Una propuesta de uso de un *Classroom Response System* (CRS) para promover clases interactivas de Cálculo en la universidad

José Ignacio Barragués, Adolfo Morais, María Juncal Manterola y Jenaro Guisasola

Resumen: La concepción actual de lo que significa enseñar y aprender Matemáticas sostiene que los estudiantes deben aprender construyendo activamente nuevos significados a partir de la experiencia y el conocimiento previos. Esta concepción exige realizar un seguimiento del aprendizaje y de las tareas realizadas, desarrollar en el aula actividades que permitan poner en práctica los conceptos clave en problemas prácticos, etc. En este contexto, los *Classroom Response System* (CRS) están investigándose por su potencial para mejorar la comunicación entre el profesor y los estudiantes. En el presente estudio se describe el modo en que se ha implementado y evaluado un CRS en la Universidad del País Vasco (España) para la enseñanza de Cálculo en estudios de Ingeniería con grupos amplios de estudiantes. Los estudiantes valoraron positivamente la enseñanza recibida y, además, se observó una ganancia media normalizada en el aprendizaje significativamente superior a la obtenida por un grupo de estudiantes que recibió una enseñanza convencional.

Palabras clave: *Clickers*, CRS, *Classroom Response System*, aprendizaje significativo, *peer instruction*, cálculo, resolución de problemas, ABP.

A proposal of using a Classroom Response System (CRS) to promote interactive Calculus lessons at the University

Abstract: The current conception of what means to teach and to learn Mathematics holds that students must learn constructing actively new meanings from experience and previous knowledge. This conception demands a follow-up of the learning and of the completed tasks, to develop in the classroom activities that allow putting in practice key concepts in practical problems, etc. In this context, the Classroom Response System (CRS) is being investigated by its potential to improve the communication between the teacher and the students. This study describes the educational strategies put in practice at the UPV/EHU (Spain), for the education of Calculus in Engineering studies, using a CRS to facilitate the interaction with large groups of students. The results show that students valued positively the received education. In addition, it was observed a significantly superior average normalized gain in the learning to that obtained by a group of students that received a conventional education.

Key words: Clickers, CRS, Classroom Response System, significant learning, peer instruction, calculus, problem solving, PBL.

Fecha de recepción: 2 de abril de 2012. Fecha de aceptación: 7 de enero de 2013.

INTRODUCCIÓN

Cálculo es una asignatura que tiene un contenido similar en los diversos grados de Ingeniería de la Universidad del País Vasco y de otras universidades españolas. Se trata de una asignatura anual dedicada al Cálculo Diferencial e Integral, donde gran parte del temario es ya conocido por los estudiantes porque la operativa con funciones elementales, derivación e integración de funciones de una variable forman parte de los programas de Matemáticas de Enseñanza Secundaria Obligatoria y de Bachillerato en España. En los estudios de Ingeniería se completa el currículo incluyendo algunos temas avanzados clásicos de un programa de Análisis Matemático para Ingeniería. Tradicionalmente, el profesor introduce de manera formal los contenidos matemáticos, ilustra los conceptos y procedimientos con ejemplos y ejercicios de aplicación y, por último, evalúa el aprendizaje de los estudiantes mediante ejercicios-tipo similares. Franke, Kazemi y Battey (2007) indican que este patrón de discurso en el aula es el más ampliamente extendido, y lo caracterizan del siguiente modo: el profesor explica los procedimientos que deben aplicarse, muestra las direcciones a seguir y los posibles errores, todo ello requiriendo muy poca interacción con el estudiante y entre los propios estudiantes. Dentro de este modelo no se emplaza a los estudiantes a explicar sus ideas, ni se debate acerca de las ideas incorrectas; no hay oportunidades para hacer conjeturas ni buscar consensos acerca de las ideas matemáticas. La tarea matemática que se propone a los estudiantes consiste en memorizar y aplicar procedimientos ya elaborados para calcular respuestas, más que en profundizar en el significado de los conceptos (Spillane y Zeuli, 1999).

La concepción actual de lo que significa enseñar y aprender Matemáticas se enfrenta a la citada visión simple, instrumental, de la formación matemática. Los estándares actuales coinciden en que los estudiantes aprenden Matemáticas construyendo activamente nuevos significados a partir de la experiencia y el conocimiento previos, y para facilitar esa construcción, recomiendan la realización de actividades destinadas a que tomen conciencia de sus conocimientos y estrategias informales, concediendo especial importancia a la resolución de problemas, al desarrollo del razonamiento y a la argumentación. Los estudiantes deben trabajar en un entorno que les anime a construir Matemáticas de forma activa y a aprender a comunicarse mediante Matemáticas como forma de pensar y de dar sentido a su entorno; a valorarlas en su papel dentro de los asuntos humanos; a explorar, predecir, cometer errores y corregirlos, para ganar confianza en su propia capacidad de resolver problemas complejos; a experimentar situaciones abundantes y variadas que les permitan adquirir competencia matemática (NRC, 1995; NCTM, 2000). Sin embargo, como indican Franke y sus colaboradores (2007), encontrar el modo de proporcionar a los estudiantes un entorno de trabajo tan exigente es algo complejo y no bien caracterizado en la bibliografía. Lampert (2001) describe algunas de las múltiples dificultades a las que el profesor debe hacer frente: el elevado número de estudiantes presentes en el aula, que supone un desafío para el establecimiento de buenas prácticas de enseñanza; analizar el conocimiento previo de los estudiantes y sus concepciones alternativas; mantener la motivación y la atención de modo permanente; conocer sus opiniones e involucrarles de forma significativa en el trabajo; realizar un seguimiento del aprendizaje y de las tareas realizadas; desarrollar en el aula actividades que permitan poner en práctica los conceptos clave, etc. El profesor debe proporcionar a cada estudiante oportunidades para mostrar sus ideas acerca de los problemas que se están resolviendo pero, simultáneamente, animarle a que atienda y cuestione las vías de solución propuestas por los demás. Pero, como señala Ball (1993), al mismo tiempo el profesor es responsable de que los estudiantes desarrollen el conocimiento matemático y una disposición favorable hacia las Matemáticas. Frente a todas estas exigencias, no es de extrañar, como apuntan Franke y sus colaboradores (2007), que el descrito modelo tradicional de enseñanza y aprendizaje continúe siendo prevalente.

Ya se ha indicado que encontrar modos de definir entornos de trabajo que favorezcan un aprendizaje profundo no es algo bien caracterizado en la bibliografía. De hecho, como indica Artigue (1995), si bien es fácil enseñar a los estudiantes universitarios la ejecución de cálculos mecánicos, resulta enormemente difícil enseñarles el significado profundo de los conceptos. Sin embargo, encontramos en Robert (1987) una aportación en esa dirección, cuando identifica seis hipótesis acerca del aprendizaje matemático en las que se basa la investigación actual en Educación Matemática en diversos países (Guershon y

Trgalová, 1996). Las primeras cuatro hipótesis son generales a todos los niveles de educación matemática, mientras que las últimas dos son específicas de niveles avanzados. Las seis hipótesis son las siguientes:

Hipótesis 1. La importancia de la acción (resolución de problemas) y el proceso de desequilibrio/reequilibrio en la construcción del conocimiento.

Hipótesis 2. El papel de la comunicación como precursora del lenguaje, y la importancia de que el estudiante cuente con el apoyo de una persona que opere en su zona de desarrollo próximo.

Hipótesis 3. La necesidad de adquirir diversas representaciones (numérica, geométrica, algebraica...) de un mismo conocimiento, y la importancia de la interacción entre dichas representaciones.

Hipótesis 4. Para muchos estudiantes resulta eficiente la siguiente organización de la actividad de enseñanza: el nuevo concepto matemático que debe ser enseñado aparece por vez primera como herramienta destinada a resolver un problema que se ha enunciado previamente. Después de la búsqueda de una solución, el nuevo concepto se transforma en objeto matemático mediante una institucionalización (explicitación por parte del profesor) y una familiarización (ejercicios destinados a reforzar el conocimiento adquirido).

Hipótesis 5. La contribución de los conflictos socio-cognitivos y la importancia de la metacognición (conocimiento que las personas tienen sobre sus diversos tipos de conocimientos o acerca de la propia actividad cognitiva).

Hipótesis 6. Podría resultar beneficioso implicar a los estudiantes en su propio aprendizaje mediante la explicitación de reglas de control (que incluyen planificar, seleccionar metas y sub metas y monitorización durante el proceso de resolución de problemas) y también educación sobre epistemología.

Tanto en estas hipótesis de trabajo acerca de las condiciones para lograr un aprendizaje significativo, como en las consideraciones que hemos recogido acerca del diseño de un entorno de trabajo matemáticamente relevante, encontramos dos aspectos clave. Por una parte, la necesidad de involucrar a los estudiantes en la resolución de situaciones problemáticas; y por otra, la necesidad de potenciar la comunicación en el aula. Respecto al primero de los aspectos, una aportación teórica se encuentra en el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), que constituye una metodología ampliamente investigada en la que los problemas se utilizan como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos.

Respecto al segundo aspecto clave, optimizar la comunicación en el aula significa ofrecer, sistemáticamente, oportunidades para discutir ideas involucrando a los estudiantes en discusiones tanto en pequeños grupos como en la clase completa. Respecto a la búsqueda de recursos tecnológicos que faciliten la comunicación en el aula, los *Classroom Response System* (CRS) están investigándose desde hace 40 años por su potencial para mejorar la comunicación entre el profesor y los estudiantes (Deal, 2007). Un CRS es un sistema informático capaz de recoger, en tiempo real en el aula, las respuestas de todos los estudiantes a una pregunta formulada por el profesor. La tecnología CRS actual permite que cada estudiante seleccione una respuesta de entre las propuestas, pulsando una tecla de un pequeño dispositivo transmisor personal (*clicker*).

En el segundo apartado se discutirá la investigación actual acerca del uso de los CRS en la enseñanza de las Matemáticas, mientras que el fundamento del ABP y su potencial para la enseñanza se presentarán en el tercer apartado. Se mostrará cómo el ABP está estrechamente conectado con las citadas hipótesis de Robert. De este modo, el ABP puede adoptarse como una concreción de dichas hipótesis en actividades de aprendizaje. En este contexto, el CRS puede asumir el papel de instrumento con el que hacer fluir la comunicación en el aula a lo largo del proceso.

Tras exponer la citada fundamentación teórica, el cuarto apartado muestra un resumen de la investigación acerca de los tópicos de Cálculo en los que se ha centrado el trabajo (estudio local e integral de Riemann de funciones de una variable real). Dicha investigación ha proporcionado criterios adicionales a tomar en consideración para el diseño de la propuesta alternativa de enseñanza. Por ejemplo, la descripción de las diversas dificultades de aprendizaje que recoge la investigación se ha utilizado para elaborar actividades destinadas a superarlas.

En el quinto apartado se explica el modo en que se han usado todos criterios presentados para diseñar una propuesta alternativa de enseñanza. En el sexto apartado se explica qué resultados se han obtenido desde tres ópticas diferentes. En primer lugar, su capacidad para generar participación y debate en el aula; en segundo lugar, la valoración de los estudiantes hacia la enseñanza recibida; y en tercer lugar, el aprendizaje que se ha logrado. Se mostrará cómo la propuesta parece dar lugar a resultados positivos desde esos tres puntos de vista, y se apunta que la metodología descrita es muy general y podría explotarse para la enseñanza y el aprendizaje de otras disciplinas diferentes a las Matemáticas.

En este trabajo se presenta una posible propuesta de enseñanza que, en definitiva, ha buscado contrastar la hipótesis de que el ABP/CRS puede servir de soporte para un entorno de trabajo matemático en el aula que recoja los aspectos metodológicos que se han descrito, y que genere tanto una actitud positiva en el alumnado, como una mejora en el aprendizaje del Cálculo. La investigación fue llevada a cabo durante el curso 2010-2011 en la Escuela Politécnica de San Sebastián, centro de la Universidad del País Vasco (España).

Finalmente, indicar que este estudio completa el trabajo previo de Barragués, Morais, Manterola y Guisasola (2011), en el cual se habían discutido los resultados de algunas cuestiones conceptuales adicionales y se apuntaba el potencial de los CRS en la enseñanza de las Matemáticas.

INVESTIGACIÓN ACERCA DEL USO DE LOS CRS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Actualmente se está llevando a cabo una amplia investigación acerca del uso de los CRS en educación superior. Así, Bruff (2010) recoge una bibliografía continuamente actualizada sobre la investigación en disciplinas específicas, revisiones bibliográficas, estudios acerca de las percepciones de los estudiantes y comparación entre los diversos fabricantes de sistemas CRS. Banks (2009) resume muchos estudios en Matemáticas, Química y Humanidades que informan de resultados positivos obtenidos en el aula universitaria en relación con la participación activa y el interés de los estudiantes, mejora en la comprensión, fomento de la discusión y la interactividad, ayuda a los estudiantes a medir su propio nivel de comprensión, toma de conciencia por parte del profesor acerca de las dificultades de los estudiantes, trabajo fuera del aula y mejora de las cuestiones que se formulan.

Encontramos propuestas metodológicas que incluyen algunos de los aspectos mencionados, por ejemplo, en el área de Física, en la enseñanza denominada *Peer Instruction* (Mazur, 1997; Crouch y Mazur, 2001). Un entorno de trabajo CRS con un enfoque constructivista puede estimular a los estudiantes a conjeturar, razonar, argumentar, justificar, explorar el significado de los conceptos y compartir el nuevo conocimiento con sus compañeros, guiados por el profesor. Como indica Duschl (2000), el reto es diseñar secuencias de enseñanza y entornos de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a sentirse parte de una comunidad epistémica.

Para diseñar las estrategias de enseñanza y aprendizaje utilizando un CRS, se deseaba evitar sugerencias anecdóticas o específicas para cierta disciplina. En vez de ello, se buscaban evidencias de un uso eficiente de los CRS basadas en la investigación. Seguidamente, se resumen algunos hallazgos significativos que aparecen en la investigación reciente acerca del uso efectivo de los CRS.

Keller, Finkelstein, Perkins, Pollock, Turpen y Dubson (2007) realizan un amplio trabajo que involucra a más de diez mil estudiantes, sobre las prácticas pedagógicas de los profesores y las actitudes y creencias de los estudiantes acerca del uso de los *clickers* en la Universidad. Estos autores muestran correlaciones entre las percepciones de los estudiantes acerca del *clicker* y los modos en que esta herramienta educativa ha sido usada por el profesor. Los datos permiten identificar diversas prácticas que dan lugar a resultados positivos al integrar el *clicker* en el aula. En primer lugar, se debe alentar a los estudiantes a discutir con sus compañeros durante las sesiones con el *clicker* y crear el entorno adecuado para que esta discusión pueda darse. Y en segundo lugar, debe utilizarse el *clicker* con preguntas conceptuales adecuadas al nivel de conocimiento de la mayoría de los estudiantes. Las actitudes de los universitarios están fuertemente influidas por la medida en que el profesor logra esta discusión entre pares. Muestran una actitud mucho más positiva hacia la utilidad de los *clickers* si el profesor estimula esta discusión y es capaz de involucrar en ella a una gran parte de la clase, en oposición a una clase en la que los jóvenes trabajen de forma aislada o se muestren pasivos. Adicionalmente, encuentran que las preguntas de tipo conceptual son más interesantes que otro tipo de preguntas, como pueden ser aquellas acerca de hechos o de aplicación de fórmulas.

Abrahamson (2009) da cuenta del impacto que las innovaciones de Mazur han tenido en la enseñanza de la Física en Harvard, basadas en la citada *Peer Instruction* (PI). Una sesión de clase PI se divide en una serie de presentaciones cortas, cada una de las cuales se enfoca hacia un punto central, seguidas de preguntas conceptuales relacionadas (a las que llama *ConcepTests*). Los estudiantes tienen uno o dos minutos para formular individualmente sus respuestas y comunicarlas. Luego, cada uno discute sus respuestas con los compañeros próximos, intentando convencerles de que la propia respuesta es la correcta. Durante la discusión, que típicamente dura entre dos y cuatro minutos, el profesor se mueve por la clase, escuchando las intervenciones. Finalmente, los estudiantes dan una nueva respuesta (que puede haber cambiado) y el profesor explica la solución, pasando a un nuevo tema.

Respecto al modo de construir los *ConcepTests*, algunas sugerencias recogidas en la bibliografía son las siguientes (Duncan, 2005). Deben tener un objetivo concreto (mostrar conocimientos, mostrar preconcepciones, sintetizar o exponer conclusiones, establecer relaciones entre dos conceptos, etc.); deben constituir un desafío para los estudiantes, no ser fáciles; pueden ser multifactoriales (tener en cuenta diversos factores para contestarla); pueden secuenciarse varias preguntas para abordar algún tema de cierta complejidad; pueden improvisarse preguntas formuladas por algún alumno.

Respecto al uso de sistemas CRS en la enseñanza universitaria de Matemáticas, Miller, Santana-Vega y Terrell (2006) adaptan el *Peer Instruction* a la enseñanza de Cálculo y discuten los resultados que obtienen. Los datos sugieren que el uso del PI junto a lo que ellos llaman *Good Questions*, puede beneficiar al estudiante en cuanto al nivel de comprensión matemática. Estos autores identifican las características de las *Good Questions*: deben estimular el interés y la curiosidad de los estudiantes; ayudarlos a hacer visible su falta de comprensión; ofrecerles frecuentes oportunidades para hacer conjeturas y argumentar acerca de su validez; emplear su conocimiento previo y sus concepciones erróneas; proporcionar al profesor una medición frecuente de lo que los estudiantes están aprendiendo; dar soporte al esfuerzo del profesor para promover un entorno de aprendizaje activo.

D'Inverno, Davis y White (2003) describen la introducción de un CRS en una gran clase de Matemáticas en Ingeniería, diseñada para promover una mayor interacción con el estudiante. Una de sus conclusiones es que el CRS es una potente herramienta con la que explorar ideas innovadoras en la enseñanza matemática. King y Robinson (2009) muestran cómo los CRS pueden producir resultados positivos en las condiciones usuales de enseñanza universitaria: clases amplias, alumnado pasivo, falta de interacción.

EL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP)

Para Barrows (1986), el ABP es un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos. Como indican Pease y Kuhn (2011), desde su aparición en los años sesenta del siglo XX, el ABP ha evolucionado hacia una diversidad de formulaciones que se han implementado en diferentes campos. A pesar de esta diversidad, existe acuerdo en que la característica fundamental del ABP es la contextualización del aprendizaje en un problema que se presenta a los estudiantes, sin que estos hayan recibido antes una preparación acerca del objeto concreto de estudio. Trabajando típicamente en pequeños grupos, los estudiantes identifican lo que deben aprender para resolver o para comprender mejor el problema, comparten ideas y proponen diversas soluciones.

Se considera que las características fundamentales del ABP tienen su base teórica en la Psicología Cognitiva, concretamente en el constructivismo. Estas características son las siguientes (Barrows, 1986; Manzanares, 2008):

a. El aprendizaje está centrado en el alumno.
b. El aprendizaje se produce en pequeños grupos.
c. Los profesores son facilitadores o guías del proceso.
d. Los problemas son el foco de organización y estímulo para el aprendizaje.
e. Los problemas son un vehículo para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.
f. La nueva información se adquiere a través del aprendizaje autodirigido.

Se ha indicado en qué consiste el ABP y cuáles son sus elementos esenciales. Sin embargo, la cuestión que más nos interesa es el efecto que el ABP puede producir, esto es, por qué utilizar el ABP como estrategia de enseñanza. A este respecto, Manzanares (2008) indica que, lejos de un planteamiento que promueva el conocimiento receptivo, descontextualizado o exento de procesos metacognitivos, el ABP promueve la utilización práctica del conocimiento y la toma de conciencia acerca de cómo se está aprendiendo (habilidades de automonitoreo). Barrel (1999) señala algunas razones, basadas en la investigación, que ponen en valor el ABP como estrategia de enseñanza y aprendizaje:

- El procesamiento de la información en los niveles superiores, el pensamiento crítico, las estrategias de búsqueda y la reflexión sobre la práctica, tal y como se da en la resolución de situaciones problemáticas, conducen a una compresión más profunda (Perkins, Simmons y Tishman, 1990).
- Algunas metas consideradas centrales de la educación son promovidas por el ABP: la retención, la compresión y aplicación de la información, los conceptos, las ideas, los principios y las habilidades (Perkins *et al.*, 1990).
- Mediante experimentos controlados se ha contrastado que los estudian-

tes que utilizaron el ABP en clase obtuvieron tanta o más información que los estudiantes en clases tradicionales, pero mostraron un incremento significativo en el uso de estrategias para la resolución de problemas (Stepien, 1993).

Por otra parte, el citado conjunto de características (a)-(f) del ABP es compatible y tiene múltiples conexiones con las hipótesis de Robert (1987) acerca del aprendizaje matemático que se recogen en el apartado 1. Por ejemplo, el ABP busca la participación colaborativa del estudiante (características (a) y (b)), y las hipótesis 1 y 5 señalan el papel de la comunicación en el aprendizaje; el ABP establece el papel del profesor como facilitador (característica (c)), mientras que la hipótesis 2 implica al apoyo de un par o del profesor; el ABP focaliza el trabajo en problemas (características (d) y (e)), lo cual aparece explícitamente en las hipótesis 1, 4 y 6; el ABP propone la identificación, por parte del estudiante, de sus necesidades de aprendizaje (características (a) y (f)), mientras que la hipótesis 6 hace referencia a la metacognición. Así pues, una posible forma de utilizar las hipótesis de Robert consiste en adoptar un Aprendizaje Basado en Problemas.

La Figura 1 muestra jerárquicamente los tres fundamentos de las estrategias de enseñanza diseñadas en este trabajo. Las seis hipótesis de Robert se han considerado pilar básico, mientras que el modelo ABP se adopta como una implementación factible de dichas hipótesis; esto es, como concreción en actividades atendiendo a las condiciones reales de docencia: perfil de los estudiantes, amplitud del temario y recursos disponibles. El CRS se adopta como instrumento con el que hacer fluir la comunicación en el aula a lo largo del proceso. Si bien el CRS asume un importante papel al facilitar la comunicación dentro del aula, creemos que el potencial de estos sistemas no se explota en toda su dimensión fuera de un modelo en el que la búsqueda de soluciones a problemas y la reflexión del estudiante sean la auténtica pieza la clave.

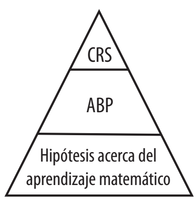


Figura 1. Fundamentación de las estrategias de enseñanza

INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Bingolbali y Monaghan (2008) encuentran que en la historia de la Educación Matemática los estudios acerca del aprendizaje de las ideas de Cálculo son comparativamente recientes, y que en los años ochenta se produjo un *boom* de artículos de investigación. Estos trabajos se dedicaron a la comprensión de los conceptos de límite, infinitésimo, derivación e integración, ecuaciones diferenciales y representación gráfica, entre otros. En los años noventa emergieron los trabajos que adoptaron lo que puede llamarse "teorías sociales de aprendizaje", en los que la cultura, los aspectos institucionales y sociales o las identidades son también objeto de investigación.

Los estudios de cognición llevados a cabo hasta los primeros años de la década de los noventa revelaron que el aprendizaje del Cálculo es un objetivo muy difícil de lograr; que existen múltiples puntos de vista para abordar el problema; que los estudiantes generan muchas interpretaciones inesperadas y que los gráficos por computador y otros *software* pueden ayudar a transformar la enseñanza y el aprendizaje desde una orientación procedimental hacia una orientación más conceptual. A pesar de los resultados de la investigación, el Cálculo es tradicionalmente enseñado por transmisión de contenidos y procedimientos presentados al estudiante (Franke *et al.*, 2007; Yerushalmy y Swidan, 2012).

Existe también una amplia investigación que cuestiona este modelo tradicional de enseñanza y muestra su escasa efectividad para lograr un aprendizaje comprensivo y para generar actitudes favorables en los estudiantes (Moise, 1984; Anderson y Loftsgaarden, 1987; Peterson, 1987; Rogalski, 1990; Tall, 1996; Guershon y Trgalová, 1996). Yerushalmy y Swidan (2012) añaden que el Cálculo involucra conceptos matemáticos avanzados que requieren la reconstrucción de objetos abstractos, la apropiación de símbolos y sus representaciones mentales. El resultado de esta enseñanza tradicional, como indica Moise (1984) es que, para la mayoría de los estudiantes, el Cálculo no es sino un repertorio de patrones de actuación que deben imitarse. Rogalski (1990) señala que los estudiantes universitarios actuales solo esperan que las Matemáticas les proporcionen métodos de resolución listos para ser usados; no buscan profundizar en los conceptos que están aprendiendo. Pero, como indican Anderson y Loftsgaarden (1987) y Peterson (1987), la dura dieta de ejercicios procedimentales produce tasas de fallo de entre 30 y 50%.

En resumen, siguen estando vigentes las palabras de Skemp (1971), cuando señala que los estudiantes están aprendiendo solo el producto del pensamiento matemático, en vez del proceso de pensamiento matemático. El método tradicional de enseñanza intenta inculcar en los estudiantes universitarios rigurosos estándares de demostración matemática, pero a menudo es interpretado por ellos como un ejercicio memorístico solo necesario para superar los exámenes. Y todo esto sigue ocurriendo en las aulas, a pesar de la amplia investigación en Educación Matemática, que no solo ha señalado las carencias de la enseñanza tradicional, sino que también ha desarrollado modelos alternativos de enseñanza que pueden dar lugar a mejoras significativas en el aprendizaje y en las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas.

En esta experiencia se ha implementado una enseñanza de Cálculo alternativa a la tradicional, elaborando actividades basadas en el ABP y adoptando un CRS para mejorar la comunicación en el aula. También se han tomado en consideración para el diseño de las actividades algunas de las dificultades de aprendizaje que han sido caracterizadas por la investigación y las propuestas de enseñanza que se han formulado. Enseguida se describen algunas de ellas.

El concepto de función fue concebido inicialmente por Leibniz en el siglo XVII para describir una variable y cuyo valor depende de otra variable x, a través de una relación explícita como $y=x2$. Es en el siglo XIX cuando se introduce la formulación más general $y=f(x)$. Desde el comienzo, el concepto de función se enlazó con su representación gráfica, esto es, con el conjunto de puntos $(x,f(x))$ del plano cartesiano. Sin embargo, en el siglo XX la idea de gráfico de una función lleva a considerar una definición conjuntista, donde la función puede ser ahora cualquier conjunto G de pares ordenados $G=\{(x,y) \ / \ x \in A, \ y \in B\}$ tales que si $(x,y1), (x,y2) \in G$, entonces $y1= y2$. Sin embargo, Sierpinska (1992) indica que esta visión plantea dificultades conceptuales. Si el estudiante ha trabajado únicamente con funciones en términos de fórmulas y computación, es previsible que tenga dificultad para aceptar la citada definición conjuntista, que no involucra tales elementos. Como indica Tall (1996), la definición conjuntista es muy satisfactoria en la formulación sistemática de las Matemáticas, pero no lo es cuando trata de adoptarse para propósitos educativos, tal y como se llevó a cabo en el currículo de la llamada Matemática Moderna de los años sesenta. Vinner (1983) añade que, incluso los estudiantes que son capaces de manejar la definición conjuntista de función, usan preferentemente sus imágenes intuitivas al resolver cuestiones acerca de funciones. Vinner (1983) también encuentra que muchos estudiantes piensan que una función debe venir dada por una única fórmula o, si está definida mediante dos reglas, los subdominios deben ser intervalos. Barnes (1988) y Ferrini-Mundi y Graham (1994) describen diversas concepciones erróneas adicionales: no interpretar la expresión y=4 como una función porque "no aparece la variable x en su fórmula"; esperar siempre que la gráfica corresponda a un tipo conocido de función (parábolica, trigonométrica, exponencial, etcétera).

El concepto de límite, que da acceso a los conceptos fundamentales de cálculo es también fuente de dificultades cognitivas. El propio lenguaje utilizado, con términos como 'tiende a', 'se aproxima', 'tiene límite', sugiere que la expresión se aproxima al límite pero que nunca lo alcanza (Scharzengerger y Tall, 1978). Los estudiantes no conciben el límite como un valor específico, sino como un proceso de aproximación potencialmente infinito en el que una cantidad se hace tan próxima a cierto valor como se desee. Sierpinska (1985) indica que la caracterización ε-δ de la continuidad puede resultar para los alumnos una formulación desconectada de la intuición física, si el punto de partida es su expresión formal, lo que Guershon y Trgalová (1996: 695) llaman "formalismo y rigor prematuros".

Respecto a los conceptos relacionados con el concepto de integral de funciones de una variable real, Blomhøj y Kjelden (2010: 574) encuentran que, para muchos estudiantes, la conceptualización de la integral se reduce a la instrumental y limitada operación de búsqueda de primitivas y a su interpretación como "área bajo la curva". Mundy (1984) y Orton (1983) explican que los estudiantes identifican la integral con la regla de Barrow. incluso cuando tal regla no puede aplicarse. Por ejemplo, muchos estudiantes son incapaces de explicar por qué es incorrecto aplicar la regla de Barrow a la función $f(x)=x^{-2}$ en el intervalo [-1,1]. El estudiante puede conocer distintos métodos de integración, pero no ser capaz de aplicarlos para la resolución de problemas. Además, una gran parte de los estudiantes identifica "integral" con "primitiva", sin apreciar ningún proceso de convergencia. El proceso de integración puede visualizarse mediante sucesivas aproximaciones utilizando sumas superiores e inferiores. Sin embargo, este proceso tiene dificultades cognitivas. Schneider (1993) informa que algunos estudiantes piensan que, mientras los rectángulos tengan base distinta de cero, la suma de las áreas nunca será igual al área bajo la curva y que cuando la base es igual a cero, los rectángulos se reducen a líneas y sus áreas son iguales a 0. Tras estas interpretaciones erróneas se encuentran las dificultades que encierra el concepto de convergencia de una sucesión numérica. Robert (1982), Sierpinska (1985) y Artigue (1995) señalan la importancia teórica de la caracterización ε-N de la convergencia hacia L de una sucesión $\{s_n\}$ pero, al mismo tiempo, describen las dificultades de los estudiantes para manejar los cuantificadores en la definición formal, para relacionar esta definición con la concepción intuitiva "cuanto mayor sea el valor de n, más próximo estará s_n de L" y para aplicarla a situaciones reales. Robert (1982) sugiere realizar actividades que hagan uso simultáneo de una representación gráfica y numérica de las sucesiones, que los estudiantes puedan cambiar dinámicamente, y la estimación del límite a partir de dichas representaciones.

DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ABP-CRS

Se ha buscado diseñar estrategias ABP-CRS que constituyan una respuesta cuando en Educación Matemática se reclaman vías, factibles en la realidad universitaria, para lograr que los estudiantes participen en actividades de reelaboración del conocimiento matemático. Por ejemplo, Burn (2002: 33) y Thomas y Holton (2003: 353) sostienen que:

> El proceso de resolución de problemas, ganando en sutileza y poder de penetración y construyendo generalizaciones, es la forma de crecimiento de las Matemáticas. No obstante, usualmente no puede esperarse que los estudiantes recreen un proceso genético sin soporte. Los profesores necesitan encontrar vías para que sus estudiantes puedan llevarlo a cabo, en vez de presentarlo de forma deductiva o como producto formal. Los profesores también necesitan encontrar modos para lograr que los estudiantes se involucren en su propia comprensión de los productos matemáticos.

En sentido similar, respecto a las escasas oportunidades que se ofrecen a los estudiantes para involucrarse en situaciones realistas y complejas, Lesh y Zawojewski (2007: 783) critican la perspectiva tradicional de resolución de problemas en los siguientes términos:

> Solo en las últimas etapas de la instrucción los estudiantes son involucrados en la resolución de situaciones realistas complejas (si el tiempo lo permite). En la perspectiva tradicional de resolución de problemas, los problemas aplicados (que requieren modelización) constituyen una pequeña fracción de las experiencias en las que se involucra al estudiante.

Esta idea también es señalada por Gainsburg (2003), cuando en su estudio del trabajo que realizan los ingenieros, concluye que el uso de muchos tópicos matemáticos (de Geometría, Álgebra, Probabilidad, etc.) se realiza en la práctica de un modo diferente al modo formal que aparece en las clases de Matemáticas. Los ingenieros utilizan las Matemáticas para describir e interpretar situaciones, pero encuentran dificultades para identificar, en el contexto de su trabajo, las Matemáticas que aprendieron, concluye este autor.

Se ha indicado que el ABP abarca una diversidad de esquemas concretos de instrucción. Respecto al grado en que se promueve el aprendizaje autodirigido, el esquema ABP puede plantear una investigación de problemas dirigida por el docente; o codirigida por el docente y por los alumnos; o bien dirigida exclusivamente por los alumnos (Morales y Landa, 2004). Dadas las características de los estudiantes a los que hemos destinado la experiencia (cuyas habilidades de organización, trabajo en equipo y responsabilidad se encuentran *en construcción*) y del contexto de trabajo (clases muy numerosas, amplios temarios), se ha optado por la primera de las posibilidades, esto es, los docentes conducen la investigación de problemas, proporcionan bibliografía y desarrollan actividades que les permitan garantizar que los alumnos están desarrollando el conocimiento necesario.

Enseguida se describen las estrategias ABP-CRS que se han utilizado en esta experiencia para el módulo de Cálculo correspondiente al estudio local y cálculo integral de funciones reales de una variable real. Indicar, en primer lugar, que las clases tradicionales de exposición de materia han desaparecido completamente. En lugar de ello, se avanza en la reconstrucción del marco teórico de Cálculo a través de la resolución de cuestiones propuestas a los estudiantes, bien sea de forma individual o en equipo. El apartado "Resultados acerca de la participación y el debate en el aula" muestra algunos ejemplos de cuestiones. La tabla 1 categoriza los diferentes tipos de cuestiones propuestas. La cuestión puede consistir en la aplicación de un algoritmo (categoría C1). También puede servir para mostrar la necesidad de introducir un nuevo concepto o procedimiento (categoría C2). Una vez construido un concepto, la cuestión puede tener como objetivo profundizar en su significado o utilidad (categoría C3). Finalmente, puede tratarse de una cuestión que haga visible alguna dificultad de aprendizaje (categoría C4). Naturalmente, una misma cuestión puede pertenecer a varias categorías.

Tabla 1. Tipología de cuestiones propuestas

Categoría	*Objetivo*
C1	Cuestión de aplicación de algoritmos, acerca de hechos matemáticos, definiciones, de aplicación inmediata, etcétera.
C2	Problema que muestra la necesidad de construir un nuevo concepto o procedimiento.
C3	Cuestión destinada a profundizar en los significados de algún concepto ya introducido.
C4	Cuestión destinada a trabajar sobre determinada dificultad de aprendizaje.

Una clase típica de 50 minutos empleando el ABP-CRS se desarrolla del siguiente modo. Los primeros 3-7 minutos se utilizan en revisar la tarea no presencial, previa a la clase, que los estudiantes han realizado. Esta tarea propuesta consiste en un primer estudio en el libro de trabajo de Barragués, Arrieta y Manterola (2010) de los aspectos que se van a trabajar en clase, y en la realización de ejercicios-tipo, que también constituye un objetivo de enseñanza. Los estudiantes deben responder mediante sus *clickers* de forma individual a 2-3 preguntas de elección múltiple, y obtienen una puntuación por responder correctamente. Tras cada pregunta, se proporciona inmediato *feedback* a los estudiantes. Las preguntas formuladas en esta sección de la clase no son generalmente difíciles, acerca de hechos matemáticos, definiciones o de aplicación de algoritmos (cuestiones de la categoría C1).

A lo largo de los siguientes 5-10 minutos de la clase el profesor repasa los aspectos que los alumnos han estudiado previamente, señala sus relaciones con otros conceptos, las interpretaciones, las aplicaciones prácticas, etc. Los siguientes 25-35 minutos de la clase se dedican al trabajo con *ConcepTests* acerca de los aspectos que se están estudiando en la sesión. Estos tienen como objetivo involucrar a los estudiantes en problemas que requieren la aplicación de conceptos clave (categorías C1), que ponen en tensión su grado de aprendizaje (categoría C3), hacen visible alguna de las dificultades de aprendizaje o concepciones erróneas descritas en la investigación (categoría C4) o que revelan la necesidad de introducir un nuevo concepto (categoría C2). La información obtenida en este proceso, que se recoge y analiza sistemáticamente mediante un protocolo, ha servido también al profesor para orientar la enseñanza posterior, para decidir si debe invertirse más tiempo en explorar una idea, modificar la secuencia de enseñanza planeada o mejorar los enunciados de las cuestiones. Una vez que el profesor dispone de la distribución de respuestas obtenida, tiene una oportunidad para provocar la discusión en grupos y formular de nuevo la pregunta a fin de analizar de qué modo la discusión ha hecho cambiar las respuestas; puede pedir a un estudiante que explique por qué ha cambiado su respuesta, etc. En general, los estudiantes están obligados a defender sus respuestas, tratando de evitar las introducidas sin reflexión o al azar.

Las preguntas conceptuales se han planteado esta experiencia bajo diversos formatos. Una primera posibilidad consiste en pedir a cada estudiante que reflexione acerca de la situación presentada, que seleccione una respuesta de entre las propuestas y que esté dispuesto a justificar y defender tal respuesta en un debate general de aula. Pero el profesor puede también optar por una discusión en pequeño grupo de estudiantes y la posterior discusión en la clase completa, donde hay oportunidad para enfrentar los distintos argumentos. La distribución de respuestas de la clase, en forma de histograma, muestra al profesor si los estudiantes han comprendido la situación o bien si es necesaria una nueva discusión o ejemplos adicionales. A diferencia de la práctica común en una enseñanza tradicional de formular preguntas informalmente a lo largo de la sesión, lo cual típicamente involucra solamente a unos pocos estudiantes motivados, ahora se utiliza un proceso estructurado de preguntas que requiere la participación de la totalidad de la clase. En general, el formato que el profesor ha utilizado para trabajar en el aula con cada cuestión conceptual planteada, depende de los conceptos y procedimientos involucrados y de su complejidad. Por ejemplo, cuando la cuestión buscaba hacer visible determinada concepción errónea, si era necesario, el profesor orientaba en este sentido las discusiones. No obstante, el *feedback* que proporciona el CRS a menudo aconseja un cambio de estrategia respecto a lo inicialmente planeado por el profesor.

Tras la sesión de trabajo con *ConcepTests*, el profesor dedica los minutos finales de la clase a presentar una situación problemática que justifica la introducción de los nuevos conceptos que serán objeto de estudio en la siguiente clase. A continuación explicita la tarea no presencial previa a la clase que los estudiantes deberán realizar. Esta tarea puede consistir en un estudio de contenido teórico, la realización de ejercicios u otras actividades. A este respecto, es necesario añadir algún dato acerca del material de estudio que se proporciona a los estudiantes para soportar su trabajo no presencial. Este material viene recogido en un libro de trabajo, más un soporte interactivo en *Moodle* (Barragués *et al.*, 2010), que constituyen un programa de actividades que puede realizarse individualmente o en equipo, donde el marco teórico del Cálculo se construye avanzando en la resolución de situaciones problemáticas. Cada apartado comienza con el planteamiento de un problema que no puede resolverse mediante el marco teórico que se conoce hasta ese momento, de modo que se hace necesario ampliar dicho marco. Cada nuevo concepto no se presenta inicialmente de modo formal, sino que se reconstruye. Este proceso de reconstrucción consiste en lo siguiente: tomando como punto de partida el problema, se producen acercamientos sucesivos a un nivel intuitivo, conectando las nuevas ideas que van apareciendo con las ideas matemáticas que han sido ya desarrolladas, para finalmente llegar a la conceptualización formal del nuevo concepto y a su utilización para resolver el problema que lo ha motivado. Antes de obtener la expresión formal del nuevo concepto, los estudiantes han realizado actividades destinadas a dotarlo de significado y a mostrar su utilidad.

Un aspecto adicional que es necesario citar en esta descripción de las estrategias generales ABP-CRS usadas es el modo en que se ha integrado el computador en el trabajo. En nuestras estrategias de enseñanza se ha buscado ampliar la experiencia matemática de los estudiantes orientándola desde su actual concepción deductiva y algebraica hacia una concepción inductiva y empírica (Balacheff y Kaput, 1996), hacia el propio origen y construcción del conocimiento matemático, lo que Balacheff y Kaput llaman *penetración epistemológica*. Y en este objetivo, las tareas a realizar con computador han sido pieza clave. Se ha utilizado el *software Winplot* (Parris, 2011), programa que incorpora la mayoría de las posibilidades numéricas y gráficas que se consideran útiles para explorar el concepto de función (Tall, 1996): objetos gráficos (gráficas de funciones en forma explícita, implícita, polar, paramétrica, tabular, sucesión, recursión, puntos, segmentos, etc.) y un amplio inventario de operaciones sobre tales objetos (intersección, reflexión, traslación, giro, *zoom*, derivación e integración numéricas, animación, etc.). De este modo se han diseñado micromundos matemáticos (*microworlds*) en el sentido que describen, por ejemplo, Thompson (1987), Hoyles (1993), Balacheff y Shuterland (1994) y Zbiek, Heid y Blume (2007), y que constan de:

a) Un conjunto de objetos primarios, operaciones elementales con ellos y reglas con las cuales aplicarlas (sistema formal).
b) Un dominio de fenomenología (la pantalla del ordenador en este caso), que relaciona los objetos y las acciones, en un *feedback* que se produce como consecuencia de las acciones del usuario.

RESULTADOS

La investigación fue llevada a cabo durante el curso 2010-2011 en la Escuela Politécnica de San Sebastián (España), centro que pertenece a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). En el estudio participaron 88 estudiantes como grupo experimental y 86 estudiantes como grupo de control, ambos formados al azar. Todos los participantes tenían el mismo currículo de Ingeniería Industrial y habían recibido previamente en su enseñanza secundaria al menos dos cursos de Matemáticas que incluían el estudio de funciones reales de una variable real. Además, habían superado las pruebas de acceso a la Universidad. Como indican Ferguson y Takane (1989), la distribución aleatoria de estudiantes que recibieron la misma educación secundaria es suficiente para asegurar el mismo nivel de conocimientos para los diferentes grupos bajo estudio.

El estudio se llevó a cabo para el módulo de la asignatura correspondiente al análisis de funciones reales de una variable real, que se impartió a lo largo de las primeras 14 semanas del curso, con cuatro horas de clase semanales. Este módulo incluye los siguientes temas: números complejos (tres semanas), sucesiones numéricas (dos semanas), estudio local de funciones (seis semanas) e integral de Riemann (tres semanas).

El grupo de control recibió una enseñanza universitaria convencional, en la que, normalmente, los estudiantes no tuvieron la oportunidad de participar de forma activa, limitándose a tomar notas de las explicaciones del profesor. El grupo experimental siguió estrategias de enseñanza como las descritas, centradas en la discusión de la secuencia de actividades propuesta. Uno de los autores de este trabajo fue el instructor del grupo experimental de estudiantes, mientras que la enseñanza del grupo de control estuvo a cargo de un profesor ajeno a la investigación que contaba con amplia experiencia docente.

A continuación se muestran los resultados obtenidos, atendiendo a tres criterios diferentes. En primer lugar, la participación y el debate en el aula que se ha logrado con la enseñanza propuesta. En segundo lugar, la valoración de los estudiantes hacia la enseñanza recibida. En tercer lugar, nos referiremos al aprendizaje logrado.

Resultados acerca de la participación y el debate en el aula

Se presentarán aquí algunos ejemplos de cuestiones conceptuales que fueron elaboradas, aunque no necesariamente se plantearon a los estudiantes en el mismo orden. Se describirán los objetivos que se establecieron para ellas desde el marco del ABP, las discusiones que generaron en el aula y los resultados que se obtuvieron. Siguiendo a Hughes-Hallet (1991), las cuestiones buscan explorar, equilibradamente, el significado de los conceptos desde una triple óptica: gráfica, numérica y analítica.

El ejemplo 1 es una cuestión algorítmica (categoría C1 de la tabla 1) que los estudiantes debían realizar como tarea no presencial. Se trataba de calcular el límite de una sucesión numérica y aplicar la definición ε-N. Se obtuvo 60% de respuestas correctas, y la discusión posterior en el aula reveló al profesor la dificultad de los estudiantes para entender el propio enunciado, previsible dificultad asociada a la interpretación ε-N del límite de una sucesión a la que ya nos referimos en el cuarto apartado. Sin embargo, como se verá más adelante, habría nuevas oportunidades para profundizar en este significado.

Ejemplo 1. (Límite de una sucesión) Considerar la sucesión convergente

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+1}$$

cuyo límite es L. Dado el valor de ε=0.00005, calcular el menor valor N tal que para todo n>N se tiene

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Respuestas: A (correcta): N=70; B: N=93; C: N=45; D: N=125.

Los ejemplos 2 a 6 son situaciones que han resultado eficientes para generar trabajo matemático y discusión en el aula, porque involucraron activamente a una gran parte de la clase. La cuestión del ejemplo 2 se pensó para profundizar en los significados del concepto de función, y por ello se ha clasificado como perteneciente a la categoría C3 (tabla 1). Los estudiantes votaron de forma mayoritaria por la respuesta correcta (80%, respuesta C). En el turno de intervenciones mostraron el argumento utilizado: "Cuando $x \in (3,4)$, el valor de f(x) oscila desde el valor f(3)=6 hasta el valor f(4)=5, por tanto h(x) es decreciente". Sin embargo, el profesor deseaba que se hicieran visibles los conceptos y resultados matemáticos relacionados, por lo cual propuso la búsqueda de una óptica de análisis más formal. Los estudiantes trabajaron empleando la regla de derivación de la función compuesta, determinaron los extremos de h(x) e incluso trazaron aproximadamente la gráfica de h(x). Así pues, una situación a la que se podía dar respuesta correcta en simples términos geométricos, sirvió para seguir construyendo el concepto abstracto de función como un proceso *input-output* (Dubinsky y Harel, 1992; Gravemeijer, 1994), para trabajar sobre diferentes niveles de concepción de las funciones mediante la discusión de los significados de g(f(x)) y f(g(x)) (Guershon y Trgalová, 1996) y para explorar conceptos y resultados matemáticos más avanzados (crecimiento, extremos, regla de la cadena).

Ejemplo 2. (Extremos, crecimiento, regla de la cadena) Considerar las funciones f(x) y g(x) que muestra la figura 2. Sea h(x)=g(f(x)). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta? Respuestas: A: h(x) es creciente en (1,2) B: h(x) es decreciente en (2,3) C (correcta): h(x) es decreciente en (3,4) D: h(x) es decreciente en (4,5)

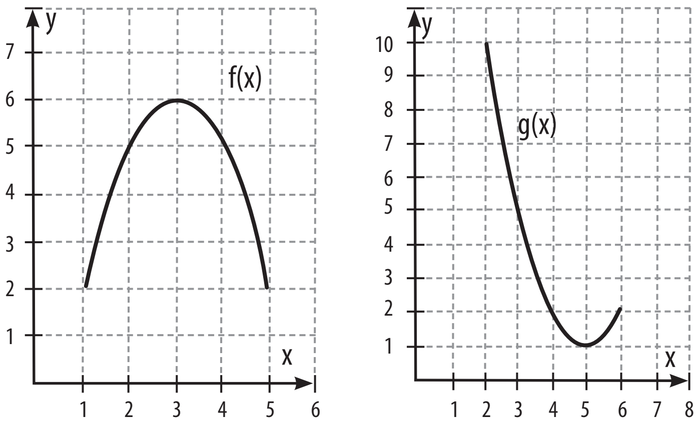


Figura 2. Ilustración del ejemplo 2

La situación del ejemplo 3 es una de las que se han utilizado para trabajar con la idea de que el valor de la integral de una función u(v) no siempre debe interpretarse como el valor del área de una región plana. Se trata, por tanto, de una cuestión destinada a hacer visible y tratar determinada dificultad de aprendizaje (categoría C4). Los estudiantes respondieron de forma correcta mayoritariamente (B: 10%, C: 25%, D (correcta): 65%). A continuación, el profesor abrió un nuevo debate en clase, proponiendo la búsqueda de ejemplos de situaciones reales en las que la función u(v) del enunciado tuviera utilidad práctica, e interpretar el valor numérico de la integral de u(v) en un intervalo [a, b]. Por ejemplo, uno de los grupos de estudiantes elaboró la situación u= "peso en gramos/metro del hilo de cobre que fabrica una máquina", donde u depende del número de horas $v \in [a, b]$ que la máquina lleva funcionando (por suciedad, necesidad de ajustes, etcétera).

Ejemplo 3. (Integral definida) Supongamos que las variables v y u se expresan en horas y en gramos/metro respectivamente. En qué unidades se expresa el valor de:

$$\int_b^a u(v)dv$$

Respuestas: A: en (hora)^2/metro; B: en (gramos/hora)$^{2;}$ C: en (gramos x metro)/hora; D: (correcta) en (gramos/metro) x hora

Las situaciones de los ejemplos 2 y 3 fueron trabajadas en el aula en pequeños grupos de estudiantes, y tras la votación, se entabló la discusión general en la que cada grupo justificaba la opción elegida. En cambio, en las situaciones de los ejemplos 4 y 5, el profesor decidió pedir a los estudiantes que reflexionaran de forma individual sobre la situación y que votaran por la respuesta que creían correcta. Este cambio de estrategia se debió a que estas dos situaciones encierran dificultades de aprendizaje (categoría C4) que se harían más visibles si los estudiantes respondían sin haber sido previamente influidos por los compañeros. Tras ver el histograma de respuestas, la segunda fase de la estrategia utilizada en estas dos cuestiones consistió en que cada estudiante debía discutir con algún compañero próximo que discrepara, intentando convencerle de que la propia respuesta era la correcta.

La situación del ejemplo 4 encierra dificultades asociadas al deficiente conocimiento de las funciones elementales y al uso no reflexivo de la calculadora. Por ejemplo, para obtener la forma polar ρ_θ del número complejo z=-2+2i, los estudiantes pueden utilizar la calculadora para evaluar incorrectamente θ =arctg(2/-2)=arctg(-1)=-π/4.

La primera votación arrojó el resultado A: 21%, B: 21%, C (correcta): 58%. En la segunda votación, se obtuvo un 100% de respuestas correctas y los propios estudiantes encontraron ejemplos que mostraban el error. Así pues, parece que la discusión entre pares orientó positivamente las respuestas que habían sido erróneas. Sin embargo, el resultado de la discusión entre pares no siempre fue positivo, como muestra la situación del ejemplo 5. Esta situación se utilizó para detectar y tratar un error común en los estudiantes en el manejo de números complejos. El error consiste en asumir que la parte imaginaria del número complejo z=x+yi es igual a yi en vez de y. Tras la reflexión individual, la distribución de respuestas que se obtuvieron fue A: 63%, B (correcta): 37%. Tras la discusión por pares, el resultado de la votación fue A: 76%, B: 24%. Sorpresivamente, una parte de los estudiantes que estaban inicialmente en lo cierto, se dejó convencer por estudiantes que estaban equivocados. A nuestro entender, este resultado es representativo de la debilidad del aprendizaje en esos primeros intentos de utilizar significativamente el concepto, tanto en los estudiantes que estaban equivocados en la primera votación, como en aquellos otros que fueron persuadidos por los primeros. Afortunadamente, la estrategia de enseñanza cuenta con una tercera oportunidad para zanjar la cuestión: la discusión general con intervención del profesor, además de otras situaciones posteriores que proporcionan nuevas oportunidades para utilizar de forma significativa el concepto.

Ejemplo 4. (Números complejos) Considerar el número complejo z que muestra la figura 3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

Respuestas: A: θ =arctan (y/x); B: $\theta = 2\pi +$ arctan (y/x); C (correcta): $\theta = \pi +$ arctan (y/x).

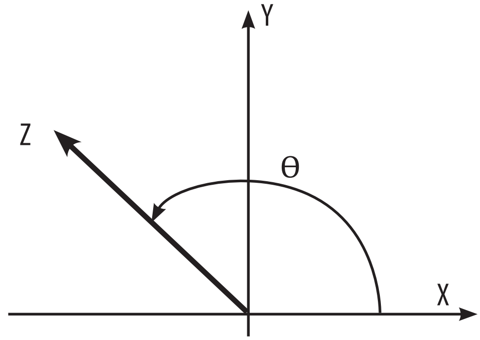


Figura 3. Ilustración del ejemplo 4

Ejemplo 5. (Números complejos) Para calcular la solución de la ecuación Re(z)+Im(z)=i, ¿es correcto el siguiente cálculo? "Sea z=x+yi. Re(z)=x, Im(z)=yi. Sustituyendo en la ecuación: x+yi=i. Por tanto x=0, y=1, es decir z=i"

Respuestas: A: es correcto. B (correcta): No es correcto.

Los ejemplos anteriores muestran situaciones que ponen en tensión el grado de comprensión de los conceptos o procedimientos ya introducidos y buscan profundizar en sus significados. En cambio, el problema del ejemplo 6 ilustra el modo en que en el programa de actividades, de forma sistemática, se hace visible una nueva necesidad de aprendizaje a la que hay que hacer frente, esto es, el modo en que se busca siempre la necesidad de introducir cada nuevo concepto (cuestiones de la categoría C2). En un primer análisis, en la clase hay consenso absoluto, el 100% de los estudiantes asegura que la función representada en la figura 4(a) es continua en el punto x=5 (respuesta A). En definitiva, la gráfica muestra el prototipo de función continua que el profesor ha trazado sobre la pizarra en muchas ocasiones. Pero, seguidamente, el profesor ejecuta el *software* de trazado de gráficas de funciones con el que se ha generado la curva, y amplía un pequeño fragmento en las cercanías del punto x=5, obteniendo la gráfica de la figura 4(b). La sorpresa en el aula se hace patente, al revelarse la discontinuidad de la función. ¿Cómo explicar la discrepancia, teniendo en cuenta que se trata de la misma función? Ese es el problema que la clase aborda a continuación. La idea a construir es que, a partir de la gráfica de una función, no puede *deducirse* su continuidad, puesto que no se dispone de la expresión analítica. Ahora bien, sí puede establecerse su continuidad como *hipótesis* plausible a partir de la información disponible, y este es el aspecto clave a identificar: la necesidad de analizar cualitativamente las situaciones y establecer hipótesis (suposiciones) fundamentadas en los datos disponibles (categoría C2).

Ejemplo 6. (Establecimiento de hipótesis) ¿Es continua en el punto x=5 la función cuya gráfica muestra la figura 4(a)? Respuestas: A: La función es continua en x=5. B: La función no es continua en x=5. C: (correcta) Falta información.

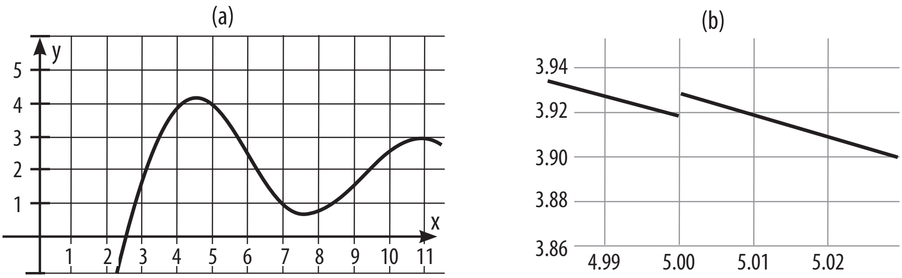


Figura 4. Ilustraciones del ejemplo 6

El ejemplo 7 es otra ilustración del modo en que se utilizan situaciones problemáticas para construir cada nuevo concepto (categoría C2). En este caso, se trata de introducir la dificultosa caracterización topológica ε-δ de la continuidad de una función real de variable real. Como indica la investigación, esta caracterización ε-δ puede resultar para los alumnos una formulación desconectada de la intuición física de continuidad si el punto de partida es su expresión formal. Por ello, en el programa de actividades se ha diseñado este problema para dotar de significado profundo a la concepción ε-δ de la continuidad, y en un contexto industrial capaz de interesar al estudiante.

Ejemplo 7. (Situación problemática utilizada para introducir la caracterización ε-δ de la continuidad)

Véase la figura 6. Supongamos que tenemos una máquina alimentada por una tensión V, a través de la cual circula cierta intensidad I. Regulando el valor de V, tendremos diferentes valores de I, es decir, $I=I(V)$. La tensión de trabajo es $V=350$ voltios, con una intensidad $I=12$ amperios. Sin embargo, el valor de V no siempre toma ese valor, sino que sufre pequeñas fluctuaciones. En un momento dado, el valor real de V se encontrará dentro de cierto intervalo $(350-\delta,350+\delta)$, donde $\delta>0$ es un número pequeño y desconocido. Nuestro problema es que una fluctuación de V conlleva una oscilación de la intensidad I, y eso puede ser perjudicial para nuestra máquina. De este modo, para $V\in(350-\delta,350+\delta)$ se tendrá $I \in (12-\varepsilon,12+\varepsilon)$, donde $\varepsilon>0$ es un valor que depende de δ. Supongamos que la máquina solo puede funcionar bien si la intensidad I se encuentra en el intervalo $12\pm10\%=(12-1.2,12+1.2)=(10.8,13.2)$. Es decir, se admite una oscilación hasta $\varepsilon=1.2$ Amperios. Entonces, ¿qué oscilación de tensión V podremos admitir de modo que I se encuentre en el intervalo (10.8,13.2)? ¿Y si la oscilación de I puede ser solo de $12\pm5\%$? Es general, dada una oscilación ε alrededor de $I=12$, ¿Es seguro que podremos encontrar una oscilación δ alrededor de $V=350$ tal que si $V\in(350-\delta,350+\delta)$ entonces $I\in(12-\varepsilon,12+\varepsilon)$?

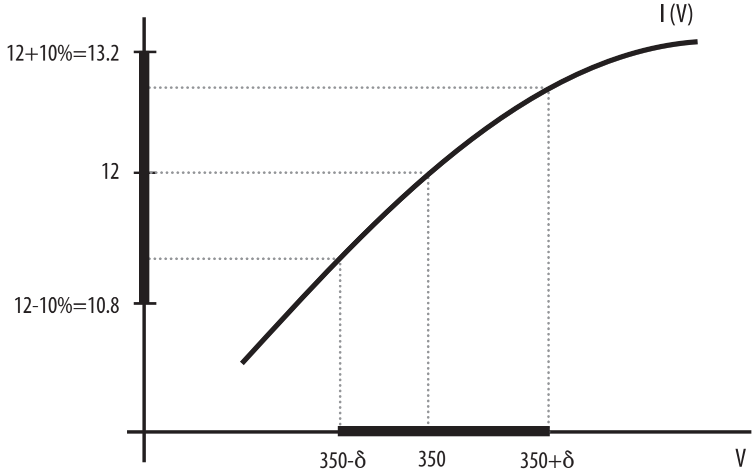


Figura 5. Ilustración del ejemplo 7

La actividad de computador del ejemplo 8 ilustra el tipo de tareas que se ha propuesto a los estudiantes, en este caso para completar la actividad del ejemplo 7. El micromundo que los estudiantes exploran muestra los objetos primarios necesarios (figura 6): la gráfica de y(x), el segmento (a-δ,a+δ) sobre el eje OX, el segmento (y(a)-ε,y(a)+ε) sobre el eje OY y rótulos informativos que se evalúan dinámicamente. La figura 6 muestra dos pantallas del micromundo para la función de trabajo $y(x)=x^2$ si $x\leq 1.8$; $y(x)=(x-1)^3$ si $x>1.8$, para dos valores de x=a, δ y ε (δ=D, ε=E), mostrándose dinámicamente los resultados y cálculos en la pantalla. Dado cierto ε>0, los estudiantes trabajaron activamente manipulando los controles del programa (operaciones) y obtuvieron experimentalmente diversos valores δ>0 que verificaban la condición ε-δ (*feedback*). Así, por ejemplo en el punto a=1.2 (figura 6(a)) es posible encontrar un valor δ, a diferencia de lo que ocurre en a=1.8 (figura 6(b)), donde la función no es continua. Los estudiantes fueron animados a determinar experimentalmente el mayor valor posible de δ. Además, en el apartado 2 se trabajó con la idea de que el valor de δ obtenido no solo depende de ε, sino también del punto x=a considerado, es decir, en general se tiene δ=δ(ε,a). Esta idea sirvió para construir significativamente la noción de continuidad uniforme. Los estudiantes encontraron en su exploración que, si se restringe el dominio de la función continua y(x) a un intervalo cerrado y acotado $[x_1,x_2]$, entonces existe δ(ε). Pero, como se hace sistemáticamente a lo largo de nuestro programa de actividades, este concepto de continuidad uniforme no se define inicialmente, sino que se reconstruye a partir de una situación problemática (categoría C2).

Ejemplo 8. Actividades de computador sobre la caracterización ε-δ de la continuidad

1. Estudiar si en un punto x=a se verifica la condición ε-δ de continuidad. Es decir, dado $\varepsilon>0$, tratar de encontrar $\delta>0$ tal que si $x\in(a-\delta,a+\delta)$, entonces $y(x)\in(y(a)-\varepsilon,y(a)+\varepsilon)$. Estudiar esta propiedad para otras funciones y(x), en diversos puntos x=a.
2. Ahora elegimos otro punto x=b. Para el mismo ε, ¿nos vale el anterior valor de δ? Investigar acerca de las condiciones que se pueden establecer para que exista un valor de δ que no dependa del punto x=a considerado, sino que dependa solamente de ε.

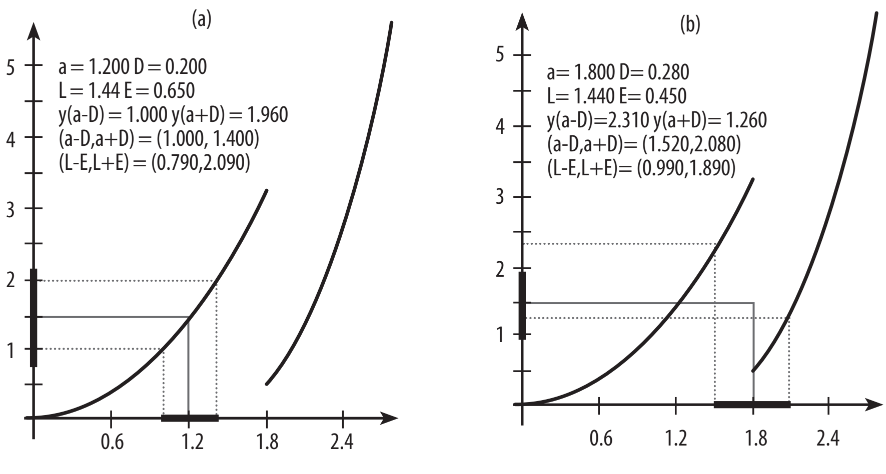


Figura 6. Ilustración del ejemplo 8

Otro de los conceptos importantes que encierra múltiples dificultades de aprendizaje es el de convergencia de una sucesión numérica. Como se indicó en el cuarto apartado, la investigación sugiere utilizar actividades que hagan uso simultáneo de una representación gráfica y numérica de las sucesiones que los estudiantes puedan cambiar dinámicamente, y que permitan también estimar el valor del límite a partir de dichas representaciones. En el programa de actividades se han previsto diversas tareas en esta dirección (categorías C4 y

C3). La situación del ejemplo 1 supuso una aproximación simple, computacional, al concepto de límite de una sucesión. Como se recordará, aquella circunstancia reveló las dificultades de aprendizaje de este concepto. Pues bien, la situación del ejemplo 9 plantea una actividad a realizar con el computador destinada a profundizar en el significado de la definición formal y a superar las dificultades. La figura 7 muestra una pantalla del nuevo micromundo que se ha diseñado. Este micromundo permitió a los estudiantes manipular los diversos objetos: los términos de la sucesión de trabajo (n,s_n), el valor L de su límite, el segmento $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ sobre el eje OY, una banda horizontal en la que son visibles los términos de la sucesión que se encuentran dentro del entorno $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ y rótulos que se evalúan dinámicamente. Los estudiantes estimaron los límites estableciendo de antemano un criterio de parada, y obtuvieron de forma experimental el valor $N(\varepsilon)$ a partir del cual $s_n \in (L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.

Ejemplo 9. Actividades con computador acerca de la caracterización ε-N de la convergencia de una sucesión. Considerar las siguientes sucesiones:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2},\ b_n = \frac{n}{n+1},\ c_n = \frac{n^3}{2n^3+n^2+3},\ d_n = \frac{n!}{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}}$$

1. Estimar el límite L de las sucesiones, estableciendo previamente un criterio de parada.
2. Para cada sucesión, fijar un valor $\varepsilon>0$ y obtener experimentalmente el término de la sucesión a partir del cual todos los términos siguientes se encuentran dentro del entorno $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

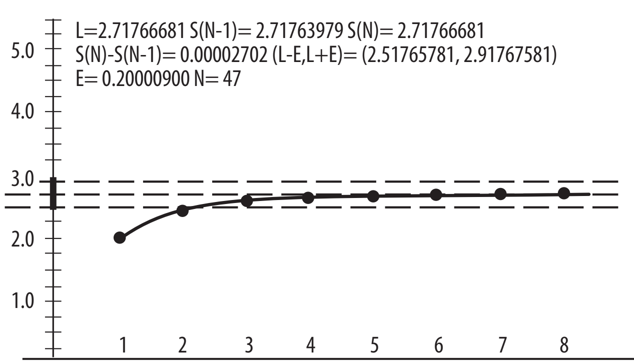


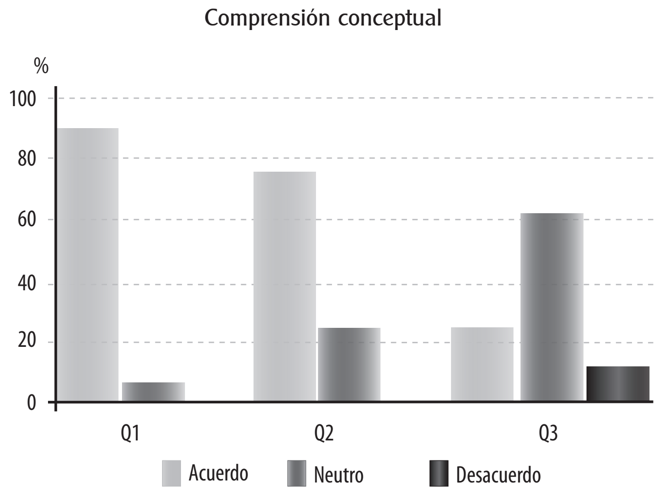
Figura 7. Ilustración del ejemplo 9

En suma, la estrategia general ha consistido en utilizar sistemáticamente problemas para introducir conceptos y describir situaciones. Dentro del proceso de resolución de los problemas, se ha acudido a las sugerencias de la investigación para proponer actividades destinadas a ayudar a los estudiantes en sus dificultades. Las actividades propuestas han sido de tipos muy diferentes, e incluyen ejercicios teóricos y de aplicación, tareas de computador, autoevaluaciones, sopas de letras, crucigramas matemáticos y son, en su gran mayoría originales de este equipo de investigación (Barragués *et al.,* 2010). Como se desprende de las diversas situaciones presentadas, las actividades diseñadas, junto a las estrategias utilizadas, parecen contar con potencial para generar participación activa de los estudiantes en el aula, para confrontar argumentos y para visualizar y tratar las dificultades de aprendizaje.

Resultados acerca la valoración de los estudiantes hacia la enseñanza recibida

Al evaluar la enseñanza experimental se deseaba recoger la percepción de los estudiantes del grupo experimental acerca de la enseñanza recibida y el modo en que el *clicker* había servido como elemento dinamizador del aula, para crear un ambiente de colaboración, para mostrar sus errores y dificultades y para mejorar la confianza en sí mismos. Para ello se adaptó el cuestionario que Bode, Drane, Kolikant y Schuller (2009) han validado experimentalmente. El anexo 1 contiene las 22 cuestiones sobre las que se preguntó de forma anónima al finalizar el curso. Los estudiantes debían indicar su grado de acuerdo con cada una de las afirmaciones (Acuerdo/Neutro/Desacuerdo). Las cuestiones Q1 a Q17 fueron tomadas directamente del original; las cuestiones Q18 a Q22 fueron diseñadas por el equipo investigador para recoger la opinión de los estudiantes acerca de aspectos adicionales de interés.

Las figuras 8 a 10 muestran las distribuciones de respuestas de los estudiantes del grupo experimental para cada uno de los cinco bloques en que se divide el cuestionario de opinión (anexo 1). Como puede apreciarse, la enseñanza diseñada parece generar valoración positiva en la mayoría de las cuestiones investigadas. En especial, los estudiantes han percibido claramente el papel que ha jugado el CRS para darles oportunidad de profundizar en los significados y para mostrarles sus errores (Q1, Q2). Los estudiantes valoran positivamente la enseñanza recibida al compararla con la tradicional, en aspectos clave como la mayor capacidad para recordar contenidos (Q7), el acceso a las ideas de los compañeros (Q8), la participación activa (Q10), tareas entretenidas (Q14) y motivación (Q17). Los estudiantes también perciben que la enseñanza así planteada exige un mayor esfuerzo que con una enseñanza tradicional (Q18) y una mayor responsabilidad sobre el propio aprendizaje (Q20). También es de señalar que los estudiantes encuentran adecuado el procedimiento de evaluación utilizado para medir el aprendizaje (Q21). Sin embargo, no perciben suficientemente la utilidad de las tareas realizadas con el computador, de modo que será este uno de los aspectos a mejorar en sucesivas implementaciones.



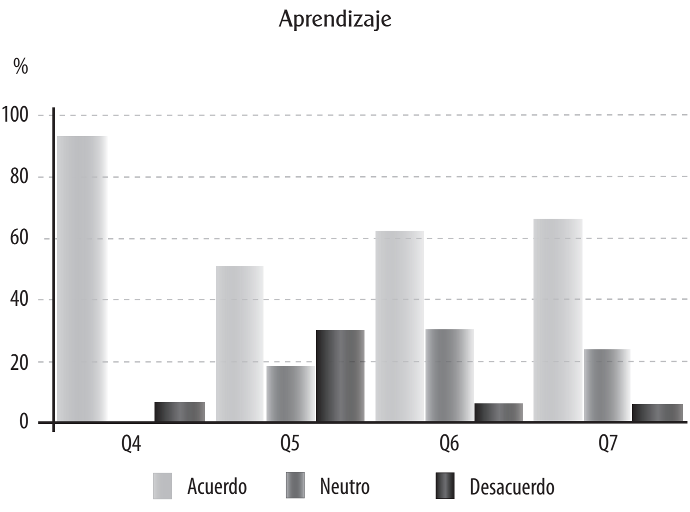


Figura 8. Distribución de respuestas de los bloques "Comprensión conceptual" y "Aprendizaje"

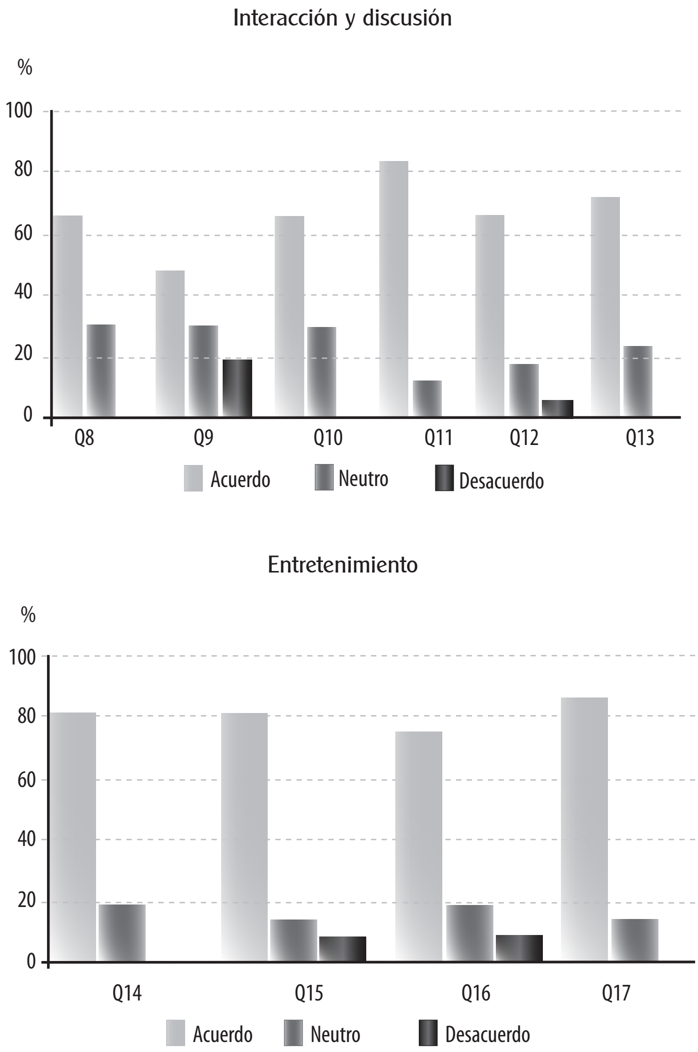


Figura 9. Distribución de respuestas de los bloques "Interacción y discusión" y "Entretenimiento"

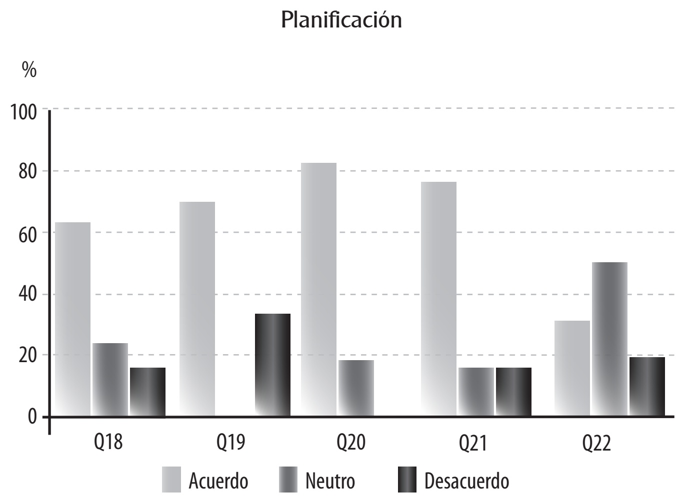


Figura 10. Distribución de respuestas del bloque "Planificación"

Resultados acerca del aprendizaje logrado

Se deseaba también encontrar alguna evidencia de mejora en el aprendizaje conceptual de los estudiantes del grupo experimental respecto a los del grupo de control. A pesar de la uniformidad de ambos grupos de estudiantes, no se podía asumir que partieran exactamente del mismo nivel de conocimiento sobre el tema objeto de examen, y por ello se optó por un diseño pretest/postest escrito y obtener para ambos grupos de estudiantes el valor de la ganancia media normalizada, definida por $\langle g \rangle = (S_{post} - S_{pre})/(100\% - S_{pre})$, donde S_{pre} es la puntuación (%) obtenida en el pretest y S_{post} la obtenida en el postest (Crouch y Mazur, 2001).

El pretest solo tenía sentido si los conceptos involucrados eran conocidos por los estudiantes al menos a un nivel elemental. Por ello se eligieron los temas de estudio local e integral de funciones de una variable real. Ambos temas se recogen en el currículo de Bachillerato de España y son objeto de evaluación en las pruebas de acceso a la Universidad, de modo que ya eran conocidos por los estudiantes. Al igual que Crouch y Mazur (2001), se decidió utilizar idénticos cuestionarios como pretest y postest. Se tomó esta decisión por diversas razones. En primer lugar, preferimos enfrentar a los estudiantes a los mismos enunciados antes y tras la formación, para no introducir en el experimento nuevas variables asociadas a posibles diferencias en la interpretación de los enunciados. En segundo lugar, las cuestiones no son memorísticas, exigen un razonamiento personal. Y, en tercer lugar, en ningún momento se explica a los estudiantes la solución correcta de las cuestiones.

Se optó, además, por utilizar cuestionarios ya validados experimentalmente, y por ello se tomaron 16 preguntas conceptuales adaptadas de Hughes-Hallett, Frazer, Gleason *et al.* (2010), diferentes a las utilizadas en nuestros *ConcepTests* y a las que los estudiantes respondieron en las condiciones usuales de examen. A modo de ejemplo, el anexo 2 muestra seis de esas preguntas. Los estudiantes debían señalar una respuesta de entre las propuestas en el enunciado y razonar su elección. La respuesta se consideró correcta solo si el razonamiento aportado lo era.

La ganancia media normalizada <g> obtenida por ambos grupos de estudiantes fue <g>=0.15 para el grupo de control y <g>=0.48 para el grupo experimental, lo cual arroja una diferencia significativa en favor del segundo. La tabla 2 muestra los porcentajes de respuestas correctas y el valor de <g> obtenidos para los seis ítems del anexo 2. Nótese que, a pesar de la uniformidad de ambos grupos de estudiantes, en algunos de los ítems del pretest los estudiantes han obtenido puntuaciones considerablemente diferentes en ambos grupos. Esta diferencia entre los puntos de partida de ambos grupos de estudiantes viene a resaltar la importancia de utilizar el valor de ganancia media normalizada <g> como indicador del avance de aprendizaje logrado por ambos grupos de estudiantes en relación a sus respectivos niveles de partida.

Tabla 2. Resultados obtenidos para los ítems del anexo 2

	% respuestas correctas grupo de control (N=86)			*% respuestas correctas grupo experimental (N=88)*		
Item	*Pretest*	*Postest*	*<g>*	*Pretest*	*Postest*	*<g>*
1	23	42	0.25	22	77	0.71
2	1.5	2.5	0.01	7	32	0.27
3	3	3	0.00	19	74	0.68
4	3	9	0.06	17	64	0.57
5	12	14	0.02	0	36	0.36
6	0	9	0.09	4	43	0.41

CONCLUSIONES

La investigación actual ha descrito en qué consiste aprender Matemáticas y las condiciones bajo las cuales se favorece un aprendizaje profundo de las mismas. Sin embargo, aún no está bien caracterizado el modo de definir entornos de trabajo capaces de reunir dichas condiciones en situaciones reales de docencia universitaria. Este trabajo intenta ser una aportación en esta dirección. Se ha descrito la fundamentación, el diseño y la evaluación de una propuesta de utilización de un CRS destinada a promover clases participativas de Matemáticas universitarias a fin de mejorar el aprendizaje.

La propuesta se basa en un modelo de ABP, cuyo principio es usar situaciones problemáticas como punto de partida para la construcción e integración de los nuevos conocimientos. Se ha mostrado cómo el modelo ABP es coherente con las hipótesis de Robert (1987) acerca del modo de favorecer un aprendizaje profundo de las Matemática universitarias. El CRS se ha adoptado como instrumento con el que hacer fluir la comunicación tanto entre los estudiantes como entre los estudiantes y el profesor. Si bien el CRS asume un importante papel al facilitar la comunicación dentro del aula, creemos que el potencial de estos sistemas puede explotarse en toda su dimensión solo si se integran en un modelo en el que la búsqueda de soluciones a problemas y la reflexión del estudiante sean las piezas clave.

Respecto al diseño, la propuesta se concreta en un programa de actividades, tanto presenciales como no presenciales, individuales o en equipo, que incluye ejercicios teóricos y de aplicación, tareas de computador, autoevaluaciones y pasatiempos matemáticos. En el entorno de trabajo colaborativo así construido, el CRS parece haber servido para involucrar a la mayoría de los estudiantes en problemas que requieren la aplicación de conceptos clave, que ponen en tensión su grado de aprendizaje y hacen visibles sus concepciones erróneas y su progreso.

Los resultados del cuestionario de opinión muestran que los estudiantes han valorado positivamente la enseñanza recibida y el uso del CRS. En concreto, han percibido claramente el papel que ha jugado el CRS para darles oportunidad de profundizar en los significados y para ser conscientes de sus dificultades; los estudiantes valoran positivamente el modelo experimental al compararlo con el modelo tradicional, en aspectos clave como la mayor capacidad para recordar contenidos, la consideración de las ideas de los compañeros, la participación activa y motivación. Los estudiantes encuentran más entretenidas las clases que con una enseñanza tradicional, pero también perciben que la enseñanza así planteada exige un mayor esfuerzo que una enseñanza tradicional y una mayor responsabilidad sobre el propio aprendizaje. Respecto a la mejora en el aprendizaje, los resultados muestran una ganancia normalizada media significativamente mayor en el grupo experimental que en el de control.

El resultado en su conjunto parece evidenciar que la metodología ABP-CRS descrita genera un clima de trabajo que es positivamente valorado por los estudiantes y que da lugar a un mayor aprendizaje. En este sentido, los resultados obtenidos están de acuerdo con los de otros trabajos ya comentados, que informan de resultados positivos en cuanto a la participación activa y el interés de los estudiantes, mejora en la comprensión, fomento de la discusión y la interactividad, ayuda a los estudiantes a medir su propio nivel de comprensión, toma de conciencia por parte del profesor de las dificultades de los estudiantes y trabajo no presencial. Además, la metodología descrita es muy general, y podría explotarse para la enseñanza y el aprendizaje de otras disciplinas diferentes a las Matemáticas.

Ciertamente, existen resultados a mejorar como pueden ser la búsqueda de evidencia más amplia de una mejora en el aprendizaje, la utilidad de las tareas de ordenador, la percepción del estudiante o la experiencia del profesorado. Sin embargo, los resultados obtenidos nos animan a pensar que la metodología descrita puede ir perfeccionándose para lograr resultados cada vez mejores en cuanto a actitudes de los estudiantes y adquisición de competencia tanto matemática como general en resolución de problemas. Precisamente contribuir a que los estudiantes adquieran esta competencia general en resolución de problemas ha sido el eje de la metodología que se ha elaborado, porque se trata de una habilidad a la que actualmente se concede gran importancia en la Educación Superior, para formar personas capaces de intervenir en los múltiples y dinámicos contextos en los que deberán desarrollar su vida profesional, social y personal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrahamson, L. (2009). A brief history of networked classrooms: effects, cases, Pedagogy and Implications. En Banks, D. A. (Ed.) *Audience Response Systems in Higher Education*. Hershey, PA, Information Science Publishing, pp. 1-25.

Anderson, R. D. y Loftsgaarden, D. (1987), A Special Calculus Survey: Preliminary Report. En Steen, L. A. (Ed.), *Calculus for a New Century: A Pump Not a filter*, MAA

Notes 8, Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 215-216.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática,* México, Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 97-140.

Balacheff, N. y Sutherland, R. (1994). Epistemological Domain of Validity of Microworlds, The Case of Logo and Cabri-géomètre. En Lewis, R. y Mendelsohn, P. (Eds.), *Lessons from Learning*, Amsterdan, North-Holland/ Elsevier Science, pp. 137-150.

Balacheff, N. y Kaput, J. J. (1996). Chapter 13: Computer-Based Learning Environmments in Mathematics. En Bishop, A. J., Clements K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 469-501.

Ball, D. L. (1993). With an eye on mathematical horizon: dilemmas of teaching elementary mathematics. En *The elementary School Journal*, 93 (4), pp. 373-397.

Banks, D. A. (2009). *Audience Response Systems in Higher Education*, Hershey, P. A., Information Science Publishing.

Barnes, M. (1988). Understanding the Function Concept: Some Results of Interviews with Secondary and Tertiary Students. En *Research on Mathematics Education in Australia*, May, pp. 24-33.

Barragués, J. I., Arrieta, I. y Manterola, J. (2010). *Análisis Matemático con soporte interactivo en Moodle*, Madrid, Pearson Educación.

Barragués, J. I., Morais, A., Manterola, J. y Guisasola, J. (2011). Use of a Classroom Response System (CRS) for teaching Mathematics in Engineering with large groups. En Mendez-Vilas, A. (Ed.), *Education in a technological world: communicating current and emerging research and technological efforts*, FORMATEX, pp. 572-580. Recuperado de http://www.formatex.info/ict/book/572-580.pdf. Fecha de acceso, julio de 2012.

Barrel, J. (1999), *Aprendizaje basado en Problemas, un Enfoque Investigativo*, Buenos Aires, Editorial Manantial.

Barrows, H. (1986). A Taxonomy of problem based learning methods. En *Medical Education*, vol. 20, pp. 481-486.

Bingolbali, E. y Monaghan, J. (2008), Concept image revisited. En *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), pp. 19-35.

Blomhøj, M. y Kjelden, T. H. (2010). Learning mathematics through modelling. The case of the integral concept. En Bharath, S. *et al.* (Eds.), *The first sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*, MT, Information Age Publishing and The Montana Council of Teachers of Mathematics, pp. 569-581.

Bode, M., Drane, D., Kolikant, Y. y Schuller, M. (2009). A Clicker Approach to Teaching Calculus. En *Notices of the AMS*, 56 (2), pp. 253-256.

Bruff, D. (2010). *Classroom Response System (Clickers) Bibliography*. Recuperado de http://www.vanderbilt.edu. Fecha de acceso, mayo de 2011.

Burn, R. P. (2002). The genesis of mathematical structures. En Kahn, P. (Ed.), *Effective learning and teaching in mathematics and its applications*, London, Koan Page, pp. 20-33.

Crouch, C. H. y Mazur, B. (2001), Peer Instruction: Ten years of experience and results. En *American Journal of Physics*, vol. 69, pp. 970-977.

Deal, A. (2007). *Classroom Response Systems. A Teaching with Technology White Paper*, Carnegie Mellon. Recuperado de http://www.cmu.edu/teaching. Fecha de acceso, noviembre de 2011.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992), The nature of the process conception of function. En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Washington, MAA Notes, 25, pp. 85-106

Duncan, D. (2005). *Clickers in the Classroom*, San Francisco, Pearson.

Duschl, R. A. (2000). Making the nature of science explicit. En Millar, R., Leach, J., y Osborne, J. (Eds.), I*mproving Science Education. The contribution of Research.* Buckingham, Open University Press, pp. 187-206.

D'Inverno, R., Davis, H. y White, S. (2003). Using a personal response system for promoting student interaction. En *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22 (4), pp. 163-169.

Ferguson, G. A. y Takane, Y. (1989), *Statistical analysis in psychology and education*, London, McGraw Hill.

Ferrini-Mundi, J., y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. En Kaput, J. y Dubinsky E. (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analysis and results*, MAA Notes 33, Washington, DC: MAA, pp. 31-45.

Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC, NCTM, pp. 225-256.

Gainsburg, J. (2003). *The mathematical behavior of structural engineers*. Doctoral dissertation, Stanford University.

Gravemeijer, K. (1994). Educational Development and Developmental Research in Mathematics Education. En *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, pp. 453-471.

Guershon, H. y Trgalová, J. (1996). Higher Mathematics Education. En Bishop, A. J., Clements

K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 675-700.

Hughes-Hallett, D. (1991). Visualization and Calculus Reform. En Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematicas*, MAA Notes, vol. 19, pp. 121-126.

Hughes-Hallett, D., Frazer, P., Gleason, A. M. *et al.* (2010). *Applied Calculus: ConcepTests*, NJ, John Wiley and Sons.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/Schoolworlds: The Transformation of a Innovation. En Keitel, C. y Ruthven, K. (Eds.), *Learning Through Computers: Mathematics and Educational Technology*, Berlin, Springer Verlag, pp.1-17.

Keller, C., Finkelstein, N., Perkins, K., Pollock, S., Turpen, C. y Dubson, M. (2007). Research-based Practices For Effective Clicker Use. En Hsu, L. Henderson, C. y McCullough, L. (Eds), *Physics Education Research Conference*. American Institute of Physics, pp. 128-215.

King, S. O. y Robinson, C. L.(2009). Pretty Lights and maths! Increasing student engagement and enhancing learning through the use of electronic voting systems. En *Computers and Education*, vol. 53, pp. 189-199.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*, New Heaven, GT, Yale University Press.

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. En Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC, NCTM, pp. 763-804.

Manzanares, A. (2008). Sobre el Aprendizaje Basado en Problemas. En Escribano, A. y Del Valle, A. (Eds.), *El Aprendizaje Basado en Problemas*, Madrid, Narcea, pp. 19-28.

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: A User's Manual*, NJ, Englewood Cliffs, Prentice Hall.

Miller, R. L., Santana-Vega, E. y Terrell, M. S. (2006). Can good questions and peer discussion improve calculus instruction? En *Primus*, vol. 16, núm 3, pp. 1-9.

Moise, E. E. (1984). Mathematics, Computation and Psychic Intelligence. En *Curriculum Review*, 24 (1), pp. 73-75.

Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje Basado en Problemas Problem–Based Learning. En *Theoria*, vol. 13, pp. 145-157.

Mundy, J. (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En Bell, A., Low, B. y Kilpatrick, J. (Eds.), *Theory, Research and Practice in Mathematics Education*, Proceedings ICME-5, pp. 170-172.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.

National Research Council (1995). *National Standards for Science Education*,

Whashington DC, National Academy Press.
Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. En *Educational Studies in Mathematics*, vol. 14, pp. 1-18.
Parris, R. (2011). *Winplot*. Recuperado de http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html. Fecha de acceso, octubre de 2011.
Pease, M. y Kuhn, D. (2011). Experimental Analysis of the Effective Components of Problem-Based Learning. En *Science Education,* 95 (1), pp. 57–86.
Perkins, D. N., Simmons, R., y Tishman S. (1990). Teaching cognitive and metacognitive strategies. En *Journal of Structural Learning*, 10 (4), pp. 285-292.
Peterson, W. J. (1987). Calculus Reform: Catching the Wave? En *Science News,* 132 (20), p. 317.
Robert, A. (1982). *Adquisition de la notion de convergence des suites numériques dans lénseignement supérieur,* Université de Paris 7, Tesis Doctoral.
Robert, A. (1987). De quelques spécificités de l´enseignement des mathématiques dans lénseignement post-obligatoire. En *Cahier de Didactique de mathématiques*, núm 7, IREM, Paris 7.
Rogalski, M. (1990). Quels étudiants, quels objectifs d´enseignement?, en Enseigner Autrement les Mathématiques. En DEUG a *Première année, Principes et Réalisations*, Brochure de la Comision Inter-IREM Université, pp. 4-8.
Scharzenberger, R. L. E. y Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real number and limits. En *Mathematics Teaching*, vol. 82, pp. 44-49.
Schneider, M. (1993). A way to analyse several difficulties the pupils meet with in calculus. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.), *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME-7, Québec, Canadá, pp. 31-34.
Sierpinska, A. (1985). Obstacles Épistemologiques Relatifs à la Notion de Limite. En *Recherches en didactique des Mathèmatiques*, 6 (1), pp. 5-67
Sierpinska, A. (1992). Theoretical perspectives for development of the function concept. En Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds), *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, pp. 23-58.
Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*, London, Pelican.
Spillane, J. P. y Zeuli, J. S. (1999). Reform and teaching: Exploring patterns of practice in the context of national and state mathematics reform. En *Educational Evaluation and Policy Analysis*, vol. 21, pp. 1-27.
Stepien, W. J. (1993). Problem-based Learning: As Authentic as It Gets. En *Educational Leadership*, 50 (7), pp. 25-28.
Tall, D. (1996), Chapter 8: Functions and Calculus. En Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds), *International Handbook of*

Mathematics Education, Dordrecht, Kluwer academic Publishers, pp. 289-325.
Thomas, M. O. J. y Holton, D. (2003). Technology as a Tool for Teaching Undergraduade Mathematics. En Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Leung, F. K. S. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer academic Publishers, pp. 351-394.
Thompson, P. W. (1987). Mathematical Microworld and Intelligent ComputerAssisted Instruction. En Kearsley, G. R., (Ed.), *Artificial Intelligence and Instruction: Applications and Methods*, New York, Addison-Wesley, pp. 83-109.
Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. En The *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 14, pp. 293-305.
Yerushalmy, M. y Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. En *Educational Studies in Mathematics*, vol. 80, pp. 287-306.
Zbiek, R. M., Heid, M. K. y Blume, G. W. (2007). Research on technology in mathematics education. En Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, NC, NCTM, pp. 1169-1206.

ANEXO 1. CUESTIONARIO DE OPINIÓN

Comprensión conceptual

Q1. El *clicker* me ha permitido ser más consciente de mis dificultades para entender los conceptos que con las clases tradicionales.
Q2. El *clicker* me ha ayudado a entender qué conceptos se encontraban detrás de los problemas que se planteaban.
Q3. Cuando se planteada una pregunta para contestar con *clicker*, yo sabía lo tenía que hacer, sabía lo que se esperaba de mí.

Aprendizaje

Q4. El *clicker* permite al profesor ser más consciente de las dificultades de los estudiantes para entender los conceptos que con las clases tradicionales.
Q5. Una clase con *clickers* es más exigente para el profesor que una clase tradicional.

Q6. Trabajando en mi grupo, el escuchar a otros estudiantes dar explicaciones con sus propias palabras, me ha ayudado a entender.
Q7. Puedo recordar más después de una clase usando *clickers* que después de una clase tradicional.

Interacción y discusión

Q8. El *clicker* me ha permitido conocer lo que piensan mis compañeros de clase en mayor medida que con las clases tradicionales.
Q9. Creo que lo mejor es usar el *clicker* de forma anónima, es decir, sin que se sepa en clase quién ha elegido cada respuesta.
Q10. Yo he estado más activamente involucrado en el trabajo en una clase con *clickers* que en una clase más tradicional.
Q11. La discusión de problemas *clicker* con otros estudiantes me ha ayudado a entender mejor.
Q12. Los miembros de mi grupo se involucraron activamente en resolver los problemas *clicker*.
Q13. El trabajo colaborativo en mi grupo contribuyó a dar una solución de más calidad a los problemas.

Entretenimiento

Q14. Con el *clicker*, la clase me ha parecido más divertida que con las clases tradicionales.
Q15. El hecho de ver el histograma de resultados del problema *clicker* me ayudó a aumentar mi confianza en mi capacidad para dar respuestas correctas.
Q16. Creo que el *clicker* debería usarse también en otras asignaturas.
Q17. Me he sentido más motivado a prestar atención en una clase con *clicker* que en una clase tradicional.

Planificación

Q18. La asignatura así planteada exige más trabajo a los estudiantes que con un planteamiento más tradicional.
Q19. Encuentro adecuado que el profesor deje como tarea para casa la lectura previa de la lección y la realización de ejercicios.

Q20. Este planteamiento de la asignatura hace que el estudiante tenga que responsabilizarse más de su aprendizaje que con una clase más tradicional.
Q21. El modo en que se ha evaluado es adecuado para que el profesor sepa si los estudiantes han aprendido.
Q22. Las prácticas de computador me han ayudado a entender mejor los conceptos.

ANEXO 2. EJEMPLOS DE ÍTEMS DEL PRETEST/POSTEST

Ítem 1. Para la función y(x) cuya gráfica muestra la figura 11, ¿Cuál es el signo de la segunda derivada en los puntos x=a, x=b y x=c? Respuestas: A: + , 0. B (correcta): - , 0 , +. C: - , 0 . D: + , 0 , +. E: -+, + . F: - , - , +.

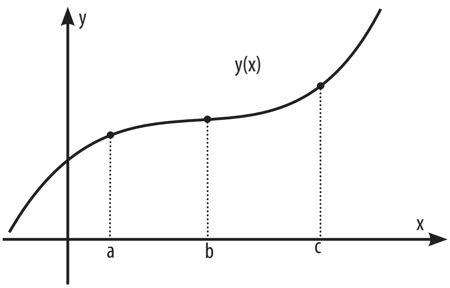


Figura 11. Ilustración del ítem 1

Ítem 2. La figura 12 muestra el gráfico de la posición de un móvil en cada instante. ¿En cuántos instantes la velocidad del móvil pasa de ser creciente a decreciente o viceversa? Respuestas: A: en un instante. B: en dos instantes. C: (correcta) en tres instantes. D: en cuatro instantes. E: en ningún instante.

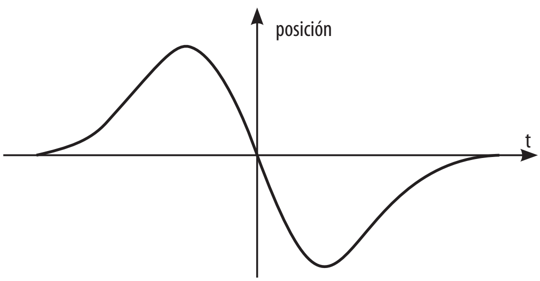


Figura 12. Ilustración del ítem 2

Ítem 3. Considerar la función y(x) cuya gráfica muestra la figura 13. ¿Cuál de las gráficas (a)-(d) de la figura 14 puede representar la pendiente en cada punto de y(x)? Respuestas: A: la gráfica (a). B: (correcta) la gráfica (b). C: la gráfica (c). D: la gráfica (d).

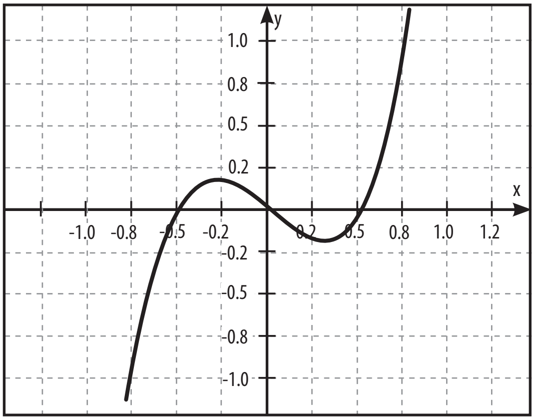
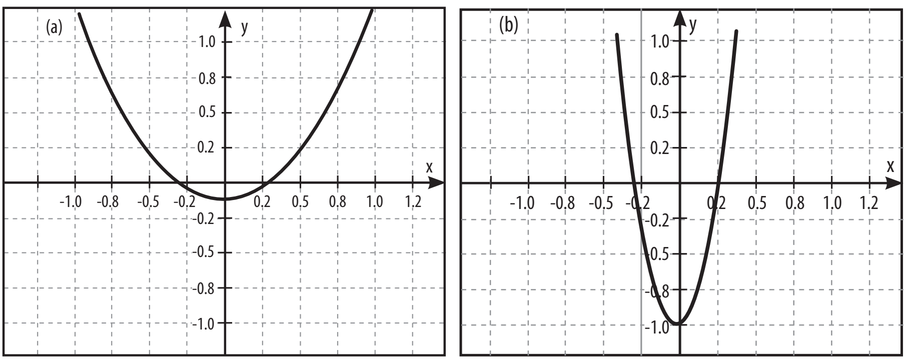


Figura 13. Primera ilustración del ítem 3



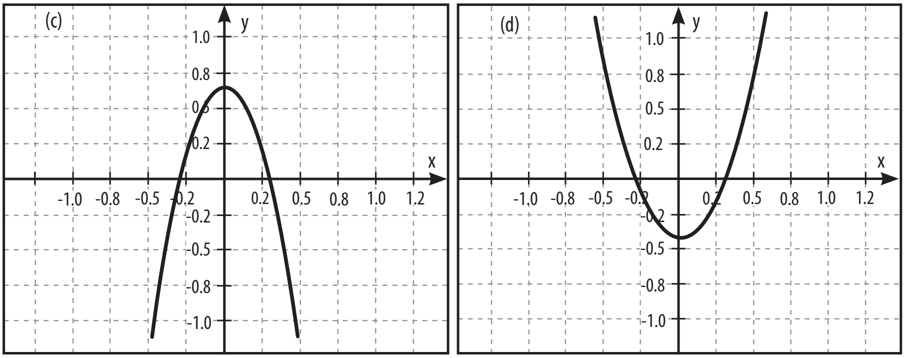


Figura 14. Segunda ilustración del ítem 3

Ítem 4. La figura 15 muestra el gráfico de la posición de un móvil en cada instante. ¿Cuál de las gráficas (a)-(d) de la figura 16 puede representar la aceleración del móvil en cada instante? Respuestas: A: la gráfica (a) B: (correcta) la gráfica (b) C: la gráfica (c) D: la gráfica (d)

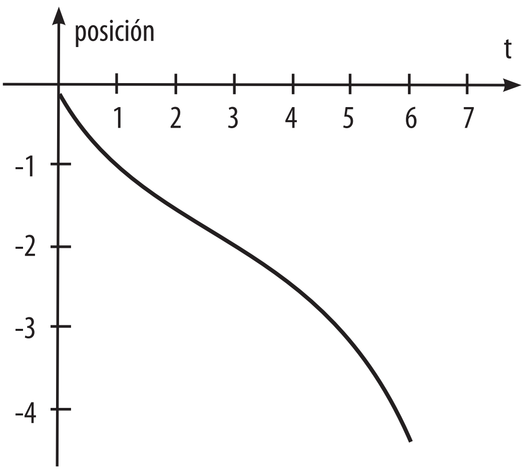


Figura 15. Primera ilustración del ítem 4

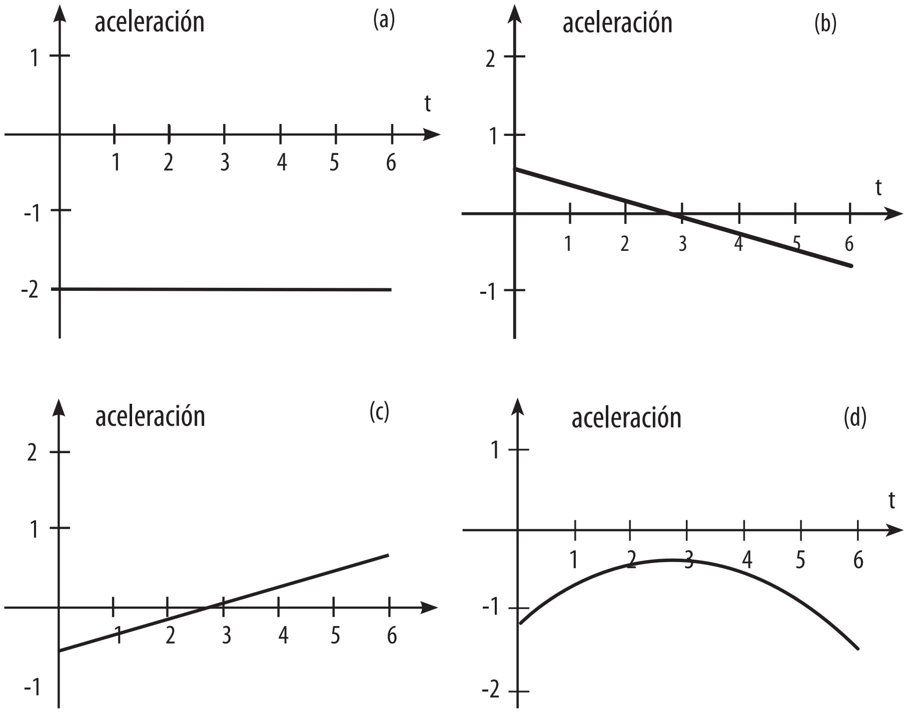


Figura. 16. Segunda ilustración del ítem 4

Ítem 5. La figura 17 muestra las gráficas de las velocidades de dos ciclistas que parten del mismo punto y circulan por una pista en la misma dirección durante 3 minutos. ¿En qué instante de tiempo el ciclista 2 alcanza al ciclista 1?

Respuestas: A: en un instante entre 1 y 1.25 minutos. B (correcta): en un instante entre 1.25 y 2 minutos. C: en un instante entre 2 y 3 minutos.

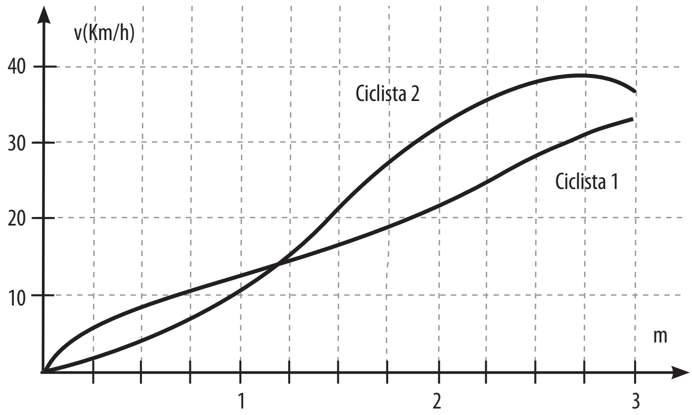


Figura 17. Ilustración del ítem 5

Ítem 6. La figura 18 muestra la gráfica de una función y(x), y se indica el valor de las áreas de las regiones sombreadas. Si F′(x)=y(x) y F(0)=10, ¿cuál es el valor de F(5)? Respuestas: A: 17. B: 4. C: 1. D: 13. E: (correcta) 11. F: 16.

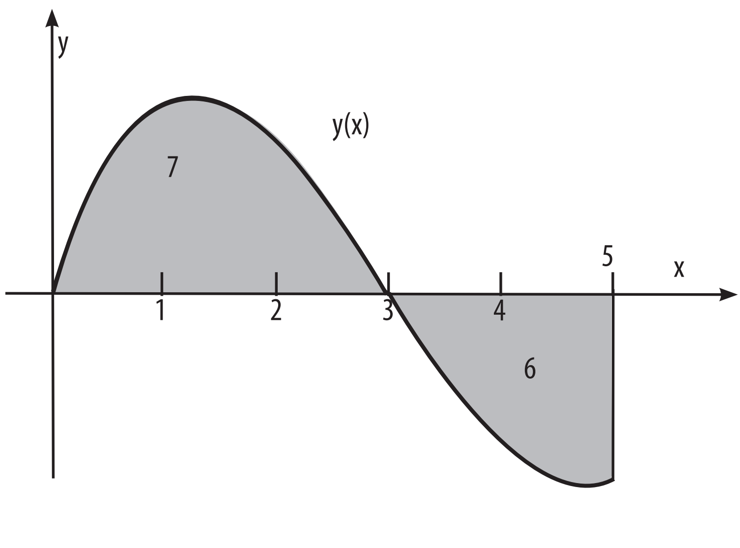


Figura 18. Ilustración del ítem 6

Datos de los autores

José Ignacio Barragués
mapbafuj@sp.ehu.es

Adolfo Morais
a.morais@ehu.es

María Juncal Manterola
mariajuncal.manterola@ehu.es

Jenaro Guisasola
jenaro.guisasola@ehu.es

Escuela Universitaria Politécnica de San Sebastián
Universidad del País Vasco, Departamento de Física Aplicada, España.