Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo

Cristianne Butto Zarzar y Teresa Rojano Ceballos

Resumen: Se informan resultados de un estudio sobre la introducción temprana en el pensamiento algebraico realizado con nueve estudiantes de 5° y 6° grados de primaria, de entre 10 y 11 años de edad, en el cual se contemplan dos rutas de acceso al álgebra: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. El marco teórico-metodológico utilizado se basa en la teoría de los modelos locales desarrollada por Filloy (1999) y Filloy, Rojano y Puig (2008). El trabajo experimental involucró actividades con lápiz y papel y con el programa Logo. Los resultados revelan que, al término del estudio, los alumnos participantes lograron comprender ideas básicas de variación proporcional, describir un patrón y formular una regla general, a medida que transitaban del pensamiento aditivo al multiplicativo.

Palabras clave: pensamiento algebraico temprano, procesos de generalización, educación primaria, ambiente de programación Logo.

Early algebraic thinking: The role of the environment Logo

Abstract: Results are reported of a study on early algebraic thinking performed with 9 students of 5^{th} and 6^{th} degree of elementary school, 10 to 11 years old. Two routes of access to algebra are explored: proportional reasoning and generalization processes. The methodological theoretical framework is based on the theory of local models developed by Filloy (1999) and Filloy, Rojano and Puig (2008). The experimental activities involved pencil and paper and the Logo environment. Results reveal that at the end of the study the participant pupils came to understand basic ideas of proportional reasoning describe a pattern and discover a general rule, as they transit from an additive to a multiplicative thinking.

Keywords: early algebraic thinking, generalization processes, elementary school, Logo environment.

Fecha de recepción: 26 de abril de 2010.

INTRODUCCIÓN

En este artículo informamos resultados de un estudio sobre el papel del entorno Logo en el acceso temprano al pensamiento algebraico. Las investigaciones sobre esta temática han proliferado en los últimos años bajo el nombre genérico de *early algebra studies*.

La transición de la aritmética al álgebra es un paso crucial para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares. Sin embargo, los resultados de la investigación en didáctica del álgebra registran que la mayoría de las dificultades que enfrentan los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra se deben a que, por mucho tiempo, ésta ha sido vista como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo literal. Lo anterior ha tenido como consecuencia una enseñanza del álgebra a partir de fuentes de significado muy limitadas: usualmente se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como el geométrico.

Por otro lado, numerosos estudios han investigado y catalogado las dificultades y los errores que cometen los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra elemental; autores como Booth (1984), Kieran (1980), Kieran y Filloy (1989), Mason *et al.* (1985), Filloy y Rojano (1985) y Ursini (1990b) señalan que los estudiantes suelen usar métodos aritméticos en lugar de métodos algebraicos para resolver problemas de enunciado y tienen dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable), así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que, a la larga, pueden quedar como operaciones suspendidas. Estos estudios evidenciaron, además, que un bagaje predominantemente aritmético puede resultar un obstáculo para el aprendizaje del álgebra (véase, por ejemplo, el estudio de Filloy y Rojano, 1985). En ese sentido, algunos autores afirman que, para el desarrollo del pensamiento algebraico, es imprescindible que los alumnos puedan pensar y percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta a la que se cultiva tradicionalmente en la escuela primaria, para que, sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético, puedan construir las nociones básicas del álgebra.

Cabe mencionar que los enfoques más tradicionales empiezan por enseñar la sintaxis algebraica, destacando sus aspectos manipulativos y, al final, resuelven problemas aplicando dicho contenido sintáctico-algebraico. La principal crítica a este enfoque señala que, en él, se introduce al estudiante en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido; se ignora que viene de trabajar con la aritmética, donde los símbolos se relacionan con diversas fuentes de significado y los contextos de los problemas determinan en buena medida la manera de resolverlos. A este respecto, los estudios de Filloy (1991 y 1993) y Filloy y Rojano (1991) sobre la transición de la aritmética al álgebra evidencian también problemas de traducción del lenguaje natural al álgebra y viceversa.

Todo lo señalado anteriormente en relación con las dificultades de acceso al pensamiento algebraico ha llevado a la conclusión de que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y que parece oportuno iniciarse en ese pensamiento a edades tempranas (7-11 años) aprovechando diferentes fuentes de significado presentes en los contenidos curriculares de la escuela primaria. Estudios sobre una iniciación temprana al álgebra, como: *El sentido de las operaciones* (Slavit, 1999); *El tratamiento de las operaciones y las funciones* (Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2000, 2001); *Generalización y formalización progresivas* (Kaput y Blanton, 2000); *El álgebra como una herramienta de representación y resolución de problemas* (Da Rocha Falcão, 1993); *La dialéctica entre la teoría y la práctica: un proyecto de iniciación temprana al álgebra*; *Álgebra en la escuela elemental* (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest, 2003); *La reificación* (Sfard y Linchesvski, 1994); *El sentido de las operaciones* (Slavit, 1999), y *El tratamiento de las operaciones y las funciones* (Carraher, Schliemann, y Brizuela, 2000), han identificado temas curriculares de la escuela elemental que pueden ser explotados para introducir en los alumnos de ese nivel escolar algunas ideas algebraicas importantes.

A su vez, los estudios sobre álgebra temprana tratan de dar explicaciones plausibles sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando se inician en el estudio de dicho lenguaje en la escuela secundaria. Una de tales explicaciones es una falta de antecedentes en los educandos para tratar numéricamente problemas matemáticos de una manera que los pueda conducir a ideas algebraicas como la generalidad, la expresión de una generalización o la idea de variación y función.

En el estudio que aquí se informa, se propone una iniciación temprana al pensamiento algebraico a partir de la idea de variación proporcional y evolucionando hacia procesos de generalización. El trabajo se realizó con niños de 5° y 6° año de primaria, que es un periodo de transición entre las estructuras aditivas y multiplicativas[1] en el contexto de la resolución de problemas de enunciado (Vergnaud,

[1] **Problemas de estructura aditiva:** Vergnaud (1991), los problemas de estructura aditiva son todos aquellos para cuya resolución intervienen sumas o restas, y no pueden estudiarse de

1991). Específicamente, se parte de la variación proporcional, resaltando la noción de variable en una relación funcional y se pasa a tratar con la noción de número general vía procesos de generalización y expresión de la generalidad.

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas se ha estudiado desde la década de 1980 y se han realizado importantes aportaciones, tanto en su delimitación teórica como en las estrategias, dificultades y errores de los estudiantes ligados a dicho campo conceptual. Para analizar los problemas con estructura multiplicativa, Vergnaud distingue tres tipos de contenidos: *comparación múltiple de magnitudes, proporcionalidad simple, proporcionalidad simple compuesta* y *proporcionalidad doble o múltiple* (Vergnaud, 1991).

Por su parte, el pensamiento algebraico involucra la comprensión de las relaciones funcionales, la generalización de patrones y de relaciones numéricas, el trabajo con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, y la formalización de generalizaciones.

En los estudios mencionados se pueden identificar dos enfoques sobre la iniciación al pensamiento algebraico: uno desde la preálgebra y otro desde el álgebra temprana. El primero corresponde a intervenciones de tipo transicional que buscan aminorar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra y trata cuidadosamente de redefinir o aumentar el sentido de los símbolos que se utilizan en las expresiones algebraicas. El segundo, por su parte, reconoce lo anterior pero propone intervenciones previas a la transición; en este grupo destacan, entre otros, los trabajos de Carraher, Shliemann y Brizuela (2003), los cuales explican el origen de las dificultades en términos de la instrucción escolar. Estos autores afirman que, en la primaria, se ha enseñado la aritmética por lo general sin establecer vínculos con otros temas matemáticos del currículo y aseguran que la aritmética tiene un carácter inherentemente algebraico y puede ser vista como parte del álgebra, en lugar de ser vista como un dominio claramente distinto del álgebra; asimismo, concluyen que los alumnos pequeños a veces llegan a generalizaciones algebraicas sin usar el lenguaje simbólico del álgebra.

---

manera separada, pues pertenecen a una misma familia de problemas o a un mismo campo conceptual. Los problemas de estructura aditiva involucran la construcción de conocimientos matemáticos que van más allá de los algoritmos de la suma y la resta, como son el dominio de diversas estrategias de cálculo y el reconocimiento de los problemas que se resuelven con esas operaciones.

Problemas de estructura multiplicativa: Vergnaud (1991) define los problemas de tipo multiplicativo como aquellos que incluyen una multiplicación o una división, y clasifica tres categorías: proporción simple, producto de medidas y proporción múltiple.

Los estudios sobre la aritmética como una iniciación al álgebra son prometedores; sin embargo, hay diversas posturas acerca de cómo llevar a la práctica dicha iniciación. Kaput, Carraher y Blanton (2008) basan su postura en la premisa de que la aritmética y la matemática en la escuela primaria se han abordado de tal manera que restan importancia a la generalización como factor inherente del pensamiento algebraico. Otros autores piensan que los alumnos de la escuela elemental pueden estar preparados para pensar sobre estructuras y relaciones, aunque no puedan usar símbolos convencionalmente aceptados.

En general, los enfoques de álgebra temprana concuerdan en que no es necesario agregar más contenidos al programa escolar, sino tratar con mayor profundidad los temas que ya se cubren, subrayando las ideas de generalización, estructura y relaciones. En cuanto al razonamiento simbólico, los investigadores en álgebra temprana tienen una visión amplia: consideran que dicho razonamiento incluye, pero no se restringe, el razonamiento con una notación algebraica, y se pueden incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos.

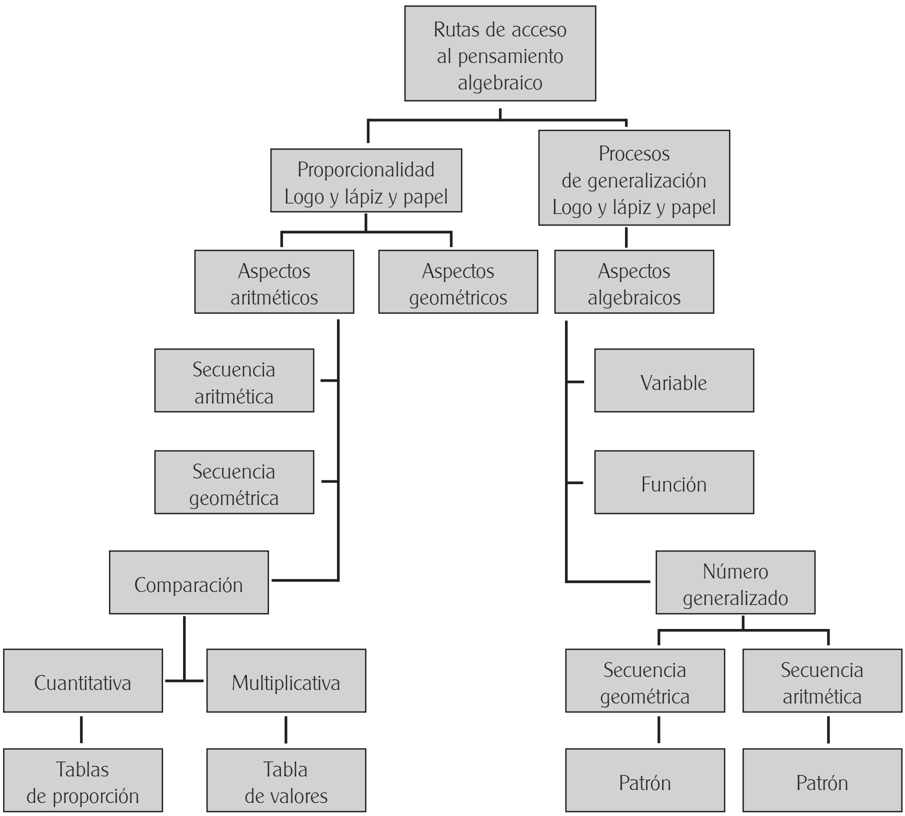
El estudio que aquí se expone trata sobre el pensamiento algebraico temprano y propone una ruta conceptual en la que no necesariamente se debe llegar a la manipulación algebraica en una etapa inicial. El estudio se ubica al final del currículo de la escuela primaria, en la franja del pensamiento prealgebraico, donde aún no se instruye a los alumnos en la sintaxis algebraica. Se introducen las ideas algebraicas en dos versiones: *presimbólica* (relacionada con la idea de variación proporcional) y *simbólica* (en tareas de encontrar y expresar una regla general en el lenguaje Logo). Se diseña una secuencia de enseñanza en la que los alumnos resuelven problemas relacionados tanto con la variación proporcional como con la generalización. Lo anterior da lugar a dos rutas de acceso al álgebra: la primera de ellas aprovecha la familiaridad de los alumnos con el contenido curricular de la primaria sobre razonamiento proporcional y conecta éste con la variación proporcional, la noción de relación funcional y el número general (Radford, 1996); la segunda ruta de acceso (los procesos de generalización) promueve la percepción, la expresión y la escritura de patrones gráficos, numéricos y figurativos. Se busca que los niños sean capaces de detectar similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa. A continuación, se resumen los propósitos del estudio y se presentan en un diagrama las dos rutas referidas de acceso al álgebra.

PROPÓSITOS DEL ESTUDIO

- Investigar la factibilidad de una iniciación temprana al álgebra a partir de dos rutas de acceso: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización.
- Diseñar una secuencia didáctica que tome en consideración tanto aspectos cognitivos como el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico).

Para lograr los objetivos del estudio, se proponen las dos rutas de acceso al pensamiento algebraico, según se muestra en el siguiente diagrama (véase figura 1):

Figura 1 Rutas de acceso al pensamiento algebraico



En este artículo se discuten resultados del trabajo experimental con la segunda ruta de acceso, la de los procesos de generalización. Se consideró necesario trabajar tanto con actividades de lápiz y papel como en el ambiente Logo. Este último ofrece la posibilidad de tener acceso a un ambiente numérico, geométrico y algebraico, con tareas en las que los niños trabajan con patrones o regularidades en correspondencia con los valores que usan como "entradas" (*inputs*). Cuando el niño corre un programa, éste le permite no sólo dar sentido a lo que está haciendo, sino también validar sus propias predicciones. El ambiente Logo se caracteriza por ser interactivo, tanto en el modo directo como en el modo de programación; en ambos se producen efectos gráficos, numéricos y textuales, y se introduce a los niños en la geometría de la tortuga, donde cada comando produce un efecto visual instantáneo. Además, el uso del lenguaje por parte de los estudiantes es relativamente fácil y tienen la oportunidad de construir sus propios programas. El uso del ambiente Logo en este estudio sirvió como puente entre los lenguajes geométrico, numérico y algebraico, de suerte que se fomentaron las percepciones geométrica y numérica para ser expresadas en un código similar al del álgebra.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

Para el diseño de la investigación, se recurrió a la noción teórica de los Modelos Locales desarrollada por Filloy (1999) y Filloy, Rojano y Puig (2008). En esta perspectiva, un Modelo Teórico Local (MTL) incluye cuatro componentes interrelacionadas: 1) Modelo de enseñanza; 2) Modelo de los procesos cognitivos; 3) Modelo de competencia formal; 4) Modelos de comunicación. Un MTL es recursivo: después de una fase experimental, se reformula y pasa por las fases de replanteamiento del problema, análisis de éste, proposición de hipótesis, diseño experimental (experiencias de aprendizaje, planeación de la observación y medida) y desarrollo empírico (sesiones experimentales, recolección, análisis e interpretación de datos a la luz de las componentes del modelo local) (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pp. 60-62).

Un MTL es local porque, sin pretender ser una teoría con un carácter universal, sirve para estudiar fenómenos específicos mediante un diseño experimental desarrollado *ad hoc* que arroja luz sobre las interrelaciones y oposiciones que tienen lugar durante la evolución de los procesos relevantes relacionados con cada una de las componentes (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pp. 34-35).

A lo largo del estudio, el análisis de investigaciones desarrolladas en los temas de razonamiento proporcional y procesos de generalización constituyó un eje central para la creación de los instrumentos de recolección de datos (cuestionario inicial, entrevistas individuales, secuencia didáctica y cuestionario final), así como para concebir las diferentes componentes del modelo local. El estudio se enfocó básicamente en dos de las componentes: la del modelo de enseñanza y la de los procesos cognoscitivos.

Para estudiar los procesos cognoscitivos se tienen en cuenta los procesos de pensamiento que ocurren cuando el estudiante transita por la ruta trazada por el modelo de enseñanza. Aquí se describen las acciones de los sujetos observados al realizar tareas relacionadas con el contenido matemático tratado en el estudio.

Procesos de generalización

Internacionalmente, se reconocen cuatro acercamientos a la enseñanza del álgebra (Bednarz, Kieran y Lee, 1996): mediante la generalización de patrones numéricos y geométricos y las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; mediante la modelización de situaciones matemáticas y situaciones concretas; mediante el estudio de situaciones funcionales, y a partir de la resolución de problemas y ecuaciones. En el estudio que aquí se expone, se adopta la perspectiva del acercamiento mediante la generalización.

Según Mason (1985), la generalización en álgebra es el punto de partida hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades. Para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar; así, al percibir un patrón o una regularidad, puede intentar expresarlo y comunicárselo a alguien. Para el referido autor, hay cuatro etapas para trabajar la generalidad en el salón de clases: *percepción de un patrón; expresión de un patrón; registro de un patrón; prueba de la validez de la(s) fórmula(s).*

El trabajo con patrones está recomendado también en los estándares curriculares y de evaluación por el *National Council Teacher of Mathematics* (NTCM, 1989), cuyo documento recomienda el uso de patrones desde muy temprana edad (lo equivalente a la enseñanza preescolar) extendible a los grados superiores. De acuerdo con este documento, el trabajo desarrollado en primaria, que equivale a los niveles 5-8, debe incluir la exploración de patrones y funciones para que los estudiantes sean capaces de: descubrir, extender, analizar y crear una amplia gama de patrones; describir y representar relaciones con tablas, gráficas y reglas;

analizar relaciones funcionales para explicar cómo un cambio en una cantidad provoca un cambio en la otra; y usar patrones y funciones para representar y resolver problemas.

En el currículo mexicano, el contenido de patrones no aparece con un gran énfasis en la escuela primaria; sin embargo, sí hay una presencia extensa del razonamiento proporcional; a partir de esto, se asignan significados de la comparación cuantitativa y cualitativa de cantidades; las ideas de variable y relación funcional aparecen en una etapa más avanzada, las cuales conducen a su vez a procesos de generalización.

De acuerdo con Pegg (1990), citado en Durán Ponce (1999), el descubrimiento de patrones requiere el trabajo en tres procesos: experimentar actividades con patrones numéricos; expresar las reglas que caracterizan patrones numéricos particulares mediante oraciones, involucrando a los estudiantes en aclaraciones y precisiones, y propiciar que los estudiantes expresen dichas reglas de manera abreviada. Para Pegg, la parte más compleja de la introducción al álgebra requiere el trabajo con patrones numéricos hasta describir éstos utilizando la notación algebraica.

Los estudios de Mac Gregor y Stacey (1993) con estudiantes australianos revelan que, cuando se trabaja con patrones numéricos, los niños muestran tener grandes dificultades para describir y expresar algebraicamente dichos patrones.

Reggiane (1994) afirma que la generalización es un término utilizado en las matemáticas para indicar el paso de lo particular a lo general y para ver lo general en casos particulares. Según la autora, lo que impera en la práctica didáctica es el aspecto puramente técnico, la capacidad operativa y una mala comprensión general del número; contrariamente –comenta– la base del pensamiento algebraico se consolida cuando se aprenden las propiedades de las operaciones entre números y empieza el trabajo con símbolos en diversos contextos (aritméticos, geométricos, procesamiento de datos), pero agrega que esto es un logro gradual.

Otros autores han investigado la relación entre el lenguaje algebraico y el lenguaje de la programación, señalando la contribución de este último para llegar a un uso correcto de la variable. Otras investigaciones describen algunas limitaciones en habilidades espontáneas para pasar de lo particular a lo general y recomiendan estimular a los niños con procedimientos guiados. En el estudio realizado por Ursini (1996) con niños entre 11 y 12 años de edad, cuyo objetivo era la comprensión de la generalidad, se les propuso una actividad con un procedimiento guiado paso por paso, que apuntaba a estimular la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). La autora informa que se requirió una intervención extrema para lograr dicha estimulación.

Lee (2001), al concebir el pensamiento algebraico como una manera de pensar, propone estimular a los estudiantes para extender su pensamiento acerca de objetos matemáticos (números, formas y medidas) y las relaciones entre ellos, así como también darles la oportunidad para que operen mentalmente con números que conocen.

De acuerdo con Castro, Rico y Castro (1995), se puede generalizar en problemas que involucren patrones de tipo lineal o cuadrático mediante expresiones algebraicas. Por otro lado, los estudios de Hoyles y Sutherland (1989) en el proyecto Logo Math revelaron que el trabajo con la generalización era un camino importante que debe ser desarrollado y su investigación con el ambiente Logo mostró evidencias pertinentes acerca de la contribución del trabajo en parejas cuando los niños programaban en dicho ambiente. El ambiente numérico y geométrico de Logo permite a los niños observar patrones numéricos y geométricos y, en función de eso, construir una regla general en términos algebraicos o prealgebraicos.

Logo e iniciación temprana al pensamiento algebraico

En 1989, Hoyles y Sutherland publicaron los resultados de su estudio con alumnos de 11 a 14 años de edad, utilizando el lenguaje de programación Logo para realizar tareas matemáticas. Los niños trabajaban en parejas durante las clases normales de matemáticas y se exploraron la naturaleza y extensión del trabajo colaborativo con Logo, así como las estrategias de resolución de problemas utilizadas por los niños en el ambiente y la intervención del maestro en el proceso de aprendizaje (Hoyles y Sutherland, 1989).

Las implicaciones de estudios como el anterior para las prácticas en el salón de clases son diversas: por ejemplo, al cambiar las relaciones didácticas en las clases de matemáticas, los niños adquieren más autonomía y responsabilidad en su desempeño, pues se involucran activamente en la construcción de su conocimiento y toman decisiones acerca de las estrategias que utilizan. De acuerdo con Noss (1986), el pensamiento matemático es algo que siempre tiene sentido en nuestra cultura y en el ambiente Logo se recrean las heurísticas y las ideas matemáticas. De acuerdo con Clements (1986) y Pea y Kurland (1985), citados en Holyes y Sutherland (1989), programar en Logo aumenta el desempeño de la cognición específica; por ejemplo, la reflexibilidad, el pensamiento divergente y el desarrollo de habilidades metacognitivas y de creatividad. El uso del lenguaje

Logo crea, pues, un puente entre las acciones de los estudiantes y su entendimiento de las relaciones generales matemáticas que requieren para escribir el programa. Así, los niños son capaces de capturar su entendimiento en la forma simbólica y lo aclaran contando con el apoyo de la computadora.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

La investigación a la que se refiere este escrito es de corte cualitativo: estudia los fenómenos que ocurren durante los procesos de enseñanza y aprendizaje como un conjunto de diversas variables que se deben considerar a partir de una visión más dinámica; esto con el propósito de comprender los procesos, los significados y la naturaleza social del aprendizaje, así como el papel que el investigador puede asumir en un estudio, por ejemplo, en el diseño y aplicación de una secuencia de enseñanza.

El papel del investigador en el estudio es de carácter participativo, pues interviene para promover la discusión en el grupo, otorgando a los estudiantes información necesaria para que puedan avanzar conceptualmente.

Montaje experimental

Se trabajó con cuatro parejas de niños, de entre 10 y 11 años de edad, que cursaban el 5° grado de primaria en una escuela pública de la Ciudad de México y sin previo conocimiento de álgebra. Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo en las instalaciones de la escuela con acceso al uso de computadoras con el programa Logo. Los alumnos trabajaron en parejas, con la colaboración de la investigadora.

Etapas del estudio sobre los procesos de generalización

A continuación se describe cada una de las cuatro etapas del estudio: cuestionario inicial, sesiones experimentales, cuestionario final y entrevistas individuales.

Primera etapa: cuestionario inicial seguido de entrevista ad hoc

En esta etapa se aplican y analizan los cuestionarios iniciales de razonamiento proporcional y los procesos de generalización, cuyo objetivo es identificar posibles dificultades y competencias matemáticas en los dominios que se exploran en la secuencia didáctica, tal como se muestra en el cuadro 1.

Cuadro 1 Descripción del cuestionario inicial sobre procesos de generalización

Número de pregunta	Ideas matemáticas	Planteamiento de la pregunta
1	Secuencia aritmética	Completar secuencias aritméticas con enteros y negativos.
2	Secuencia aritmética y geométrica	Completar secuencias aritméticas y geométricas.
3	Relación funcional	Se pide observar las tarjetas y completar la tabla con los valores que aparecen en cada tarjeta (relación funcional entre peso y edad) y se les pregunta ¿qué se puede decir entre el peso y los años de Fabio?
4	Relación funcional lineal	Comparar el número de plástico producido y el número de máquinas. Encontrar la relación entre ambos y se les pide también generar una fórmula.
5	Progresión geométrica y relación funcional	Se pide observar 4 edificios que están siendo pintados y se pregunta cuántos pisos deberían ser pintados en el 5° edificio.
5.1	Progresión geométrica y relación funcional	Expresar relación funcional.
6	Progresión geométrica y relación funcional	Se pide completar una secuencia geométrica de edificios pintados y encontrar la relación entre el número de edificio y los pisos pintados, hacer una gráfica, explicitar la relación y generalizar una fórmula.
7 y 8	Variable como número específico	Se pide resolver dos problemas.
9	Variable como número general	Se pide observar una serie de rectángulos y dibujar la quinta figura de la serie; se pide completar una tabla y encontrar cuál es el patrón.

La aplicación duró 60 minutos y los nueve alumnos participantes tuvieron libertad para resolver el cuestionario en el orden deseado.

Segunda etapa: sesiones de trabajo

En esta etapa se aplicó una secuencia didáctica, dividida temáticamente en dos partes: razonamiento proporcional y procesos de generalización. Los niños trabajaron en parejas, alternadamente con lápiz y papel y en ambiente Logo. Los contenidos matemáticos explorados se muestran en el cuadro 2.

Cuadro 2 Contenidos matemáticos explorados

Actividades	Contenido matemático
Se dan tres letras "E" que constan de cuatro segmentos: 3 horizontales y 1 vertical (dividido a la mitad). Se dan las dimensiones de los segmentos. Se pide: dibujar con Logo dos letras E siguiendo la secuencia; un programa en Logo que dibuje una letra E de cualquier tamaño; llenar una tabla con las dimensiones de los tres segmentos horizontales y el vertical; dar las dimensiones de la décima letra E sin dibujarla.	Proporción entre varias cantidades $a:b:c:d::2a:2b:2c:2d::3a:3b:3c:3d::4a:4b:4c:4d::5a:5b:5c:5d$. Solución de la ecuación lineal $\frac{a}{b}=\frac{x}{10}$
Se dan los primeros 4 elementos de la secuencia de números cuadrados en forma de cuadrados formados por puntos. Se pide completar una tabla del número de puntos en la base y el número de puntos del cuadrado, hasta el sexto elemento y dar una regla general y verificarla para los casos en la tabla.	Proporción entre varias cantidades $a:b:c:d::2a:2b:2c:2d::3a:3b:3c:3d::4a:4b:4c:4d::5a:5b:5c:5d$. Solución de la ecuación lineal $\frac{a}{b}=\frac{x}{10}$
Se dan los primeros 4 elementos de la secuencia de números cuadrados en forma de cuadrados formados por puntos. Se pide completar una tabla del número de puntos en la base y el número de puntos del cuadrado, hasta el sexto elemento; dar una regla general y verificarla para los casos en la tabla.	Relación cuadrática con variable discreta $A=\frac{n(n+1)}{2}$

Cuadro 2 Contenidos matemáticos explorados *(continuación)*

Actividades	Contenido matemático
Se dan los primeros 4 elementos de la secuencia de números rectangulares en forma de rectángulos formados por puntos en proporción base: altura $n : n + 1$. Se pide completar una tabla del número de puntos en la base y el número de puntos de los rectángulos, hasta el sexto elemento, y dar una regla general y verificarla para los casos en la tabla.	Relación cuadrática con variable discreta $A = n(n + 1)$
Se da una secuencia de rectángulos formados por cuadrados, resaltando los cuadrados interiores (mosaicos azules) y los que forman la orilla (mosaicos blancos). Se pide llenar una tabla de tres columnas contando el número de cuadritos que forman los mosaicos totales, azules y blancos.	Contenido algebraico: Relación cuadrática y lineal con variable discreta $T = n^2$ (totales) $A = (n - 2)^2$ (azules) $B = n^2 - (n - 2)^2 = 4(n - 1)$ (blancos)
En una carrera de caballos el caballo A corre a 4 km/h (rápido) y el caballo B corre a 2 km/h (lento). El caballo B lleva 12 km de ventaja sobre el caballo A. Se pide encontrar a cuántos kilómetros del inicio el caballo A alcanzará al caballo B. Se pide una tabla de tres columnas con el número de horas y kilómetros recorridos por el caballo A y por el B, una gráfica de posición contra tiempo y localizar dónde se encontrarán, y se plantea la misma pregunta pero con los siguientes datos: caballo A: 3 km/h; caballo B: 2 km/h.	Contenido algebraico: Relación lineal simultánea con variable entera: $x_A = 4t$, $x_B = 2t + 12$ $4t = 2t + 12$ Relación lineal simultánea con variable entera: $x_A = 3t$, $x_B = 2t + 12$ $3t = 2t + 12$
Se pide dibujar en Logo tres cuadrados de distinto tamaño, observar los parámetros que son constantes y los que son variables y un programa general que dibuje un cuadrado de cualquier tamaño.	Variable como número general.
Se pide dibujar en Logo una estrella regular de 5 lados y, al final, un programa general que dibuje una estrella de cualquier tamaño.	Variable como número general.

Cuadro 2 Contenidos matemáticos explorados *(conclusión)*

Actividades	Contenido matemático
Se experimenta con el programa ***Árbol*** en Logo, un programa recursivo dependiente de un parámetro que dibuja un árbol que genera tantas ramas como el parámetro.	Variable como número general.
Se experimenta con el programa ***Pluma*** en Logo, un programa dependiente de tres parámetros que dibuja una estrella espiral. Los parámetros controlan el tamaño de los picos, el espaciamiento y las veces que se repite la construcción.	Variable como número general.

Entre las actividades correspondientes a los procesos de generalización, se exploraron comandos del programa Logo en modo directo y sintético en el contexto de figuras geométricas, para después explorar procesos de generalización a partir de la percepción de secuencias aritméticas y geométricas, así como de la percepción, expresión y registro de patrones, número generalizado, variable y variación funcional.

Antes de la aplicación de la secuencia didáctica de procesos de generalización, se seleccionaron las parejas de alumnos con base en los niveles de comprensión conceptual mostrada en el cuestionario inicial, los cuales se describen a continuación.

Nivel alto: se caracteriza por la comprensión del razonamiento proporcional y los procesos de generalización; se expresa en un pensamiento prealgebraico.

Nivel medio: se caracteriza por la comprensión del razonamiento proporcional, pero con dificultades para generalizar y expresar una regla en términos prealgebraicos.

Nivel bajo: se caracteriza por falta de comprensión del razonamiento proporcional y de los procesos de generalización; el pensamiento matemático se expresa en términos aditivos o aritméticos.

Los estudiantes fueron clasificados por niveles de conceptualización matemática, con base en los resultados del cuestionario inicial y de la entrevista *ad hoc*. Las parejas de niños se organizaron de la siguiente manera:

Parejas de niños	*Nivel alto*	*Nivel medio*	*Nivel bajo*
1ª pareja		José	Ricardo
2ª pareja		Guadalupe	Cristina
3ª pareja	Antonia	Valeria	
1 trío	Iván	Armando y Gustavo	

Nota: los nombres son ficticios.

Una vez seleccionadas las parejas, se trabajó en el laboratorio de la escuela en 18 sesiones de 40 minutos cada una después de los horarios escolares de clase. Las sesiones de trabajo fueron audio y videograbadas. Cada pareja contaba con una grabadora y se filmaba parte del trabajo en pareja; en ocasiones, la cámara enfocaba a todo el grupo.

Tercera etapa: cuestionario final

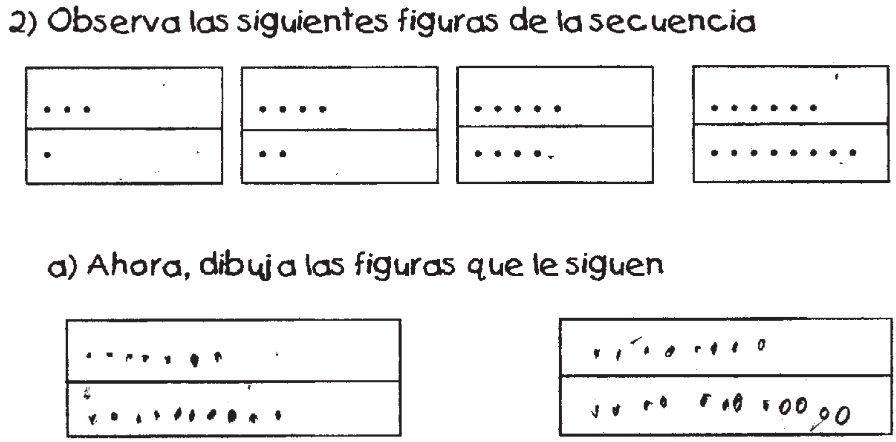
Se aplicó un cuestionario al término de la secuencia de enseñanza con el propósito de verificar el desempeño de los niños en dicha secuencia y analizar su evolución hacia el pensamiento algebraico, contrastando los resultados con los del cuestionario inicial. En el cuestionario final, se exploraron las mismas ideas matemáticas que en el inicial, pero en contextos y con ejemplos distintos.

RESULTADOS DEL ESTUDIO

Resultados del cuestionario inicial sobre los procesos de generalización

Las respuestas al cuestionario inicial se categorizan en niveles de conceptualización matemática (alto, medio y bajo) en relación con las siguientes dimensiones de análisis:

Figura 2



Estrategias de resolución de problemas

Estrategia aritmético-aditiva. En esta categoría los estudiantes resuelven los problemas planteados con sumas y restas y muestran tener dificultades para descubrir la relación proporcional y expresar los datos en una gráfica; no llegan a la construcción de una regla general. Se manifiesta un pensamiento en términos aditivos o aritméticos. A continuación se muestra una de las preguntas del cuestionario, a la cual se da una respuesta del tipo aritmético-aditiva.

Secuencias de puntos

Se les presentan a los alumnos dos secuencias de puntos (una en la parte superior y otra en la parte inferior de los recuadros) y se les pide que dibujen los recuadros correspondientes a los dos términos subsiguientes de ambas secuencias (véase figura 2).

Aquí se ilustra la típica respuesta aditiva para los dos casos. En la primera secuencia (3, 4, 5, 6,...) la respuesta es correcta (7, 8), mientras que en la segunda secuencia (1, 2, 4, 8,...) la respuesta es de carácter aditivo (10, 12) en lugar de multiplicativo (16, 32) que es lo que corresponde a la secuencia con término general $2n$.

Figura 3

4) Una fábrica de plástico lleva el registro del número de máquinas y de la cantidad de plástico producido conforme muestra la siguiente tabla:

Número de máquinas	Kilos de plástico
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

¿En cuántos kilos de plástico aumenta la producción con cada máquina?

2 cada maquina

¿Cuántas máquinas necesito para producir [illegible] kilos de plástico? 9 kilos

9 maquinas

Da una regla para calcular la cantidad de plástico producido si conoces el número de máquinas

$\boxed{X}$ → Por cada maquina se multiplica por 2 [illegible] aumenta uno

nº de máquinas — kilos de plástico

Verifica tu respuesta:

nº de máquinas (X)	kilos de plástico
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17

Nueve de los nueve niños que participaron en el estudio respondieron de manera aditiva en la secuencia aritmética y tres de ellos respondieron también aditivamente en la secuencia geométrica; los seis restantes no respondieron en esta última.

Estrategias prealgebraicas. En esta categoría los estudiantes resuelven los problemas con una multiplicación y establecen relaciones proporcionales. Comprenden la idea de variable como número general y en una relación funcional, pero tienen dificultades para encontrar una regla general y expresarla; es decir, se trata de un pensamiento en transición. En la pregunta del cuestionario inicial que se muestra a continuación, se explora la idea de variable en una relación funcional y su expresión en lenguaje simbólico. Se les solicita a los estudiantes que observen la tabla de variación *número de máquinas/cantidad de plástico producido* y que escriban una regla para el caso de x número de máquinas. Aquí se muestra la respuesta prealgebraica de uno de los alumnos:

Ejemplo: pregunta número 4 del cuestionario inicial de los procesos de generalización, que exploraba la idea de variable como relación funcional lineal (véase figura 3).

En el cuestionario inicial, en muchos casos, las respuestas con una estrategia prealgebraica revelaron también que los alumnos se encontraban en una etapa de transición entre las estructuras aditivas y las multiplicativas.

Del cuestionario inicial a las sesiones de enseñanza: surgimiento de un pensamiento algebraico temprano

Como ya se ha mencionado, en el cuestionario inicial los nueve alumnos participantes completaron secuencias aritméticas con números enteros; en las secuencias geométricas, seis estudiantes respondieron de manera aditiva, es decir, sumando, como se ilustró en el ejemplos de la secuencia geométrica de puntos, y sólo tres respondieron de manera multiplicativa.

Además de los resultados del cuestionario inicial en la dimensión aritmético-aditiva/prealgebraica, en el caso de la idea de variable en una relación funcional lineal, siete niños percibían la relación entre las cantidades, pero no podían expresar los datos en una gráfica y sólo dos no percibían ninguna relación entre los datos. En cuanto a las ideas de variable en una relación funcional y de una progresión geométrica, dos niños entendieron la progresión geométrica, pero no pudieron dibujar la gráfica ni elaborar una regla general. Sin embargo, siete niños entendieron la progresión geométrica, dibujaron y graficaron los datos, pero no llegaron a una regla general. Respecto a la idea de variable como número específico, cinco niños respondieron el problema de manera aditiva y los otros cuatro con otras estrategias. En el problema número 8 de variable en una relación funcional con varias variables, siete niños dibujaron el quinto rectángulo, pero no llegaron a expresar una regla: área *versus* altura.

Estos resultados muestran los tres niveles de conceptualización a los que se ha hecho referencia. Algunos de ellos muestran que los alumnos se encontraban en una etapa de transición del pensamiento aditivo al multiplicativo y que tienen dificultades para expresar los resultados en una gráfica y encontrar una regla general; pero, por otro lado, se percibe que hay de su parte el surgimiento de un entendimiento de la variable en una relación funcional.

Además de los diferentes niveles de conceptualización matemática identificados, se pudo observar que los estudiantes abordan los problemas de secuencias aritméticas sumando los valores, pero cuando se les plantean secuencias geométricas, en algunos casos suman los valores y en otros, los multiplican. En los problemas de relación funcional, descubren en algunos casos la relación proporcional existente, pero unos lo hacen de manera aditiva y otros de manera multiplicativa. En los problemas de variable como número general, en algunos casos los alumnos descubren y representan la relación multiplicativa existente en el problema, pero no consiguen encontrar una regla general. De acuerdo con los resultados obtenidos, se pudo confirmar que, en esta etapa, los estudiantes aún permanecen anclados a un tipo de pensamiento aritmético y aditivo, y de allí deriva la dificultad para que puedan entender, representar y expresar relaciones proporcionales, así como encontrar una regla general. En resumen, este análisis reveló que, al inicio del estudio, los niños se encontraban en una etapa de transición del pensamiento aritmético al prealgebraico y del aditivo al multiplicativo.

Más adelante, con la aplicación de la entrevista *ad hoc*, se observó una evolución en los estudiantes tanto en los procedimientos de resolución como en el tipo de manipulación y en el soporte de representación utilizados.

Resultados de la secuencia didáctica sobre procesos de generalización

El análisis de las observaciones durante la secuencia didáctica relativa a los procesos de generalización (Logo y lápiz y papel) se realizó en tres niveles de *estrategias de resolución de problemas*: aritmético-aditivas, prealgebraicas y algebraicas. Estas estrategias se hicieron evidentes durante las sesiones de trabajo, donde además se observaron y analizaron procesos de interacción social en pareja.

En las actividades en las que se exploran tanto la idea de variable como la de relación funcional y progresión geométrica, el trabajo con lápiz y papel resultó fácil para los alumnos, fueron capaces de percibir la progresión geométrica, llenar la tabla y elaborar una regla prealgebraica. En ambiente Logo, percibieron con un poco de dificultad la idea de función implícita en el procedimiento.

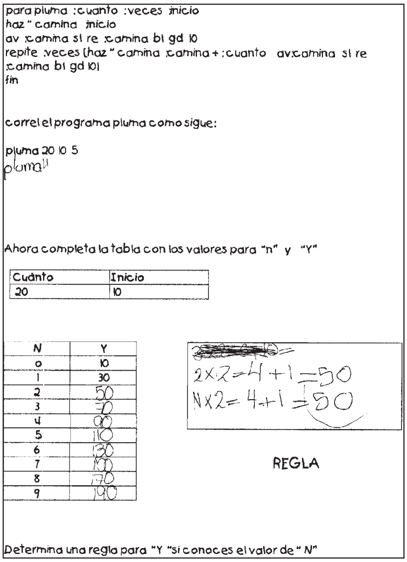
A continuación se presenta una de las actividades sobre los procesos de generalización en ambiente Logo, en la cual se les pedía que corrieran el programa Pluma y completaran una tabla con los valores "*n*" y "*y*". Inicialmente se les proporcionaron unos valores en la tabla de variación, se les solicitó que los completaran y que determinaran una regla para "*y*" conociendo el valor de "*n*". También se les pidió que experimentaran diferentes valores para "*y*" conociendo "*n*". Los estudiantes llegaron a comprender la correspondencia entre los valores. La experiencia adquirida con un Programa General de Logo (PGL) (asignar un valor y obtener un resultado) les permitió llegar a una regla general. Esto se logró, por ejemplo, observando qué sucedía con la figura que iban produciendo al variar uno de los valores; se les indicó que, si deseaban hacer la figura de diferentes tamaños, deberían asignar diferentes valores a la variable y ver su efecto (véase figura 4).

En la hoja de trabajo se muestra que dos estudiantes consiguen elaborar un programa general, pero obtienen una figura en otra posición; tuvieron dificultad con la posición de la tortuga al iniciar el dibujo. En este caso, los estudiantes identificaron los aspectos variables de los invariantes, pero cometieron ese error. En los problemas que abordaban la idea de variable como número general, pero con lápiz y papel, algunos de ellos también tuvieron dificultad para elaborar una regla general. Entendían, por ejemplo, cómo iban variando las cantidades; llegaban a comprender la relación entre ellas, pero no conseguían llegar a un método general; otros estudiantes sí lograban esto último y además podían verificar si la regla funcionaba para todos los casos.

Interacción social en pareja

Durante las sesiones de trabajo, se pudieron observar dos tipos de interacción que resultaron muy productivos: en un tipo de interacción, los participantes del equipo expresan sus puntos de vista y cada uno insiste en que el suyo es el correcto, es decir, surge un conflicto. Esto hace que los participantes avancen en el modo de expresión de su pensamiento y en sus posibilidades de convencimiento; en el otro tipo de interacción, productivo, los participantes piensan en voz alta y, mientras

Figura 4 Hoja de trabajo de los alumnos en actividad en ambiente Logo


para pluma :cuanto :veces :inicio
haz "camina :inicio
av :camina si re :camina bi gd 10
repite :veces [haz "camina :camina + :cuanto av :camina si re :camina bi gd 10]
fin

correl el programa pluma como sigue:

pluma 20 10 5
pluma

Ahora completa la tabla con los valores para "n" y "Y"

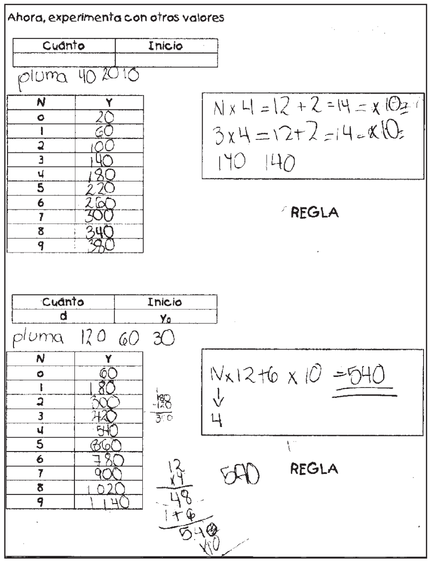
Cuánto	Inicio
20	10

N	Y
0	10
1	30
2	50
3	70
4	90
5	110
6	130
7	150
8	170
9	190

2x2=4+1=50
Nx2=4+1=50

REGLA

Determina una regla para "Y" si conoces el valor de "N"


Ahora, experimenta con otros valores

Cuánto	Inicio

pluma 40 20 10

N	Y
0	20
1	60
2	100
3	140
4	180
5	220
6	260
7	300
8	340
9	380

Nx4=12+2=14=x10=
3x4=12+2=14=x10=
140 140

REGLA

Cuánto	Inicio
d	y_0

pluma 120 60 30

N	Y
0	60
1	180
2	300
3	420
4	540
5	660
6	780
7	900
8	1 020
9	1 140

180 − 120 = 300

Nx12+6 x 10 =540
↓
4

12 x4 = 48, 1+6, 540, x10

540

REGLA

resuelven aparentemente la tarea de manera independiente, en realidad están monitoreando la resolución de su compañero. Esto les permite identificar algún hecho o acción significativa del otro para la resolución desde su propia perspectiva. Se verificó que estas interacciones involucran la reciprocidad de los papeles de los alumnos y ocurren cuando la pareja resuelve una situación problema, y se presentan comportamientos que propician el aprendizaje matemático. Se observó que, en efecto, estos dos tipos de interacción propician el aprendizaje, en contraste con otros menos productivos como aquel en el cual predomina la opinión de uno de los participantes o aquel otro en el cual los alumnos se involucran en una actividad que resulta rutinaria para ambos, la pretendida solución se considera compartida y la posibilidad de que surjan oportunidades de aprendizaje son remotas.

Elementos de pensamiento algebraico temprano

En las actividades realizadas durante la secuencia didáctica, en las hojas de trabajo se describen los problemas que exploraron las ideas de variable en una relación funcional y de sucesión geométrica (en lápiz y papel, los niños fueron capaces de percibir la regularidad en la sucesión geométrica, llenar una tabla de valores y elaborar una regla expresada en un simbolismo prealgebraico). A continuación se reproduce un fragmento de entrevista con un alumno (R) en el que el entrevistador (E) le pide revisar esta hoja de trabajo, que él había completado en clase.

Idea matemática: idea de variable en una relación funcional con varias variables.

Objetivo de la tarea: en esta actividad se solicita a la pareja de estudiantes que observen tres albercas y dibujen la cuarta; a continuación, se les pide que llenen una tabla de valores, respondan algunas preguntas y, por último, que grafiquen la variación del número de mosaicos azules y la del número de mosaicos blancos con el lado de la alberca. Se pide que respondan cómo varían y cuáles son los mosaicos cuyo número crece con mayor rapidez (véase figura 5).

E: Recuerdo que esta actividad fue motivo de mucha discusión, pasaron más de dos sesiones sólo en esta actividad. Aquí están las albercas números 1 y 2 *[Segmento de la entrevista con Ricardo]* y tenían que hacer la número 4. ¿Tuvieron problema para hacer la alberca número 4? *[Segmento de la entrevista con Ricardo.]*

R: No.

E: ¿Dónde tuvieron problema?

R: No, es que no la descubrió, lo que yo descubrí es que aquí en la alberca número 1, así como que da un brinco y eran los mosaicos azules de la alberca 3, y después aquí la alberca número 2 eran los mosaicos de la alberca número 4 (descubre esta relación) $A_{n+1} = A_n + B_n$ *[Segmento de la entrevista con Ricardo.]*

E: Explícame cómo dabas el brinco, ¿qué sucedía en esos brincos que tú me decías de las albercas? De los mosaicos azules de la alberca número 1 a la alberca número 3 y los mosaicos azules de la alberca número 2 a la alberca número 4.

R: Yo supongo que no es porque aquí sí da el brinco y acá no.

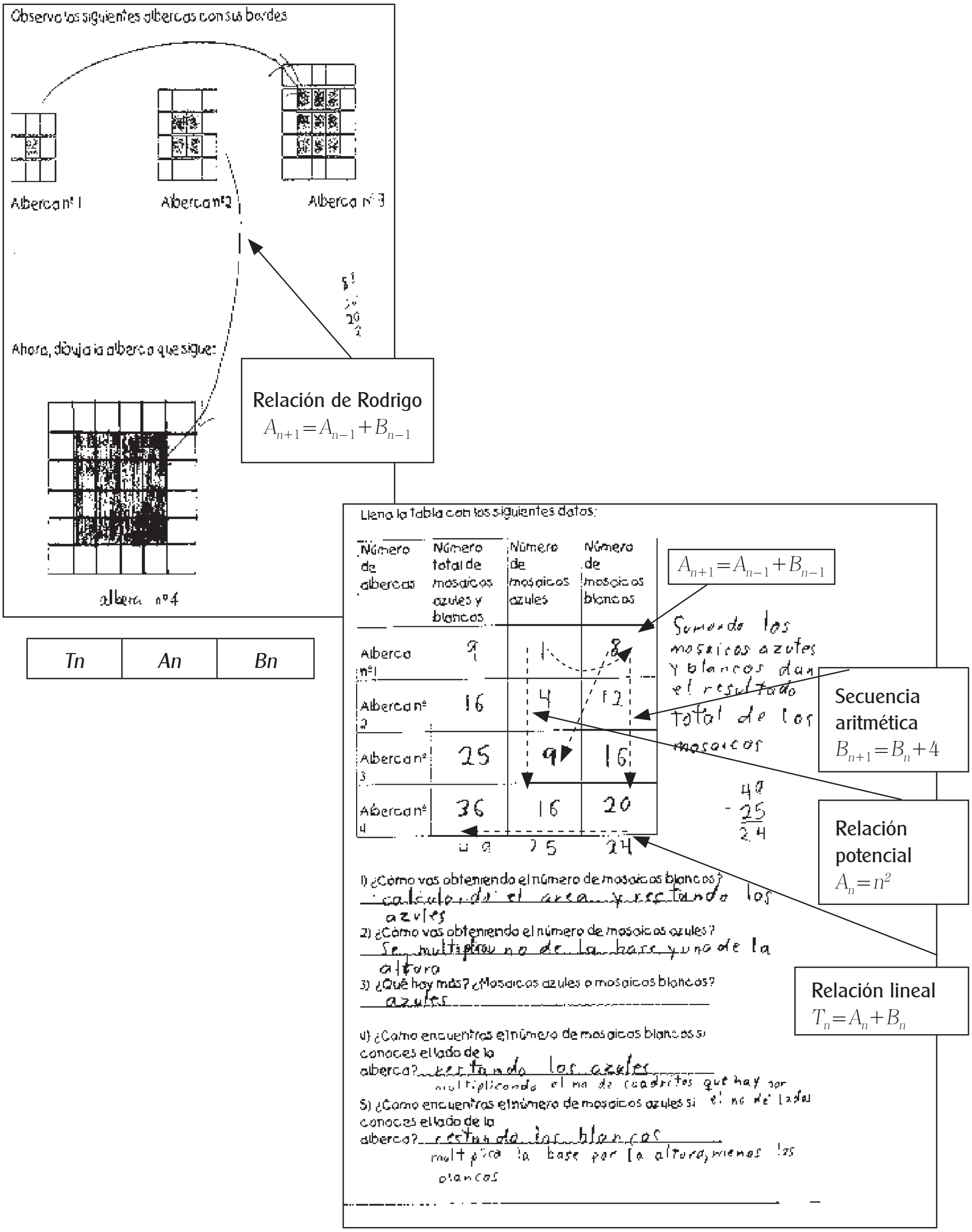
E: ¿Qué brinco daba de la alberca 1 a la 3?

R: Este... ocupa una piscina, no, sí da el brinquito, porque pasa por la alberca número 3.

E: ¿Qué sucede en el brinquito?

R: Sí, haz de cuenta que ésta es toda la piscina y aquí 1, 2, 3 y 4 de base y

Figura 5 Hoja de trabajo de los estudiantes



los cuatro de base y de altura y los cuatro de altura aumentan acá 1, 2, 3 y 4 y acá también da el brinquito, 1, 2, 3.

E: Pero, ¿hacia dónde da el brinquito, de la alberca número 1 a la número 3?

En este diálogo se percibe que el niño descubre y expresa la relación $A_{n+1}=A_{n-1}+B_{n-1}$ como un brinco, es decir, que la alberca número 3 está formada del total de los mosaicos blancos y azules de la alberca número 1 (véase figura 5).

Durante las sesiones de trabajo, se utilizaron actividades en lápiz y papel y en Logo. Para dar el paso hacia un razonamiento proporcional visto como una relación funcional, las actividades más significativas fueron aquellas en las cuales los alumnos tuvieron que elaborar un programa general en Logo para trabajar con este tipo de relaciones. En la figura 6, se muestra una de las hojas de trabajo de los alumnos. Durante las sesiones, se identificaron casos en los cuales la intervención de uno de los integrantes de la pareja, con un nivel conceptual intermedio, fue determinante en la evolución de ésta hacia los procesos de generalización. Esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

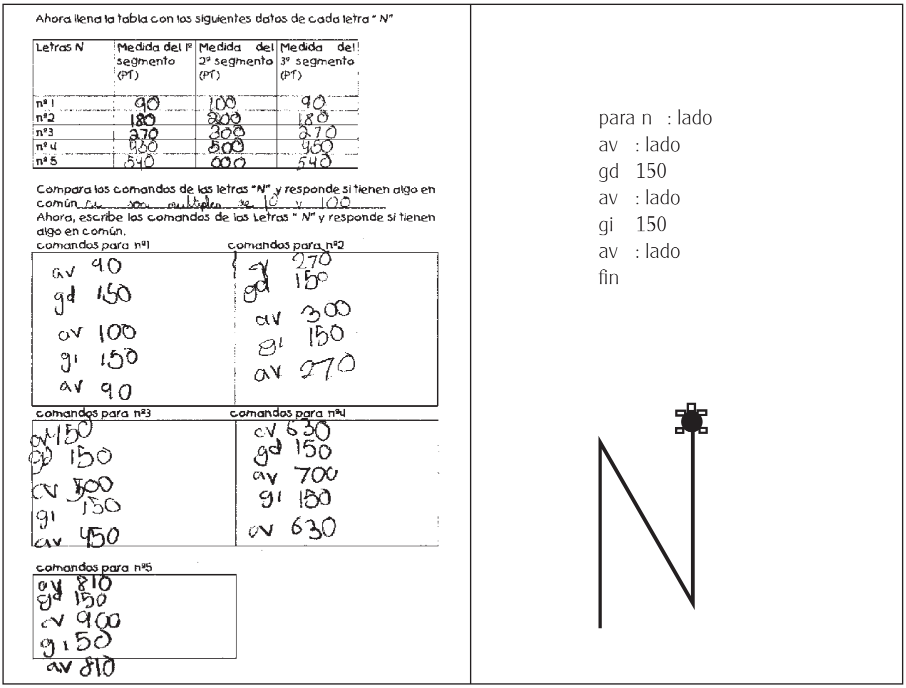
Actividad 3 de la secuencia didáctica sobre los procesos de generalización:
Idea matemática: idea de variable como número general.
Solicitud en la actividad: figura 6, actividad en Logo, letra N con diferentes medidas.

En la tabla se comparan valores y comandos[2] para dibujar cada letra N de diferentes lados. El estudiante necesita observar los comandos. Se les pidió que dibujaran las figuras 4 y 5 de la secuencia, manteniendo la misma proporción de las anteriores letras N. En seguida, se les solicitó que llenaran una tabla y, por último, que elaborasen un programa general en Logo. El estudiante construye cada letra N y esto es muy importante para irlo ayudando a ver las relaciones (véase figura 6).

De acuerdo con los resultados obtenidos, los niños perciben cómo van aumentando o disminuyendo los distintos segmentos que conforman las letras N y cuál es la relación entre las medidas de cada letra; completan adecuadamente la secuencia y completan la tabla de valores; son capaces de generalizar las medidas para la letra N y hacen un programa general en Logo.

[2] Primitivas en Logo: AV, GD, GI.

Figura 6 Hoja de trabajo de los alumnos



Ahora llena la tabla con los siguientes datos de cada letra " N"

Letras N	Medida del 1º segmento (PT)	Medida del 2º segmento (PT)	Medida del 3º segmento (PT)
nº 1	90	100	90
nº 2	180	200	180
nº 3	270	300	270
nº 4	450	500	450
nº 5	540	600	540

Compara los comandos de las letras "N" y responde si tienen algo en común son multiplos de 10 y 100

Ahora, escribe los comandos de las letras " N" y responde si tienen algo en común.

comandos para nº1

av 90
gd 150
av 100
gi 150
av 90

comandos para nº2

av 270
gd 150
av 300
gi 150
av 270

comandos para nº3

av 150
gd 150
av 300
gi 150
av 450

comandos para nº4

av 630
gd 150
av 700
gi 150
av 630

comandos para nº5

av 810
gd 150
av 900
gi 150
av 810

```
para n  : lado
av  : lado
gd  150
av  : lado
gi  150
av  : lado
fin
```

A partir de las sesiones de trabajo, se percibe que los estudiantes evolucionan de modo diferenciado hacia el pensamiento algebraico. De las tres parejas de estudiantes y un trío, tres parejas pasan de un nivel medio a un nivel de conceptualización matemática avanzado, que se caracteriza principalmente por las estrategias de resolución de problemas de tipo prealgebraico al algebraico, pues llegan a establecer una regla general en ambiente Logo y en lápiz y papel; además, el tipo de interacción social de las parejas de estudiantes propició que pudieran expresar sus puntos de vista y que cada uno insistiera en que el suyo era el correcto; de allí derivó un conflicto cognitivo interesante que los hizo avanzar en la expresión de un pensamiento en términos generales. Otra pareja permaneció en el nivel conceptual inicial (una de ellas bajo y otra medio), lo cual puede significar que, a pesar de que en cierta medida comprendían los problemas planteados en las sesiones de trabajo, no pudieron llegar al pensamiento algebraico y comprendían con cierta dificultad la idea de variable como relación funcional.

En términos generales, el análisis de los resultados del cuestionario final permitió confirmar las conclusiones obtenidas después de analizar la evolución de las parejas de alumnos en las sesiones de clase en cuanto a ideas matemáticas y tipos de estrategias para abordar las tareas de generalización.

Discusión final

En su contexto, este estudio se propuso investigar la factibilidad de una iniciación temprana en el pensamiento algebraico a partir de los contenidos matemáticos anteriormente explicitados, observando, entre otras cosas, los diferentes tipos de interacción social, sus efectos y sus relaciones con los dominios matemáticos incorporados en el estudio. La intención era posibilitar situaciones didácticas que facilitaran el acceso temprano al pensamiento algebraico desde el currículo de la escuela primaria en dos versiones: *presimbólica* (percepción de la idea de variación proporcional) y *simbólica* (encontrar y expresar una regla general e incorporarla en lenguaje Logo), mediante una secuencia didáctica que define contenidos matemáticos específicos, un ambiente de aprendizaje y un modelo pedagógico como elementos generadores de significado matemático.

El estudio se llevó a cabo con alumnos de 5° y 6° grado de primaria desde la perspectiva de los Modelos Teóricos Locales (MTL), con una referencia específica a dos de las cuatro componentes de dichos modelos: *la componente del modelo de enseñanza* y *la componente de los procesos cognitivos involucrados en el estudio*. La primera sirvió para estudiar el modelo de enseñanza propuesto, es decir, las dos rutas de acceso al pensamiento algebraico temprano, así como también las dificultades enfrentadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la temática propuesta, específicamente en lo que respecta a la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo. La segunda sirvió para analizar los datos, explorando los procesos cognoscitivos que ocurrieron durante la evolución de los sujetos en cuanto a ideas matemáticas y tipos de estrategias utilizados en tareas de generalización.

En lo que respecta al trabajo con el ambiente Logo, se presentaron algunas dificultades. Algunos estudiantes no consideran un programa como la expresión de un método ni como una entidad; lo ven, más bien, como un medio para guardar una lista de instrucciones y pierden la idea de procedimiento como expresión de un método. Puesto que los estudiantes tuvieron dificultades para identificar los aspectos variables de los invariantes, parece importante estimularlos a diferenciar los elementos variables de los invariantes y solicitarles que escriban programas diferentes en Logo para resolver diversos casos particulares de un mismo problema y analizar así en cuáles aspectos son semejantes y en cuáles no. En seguida, es importante nombrar los elementos de un problema. En Logo se usa, por ejemplo, *lado* para nombrar la variable que representa el lado de un cuadrado de tamaño indeterminado. Esto los ayuda a identificar la variable, pero cuando en un Programa General de Logo (PGL) hay más de una variable, es importante que puedan diferenciarlas en el momento de nombrarlas o simbolizarlas.

Sobre la idea de variable en una relación funcional, se observaron coincidencias con el trabajo de Ursini (1997) sobre el lenguaje Logo. La autora menciona que, desde un inicio, los estudiantes abordan relaciones funcionales, específicamente las ideas de correspondencia y cambio, pero estas características no son explicitas, sino que están implícitas en los procedimientos y, por tanto, trabajar con estas ideas no quiere decir que los estudiantes necesariamente elaboren conscientemente esos conceptos. Es importante trabajar con los estudiantes en este sentido.

En este estudio, tanto el lenguaje Logo como las actividades en lápiz y papel y la interacción social mediante el trabajo en parejas propiciaron la introducción temprana al pensamiento algebraico. Los estudiantes no tenían conocimiento escolar previo sobre procesos de generalización y su interacción con la investigadora y el ambiente Logo permitieron que dieran sentido a dichos procesos. Esto sugiere también que las nociones matemáticas abordadas en el estudio dependen de los mediadores que se utilizan. Los resultados también ponen de manifiesto que tener acceso al pensamiento algebraico a temprana edad mediante el uso de un micromundo Logo no sólo mejora el desempeño de los estudiantes, sino también la naturaleza del aprendizaje de dichos contenidos temáticos, pues tal aprendizaje proviene de una fase de exploración y experimentación directa con los elementos matemáticos de generalización y variación.

A pesar de que el contenido matemático utilizado en el estudio se enseña en la escuela secundaria, los resultados evidencian que la instrucción escolar hace demasiado énfasis en el pensamiento aritmético aditivo, obstaculiza el razonamiento en términos multiplicativos y dificulta no sólo el abordaje de contenidos de la enseñanza básica (por ejemplo, el razonamiento proporcional), sino también el acceso a otro tipo de razonamiento, como el algebraico. Por otra parte, se pudo observar que el tipo de interacción social que tuvo lugar entre los estudiantes propició el aprendizaje, pues podían intercambiar sus concepciones y llegar, de manera conjunta, a la resolución de los problemas presentados.

CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados aquí registrados muestran la factibilidad de iniciar a estudiantes de la escuela elemental en el pensamiento algebraico, partiendo de temas y conceptos curriculares de este nivel escolar y potenciando su expresión general en un lenguaje simbólico semejante al del álgebra. Esto, en vista de la experiencia que desarrollan estos estudiantes al enrolarse en actividades que involucran la elaboración de programas generales que reproducen un patrón dado. El estudio confirma resultados publicados por Carraher *et al.*, Hoyles y Sutherland, y Ursini, en el sentido de que es posible aprovechar tópicos de la aritmética (en este caso, el de variación proporcional) y las potencialidades del lenguaje de programación Logo para fomentar en los alumnos procesos de generalización que evolucionen hacia un nivel simbólico-algebraico. Tanto la generalización como la simbolización formal son aspectos sustantivos del álgebra y, en este sentido, los resultados expuestos apuntan hacia el surgimiento de un acceso temprano al pensamiento algebraico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bednarz, N., C. Kieran y L. Lee (1996), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching,* Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. R. (1984), *Algebra: Children´s Strategies and Errors,* Windsor, Reino Unido, NFER-Nelson.

Castro, E., L. Rico y E. Castro (1995), *Estructuras aritméticas elementales y su modelización,* Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericana, pp. 45-79.

Carraher, D., A. Schliemann y B. Brizuela (2000), "Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions", en M. L. Fernández (ed.), *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* PME-NA *XXII*; Tucson, Arizona, 7 a 10 de octubre de 2000.

——— (2001), "Operate You On Unknowns?", PME *25 Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Holanda, vol. 1, pp. 130-140.

Carraher, D. y D. Earnest (2003), "Guess my rule revisited", en *Proceedings of the International Conference of the Psychology of Mathematics Education of the 27 Conference of the* PME *Psychology of Mathematics Education,* Honolulu, vol. 1, pp. 173-180.

Da Rocha Falcão, J. T. (1993), "A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas", en A. D. Schliemann, D. W. Carraher, A. G. Spinillo, L. L. Meira, y J. T. da Rocha Falcão (1993), *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*, Recife, Editora Universitaría, UFPE.

Durán Ponce, R. (1999), *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras por alumnos de sexto grado de primaria*, tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN.

Filloy, E. (1991), "Cognitive Tendencies and Abstraction Processes in Algebra Learning", en F. Furinghetti (ed.), *Proceedings of the fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 48-55.

——— (1993), "Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 11, núm. 2, pp. 160-166.

——— (1997), *La observación en matemática educativa. Modelos teóricos locales y sistemas de signos*, México, Notas del autor.

——— (1999), "Modelos Teóricos Locales (MTL): Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa", en *Aspectos teóricos del álgebra educativa*, Grupo Editorial Iberoamericana, cap. 1.

Filloy, E. y T. Rojano (1985a), "Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies", en L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Utrech, Holanda, State University of Utrecht, pp. 154-158.

——— (1985b), "Operating unknown and models of teaching (A clinical study with 12-13 years old with a high proficiency in pre-algebra)", en S. K. Domarin y M. Shelton (eds.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Columbus, Ohio, EUA, Ohio State University, pp. 75-79.

——— (1991), "Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and vice-versa", en R. Underhill (ed.), *Proceedings of the thirteenth Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 29-35.

Filloy, E., T. Rojano y L. Puig (2008), *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*, Berlín, Heidelberg y Nueva York, Springer.

Hoyles, C. y R. Sutherland (1989), *Logo Mathematics in the Classroom*, Londres y Nueva York, Routledge.

——— (1989), *Ways of learning in a computer based environment: Some findings of the Logo Maths Project*, Londres, Institute of Education, University of London.

Kaput, J., M. Blanton y L. Moreno (2008), "Algebra from a Symbolization Point of View", en National Council of Teachers of Mathematics, *Algebra in the Early Grades,* Londres, Lawrence Erlbaun.

Kaput, J. y M. Blanton (2000), "Generalization and progressively formalizing in a third-grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers", conferencia magistral presentada en PME-NA XXII; Tucson, Arizona, 10 de octubre de 2000.

——— (2002), "Design principles for tasks that support algebraic thinking in elementary school classrooms", Norwich, Reino Unido, vol. 2, pp. 104-112.

Kieran, C. (1980), "The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation *vs.* an operator symbol", en R. Karplus (ed.), *Proceedings of the Fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Berkeley, California, University of California, pp. 163-169.

Kieran, C. y E. Filloy (1989), "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica", *Enseñanza de las ciencias,* vol. 7, pp. 229-240.

Lee, L. (2001), "Early algebra –but which algebra?", en *Proceedings of the 12 ICM Study Conference,* Australia, vol. 2, pp. 392-399.

Mac Gregor, M. y K. Stacey (1993), "Seeing to pattern and writing to rule", *PME Psychology of Mathematics Education,* Ibaraki, Japón.

Mason, J., A. Graham, D. Pimm y N. Gower (1985), *Routes of Roots of Algebra,* Gran Bretaña, The Open University Press.

——— (1989), "Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention", *For the Learning of Mathematics,* vol. 9, núm. 2, junio, pp. 2-8.

NCTM (1989), *National Standards for Mathematics,* National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R. (1986), "Constructing a conceptual framework for elementary algebra through LOGO programming", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 17, pp. 37-54.

Radford, L. (1996), "The role of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective", en N. Bernardz, C. Kieran y L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching,* Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Reggiani, M. (1994), "Generalization as a basic for algebraic thinking: Observations with 11-12 years old pupils", en *Proceeding of the XVIII PME Conference,* Lisboa, Portugal, pp. 97-104.

Sfard, A. y L. Linchevski (1994), "The Gains and Pitfalls of Reification –The Case of Algebra", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 26, pp. 191-228.

Slavit, D. (1999). "The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought", *Educational Studies in Mathematics*, Holanda, Kluwer Academic Publishers, vol. 37, pp. 251-274.

Schliemann, A., D. Carraher, B. Brizuela y D. Earnest (2003), "Algebra in elementary school", en *PME 27 Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, vol. 1, pp. 127-134.

Sutherland, R. (1991), "Some unanswered research questions on the teaching and learning of algebra", *For the Learning of Mathematics*, vol. 11, núm. 3, noviembre, pp. 40-46.

Ursini, S. (1990), "El lenguaje aritmético-algebraico en un ambiente computacional", *Cuadernos de Investigación*, núm. 15, IV, julio, México, PNFAPM, pp. 149- 156.

Vergnaud, G. (1991), *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México, Trillas, caps. 9 y 11.

DATOS DE LAS AUTORAS

Cristianne Butto Zarzar
Área Académica número 4 Tecnologías de la Información
y Modelos Alternativos,
Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco, México
cristianne_butto@hotmail.com

Teresa Rojano Ceballos
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
rojanot@gmail.com