esta transición requeriría que un estudiante se sobrepusiera a la imagen de *la fracción como tantos de tantos*. Esto es, requeriría que superara la concepción de las fracciones como números que dan cuenta de la cardinalidad de conjuntos y subconjuntos, y lograra entenderlas como números que dan cuenta del tamaño de una longitud (u otro atributo).

Norton y Hackenberg (2010) identificaron la segunda barrera cognitiva en la transición entre los esquemas partitivos y el esquema fraccionario iterativo. Consumar esta transición implica lograr concebir una parte equitativa de un entero como el tamaño de algo que puede ser iterado sin restricciones (*esquema fraccionario iterativo*; véase la figura 6) y no sólo para crear tamaños iguales o menores que el entero (*esquema fraccionario partitivo* y *esquema fraccionario partitivo reversible*). En términos de las imágenes descritas, esta transición requeriría que un estudiante se sobrepusiera a la imagen de *la fracción como incluida en un entero*. Esto es, implicaría superar la concepción de las fracciones unitarias como números que dan cuenta de un tamaño que necesariamente está contenido dentro de un entero, para entenderlas como números que dan cuenta del tamaño de algo que puede ser iterado sin restricciones.

Es importante aclarar que, para Norton y Hackenberg (2010), franquear ambas barreras sería parte del proceso de desarrollo cognitivo inherente al aprendizaje de las fracciones. En consecuencia, las barreras que identifican estos autores se entienden de manera consistente con lo que Brousseau (1997) llamó obstáculos de origen ontogenético. De esta manera, el reto pedagógico frente a ellas consistiría en encontrar formas de facilitar que sean franqueadas para permitir que los estudiantes continúen desarrollando concepciones cada vez más complejas de las fracciones.

Nosotros, en cambio, sugerimos explorar la posibilidad de que los obstáculos cognitivos que enfrentan los estudiantes en la trayectoria identificada por Steffe y sus colegas se deriven de imágenes específicas acerca del significado de las fracciones que los estudiantes desarrollan como consecuencia de ser orientados a relacionar el concepto con la equipartición de objetos. Si es éste el caso, la tarea pedagógica consistiría en encontrar maneras de apoyar el aprendizaje de las fracciones que no fomenten el desarrollo de las imágenes arriba descritas. Con ello, ya no se trataría de ayudar a los alumnos a franquear barreras cognitivas, sino de guiarlos por caminos en los que éstas no se presentasen.

A continuación, describimos brevemente dos propuestas para la enseñanza de las fracciones que no recurren al uso de la equipartición. La primera fue desarrollada por Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.*, 2004) y la segunda, por los autores de este artículo (Cortina *et al.*, 2012b). Esta última tiene como base la caracterización hecha por Freudenthal (1983) de la fracción como comparador. Para los propósitos del presente artículo, lo significativo de estas propuestas es que, con su viabilidad, corroboran que las imágenes que emergen de la equipartición, descritas en el apartado anterior, no deben ser consideradas obstáculos ontogenéticos ni epistemológicos –que deben ser superados–, sino obstáculos didácticos susceptibles de ser evitados.

LA FRACCIÓN SIN EQUIPARTICIÓN

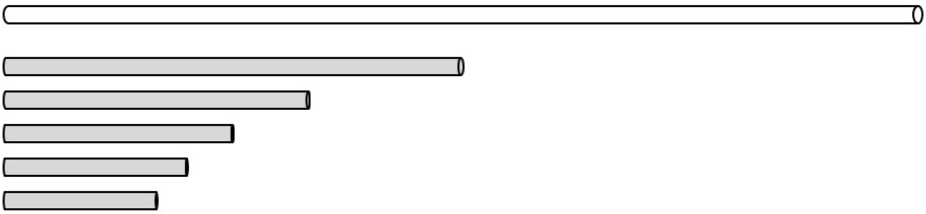
Como parte de una propuesta para la enseñanza de los números racionales y decimales, Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.*, 2004) desarrollaron en la década de 1970 una secuencia de situaciones didácticas para introducir la noción de fracción. Un aspecto importante de esta secuencia es que en ella se espera que sea de la conmensuración, y no de la equipartición, de donde primero emerja la noción de fracción.

La secuencia de Guy y Nadine Brousseau inicia con una serie de actividades en las que los estudiantes comparan el grosor de diferentes tipos de hojas de papel. Finalmente, se establece como método para comparar los grosores la construcción de razones entre una cantidad de hojas y un número de milímetros. Por ejemplo, se determina que el grosor de 25 hojas de un cierto tipo de papel mide 3 milímetros (*25h : 3mm*). Estas razones sirven de base para establecer cadenas de razones equivalentes (*25h : 3mm*; *50h : 6mm*; *75h : 9mm*, etc.) las cuales, a su vez, se utilizan para ordenar los grosores de las hojas por tamaño; por ejemplo, se utilizan para determinar que el grosor de la hoja "*10h : 1mm*" es menor que la de "*25h : 3mm*", ya que la primera es equivalente a "*30h : 3mm*".

El término *fracción* y su notación convencional se introducen como un recurso que sirve tanto para dar cuenta de una clase de razones equivalentes como para designar el grosor de cada tipo de hoja de papel. En la formulación de las fracciones, se utiliza el número de milímetros como numerador y el número de las hojas de papel como denominador. Con este referente, posteriormente se introducen las operaciones de la adición de fracciones (presentada como el resultado de pegar hojas de dos o tres grosores diferentes) y de sustracción (la comparación entre el grosor de dos tipos de hojas). Las fracciones impropias se representan como hojas cuyo grosor es mayor que un milímetro (por ejemplo, la fracción $^5/_4$ implicaría cierto tipo de hoja, donde el grosor de cuatro de ellas equivale a cinco milímetros).

La secuencia de Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.*, 2004) se utilizó con estudiantes de diez y once años de edad en dos diferentes aulas durante diez años. Los autores informan que, en general, obtuvieron resultados positivos.

Figura 7 La vara y los pequeños de a dos ($^1/_2$), de a tres ($^1/_3$), de a cuatro ($^1/_4$), de a cinco ($^1/_5$) y de a seis ($^1/_6$)



Las notas de estudiantes en matemáticas fueron buenas en los grados subsiguientes, particularmente en el tema de fracciones.

Un segundo ejemplo de una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones, que no se fundamenta en la equipartición, es la desarrollada por los autores del presente artículo (Cortina *et al.,* 2012b). En ella se retoma la caracterización, hecha por Freudenthal (1983), de la fracción como comparador. En consecuencia, se busca cultivar en los alumnos desde temprano la imagen de una fracción unitaria como un número que da cuenta del tamaño de cierto atributo en algo que está separado de la unidad de referencia.

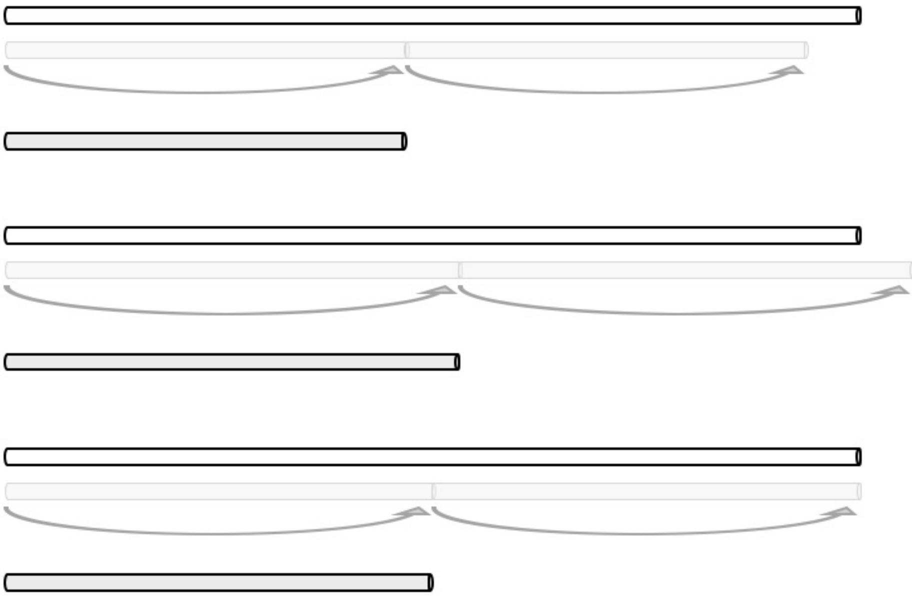
Para cultivar dicha imagen, se diseñaron una serie de actividades con las que se procura que los niños experimenten la "reinvención" de la medición lineal. En éstas se utiliza una narrativa sobre las maneras en que medía un grupo legendario de antiguos mayas (los acajay). Primero se explora la medición utilizando partes del cuerpo (pies, cuartas, pasos, etc.). Posteriormente, se explora la medición utilizando como medida estandarizada una vara (de 24 cm aproximadamente).

A partir de la experiencia de medir con la vara, se introduce el problema de cómo crear unidades de medida más pequeñas para dar cuenta de manera precisa y sistemática de la longitud de los espacios que la vara no cubre exactamente. La solución que se presenta a los alumnos, como la desarrollada por los acajay, consiste en crear varas más pequeñas, llamadas pequeños, que tienen la característica de cumplir con un criterio iterativo respecto a la vara (véase la figura 7). Utilizando popotes de plástico[5] y tijeras, los estudiantes crean estos pequeños.

Se les pide primero a los estudiantes que produzcan un pequeño de a dos

[5] *Popote* es el nombre utilizado en México para las pajillas para sorber líquidos.

Figura 8 Manipulación de un popote para que cumpla con la condición de que dos iteraciones de su longitud correspondan exactamente a la longitud de la vara



(esto es, un popote cuya longitud corresponde a un medio de la vara). Se les explica que sería un popote de un tamaño tal que dos iteraciones de su longitud cubrirían exactamente la longitud de la vara. Los estudiantes entonces manipulan la longitud de un popote, que al principio es ligeramente más corto que la vara. Cuando lo iteran y notan que la segunda iteración rebasa la longitud de la vara, cortan el popote con las tijeras (véase la figura 8). Cuando la segunda iteración resulta ser más corta que la vara, los estudiantes desechan el popote y comienzan el proceso con uno nuevo. Probando varias veces, los estudiantes finalmente obtienen un popote que cumple con la condición acordada.

A continuación, utilizando este método, los estudiantes producen otros pequeños (por ejemplo, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ y $^1/_6$). Los pequeños producidos se utilizan, primeramente, para apoyar formas de razonamiento consistentes con *la relación de orden inverso* (Tzur, 2007), presente en las fracciones unitarias. Por ejemplo, se utilizan para reflexionar sobre qué sería más largo, un pequeño de a ocho o un pequeño de a nueve ($^1/_8$ *vs.* $^1/_9$).

Posteriormente, los pequeños se utilizan para crear tiras de papel de una longitud específica. Por ejemplo, se les puede pedir que creen una tira cuya longitud equivalga a seis iteraciones del pequeño de a cinco (esto es, $^6/_5$). Estas tiras sirven de base fenomenológica para ayudar a que los alumnos razonen sobre el tamaño relativo de las fracciones respecto a la unidad de referencia y entre ellas. Por ejemplo: ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una vara ($^6/_5$ *vs.* 1)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una que midiera siete pequeños de a ocho ($^6/_5$ *vs.* $^7/_8$)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera cuatro pequeños de a cuatro o una que midiera siete pequeños de a siete ($^4/_4$ *vs.* $^7/_7$)?

La propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones desarrollada por nosotros (Cortina *et al.,* 2012b) se asemeja a la desarrollada por Guy y Nadine Brousseau (Brousseau *et al.,* 2004) en que se espera que sea la conmensuración, y no la equipartición, la que sirva para dar significado a las fracciones. Las dos propuestas se diferencian en los referentes fenomenológicos que ofrecen de qué sería una unidad y qué sería una fracción no unitaria. En el caso de nuestra propuesta, el referente de la unidad es la longitud de un objeto concreto, *la vara*, mientras que en el caso de la propuesta de Guy y Nadine Brousseau es una de las subunidades del sistema métrico decimal, *el milímetro*.

En relación con las fracciones no unitarias, en nuestra propuesta se esperaría que su referente fuera la iteración de la longitud de una fracción unitaria (un pequeño). Por ejemplo, se esperaría que la fracción $^2/_3$ fuera interpretada por los estudiantes como una longitud que resulta de iterar dos veces el pequeño de a tres. En el caso de la propuesta de Guy y Nadine Brousseau, ese referente sería el número de hojas, de un cierto tipo de papel, necesarias para completar un número entero de milímetros. Por ejemplo, se esperaría que la fracción $^2/_3$ fuera interpretada como el grosor de un tipo de papel que tendría la característica de ser tal que tres hojas de ese tipo cubrirían la longitud de dos milímetros.

Los resultados de la investigación realizada por nosotros muestran que puede ser viable una propuesta didáctica basada en la caracterización, hecha por Freudenthal (1983), de la fracción como comparador. En general, hemos encontrado que los estudiantes de tercer y cuarto grados de primaria cuentan con las nociones e intuiciones necesarias para involucrarse de manera productiva en estas actividades. Además, hemos documentado que este tipo de propuestas son útiles para apoyar a que los estudiantes razonen de maneras consistentes con la relación de orden inverso de las fracciones unitarias y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Cortina *et al.,* 2012b).

COMENTARIOS FINALES

En muchas de las culturas del mundo es posible reconocer el fuerte vínculo semántico que se ha creado entre las fracciones y la equipartición. Este vínculo, a pesar de no estar presente en la definición matemática formal, aparece en los significados de las palabras que comúnmente se utilizan para nombrar las fracciones. Como hizo notar Freudenthal (1983), una multitud de lenguas utilizan palabras que remiten a la idea general de *partir*, *quebrar*, *fragmentar*, para nombrar al concepto. Además, mucha gente –incluidos maestros y padres de familia– asocia la idea de fracción con la necesaria fragmentación de algo en partes iguales.

Con estos antecedentes, proponer que se evite el uso de la equipartición en la enseñanza inicial de las fracciones puede parecer una insensatez. Pero no hay que perder de vista los resultados de las pruebas que nos sugieren que, en el ámbito global, son muy pocos los alumnos que alcanzan niveles satisfactorios de comprensión del concepto. Teniendo en cuenta que el aprendizaje de las fracciones es central en el desarrollo del pensamiento multiplicativo de los estudiantes y, en general, en su desarrollo cuantitativo y matemático (Thompson y Saldanha, 2003; Lamon, 2007), los resultados de esas pruebas justifican la revisión de los supuestos que por mucho tiempo han guiado a la didáctica de las fracciones; incluido el que considera la equipartición, si no como el único, sí como el contexto más favorable para apoyar el desarrollo inicial de nociones fraccionarias en los niños.

En el presente artículo, retomando los análisis de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003), explicamos por qué la equipartición puede ser considerada una fuente de obstáculos para el desarrollo de concepciones maduras de las fracciones cuando se utiliza como el medio principal para introducir el concepto. También explicamos por qué se trata de obstáculos que pueden ser evitados, puesto que su origen no está ni en el desarrollo cognitivo ni en la propia disciplina matemática, sino en la didáctica (Brousseau, 1997). Esperamos que el interés por indagar sobre la viabilidad de apoyar el desarrollo inicial de nociones fraccionarias, utilizando contextos distintos de la equipartición –ya sea la conmensuración u otros– se despierte en más investigadores, así como el interés por explorar qué existe más adelante.

Nuestra intención al escribir este artículo ha sido promover la revisión crítica de uno de los supuestos que ha guiado los esfuerzos pedagógicos respecto a un concepto que, a pesar de ser fundamental para el desarrollo matemático de los educandos (Thompson y Saldanha, 2003; Lamon, 2007), pocos logran comprender de manera adecuada. Con ello, esperamos haber contribuido a la búsqueda de vías didácticas alternativas en el campo de las fracciones que permitan que muchos más estudiantes logren entender este concepto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Backhoff, E., E. Andrade, A. Sánchez, M. Peon y A. Bouzas (2006), *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: sexto de primaria y tercero de secundaria*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Behr, M., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1992) "Rational Number, Ratio, and Proportion", en D. Grows (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 296-333.

Behr, M., R. Lesh, T. Post y E. Silver (1983), "Rational Number Concepts", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, pp. 91-125.

Bills, C. (2003), "Errors and Misconceptions in KS3 'Number'", en J. Williams (ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Londres, vol. 23, núm. 3, pp. 7-12.

Brousseau, G. (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.

Brousseau, G., N. Brousseau y V. Warfield (2004), "Rationals and Decimals as Required in the School Curriculum. Part 1: Rationals as Measurement", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 23, núm. 1, pp. 1-20.

Clarke, D.M. y A. Roche (2009), "Students' Fraction Comparison Strategies as a Window into Robust Understanding and Possible Pointers for Instruction", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 72, núm. 1, pp. 127-138.

Confrey, J. y A. Maloney (2010), "The Construction, Refinement, and Early Validation of the Equipartitioning Learning Trajectory", en K. Gomez, L. Lyons y J. Radinsky (eds.), *Learning in the Disciplines: Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences*, Chicago, International Society of the Learning Sciences, vol. 1, pp. 968-975.

Cortina, J.L., E.R. Cardoso y C. Zúñiga (2012a), "El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 14, núm. 1, pp. 71-85.

Cortina, J.L., J. Visnovska y C. Zúñiga (2012b), "Alternative Starting Point for Teaching Fractions", en J. Dindyal, L.P. Cheng y S.F. Ng (eds.), *Mathematics Education: Expanding Horizons. Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, eBook, Singapur, MERGA, pp. 210-217.

Davis, G.E., R.P. Hunting y C. Pearn (1993), "What Might a Fraction Mean to a Child and How Would a Teacher Know?", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 12, pp. 63-76.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Holanda, Kluwer.

Gould, P., L. Outhred y M. Mitchelmore (2006), "One-third is Three-quarters of One-half", en P. Grootenboer, R. Zevenbergen y M. Chinnappan (eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australiasia*, Adelaide, Australia, MERGA, pp. 262-269.

Hackenberg, A.J. (2007), "Units Coordination and the Construction of Improper Fractions: A Revision of the Splitting Hypothesis", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 26, núm. 1, pp. 27-47.

Hannula, M.S. (2003), "Locating Fraction on a Number Line", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulú, PME, vol. 3, pp. 17-24.

Hart, K. (1981), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, Oxford, Reino Unido, J. Murray.

Kieren, T.E. (1976), "On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Number", en R. Lesh (ed.), *Number and Measurement*, Columbus, OH, ERIC/SMEAC, pp. 101-144.

___________ (1980), "The Rational Number Construct –Its Elements and Mechanisms", en T.E. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, OH, ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

___________ (1993), "Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding", en T.P. Carpenter, E. Fennema y T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlabaum, pp. 50-84.

Lamon, S.J. (2007), "Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research", en F.K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC, Information Age Pub., pp. 629-667.

Mack, N.K. (1990), "Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 1, pp. 16-32.
Norton, A. y A.J. Hackenberg (2010), "Continuing Research on Students' Fraction Schemes", en L. Steffe y J. Olive (eds.), *Children's Fractional Knowledge*, Nueva York, Springer, pp. 341-352.
Norton, A. y J.L.M. Wilkins (2009), "A Quantitative Analysis of Children's Splitting Operations and Fraction Schemes", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 28, núms. 2-3, pp. 150-161.
Pitkethly, A. y R. Hunting (1996), "A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, núm. 1, pp. 5-38.
Post, T., K.A. Carmer, M. Behr, A. Lesh y G. Harel (1993), "Curriculum Implications of Research on the Learning, Teaching and Assessing of Rational Number Concepts", en T.P. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, NJ, Erlbaum.
Steffe, L.P. (2002), "A New Hypothesis Concerning Children's Fractional Knowledge", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 20, núm. 3, pp. 267-307.
Steffe, L.P. y J. Olive (2010), *Children's Fractional Knowledge*, Nueva York, Springer.
Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.
Thompson, P.W. y L.A. Saldanha (2003), "Fractions and Multiplicative Reasoning", en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.
Tzur, R. (1999), "An Integrated Study of Children's Construction of Improper Fractions and the Teacher's Role in Promoting that Learning", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 30, núm. 4, pp. 390-416.
____________ (2007), "Fine Grain Assessment of Students' Mathematical Understanding: Participatory and Anticipatory Stages in Learning a New Mathematical Conception", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 66, núm. 3, pp. 273-291.
Wilkins, J.L.M. y A. Norton (2011), "The Splitting Loope", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 42, núm. 4, pp. 386-416.

DATOS DE LOS AUTORES

José Luis Cortina
Universidad Pedagógica Nacional, México
jcortina@upn.mx

Claudia Zúñiga
Universidad Iberoamericana, México
clamaka@prodigy.net.mx

Jana Visnovska
The University of Queensland, Australia
j.visnovska@uq.edu.au