ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto *B-Learning*

María del Carmen Penalva, Carolina Rey y Salvador Llinares

Resumen. El objetivo de esta investigación es identificar características del proceso de instrumentalización del conocimiento de didáctica de la matemática de profesores de educación primaria en un curso de especialización desarrollado en un contexto *b-learning*. Participaron 65 maestros en un entorno de aprendizaje *b-learning* integrando debates virtuales y centrados en el análisis del pensamiento matemático de alumnos de educación primaria. El análisis de las participaciones en los debates virtuales y la resolución de las tareas nos han permitido caracterizar el aprendizaje del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas como un cambio en el discurso de los estudiantes. Este cambio se puso de manifiesto por la integración paulatina del conocimiento de didáctica de la matemática en la interpretación del pensamiento matemático de los alumnos. Los resultados indican que las aportaciones a los debates en forma de refutaciones favorecieron el proceso de instrumentalización de las ideas teóricas.

Palabras clave: Desarrollo profesional, *b-learning*, aprendizaje de las matemáticas, interacción.

Learning to notice "mathematics learning" in primary education. Characteristics from a B-Learning context

Abstract. The aim of this research is to identify the characteristics of the process of instrumentalization of the knowledge in didactics of mathematics in primary teachers. Context was a professionalization course as psicopedagogic. 65 primary teachers participate in a b-learning environment focus on analyzing children's mathematical thinking. Learning environment integrated case studies and virtual debates. The analysis of spicopedagogic students' productions and their participations in debate led us to characterize the learning as a change in the discourse. Discourse change was evidenced by the gradual integration and use of didactics of mathematics knowledge in the task solving. The focus of tasks was to interpret students' mathematical thinking and to plan a new educational intervention. Results allow us to identify the rebuttals during online debate as the mechanism that support of instrumentalization process of knowledge evidenced by the change of the discourse.

Key words: Professional development, b-learning, mathematics learning, interaction.

Fecha de recepción: 11 de noviembre de 2012. Fecha de aceptación: 13 de abril de 2013.

INTRODUCCIÓN

Uno de los ámbitos curriculares de la educación primaria que genera mayores dificultades es la enseñanza de los algoritmos de las operaciones con números naturales. Esto ha hecho que una parte de los movimientos de reforma en la enseñanza de las matemáticas en educación primaria se haya centrado en el papel de estos algoritmos y en cómo mejorar su enseñanza (Gravemeijer y van Galen, 2003; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001). Por otra parte, las investigaciones sobre cómo comprenden los maestros las ideas matemáticas que subyacen a los procedimientos aritméticos indican que, en algunos casos, estos pueden ser capaces de realizar los algoritmos, pero tienen dificultades en explicar por qué funcionan (McClain, 2003; Simon, 1993; Thanheiser, 2010). En este contexto, emerge la posibilidad de formar maestros que desarrollen tareas de apoyo a sus compañeros, desempeñando papeles de asesores (Even, 2005), planteándose cuestiones de investigación específicas.

Los estudios sobre cómo maestros, en su papel de asesores, construyen el conocimiento necesario para realizar esta labor es un campo relativamente nuevo en el ámbito de la investigación en general (Blanco y Guerrero, 2002; Perrota, 2006) y en el ámbito de la educación matemática en particular (Llinares y Krainer, 2006; Rey, Penalva y Llinares, 2006). La figura del maestro como asesor en contextos de desarrollo profesional tiene características muy diversas y suele responder a iniciativas institucionales (maestros con formación de postgrado realizando tareas de asesoramiento en intervención curricular). Sin embargo, esta nueva situación genera cuestiones sobre cómo los maestros insertos en estas iniciativas de desarrollo profesional aprenden el conocimiento necesario para desarrollar la tarea de asesores (Even, 2005).

Una perspectiva sobre el aprendizaje del conocimiento en contexto

Las perspectivas situadas y sociales de aprendizaje (Wenger, 1998) caracterizan el proceso de aprendizaje subrayando la importancia de la actividad y el contexto en el que se realiza. En estas perspectivas, las ideas de *aprender* y *hacer* son inseparables. Así, para aprender una práctica compleja como es la de asesor en matemáticas es necesaria la realización de tareas que permiten reproducir pensamientos y destrezas similares a las que realizan los asesores expertos en su vida profesional. Este proceso de aprendizaje se entiende como la instrumentalización de las ideas procedentes de la didáctica de la matemática para entender y manejar las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Aquí el término *instrumento* tiene un significado más amplio que el atribuido como herramienta técnica (instrumentos físicos, *software*, etc.). El significado de instrumento incluye aquí conceptos, formas de razonar y la manera de generar un discurso. Es decir, los maestros, en los cursos de especialización, deben aprender a dotar de sentido y a apropiarse del conocimiento específico para pensar y actuar como expertos (Wenger, 1998). Un ámbito particular en el que se debe realizar este proceso de instrumentalización está relacionado con el conocimiento del maestro acerca de las características del aprendizaje matemático de los estudiantes (Even y Tirosh, 2002).

Desde esta perspectiva sobre el aprendizaje, la argumentación como negociación de significados (Andriessen, Erkens, van de Laank, Peters y Coirier, 2003) se convierte en un elemento clave en el aprendizaje. Aquí, el discurso generado es parte intrínseca del proceso de construcción del conocimiento (Wells, 1999). Los instrumentos utilizados en la comunicación no son meros medios auxiliares para hacer explícito el pensamiento, sino que se piensa en ellos como parte integrante del acto comunicativo, y consecuentemente, de la cognición. Como consecuencia, aprender a usar el conocimiento en contexto significa usar el saber teórico para comprender y manejar las diferentes actividades en que se organiza la práctica profesional. En este contexto, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) están empezando a usarase en los programas de formación de profesores para facilitar la interacción con el objetivo de apoyar el aprendizaje (Borba y Llinares, 2012; Llinares y Olivero, 2008). Sin embargo, esta nueva situación también genera algunas cuestiones sobre sus efectos en el aprendizaje. En el contexto particular del uso de los debates en línea emergen cuestiones específicas sobre cómo las participaciones median el proceso de aprendizaje y cómo se puede estudiar empíricamente este proceso

(Andriessen *et al.*, 2003). Algunas investigaciones indican que la naturaleza de la interacción está vinculada a realizar tareas con objetivos claramente establecidos e intencionalmente integradas en un programa de formación (Penalva, Rey y Llinares, 2011; Rey, Penalva y Llinares, 2006). Zhu (2006) indica que la generación de un objetivo compartido ayuda a los estudiantes a implicarse en la interacción, pero cuando la interacción no está motivada por el objetivo de resolver tareas colaborativamente, hay menos probabilidad de aprender desde la discusión. En este sentido, el discurso generado en las interacciones en línea puede ser visto como un mediador en el proceso de construcción del conocimiento pues, al igual que cualquier otro artefacto, el texto escrito en un debate en línea es usado intencionalmente para conseguir ciertos objetivos (Wells, 1999).

En la intersección de estos dos ámbitos, el aprendizaje de los maestros en el desarrollo de la tarea de asesores y la relación entre la interacción y la construcción del conocimiento, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

> ¿Cómo aprenden a usar el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas los maestros en formación, para realizar tareas como asesores en un entorno de aprendizaje diseñado *ad hoc*?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 65 maestros inscritos en un programa de formación de asesores (Psicopedagogía), centrado en el aprendizaje de las matemáticas. Un foco de este programa se dirigía a tareas de interpretar el aprendizaje matemático de los alumnos (diagnosticar y evaluar) y aprender a planificar posibles intervenciones de mejora. El contenido relativo al aprendizaje de las matemáticas constaba de un módulo de 45 horas, adoptando una aproximación metodológica basada en el estudio de casos (Lundeberg, Levin y Harrington, 1999), con objeto de favorecer el aprendizaje en contexto.

Diseño del entorno de aprendizaje

La pesquisa tomó como referencia la investigación basada en el diseño (*Design-Based Research Collective,* 2003). Desde esta perspectiva, simultáneamente se plantean objetivos para el desarrollo de entornos de aprendizaje y estos se usan como laboratorios naturales para estudiar el aprendizaje y la enseñanza a través de diferentes ciclos de diseño-implementación-análisis.

El caso que articuló el diseño del entorno de aprendizaje constaba de tres actividades profesionales.

Tarea 1: Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (diagnóstico de dificultades).
Tarea 2: Planificar.
Tarea 3: Evaluar el proceso efectuado.

El contenido del caso de David (figura 1) viene justificado por las dificultades en el desarrollo del sentido numérico y de los algoritmos de las operaciones con los números naturales, en particular, en relación con la enseñanza del algoritmo de la división (Lampert, 1992).

El caso de David

Jorge, profesor de primaria de 5º curso en un centro escolar, se ha reunido con Rosa, la asesora, para informarle de los errores que comete David, uno de sus alumnos, cuando realiza determinadas operaciones. Según Jorge, las dificultades del alumno están haciendo que retrase su aprendizaje y pierda interés.
Antes, David vivía en otra ciudad, y este es su primer año en este centro. Es un chico de carácter abierto con sus compañeros y muy pronto ha hecho nuevos amigos. David participa en las tareas que se le demandan en otras asignaturas, pero suele ser poco comunicativo en clase de matemáticas, sobre todo cuando tiene que resolver las tareas aritméticas. David conoce las tablas de multiplicar de memoria y suele hacer bien los problemas verbales cuya resolución requiera realizar una multiplicación que tenga un factor de una sola cifra o de dos cifras, por ejemplo 152x32 o una división con números sencillos, 56:7. David también realiza correctamente otras divisiones, como 5750:2 que la resuelve de la forma siguiente:

$$
\begin{array}{l|l}
5750 & 2 \\ \cline{2-2}
17 & 2875 \\
\ \ 15 & \\
\ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
$$

Sin embargo, en algunas divisiones David comete errores. Jorge expone a Rosa que ha tratado de explicarle cómo debe hacer la división en otros casos, pero parece que David se bloquea y no es capaz de seguir sus explicaciones. Rosa decide asistir a la clase y observar a David.
Al día siguiente, Rosa asiste al aula de Jorge. Él introduce la tarea para hoy de la siguiente manera:

"Aunque algunos de vosotros ya sabéis hacer divisiones cuando el divisor es un número de 2 y de 3 cifras, hoy vamos a repasar esas operaciones. Sabéis que la multiplicación y la división son operaciones inversas; es decir, que cuando en una multiplicación falta un factor, lo podemos obtener haciendo una división. Quiero que consultéis vuestro libro por la página.... y hagáis el ejercicio 1"

$$9 \times \square = 21.150$$

El factor desconocido en esta multiplicación es el cociente de la división 21.150 : 9.

Dividendo	21.150	9	Divisor
	31	2.350	Cociente
	45		
	00		

La división exacta es la operación que permite encontrar el factor desconocido de una multiplicación de dos factores.

1. Observa el ejemplo resuelto y calcula en cada caso el factor desconocido.

$15 \times \square = 480$

480	15
30	32
0	

$15 \times 32 = 480$

- = 12 x □ 288
- = 23 x □ 437
- = 45 x □ 585
- = 55 x □ 990
- = 63 x □ 1.827
- = 32 x □ 1.120
- = 73 x □ 1.387
- = 52 x □ 2.236

David y sus compañeros realizan individualmente la tarea. Una vez finalizada la clase, Jorge y Rosa recogen el trabajo de David.

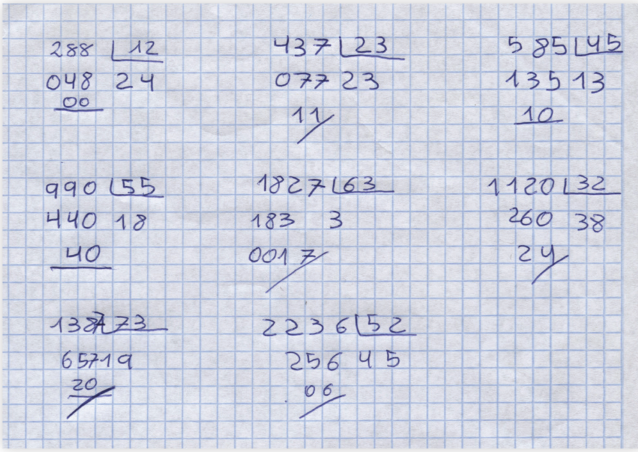


Figura 1. El caso de David (1º parte)

El caso describe una situación en la que un maestro identifica las dificultades de David, uno de sus alumnos, con el algoritmo de la división, y empieza a colaborar con Rosa, la asesora, para identificar las razones de estas y proponer un plan de ayuda. Las dificultades del alumno con el algoritmo de la división están vinculadas al significado de las diferentes unidades usadas (relacionadas con las idea de valor de posición y de agrupamiento) y en la coordinación de las diferentes operaciones (multiplicaciones y restas) que deben ser integradas en el algoritmo. La descripción inicial de esta situación viene acompañada de unas cuestiones que los estudiantes para asesor deben responder, y que tienen como objetivo identificar e interpretar las características del aprendizaje matemático:

Tarea 1. Identificar e interpretar lo que puede ser relevante en el pensamiento del alumno: diagnosticar...

- ¿Qué puedes decir de las dificultades que tiene David?
- ¿Son útiles este tipo de tareas?
- ¿Qué tipo de información ha obtenido Rosa? ¿Por qué?

La segunda tarea que realizaron los estudiantes[1] consistía en especificar las características de la forma de proceder del alumno para poder planificar una intervención.

Rosa ha identificado como una de las causas de las dificultades de David la forma resumida del algoritmo de la división que aparece en el libro de texto. Rosa explica a David el algoritmo de la "división larga" utilizando el siguiente procedimiento que aparece en otro libro de matemáticas, 65:5, colocando el énfasis en el significado de las unidades utilizadas y en la forma en que las anotaciones en el algoritmo escrito resumen la relación entre las diferentes operaciones utilizadas (multiplicar y restar).

1. Dividimos las 6 decenas entre 5

$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Sobra 1 decena, que son 10 unidades.

2. Añadimos las 10 unidades a las 5 que teníamos. Dividimos 15 entre 5:

$$\begin{array}{l|l} 65 & 5 \\ \cline{2-2} -5 & 13 \\ \cline{1-1} 15 & \\ 15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

no queda

Esta división se llama exacta, porque su resto es 0.

Tras unas sesiones de trabajo individual con Rosa, David realiza con éxito divisiones como: 68:6, 178:2, 465:3, 193:4 y también divisiones por dos cifras como 678:13, pero comete errores en algunas divisiones, como 115:6, 1517:4, 1215:9.

La descripción de este segundo momento viene seguida de una serie de cuestiones que deben responder los asesores en formación. Estas cuestiones tienen como objetivo centrar la atención en los significados de las unidades y las descomposiciones de los números como una aproximación conceptual al algoritmo de la división.

[1] Denominamos a los participantes como estudiantes para hacer la descripción más ágil.

Tarea 2

1. ¿El hecho de que David realice con éxito determinadas divisiones quiere decir que es capaz de indicar qué tipo de unidad es, por ejemplo, el 1 que aparece marcado en negrita en la división que se muestra a continuación?

$$
\begin{array}{r|l}
178 & \underline{2\quad} \\
-16 & 89 \\
\cline{1-1}
\mathbf{1}8 & \\
-18 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2. ¿David dota de significado a la operación de la división?
3. ¿En qué medida ha podido influir el tipo de representación utilizado para promover el aprendizaje del algoritmo de la división?

Trata de explicar las respuestas que daría Rosa a las cuestiones planteadas.
Una vez que Rosa ha situado la principal causa de los errores que comete David para realizar determinadas operaciones en el cálculo de restas "con llevadas", se pide:

4. ¿Qué podría decir de los contenidos (conceptuales y procedimentales) de las actividades/tareas planteadas a David?
5. ¿Cuál es la demanda cognitiva que se le exige al resolutor cuando tiene que realizar la siguiente sustracción: 615-378? ¿Por qué?

Finalmente, los estudiantes respondían a la tarea 3 desarrollando una visión conjunta del proceso de colaboración entre el maestro y la asesora (identificar e interpretar el pensamiento matemático del estudiante y proponer un plan de ayuda).

Tarea 3

Parte 1

1. ¿Tendría que haber actuado con anterioridad Rosa?
2. ¿Qué enfoque organiza el fragmento de enseñanza de las matemáticas que se muestra en la situación descrita?, ¿cómo facilita la construcción del conocimiento matemático?
3. ¿Qué tipo de problemas se le han planteado a Rosa?
4. ¿Qué acciones debe realizar Rosa encaminadas a ayudar a David?

Parte 2. Realiza un informe escrito

1. Indica cuáles son las dificultades y errores más comunes que conlleva el aprendizaje significativo del algoritmo de la división.
2. Diseña una tarea base (una secuencia de tareas) para promover el aprendizaje del algoritmo de la división y señala sus características. Modifica alguna variable en la tarea y obtén una secuencia de tareas con el mismo fin.

Por otra parte, la metodología del entrono de aprendizaje siguió una estructura *b-learning* integrando tres contextos presenciales y tres contextos *online* (mediante el uso de debates en línea) con una duración de 20 días (figura 2). Las actividades presenciales y aquellas en línea tenían las siguientes características:

- trabajo en grupos pequeños, y posteriormente en gran grupo;
- producción de informes de manera colaborativa;
- debate y discusión sobre las interpretaciones y propuestas alternativas.

Los 65 estudiantes se agruparon en 11 grupos para realizar las tres tareas propuestas en el caso. Las cuestiones planteadas en ellas eran debatidas por los estudiantes en pequeños grupos de forma presencial, generando informes discutidos con posterioridad entre los diferentes grupos, considerando la información sobre el desarrollo del sentido numérico y la representación de los números y algoritmos (Belmonte, 2003; Gravemeijer y van Galen, 2003; Llinares, 2001; Van den Heuvel-Pahhuizen, 2001).

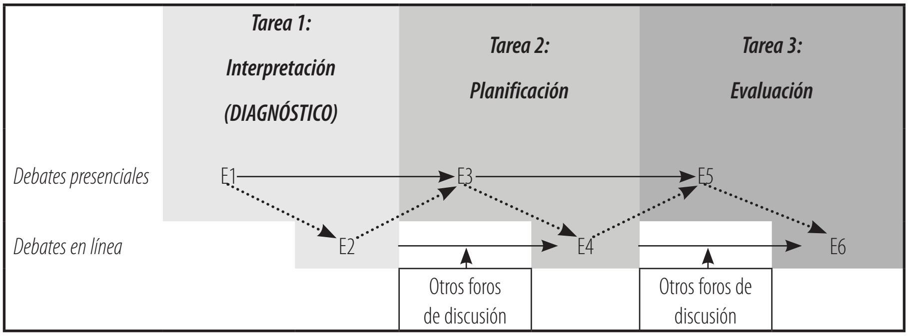


Figura 2. Estructura *b-learning* de la secuencia diseñada.
Ei (i=1,2,3,4,5,6): contextos de interacción presenciales y en línea

Entre cada una de las tres sesiones presenciales se habilitó la posibilidad de participar en un debate en línea. En cada uno de estos debates, los estudiantes debían compartir y negociar el contenido de los informes producidos para cada una de las tareas, antes de considerarlos definitivos. Tanto el trabajo presencial como la participación en los debates en línea debían hacerse como aportes de grupo. Esta característica obligaba previamente a los estudiantes a consensuar, en sus grupos, sus aportes a los debates. Por ello se habilitó un recurso tecnológico que denominamos *otros foros de discusión*, en el que los miembros de un grupo discutían sus aportaciones/participaciones con los demás grupos de manera previa al debate, y resolvían de qué manera podía ser usada la información teórica para apoyar sus interpretaciones y decisiones.

Análisis

Para dar respuesta a las cuestiones de investigación planteadas, consideramos dos tipos de datos: las aportaciones a los debates en línea y los informes producidos por cada grupo, como respuesta a las tres tareas planteadas (en total 33 informes). Cada aportación al debate en línea fue categorizada considerando la "forma" de participación (Pena-Shaff y Nicholls, 2004), adoptando un sistema de seis categorías, lo que nos permitió determinar cómo la forma en la que se participaba podía influir en el desarrollo del debate.

- *Respuesta (RS)*: aportación inicial referida a la propia tarea. Contestación a las preguntas realizadas por el moderador a lo largo del debate.

- *Preguntas de reflexión (PR):* pregunta que induce a una mayor reflexión sobre un tema en un momento dado a lo largo del debate: revisión de la aportación, ampliación de la información... Incluye tanto las preguntas que se producen a lo largo del discurso de un grupo, como las que lanza un grupo participante de forma directa.
- *Preguntas de aclaración (PA),* demandan la aclaración de un concepto-idea utilizada por un grupo participante.
- *Respuestas de aclaración (RA)* que emiten los grupos ante las preguntas de aclaración o de reflexión realizadas por alguno de los grupos participantes.
- *Disconformidad (D)* con lo afirmado en la aportación a la que se dirige.
- *Refutación (RF),* se manifiesta disconformidad con otra aportación, y se acompaña con argumentos que apoyan su idea.

Posteriormente, analizamos el contenido de las participaciones en los debates y el contenido de los informes finales que cada grupo generó para las tres tareas. En esta fase del análisis nos centramos en cómo los estudiantes usaban e integraban las ideas teóricas de didáctica de las matemáticas cuando tratan de interpretar el pensamiento matemático de David y generan propuestas de acción. La comparación longitudinal a través del itinerario de formación nos permitió identificar las modificaciones en las características del discurso generado. La integración del análisis de las aportaciones al debate y del análisis de los informes de cada tarea proporcionó la información sobre la instrumentalización del conocimiento en la resolución de las tareas profesionales de interpretar y tomar decisiones de acción (Llinares, 2012) (ver tabla 1). Este proceso permitió generar cuatro niveles de desarrollo del conocimiento:

- *Nivel intuitivo,* descripción de lo observado, sin vincularlo a información teórica o respondiendo a la situación descrita desde las experiencias previas.
- *Nivel retórico,* se hace uso de términos teóricos para construir un discurso, pero sin establecer relaciones entre ellos y las evidencias proporcionadas en el caso. Falta cohesión en el discurso. Se usan términos procedentes de los documentos proporcionados, pero sin un sentido claro.
- *Nivel integración,* supone el inicio de uso instrumental de elementos teóricos; la información teórica se usa para interpretar localmente aspectos de la enseñanza.

- *Nivel reificación*, el conocimiento teórico empieza a adquirir significado por él mismo y se responde a lo planteado relacionando elementos teóricos entre sí.

Tabla 1. Nivel de desarrollo y ejemplos de protocolos procedentes del discurso de los estudiantes en los foros

	Ejemplo	***Comentarios analíticos que aportan información para asignación a un nivel de desarrollo***
Nivel 1. Intuitivo	G3 (09:06:36 20/11/2003) ¿Qué se podría decir de los contenidos (conceptuales y procedimentales) implícitos en las actividades/tareas planteadas a David? "Podemos decir que los contenidos conceptuales influyen en la correcta aplicación de los procedimentales; si no existen unas estructuras básicas de comprensión matemática, no se podrá aplicar esa estructura a una operación mediante un procedimiento." "La correcta realización de una operación (en este caso la división) implica la correcta realización de otra operación (en este caso la resta) y así sucesivamente. Por lo que podemos decir que los contenidos están encadenados."	G3 genera un discurso relativo a la importancia de conocer los conceptos matemáticos para aplicar procedimientos relativos a dichos contenidos. Esta respuesta está fundamentada en el conocimiento común, que indica la secuencia de contenidos relativos al orden de aprendizaje de los algoritmos (suma, resta, multiplicación y división). No aporta otros contenidos conceptuales ni procedimentales; no indica la relación entre ambos, ni con el algoritmo de la división. No aporta información relevante para el aprendizaje; aunque se indica que la división está basada en la resta, se hace de manera intuitiva, "*y así sucesivamente*".
Nivel 2. Retórico	G4 (20:59:16 20/11/2003) ¿Cuál es la demanda cognitiva que se exige al resolutor cuando tiene que realizar la siguiente sustracción: 615-387? Por qué. "La demanda cognitiva exigida es la descomposición múltiple. Se le exige, además, comprender los efectos de realizar operaciones sobre los números, sumando 10 unidades al minuendo y una decena al sustraendo para que el resultado de la resta original no cambie."	Se evidencia un uso incorrecto de la idea "descomposiciones múltiples". Identifican la demanda cognitiva que requiere la resolución de una resta con llevadas, pero la aplican al algoritmo tradicional. Están usando la propiedad $(a+c)-(b+c) = a-b$, combinada con el hecho de que se añaden 10 unidades al minuendo y 1 decena al sustraendo.

	Ejemplo	*Comentarios analíticos que aportan información para asignación a un nivel de desarrollo*
Nivel 3. Integración	G10 (15:23:12 21/11/2003): "Si bien es cierto lo que vosotros proponéis en esta pregunta, creemos conveniente que tengáis en cuenta la teoría de Resnick para tratar la demanda cognitiva de David. Según Resnick, para poder realizar esta tarea, David debería encontrarse en la Fase 2 (múltiples descomposiciones), donde pueda hacer descomposiciones canónicas y no canónicas. En la sustracción del modelo diríamos que David debe saber que 615 = 5 centenas, 10 decenas y 15 unidades."	La aportación del grupo G10 aclara la información emitida previamente por el grupo G4. El grupo G10 utiliza convenientemente la idea de descomposición múltiple como instrumento conceptual, ofreciendo una ejemplificación contextualizada del concepto. Este hecho evidencia la integración de su conocimiento profesional al justificar y explicitar el origen de la información que presenta adaptando las ideas teóricas al ejemplo concreto y ejemplificando su respuesta.
Nivel 4. Reificación	G5 (14:14:40 29/11/2003): El grupo G5 elabora y justifica una hipótesis sobre las dificultades de David, indicando: "(. . .) tiene errores cuando debe restar 31-28, lo cual podría hacerse a través de una simple aritmética informal: de 28 a 31 van 3. Según Resnick, en la 1ª fase de descomposición canónica, los niños deben utilizar la aritmética informal, entre otras cosas, utilizando el 10 como unidad iterativa. La no utilización de esta aritmética informal puede hacernos pensar que aún no haya superado esta fase".	El grupo G5 remite a la tarea 2 del Caso de David, más concretamente a una de las divisiones en las que David presentaba errores (1517:4) e identifica el uso de la aritmética informal como una característica de la fase 1 del desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal, según Resnick. El uso de la aritmética informal surge del análisis de las tareas escolares resueltas por David, realizado por el G5 (Tarea 2) para justificar el nivel de comprensión del sistema de numeración decimal, y pone de manifiesto que se han integrado elementos teóricos para dar respuesta a la tarea.

RESULTADOS

El análisis realizado ha permitido caracterizar el aprendizaje de los asesores en formación como un cambio en el discurso, que se ha efectuado mediante la integración paulatina de ideas teóricas de didáctica de la matemática en la resolución de las tareas de interpretar el pensamiento matemático de los alumnos en el caso del algoritmo de la división, y justificar propuestas de acción. Además, el análisis ha permitido identificar las interacciones en forma de refutaciones como un mecanismo que favoreció este cambio en el discurso. Estas dos ideas son las que organizan la sección de resultados.

Aprender a usar el conocimiento de didáctica de la matemática en la resolución de tareas prácticas como cambio en el discurso

Ejemplificamos el aprendizaje como un cambio en el discurso a través de cómo los estudiantes para asesor integran las ideas teóricas (descomposición múltiple de los números y la idea de la aritmética informal), cuando interpretan el pensamiento matemático del alumno. Una evidencia de esta característica se da en la forma en la que el grupo 10 (G10) usó la idea de "descomposiciones múltiples" en respuesta a las cuestiones en la tarea 2. Las interacciones que se generaron alrededor de esta idea durante tres días en el debate en línea, y los cambios experimentados desde las primeras aportaciones hasta las últimas evidencian esta característica.

Inicialmente, el grupo G10 describe la situación utilizando expresiones genéricas y poco específicas del papel mediante un discurso general, con un foco en lo procedimental.

G10 (17:59:46 19/11/2003):

> No porque ha podido mecanizar el proceso de la división sin ser consciente de por qué realiza ese proceso. Consideramos que no dota de significado al proceso de la división porque sigue cometiendo errores en las divisiones que implican resta con llevadas, a pesar de realizar la división larga (desplegando las restas incluidas en la división).

Dos días después, el grupo produce un discurso con referencia a la idea de descomposiciones múltiples del número y su relevancia para dotar de sentido al algoritmo de la división, y lo ejemplifica utilizando una descomposición no canónica de un número arbitrario ("*354 = 2C + 13D + 24U*"), si bien no utiliza los ejemplos particulares descritos en el caso, ni concreta la implicación de esta idea en el aprendizaje del algoritmo de la división.

G10 (17:20:43 21/11/2003):

> En cuanto a la pregunta 1, podríamos tener en cuenta la fase 2 de la teoría de Resnick como algo útil para nuestro trabajo. En ella se nos habla sobre la flexibilidad para el cálculo y la ayuda para la comprensión que otorga la capacidad de hacer múltiples descomposiciones: canónicas y no canónicas (p. ej. 354 = 2C+13D+24U).

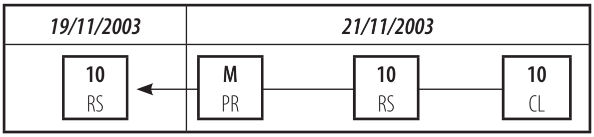
Finalmente, en la segunda parte de su discurso, en la tarea 2, el grupo aplica la idea de descomposiciones del número a la división planteada. De esa manera, ante la división:

$$
\begin{array}{r|l}
178 & \underline{2\quad} \\
\underline{-16} & 89 \\
\mathbf{1}8 & \\
\underline{-18} & \\
0 &
\end{array}
$$

indica:

> En la cuestión 1, se nos pregunta si David sabe qué tipo de unidad es el 1 en negrita; es decir, si sabe que ese 1 suelto equivale a 1 decena (= 10 unidades). De ese modo le puede sumar un 8 (10 + 8 = 18). Esta es una operación con significado, no es como decir "tengo un 1, bajo el 8 y se lo pongo". Por lo tanto David no dota de significado a lo que hace.

En esta aportación, el grupo G10 usa el significado de las unidades para dotar de sentido a la actividad cognitiva que ha de realizar David en relación con el significado de los restos parciales de la división. Este discurso muestra de qué manera los significados del sistema de numeración decimal (agrupamiento y valor de posición) son usados para interpretar el pensamiento matemático de David. Con esta aportación, el grupo G10 ha modificado su respuesta a la cuestión *El hecho de que David realice con éxito determinadas divisiones, ¿quiere decir que es capaz de indicar qué tipo de unidad es el 1 que aparece en negrita?* En un primer momento su respuesta fue descriptiva, para luego proporcionar una respuesta que integra la idea de descomposiciones múltiples del número en la construcción de su discurso. Los elementos teóricos son utilizados como instrumento para dar respuesta a cuestiones planteadas en la tarea. Esta evolución, identificada en el discurso generado por los estudiantes, se resume en la figura 3.



Cuestión 1. T2: ¿El hecho de que David realice con éxito determinadas divisiones quiere decir que es capaz de indicar qué tipo de unidad es, por ejemplo, el 1 que aparace marcado en negrita en la división que se muestra a continuación? ¿David dota de significado a la operación de la división?

$$\begin{array}{r|l} 178 & 2 \\ \cline{2-2} -16 & 89 \\ \cline{1-1} \mathbf{1}8 & \\ -18 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Retórico

G10 (17:59:46 19/11/2003): No, porque *pudo mecanizar el proceso de la división sin ser consciente de por qué lo realiza. Consideramos que no dota de significado al proceso de la división porque sigue cometiendo errores en las que implican restas con llevadas, a pesar de realizar la división larga (desplegando las restas incluidas en la división).*

(...)

M (13:32:30 21/11/2003): ¿Qué características o elementos, desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática, debería tener ese entorno de aprendizaje?

G10 (15:51:00 21/11/2003): ¿Podrías calificar el entorno de aprendizaje de las matemáticas como abierto, flexible y participativo, entre otras características? Sería interesante que el alumno pudiese interactuar con los compañeros (aprendizaje socializado) y que pudiese trasladar estos aprendizajes al entorno próximo que le envuelve (abierto y flexible).

Integración

G10 (17:20:43 21/11/2003): En cuanto a la pregunta 1, *podríamos tener en cuenta la fase 2 de la teoría de Resnick como algo útil para nuestro trabajo*. En ella se nos habla sobre la flexibilidad para el cálculo y la ayuda para la comprensión que otorga la capacidad para hacer múltiples descomposiciones: *canónicas y no canónicas (p. ej., 354 =2C + 13D + 24U)*. En la cuestión 1 se nos pregunta si David sabe qué tipo de unidad es el 1 en negrita; *es decir, si sabe que ese 1 suelto equivale a 1 decena (= 10 unidades). De ese modo le puede sumar un 8 (10 + 8 = 18). Esta es una operación con significado, no es como decir "tengo un 1, bajo el 8 y se lo pongo". Por lo tanto, David no dota de significado a lo que hace.*

Figura 3. Ejemplo en la evolución en el discurso de los estudiantes

Otra evidencia del aprendizaje como cambio en el discurso se puso de manifiesto con la idea de "aritmética informal". En el informe de la tarea T1, el grupo G5 responde a la pregunta *¿Qué se puede decir de las dificultades que tiene David?*

> Pensamos que la dificultad comienza en cuanto en el divisor hay dos cifras y tiene que realizar una resta llevando. Este error se comete de forma sistemática. Suponemos que podría tener dificultades en la realización de la resta llevando y en la descomposición de los números naturales.

En este informe, el grupo G5 identifica el error sistemático de David cuando realiza divisiones, pero no justifica la implicación que tendría la descomposición de los números naturales en la realización del algoritmo de la división. Sin embargo, posteriormente, en el informe de la tarea T3, el grupo G5 indica:

> a) Puede haber dificultades en cuanto a la conversión de un sistema de representación a otro (simbólico-concreto), necesario para favorecer las conexiones entre las representaciones internas que ayuden a la comprensión de la numeración. Por ejemplo, verbalizar descomposiciones realizadas con bloques multibase (oral-concreto); o escribir con números el algoritmo a partir de los bloques multibase (simbólico-concreto). Dificultad de movimiento flexible entre diferentes representaciones y reconocer cuándo una representación es más útil que otra.
> .../...
> c) Saber las unidades que se están trabajando en cada momento (valor de posición y equivalencias). El contexto del algoritmo de la división suele ser el de reparto y, por ello, otro tipo de dificultad que puede aparecer es el no saber en cada momento de qué tipo son las unidades que se están manejando, de cuántas unidades de un determinado orden se va a disponer cuando no tenga suficientes del orden inmediato superior para repartir y estar siempre pendiente de repartir la mayor cantidad posible de las unidades de que se trata para que cada resto parcial sea menor que el divisor.

Con estas intervenciones, el grupo indica la necesidad de dotar de sentido al algoritmo de la división apoyado en los significados de las unidades y las diferentes descomposiciones del número (características de la comprensión del sistema de numeración decimal). La comparación de los discursos elaborados por este grupo en los informes de las tareas 1 y 3, evidencia un cambio significativo en el uso del conocimiento referido al pensamiento matemático de los aprendices: desde la descripción a su integración en el discurso.

El papel de las refutaciones como favorecedoras en aprender a usar el conocimiento en contexto

El modo de interacción en los debates en línea ha permitido identificar también el papel de las refutaciones para favorecer la integración del conocimiento en la resolución de las tareas. Ejemplificamos esta característica del proceso de aprendizaje usando un conjunto de interacciones entre los estudiantes, al interpretar la intervención que realiza Rosa (la asesora del caso) para ayudar a David a superar sus dificultades con el algoritmo de la división (tarea 3). Por ejemplo, en un primer momento, el grupo G9 indica:

G9 (11:40:27 24/11/2003):

> (...) Rosa le ofrece otra manera de realizar el algoritmo [...], en el que se tienen en cuenta las estructuras anteriores de las que dispone el sujeto. (Al realizar la división de manera estructurada y mediante el procedimiento de la resta).

Ante esta afirmación, el G10 introduce dos aportaciones con un día de intervalo entre ellas, indicando una cierta reelaboración de las ideas propuestas;

G10 (21:30:15 28/11/2003):

> Nosotros no consideramos que, por el simple hecho de que Rosa enseñe a David otro procedimiento de realizar la división (la forma desplegada) esté teniendo en cuenta los conocimientos previos de este. Es más, Rosa utiliza este método porque lo encuentra en “otro libro”, no porque considere que sea el más adecuado para David, simplemente porque considera que así lo comprenderá, pero este hecho no modifica las estructuras cognitivas de David, sino que puede ocurrir que lo confunda más y que este conocimiento continúe siendo mecánico.

G10 (17:06:17 29/11/2003):

> Es más, nosotros consideramos que una intervención adecuada para David, o para cualquier alumno que presente dificultades en el algoritmo de división, sería el procedimiento propuesto por Beattle (*Modelando las operaciones y los algoritmos*, 1986, páginas 6-7). Nos ha resultado muy interesante y, de los métodos consultados, creemos

> que es el que mejor puede facilitar el aprendizaje significativo para la adquisición del algoritmo de la división.

La segunda intervención de G10 hace mención al uso de los bloques multibase de Dienes y su correspondencia con los pasos del algoritmo para potenciar la relación entre lo semántico y lo sintáctico (información del documento del curso titulado: *Modelando las operaciones y los algoritmos*). Posteriormente, el grupo G11, haciendo también referencia explícita a la relación entre el uso de los bloques multibase y los significados al manejar los símbolos, valora cierta falta de coherencia entre las dificultades identificadas y la propuesta de mejora realizada, indicando:

G11 (14:25:41 01/12/2003):

> Si bien es verdad, el método de Beattle es correcto para cualquier alumno que presente dificultades en el algoritmo de la división, pero como vosotros mismos resaltáis en dos aportaciones inmediatamente anteriores, David presenta dificultades en la resta con llevadas, y repasando las pp. 6-7 del citado artículo, visionamos que se trata de un entrenamiento en divisiones, no en la raíz del problema que ahora nos compete, la resta con llevadas. ¿Ha sido una confusión vuestra y os referíais quizá a la pagina 5?

Esta intervención obliga al grupo G10 a clarificar su aportación, justificando la relación entre lo semántico y sintáctico en el aprendizaje del algoritmo de la división.

G10 (00:31:55 02/12/2003):

> Cómo podréis comprobar, en las páginas 6-7 de Beattle, el autor explica de forma lógica el proceso seguido en la división. El que nos refiramos a estas páginas y no a la página 5 (explicación de la resta con llevadas) se debe a que nos consta que David tiene problemas específicos en la realización de la resta con llevadas como parte del proceso de la división.

Estas interacciones son un ejemplo de cómo se generó un proceso de negociación de significados a partir de una participación en forma de refutación. De esta manera, las refutaciones aparecen como mecanismo que favorece la integración y relación de las ideas teóricas en la interpretación del pensamiento matemático del alumno al tener que generar aclaraciones.

Otro ejemplo del papel de las refutaciones en promover la negociación de los significados se centra en el papel de la aritmética informal para apoyar a superar las dificultades con los algoritmos de las operaciones con números naturales. El protocolo procede del conjunto de interacciones generadas alrededor de la cuestión *T3: ¿Qué acciones encaminadas a ayudar a David debe realizar Rosa?* Las interacciones entre tres de los grupos, a partir de la aportación inicial del grupo G11, se centran en la necesaria identificación e interpretación del origen de las dificultades de David como paso previo para ofrecer una intervención didáctica adecuada. Inicialmente, el G11 establece una progresión de aprendizaje de los algoritmos, indicando:

G11 (18:18:22, 25/11/2003):

> (...) debe volver atrás, en lugar de continuar con la división, volver al algoritmo de la resta, hasta que supera las lagunas. Para ello debe haber identificado cuál es el problema real que padece (pues ella trabaja con la división).

El discurso no ofrece justificación explícita de la secuencia indicada, por lo que el grupo G5 manifiesta su disconformidad y apoya dicha disconformidad en el papel que debe desempeñar la comprensión previa del sistema de numeración decimal. Centrar la atención en ayudar a David en sus dificultades en el algoritmo de la resta con llevadas indica un proceso de integración de la idea de significado de las unidades y de descomposiciones múltiples de los números en el discurso generado. En este sentido, la intervención del grupo G10 refuta la aportación inicial del grupo G5 utilizando la noción de "descomposiciones múltiples" para identificar el nivel de compresión del sistema de numeración decimal de David:

G10 (13:05, 29/112003):

> Nosotros planteamos que la descomposición canónica ya la tiene adquirida (fase 1) y está empezando con la no canónica que no la tiene dominada. (...) David debía saber que: 615 = 5 Centenas, 10 Decenas y 15 unidades (que es una descomposición no canónica, pues utiliza dígitos diferentes al número de origen).

En este intercambio, el planteamiento inicial del grupo G10 hace que el G5 profundice en sus argumentos relativos al desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal con intención de hacer ver que, desde su interpretación, David solo parece comprender las descomposiciones canónicas (324 =3C+2D+5U). Para ello G5 elabora y justifica una hipótesis sobre las dificultades que tiene David, indicando:

G5 (14:14:40, 29/1/2003):

> (...) tiene errores cuando debe restar 31-28, lo cual podría hacerse a través de una simple aritmética informal: de 28 a 31 van 3. Según Resnick, en la 1ª fase de descomposición canónica, los niños deben utilizar la aritmética informal, entre otras cosas utilizando el 10 como unidad iterativa. La no utilización de esta aritmética informal puede hacernos pensar que aún no haya superado esta fase.

El grupo G5 remite a la tarea de diagnóstico-intervención (T2), concretamente a una de las divisiones en las que David presentaba errores (1517: 4) y subraya el papel de la aritmética informal en el desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal. En esta interacción, considerar el uso de la aritmética informal surge del análisis realizado por el grupo G5 de las tareas escolares realizadas por David (T2). En este sentido, las refutaciones del grupo G5 provocan una progresión en la resolución del caso con la integración del papel de las descomposiciones múltiples de los números en el aprendizaje del algoritmo. De esta manera, la refutación genera procesos de negociación de significados ya que empuja a los grupos participantes a justificar sus aportaciones con el objetivo de intentar convencer. Es decir, el hecho de clarificar y contrastar interpretaciones obliga a un uso más preciso de las ideas teóricas, facilitando su transformación en instrumentos conceptuales.

DISCUSIÓN

Esta investigación está centrada en identificar características del proceso de aprender a usar el conocimiento de didáctica de la matemática en asesores en formación. El análisis toma como referencia las perspectivas situadas del aprendizaje (Wells, 1999; Wenger, 1998) que consideran el aprendizaje como un cambio en el discurso generado en la resolución de problemas profesionales. En esta investigación, el contexto era resolver tareas profesionales en grupo, relativas a identificar e interpretar el pensamiento matemático de un alumno en el ámbito del algoritmo de la división y proponer propuestas de actuación. Los resultados obtenidos indican la manera en la que, de forma paulatina, las ideas teóricas procedentes de la didáctica de la matemática eran refinadas y usadas por los estudiantes para asesores al realizar las tareas.

La evidencia del aprendizaje como un cambio en el discurso generado se dio en la medida en la que los estudiantes vinculaban la evidencia de la situación descrita en el caso a las ideas sobre la representación de los números y el papel que desempeñan en la realización de los algoritmos (el valor de posición y la idea de agrupamiento; la descomposición múltiple de los números y la aritmética informal). En la sección de resultados hemos descrito ejemplos de los cambios identificados para mostrar esta característica de la forma en la que los estudiantes estaban empezando a aprender a usar el conocimiento en contexto, como una forma de instrumentalización de las ideas teóricas. Sin embargo, algunos de los grupos no fueron capaces de superar los niveles de uso del conocimiento que denominamos retórico. Este hecho indica que el uso adecuado del conocimiento procedente de la didáctica de la matemática en las tareas de interpretar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y planificar intervenciones para ayudar a superarlas no es un proceso fácil (Prieto y Valls, 2010; Llinares y Valls, 2009). El aprendizaje en contexto como el descrito en esta investigación pone de manifiesto la necesidad de considerar variables contextuales y variables personales para explicarlo.

En primer lugar, podemos asumir que las tareas profesionales propuestas y la estructura metodológica (diseño instruccional de la plataforma) influyen en el aprendizaje. Cabe señalar que el diseño del entorno de aprendizaje con una estructura *b-learning*, que integra actividades presenciales y en línea, y usando la metodología de estudio de casos, ha aportado condiciones para que se pudiera facilitar el aprendizaje al dar tiempo para generar las aportaciones y las réplicas. En este sentido, las nuevas tecnologías están aportando recursos que ayudan a maximizar los procesos de interacción entre los estudiantes y los formadores en los programas de formación (Borba y Llinares, 2012). Sin embargo, es necesario promover nuevas investigaciones en este campo, que ayuden a identificar el potencial de diferentes tareas en los programas de formación, para generar contextos de interacción que potencien el aprendizaje del uso del conocimiento en contexto

Por otra parte, la influencia de variables personales como saber argumentar también puede aportar información para explicar el aprendizaje. El mecanismo que ayudó a que algunos estudiantes realizaran un uso relacional de las ideas teóricas fue la necesidad de realizar aclaraciones a sus compañeros en relación con lo aportado previamente en el debate. Las participaciones que tomaron la forma de refutaciones se generaron en un contexto dirigido a negociar los significados y, por tanto, pueden ser entendidos como de búsqueda de una comprensión compartida. Estos intercambios pueden ser considerados evidencias de la influencia en el discurso de la participación en argumentaciones dialógicas –intercambio de pensamiento que desembocan en una co-construcción de significado– (Andriessen *et al.*, 2003). Las intervenciones pidiendo aclaraciones y justificaciones a los argumentos propuestos dieron la oportunidad a los estudiantes de realizar las aclaraciones pertinentes y crearon la necesidad de tener que particularizar los significados de las ideas teóricas al contexto específico descrito en el caso. Este proceso permitió que algunos grupos de estudiantes empezaran a usar las ideas sobre el significado de la representación de los números y el papel que desempeñan en la comprensión de los algoritmos relacionándolas con la evidencia descrita y llegando a modificar su discurso. Y esta modificación del discurso, como ha sido descrito en la sección de resultados, puede ser interpretada como evidencia del aprendizaje. Pensamos que la participación en los debates en línea permitió crear los contextos de interacción que favorecieron la generación de las condiciones (posibilidad de refutar y aclarar) para que los estudiantes para asesores integraran las ideas como la aritmética informal, el uso de distintos sistemas de representación, o el papel desempeñado por la comprensión de las descomposiciones múltiples de los números en la tarea de interpretar el pensamiento matemático de los alumnos. Este proceso de integración debe ser entendido como una manifestación del proceso de instrumentalización de las ideas de la didáctica de la matemática cuando son usadas en contexto para la realización de las tareas profesionales. En este sentido, las interacciones en forma de refutación que generan la necesidad de aclaraciones, están relacionadas con las características de las estructuras argumentativas en un entorno en línea puestas de manifiesto en otras investigaciones, como son el refinar garantías para apoyar una conclusión, discutir sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida, así como poner en duda las conclusiones (Roig, Llinares, Penalva, 2011).

Las cuestiones abiertas por la discusión de los resultados obtenidos se convierten en líneas de investigación emergentes que pueden aportar nuevo conocimiento sobre el proceso por el cual los estudiantes para asesor aprenden a usar el conocimiento para resolver tareas profesionales.

RECONOCIMIENTO

1. Este trabajo ha recibido el apoyo de los proyectos I+D del Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación, España, EDU2008-04583, y EDU2011-27288.
2. Agradecemos los comentarios y observaciones realizados por los árbitros anónimos a una versión previa de este artículo, ya que nos ayudaron a refinar la propuesta realizada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andriessen, J., Erkens, G., Van de Laak, C., Peters, N. y Coirier, P. (2003). Argumentation as negotiation in electronic collaborative writing. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to learn. Confronting cognitions in Computer-Supported Collaborative Learning Environments*. Dordrecht, Kluwer, pp. 79-115.

Belmonte, J. M. (2003). Las relaciones multiplicativas: el cálculo multiplicativo y de división. Cálculo mental y con calculadora. En M. C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid, Pearson-Prentice Hall, pp. 159-186.

Blanco, L. y Guerrero, E. (2002). Profesores de matemáticas y psicopedagogos. Un encuentro necesario. En M. C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Coords.), *V Simposio de Didáctica de la Matemática. Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*. Murcia, Compobell, pp. 121-140.

Borba, M. C. y Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. En *ZDM-The International Journal of Mathematics Education*, 44(6), pp. 697-704.

Design-Based Research Collective (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. En *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 5–8.

Even, R. (2005). Integrating Knowledge and Practice in the development of providers of professional Development for teachers. En J*ournal of Mathematics Teacher Education*, 8(4), pp. 343-357.

Even, R. y Tirosh, D. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. Mahwah, NJ, Laurence Erlbaum, pp. 219–240.

Gravemeijer, K. y van Galen, F. (2003). Facts and Algorithms as Products of

Students' Own Mathematical Activity. En J. Kilpatrick; W. G. Martin y D. Schifter (Eds.). *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics.* Reston VA, NCTM, pp. 114-122.

Lampert, M. (1992). Teaching and learning Long division for understanding in school. En Leinhardt, G.; Putman, R. y Hattrup, R. (1992). *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* . Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Ass, pp. 221-282.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación primaria.* Madrid, Síntesis, pp. 151-176.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos *b-learning*. En *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(2), pp. 53-70.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) Teachers and Teachers educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 429-460.

Llinares, S. y Olivero, F. (2008). Virtual Communities and networks of prospective Mathematics Teachers: Technologies, Interactions and new forms of discourse. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *The International handbook of Mathematics Teacher Education.* Volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education. Individuals, Teams, Communities and Networks. Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 155-180.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video. En *Instructional Science*, 37, pp. 247-271.

Lundeberg, M. A. Levin, B. B. y Harrington, H. L. (1999). *Who learns what from cases and how? The Research Base for Teaching and Learning with Cases*. Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Ass. Pub.

McClain, K. (2003). Supporting preservice teachers' understanding of place value and multidigit arithmetic. En *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (4), pp. 281–306.

Pena-Shaff, J. B. y Nicholls, C. (2004). Analyzing student interactions and meaning construction in computer bulletin board discussions. En *Computers and Education,* 42 (3), pp. 243-265.

Penalva, M. C., Rey, C. y Llinares, S. (2011). Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis en un contexto *b-learning* en didáctica de la matemática. En *Revista Española de Pedagogía*, 248, pp. 101-118.

Perrota, C. (2006). Learning to be a psychologist: the construction of identity in an online forum. En *Journal of computer Assisted Learning,* 22, pp. 456-466.

Prieto, J. L. y Valls, J. (2010). El aprendizaje de estudiantes para maestro de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva. Negociación e instrumentalización. En *Educación Matemática,* 22 (1), pp. 57-85.

Rey, C., Penalva, M. C. y Llinares, S. (2006). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. En *Quadrante*, 15 (1, 2), pp. 95-120.

Roig, A. I., Llinares, S. y Penalva, M. C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. En *Educación Matemática,* 23 (3), pp. 39-65.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary Teachers' knowledge of division. En *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3), pp. 233-254.

Thanheiser, E. (2010). Investigating further preservice teachers' conceptions of multidigit whole numbers: refining a framework. En *Educational Studies in Mathematics*, 75 (3), pp. 241-251.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). *Children Learn mathematics. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with whole Numbers in Primary School.* Freundenthal Institute, Utrecht University; National Institute for Curriculum Development, Holanda.

Wells, G. (1999). Dialogic Inquiry. *Toward a Sociocultural Practice and Theory of Education*. New York, Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning and identity.* New York, Cambridge University Press.

Zhu, E. (2006). Interaction and cognitive engagement: An analysis of four asynchronous online discussions. En *Instructional Science*, 34, pp. 451-480.

Datos de los autores

María del Carmen Penalva
carmina.penalva@ua.es

Carolina Rey
carolina.rey@ua.es

Salvador Llinares
sllinares@ua.es

Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España