La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México

Ernesto Sánchez

Resumen: El presente artículo analiza los contenidos del subtema "nociones de probabilidad" de los programas de estudio de matemáticas de secundaria de 2006 en México. En primer lugar, se describen los "conocimientos y habilidades" que presenta el programa en el subtema en cuestión y se determina el concepto clave que los sustenta de manera que sea comparable, por un lado, con las "ideas fundamentales" de Heitele (1975) y, por otro, con los temas de probabilidad de los currículos actuales de cinco países, Australia, Reino Unido, Estados Unidos, España y el de México de 1993. En seguida, se analizan los problemas propuestos en las secciones "Orientaciones didácticas" del programa de 2006 sobre la base de los elementos de la alfabetización probabilista propuesta por Gal (2005). En el análisis comparativo destacan dos aspectos ausentes del programa mexicano: el tema de probabilidad frecuentista y la preocupación por ampliar los contextos; aspectos en los que se hace énfasis en la literatura que se revisa.

Palabras clave: probabilidad, programas de estudio, ideas fundamentales, alfabetización probabilista.

Probability in the mathematics syllabus in secundary education in Mexico

Abstract: This article analyses the contents under the subtitle "probability notions" of the year 2006 syllabus of Mathematics for middle schools in Mexico. Firstly, it describes the "knowledge and skills" under the subtheme of "probability notions" of the syllabus and determines the key concepts behind them in a way that is comparable, on one hand, to the "fundamental ideas" of Heitele (1975) and, on the other hand, to the contents of the current syllabi of five countries: Australia, UK, USA, Spain, and that of Mexico in 1993. Secondly, the problems listed under the section: "didactic guidelines" of the 2006 syllabus is analyzed using the

Fecha de recepción: 13 de octubre de 2008.

elements of a probabilistic literacy as proposed by Gal (2005). The comparative analysis shows two elements omitted in the Mexican syllabus; they are issues of frequency probability and concerns about expanding the contexts. These issues are addressed/emphasized in the literature reviewed.

Keywords: probability, syllabus, fundamental ideas, probabilistic literacy.

INTRODUCCIÓN

En México hay un Currículo Nacional que prescribe las materias, contenidos y enfoque pedagógico que guía la acción educativa en los niveles básicos (preescolar, primaria y secundaria). Puesto que muchos otros países también definen y siguen currículos nacionales, se han realizado estudios y reflexiones sobre la naturaleza y alcances de esta modalidad educativa. Como resultado de esos estudios, se ha concluido que los profesores en cualquier parte del mundo no siguen fielmente sus currículos nacionales, que hay una gran diferencia entre los currículos "propuestos" y los currículos "realizados" o implementados en los salones de clases. Incluso, lo que realmente aprenden los estudiantes, el llamado currículo "logrado", a menudo tiene poca relación con los anteriores (Travers y Westbury, 1989; Robitaille y Garden, 1989, citados en Howson, 1991). Estas consideraciones llevan a Howson (1991, p. 3) a preguntarse: ¿realmente son muy importantes los currículos nacionales?

Howson considera que la respuesta es positiva, los currículos nacionales son importantes a pesar de que sea otro el currículo implementado y otro el logrado. En particular, el currículo de matemáticas envía un mensaje sobre los objetivos y aspiraciones de la nación para la educación matemática y una creencia sobre lo que se puede alcanzar; el currículo de matemáticas nacional refleja, o debería reflejar, la manera en que se percibe la enseñanza de las matemáticas en el país. Por tanto –afirma Howson– "el currículo de matemáticas nacional debe tener una estructura educacional, matemática y pedagógica muy clara" (p. 3).

En relación con los temas de probabilidad, surge la pregunta: ¿el programa de matemáticas para la secundaria 2006 envía el mejor mensaje a los profesores y estudiantes para promover una cultura probabilista? Aunque es difícil responder esta pregunta de manera definitiva, en este artículo se hace un esfuerzo por contribuir con elementos para formarse una opinión razonada sobre la calidad de la propuesta de probabilidad en el currículo mexicano.

ANTECEDENTES

Para llevar a cabo el análisis del tema de probabilidad para la enseñanza secundaria, se analizarán las propuestas que se presentan en el programa, utilizando el punto de vista de los resultados de la didáctica de la probabilidad. En las siguientes dos secciones de este apartado, se resumen los elementos que permitirán apreciar el análisis que se realizará. En la primera sección se exponen brevemente los tres principales acercamientos a la noción de probabilidad, con comentarios sobre sus posibilidades. La segunda sección se refiere a las ideas previas y a las formas de razonamiento que frecuentemente tienen los estudiantes acerca del azar y la probabilidad.

ENFOQUES DE *PROBABILIDAD*

Como se verá más adelante, en los programas del nivel de secundaria se propone estudiar al menos uno de tres enfoques de probabilidad; en seguida los describiremos y se comentarán algunas de sus dificultades y limitaciones.

El enfoque clásico

Este enfoque consiste en la asignación de probabilidades en un experimento con un dispositivo aleatorio en el que los resultados son equiprobables; la probabilidad de un evento se obtiene del cociente de la cardinalidad del evento entre la cardinalidad del espacio muestral.

Metz (1998) revisa la literatura sobre la comprensión de la noción de probabilidad y señala que “la investigación indica que los niños pequeños tienen rudimentos de la probabilidad clásica, en el sentido de que infieren información de la estructura de dispositivos aleatorios para realizar anticipaciones” (p. 162). Green (1982) informa cómo la solución correcta de un problema sencillo, cuya solución depende de una comprensión elemental del enfoque clásico, aumenta de 38% de respuestas correctas en 6° grado a 71% en 9° (3° de secundaria).

Sin embargo, las dificultades aumentan considerablemente cuando las situaciones requieren elementos de análisis combinatorio para construir el espacio muestral (Benson y Jones, 1999; Zimmerman y Jones, 2002). English (2005) estudia el desarrollo del razonamiento combinatorio de los alumnos y, a pesar de que concluye que “aun los niños pequeños son capaces de trabajar efectivamente con situaciones combinatorias cuando éstas están inmersas en contextos significativos” (p. 137), se reconoce que la combinatoria provoca dificultades en todos los niveles escolares.

Una limitación del enfoque clásico que ha llevado a algunos autores a proponer como alternativa el enfoque frecuentista es que aquél es aplicable sólo a situaciones que generan un espacio muestral equiprobable. Fuera de situaciones de juego, hay muy pocas situaciones de la naturaleza o sociales que pueden modelarse razonablemente con un espacio muestral equiprobable.

El enfoque frecuentista

En este enfoque, también llamado experimental o empírico, la probabilidad de un evento es una cantidad desconocida que se puede estimar experimentalmente. Para este propósito se define la noción de frecuencia relativa de un evento en pruebas repetidas en las mismas condiciones.

Aludiendo al enfoque frecuentista, Green (1982) sugirió que era necesario que se realizaran *actividades prácticas* en las clases de probabilidad desde temprana edad. Shaughnessy (1983) propuso que la introducción de la probabilidad debería estar basada en actividades y experimentos, primero prediciendo resultados y confrontando las predicciones con los resultados de simulaciones y experimentaciones, y sólo después pasar a su estudio formal, método que utilizó en sus investigaciones para observar los efectos de la instrucción en el uso y modificación de concepciones erróneas de los estudiantes sobre probabilidad (Shaughnessy, 1977).

Aunque el enfoque tiene la ventaja de ligar los conceptos teóricos con los eventos aleatorios de situaciones reales, también tiene desventajas que vale la pena comentar. Una, que suele ser molesta para los estudiantes, es que no proporciona el valor exacto de una probabilidad. Otra, que va de la mano con ella, se refiere a la determinación de las veces que resulta pertinente repetir una experiencia para alcanzar una buena estimación de la probabilidad. A menudo se pide repetir la experiencia “muchas veces”, sin discutir lo problemático que puede ser para el alumno determinar el número mínimo de repeticiones para que se vean los efectos de la probabilidad. Adoptando una posición constructiva, la existencia de estas dificultades se puede convertir en una oportunidad para trabajar los temas de estimación y aproximación en contextos de probabilidad.

Se ha señalado (Hawkins y Kapadia, 1984; Batanero, Henry y Parzysz, 2005) que otro inconveniente importante de este enfoque es que existe un gran número de situaciones que no se pueden repetir en las mismas condiciones, situaciones en las que, sin embargo, tiene sentido hablar de probabilidades. Por esta razón, estos mismos autores, recomiendan, además, un enfoque subjetivista en la enseñanza y no sólo el acercamiento frecuentista o experimental.

El enfoque subjetivista

La probabilidad subjetiva de un evento es un número entre cero y uno asignado por el investigador o resolutor y el cual representa su grado de creencia sobre la ocurrencia del evento. Esta teoría fue expuesta de manera amplia por De Finetti (1974), aunque sus raíces se remontan a la época en que surge la probabilidad (Hacking, 1975).

Steinbring y Von Harten (1983) sugirieron que un método subjetivo permite asignar una probabilidad a un amplio rango de situaciones, incluidas aquéllas en las que tanto el método frecuentista como la probabilidad clásica o *a priori* no son aplicables.

Hawkins y Kapadia (1984) sostienen que la vía más fructífera para construir un buen marco de referencia para que los niños desarrollen ideas probabilísticas es utilizar los métodos subjetivos, además de los enfoques clásico y frecuentista. Consideran que la probabilidad subjetiva es más accesible a los niños pequeños que las otras maneras de introducir la probabilidad. Este punto de vista lo reitera Kapadia (2008) 23 años después en una discusión en su crítica al currículo de Inglaterra.

Son pocos los informes de investigación sobre las dificultades de aprendizaje del enfoque subjetivo. La razón puede ser que no es común en los programas de estudio. Por ejemplo, de los que analizaremos más adelante, sólo el del Reino Unido lo incluye.

En general, en relación con los diferentes enfoques de probabilidad, varios investigadores proponen que se ofrezcan oportunidades en la educación básica para aprovechar las tres maneras de asignar probabilidades y que se elija el que represente el mejor modelo de la situación en cuestión (Shaughnessy, 1992).

Sesgos en el aprendizaje de la probabilidad

Una de las líneas más desarrolladas de la investigación en la educación matemática (o didáctica de la matemática) ha sido el estudio de errores y dificultades de los estudiantes al enfrentar diferentes conceptos matemáticos. Se ha descubierto que los errores sistemáticos no se pueden atribuir a distracciones ni a las dificultades por falta de atención o estudio o sólo a la propia complejidad del concepto, sino que muchas veces se deben a que los estudiantes tienen sus propias ideas previas sobre las situaciones, las cuales suelen ser persistentes e inconsistentes con el punto de vista normativo. Sobre todo en probabilidad, las personas mantienen un conjunto de ideas que contradicen los resultados del cálculo y la teoría, por lo que es necesario que en la enseñanza se tengan en cuenta y se procure su superación (Garfield y Alhgren, 1988).

¿Cuánto se refleja en los temas de probabilidad del programa la consideración de las ideas previas que suelen tener los estudiantes? Para responder, conviene tener en cuenta las concepciones más importantes relacionadas con el nivel de secundaria para buscar de qué manera se incluyen en el programa. Se mencionarán aquí sólo tres que son especialmente importantes en este nivel, a saber: el sesgo de *equiprobabilidad*, el sesgo de *la atención* y la *representatividad*.

Sesgo de equiprobabilidad

Este sesgo consiste en una tendencia de los estudiantes a pensar que los resultados de una experiencia aleatoria tienen la misma probabilidad. En los experimentos de Lecoutre (1992) y Lecoutre y Cordier (1990), se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de dos sucesos de un experimento aleatorio. Éste consiste en lanzar un dado dos veces y observar la suma de las caras que caen; se pide que se compare la probabilidad de obtener una suma de 5 con la de obtener una suma de 6. Esta pregunta se hace de diferentes maneras y la respuesta de la mayoría sigue siendo que los dos eventos tienen la misma probabilidad. Los autores sostienen que la causa no es atribuible a una falta de razonamiento combinatorio, sino a una idea de que si un experimento es al azar, todos sus resultados deben tener la misma probabilidad. Es posible que el sesgo de equiprobabilidad sea fomentado, en lugar de superado, con una enseñanza que sobreestime el enfoque clásico.

Sesgos de la atención

Falk (1983) investigó las estrategias de los niños al pedírseles que elijan una de dos urnas con diferentes proporciones de bolas negras y blancas para que extraigan de ella una bola al azar de alguno de esos colores, por ejemplo, blanca. Surgieron tres estrategias diferentes que llevan a una valoración parcial de las probabilidades, a saber, elegir la urna con más bolas blancas, elegir la urna con menos distractores (bolas negras) o seleccionar la urna con la mayor diferencia a favor de las bolas blancas. En las dos primeras, los estudiantes atienden a una sola variable, en la segunda, consideran ambos colores pero con una estrategia aditiva. Este tipo de tareas tienen el inconveniente de que pueden asumirse como tareas de comparación de fracciones o números relativos (¿dos en tres es mayor que tres en cuatro?) y no como tareas de probabilidad en las que esté presente la incertidumbre.

Representatividad

La heurística de representatividad consiste en evaluar la probabilidad de un evento sobre la base del grado en el que el sujeto percibe que el evento representa a la población de la que proviene o el proceso que lo genera. Cuando en este tipo de razonamiento se ignora el tamaño de la muestra o el papel de la independencia de las selecciones, se producen sesgos en las estimaciones de probabilidades (Tversky y Kahneman, 1982). El ejemplo clásico del sesgo de representatividad se presenta cuando se pide evaluar qué es más probable al seleccionar una familia de seis descendientes: que la secuencia de hijos sea HHHHHH o que sea HMMHMH (donde H significa "hombre" y M "mujer"). Los estudiantes sugieren que la segunda es más probable, pues es más representativa del hecho de que cada sexo tiene $\frac{1}{2}$ de probabilidad de ocurrir; sin embargo, el cálculo de probabilidades dice que ambas secuencias son igualmente probables.

La *falacia del jugador* es una expresión de la heurística de la representatividad y consiste en la creencia de que después de la ocurrencia repetida de un resultado, un jugador tiende a pensar que la probabilidad del resultado alternativo aumenta, aunque los eventos sucesivos sean independientes.

METODOLOGÍA

El problema de analizar el currículo es muy complejo, aunque dicho análisis sólo se enfoque a una materia e incluso a un subtema, como es el caso en este trabajo. La razón es que el currículo es un sistema formado por varios subsistemas; los siguientes son los más representativos:

a) Contenido pedagógico
b) Contenido matemático
c) Problemas matemáticos (de probabilidad en nuestro caso)
d) Expresiones verbales/Lenguaje

Este trabajo se restringe al subtema "Nociones de probabilidad" y se concentra sobre todo en los subsistemas *b* y *c*.

Los datos que se analizan son los "conocimientos y habilidades" y las "orientaciones didácticas" del subtema "nociones de probabilidad" del Programa de Estudio (SEP, 2006). Hemos utilizado como marcos de referencia para analizar dichos datos las ideas fundamentales de Heitele (1975), los temas de probabilidad de los programas de otros países y los elementos de una cultura probabilista de Gal (2005).

El procedimiento ha sido:

1. Determinar los temas que subyacen en los "conocimientos y habilidades" del Programa de Estudio (SEP, 2006). Esto implica un proceso de reducción que se expone con detalle más adelante.
2. Compararlos con las ideas fundamentales de Heitele. Previamente se resume la exposición de este autor en lo referente a las ideas fundamentales para estocásticos que propone.
3. Compararlos con los temas de probabilidad del currículo de cuatro países. Una lista de tales temas del currículo de tres países elaborada por Jones, Langrall y Mooney (2007), más los formulados en el currículo de España, son útiles para este propósito.
4. Comparar las "orientaciones didácticas" del programa con los elementos de una cultura probabilista de Gal (2005).

Este procedimiento proporciona ausencias y presencias relevantes que permiten tanto dar una visión general de la manera en la que se trata la probabilidad en el programa, como formular algunos comentarios críticos específicos.

EL SUBTEMA "NOCIONES DE PROBABILIDAD" DEL PROGRAMA

Con referencia a los programas de estudio, se puede observar que, antes de enlistar los contenidos de los programas por grado y por bloque, hay tres secciones que describen los *propósitos, enfoque y evaluación*, precedidas de una *presentación* y una *introducción*. En la introducción se declara el objetivo general que se persigue:

> Mediante el estudio de las matemáticas se busca que los niños y jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo se busca que asuman una actitud positiva hacia el estudio de la disciplina, de colaboración y de crítica (SEP, 2006, p. 7).

También en la introducción, se informa que los contenidos se organizan en tres grandes ejes y se hace una breve descripción de cada uno de ellos. Sobre el eje *Manejo de la información*, en el que se incluyen las nociones de probabilidad, se dice:

> *Manejo de la información* tiene un significado muy amplio. En estos programas se ha considerado que la información puede provenir de situaciones deterministas, definidas –por ejemplo, por una función lineal–, o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de su representación gráfica o tabular (SEP, 2006, p. 7).

En la sección de los propósitos se dice lo siguiente referido al eje *Manejo de la información*:

> En cuanto al eje *Manejo de la información*, se resuelven problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes. Este trabajo se apoya fuertemente en nociones matemáticas tales como porcentaje, probabilidad, función y, en general, en el significado de los números enteros, fraccionarios y decimales (SEP, 2006, p. 9).

Lo anterior es todo lo que se puede encontrar relacionado con las nociones de probabilidad. No es posible responder fácilmente la pregunta: ¿cuáles son los propósitos de la enseñanza de la probabilidad? O digamos que sólo puede responderse de manera general, sin que haya especificidad para la probabilidad, a saber, que “los estudiantes expresen matemáticamente situaciones”, “utilicen técnicas para reconocer, plantear y resolver problemas” y “resuelvan problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos...”

En conclusión, debe buscarse una respuesta más específica en las secciones “Conocimiento y habilidades” y “Orientaciones didácticas”, donde traten el subtema de “nociones de probabilidad”.

CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES DE LOS SUBTEMAS “NOCIONES DE PROBABILIDAD”

En los tres grados se enuncian nueve puntos de “conocimientos y habilidades” bajo el subtema “nociones de probabilidad”. Éstos se transcriben a continuación con una reformulación que trata de hacer explícitos algunos de los aspectos implícitos que pueden ayudar a entenderlos.

Primer grado

- Enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria.
- Utilizar la escala de probabilidad entre 0 y 1 y vincular diferentes maneras de expresarla.
- Establecer cuál de dos o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificar la respuesta (SEP, 2006, p. 48).
- Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, basándose en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables (SEP, 2006, p. 60).

Si a este grupo de “conocimientos y habilidades” para primer año se agregan algunos elementos que tengan en cuenta el enfoque, se pueden reformular de la siguiente manera sin desvirtuar la intención inicial:

"El profesor propiciará que los estudiantes enumeren los resultados de una experiencia aleatoria, promoverá que sean conscientes de la propiedad de que las probabilidades son números entre cero y uno y que sean capaces de expresarlas como fracción, decimal y/o porcentaje. También, los guiará para que aprendan a comparar las probabilidades de diferentes eventos. Finalmente, deberá ayudarlos a reconocer cuándo un juego es justo o no, teniendo en cuenta las probabilidades de ganar de los jugadores. Si estas probabilidades son iguales, el juego es justo, de lo contrario no lo es."

Esta reformulación incluye el papel del maestro que el enunciado original deja sin aclarar.

Segundo grado

- Distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son independientes.
- Determinar la manera en la que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos independientes (SEP, 2006, p. 95).
- Distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son mutuamente excluyentes.
- Determinar la manera en la que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia (SEP, 2006, p. 102).

"El profesor sugerirá situaciones en las que se presenten eventos independientes y pedirá a los estudiantes que los identifiquen; elegirá dos eventos independientes y les pedirá que calculen sus probabilidades; después preguntará cómo influye la ocurrencia de uno de ellos en la probabilidad del otro. Procurará que los estudiantes descubran que, para eventos independientes, la probabilidad de ocurrencia conjunta es el producto de las probabilidades.

"También sugerirá situaciones en las que se presenten eventos mutuamente excluyentes; buscará que vean que, cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de su unión es la suma de las probabilidades."

Tercer grado

- Utilizar simulación para resolver situaciones probabilistas (SEP, 2006, p. 119).

"El profesor formulará problemas cuya solución sea difícil calcular con los métodos aprendidos, pero en cambio, deberán poder resolverse mediante simulación. Tales problemas le servirán para mostrar a los estudiantes el método de simulación."

IDEAS IMPORTANTES CONTENIDAS EN LOS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES

Para poder comparar con otros currículos de probabilidad y con otros análisis, conviene preguntarse: ¿cuáles son las ideas o temas importantes que organizan estos conocimientos y habilidades? Es necesario buscar esos temas generales en la medida en la que el formato y la presentación de los planes oficiales no declaran explícitamente los contenidos, sino que prescriben acciones caracterizadas por los verbos: enumerar, utilizar, establecer, reconocer, distinguir, determinar.

Para realizar esta lista, se deben observar las acciones que se proponen e interpretarlas para determinar el tema general bajo el cual podrían aparecer, por ejemplo: "...los posibles resultados de una experiencia aleatoria" es parte del tema *Espacio muestral*; "la escala de la probabilidad entre 0 y 1 y vincular diferentes formas de expresarla" es la propiedad $0 < p < 1$; que se puede asimilar a un tema de "propiedades de la probabilidad"; el siguiente punto que se refiere a la pregunta "cuál de dos o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificar la respuesta" implica conocer alguna "definición de probabilidad" (clásica o frecuentista), pues la justificación tiene que ser en términos de la asignación de una probabilidad a cada uno de los eventos y luego comparar los números resultantes; la comparación de números no es objeto de la probabilidad, por lo tanto, lo importante en la comparación es el "cálculo o estimación de las probabilidades". Propongo el tema "Probabilidad" para agrupar "definición, cálculo o estimación y propiedades de la probabilidad". El punto sobre "las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, sobre la base de la noción de resultados equiprobables y no equiprobables" lo resumiré en "juego justo y equiprobabilidad". No es difícil acordar que los dos primeros puntos de segundo año pueden quedar bajo el tema "Independencia y regla del producto"; en contraste, sí lo es determinar el tema general de los otros dos puntos de segundo año. Uno de ellos se refiere a eventos mutuamente excluyentes, pero no es común un tema llamado "Eventos mutuamente excluyentes"; en el otro, la expresión "Determinar la manera en la que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia" es desafortunada, ya que literalmente sería simplemente "cálculo de probabilidad", pero por su posición en el programa podemos interpretar que se refiere al cálculo de probabilidades de una "unión" de dos eventos mutuamente excluyentes. Habría sido muy fácil expresarlo así: "Cálculo de la unión de eventos mutuamente excluyentes", pero observando el lenguaje utilizado en el programa, se puede deducir que se evita la terminología conjuntista. Sin esta herramienta, se complica la manera de hablar de las operaciones de eventos, por ejemplo, el punto en cuestión debería decir: "Determinar la manera en la que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de al menos uno de dos eventos mutuamente excluyentes". En consecuencia, dicho punto se puede incluir en el tema: "regla de la suma" para eventos mutuamente excluyentes. Finalmente, también será fácil acordar que el único tema de tercer grado se ponga bajo el tema "simulación".

Entonces, es razonable decir que las ideas o temas importantes de las nociones de probabilidad en el programa de secundaria son las seis siguientes:

1. Espacio muestral
2. Probabilidad
3. Equiprobabilidad y juego justo
4. Independencia y regla del producto
5. Regla de la suma (para eventos mutuamente excluyentes)
6. Simulación

A continuación se partirá de la lista anterior para detectar diferencias y similitudes con otras propuestas de temas importantes o grandes ideas en probabilidad para este nivel escolar.

LAS "IDEAS FUNDAMENTALES" EN PROBABILIDAD

Una de las primeras listas de ideas importantes de probabilidad y estadística para organizar la parte del currículo sobre estos temas fue propuesta por Heitele (1975), quien consideraba, basado en proposiciones teóricas de Bruner, que para cada disciplina hay un conjunto de ideas de un gran poder explicativo que pueden ser enseñadas desde los niveles elementales hasta los universitarios. Para su enseñanza en cada etapa de desarrollo, tales ideas conservan su estructura y sólo difieren en el lenguaje con el que se describen y en su nivel de elaboración. La lista de "Ideas fundamentales" de Heitele es la siguiente:

1. *Normando las expresiones de nuestra creencia*
   Heitele incluye la idea de que las expresiones como "creo que esto es así", "es algo cierto", etc. se pueden "normar" de manera que a lo imposible se le asigne el cero, mientras que a lo seguro el uno. Además, que la relación de orden entre números que representan probabilidades corresponde a la relación entre grados de creencias que van de menos a más convicción sobre la ocurrencia de un evento.
2. *El campo de la probabilidad*
   Esta idea incluye las nociones de experimento aleatorio, espacio muestral y eventos. También abarca el azar o aleatoriedad, es decir, la noción de que una experiencia puede dar lugar a uno entre varios resultados sin que se pueda predecir y que no es posible determinar causas ocultas o mecanismos que lleven a un resultado o que las causas o mecanismos son tan complicados que es preferible ignorarlos y considerar que los resultados son al azar.
3. *Combinación de probabilidades - La regla de la suma*
   La regla de la suma es un caso particular del procedimiento más general de encontrar probabilidades de eventos compuestos a partir de probabilidades de eventos simples.
4. *Combinación de probabilidades - Independencia*
   Se fortalece la idea anterior. Aquí es importante el concepto de probabilidad condicional, es decir, cómo cambia el grado de creencia sobre la ocurrencia de un evento cuando se cuenta con nueva información.
5. *Equidistribución y simetría*
   La definición clásica de probabilidad se basa en una consideración de simetría de los objetos aleatorizadores, como monedas y dados, que lleva a la equidistribución de los resultados.
6. *Combinatoria*
   La combinatoria se considera una rama de la matemática que brinda un fuerte apoyo a la probabilidad, ya que muchas preguntas sobre espacios muestrales complejos se traducen en problemas de combinatoria.
7. *Modelo de urna y simulación*
   Con los modelos de urna se pueden representar un gran número de situaciones de azar de tipo discreto. La idea de "elección aleatoria" se ilustra mediante este modelo. Pueden definirse experimentos complejos mediante encadenamientos de acciones en diversas urnas. Con la técnica de simulación, Heitele también asocia el enfoque frecuentista de la probabilidad.

8. *La idea de variable estocástica*
   En la historia de la probabilidad, la clarificación del concepto de variable aleatoria (estocástica) proporcionó un lenguaje con el que procedimientos sumamente especializados y complejos se volvieron accesibles para un círculo más amplio de estudiosos y usuarios de la probabilidad.
9. *Las leyes de los grandes números*
   La noción empírica y teórica de la ley de los grandes números es fundamental para entender el sentido de las afirmaciones de la probabilidad. Mientras que los resultados individuales son totalmente impredecibles, los resultados masivos presentan patrones generales de comportamiento.
10. *La idea de muestra*
    La inferencia se basa en el concepto de muestra representativa. Juzgar la fuerza de las afirmaciones estadísticas no sólo depende de los métodos racionales utilizados, sino también de las características de las muestras y de cómo se obtienen.

Conviene notar que los seis tópicos que sintetizan el Programa de Estudio de Secundaria (SEP, 2006) son semejantes a algunas de las ideas fundamentales expuestas por Heitele. En efecto, los "conocimientos y habilidades" que el Programa de Estudio propone se relacionan con las ideas fundamentales 2, 3, 4, 5, 6 y 7 de este autor; sin embargo, no las cubren en su totalidad.

A continuación describiremos los puntos de contacto y las diferencias en cada caso.

El sistema de la descripción será considerar la idea de Heitele y ver cuáles del Programa abarca.

Idea fundamental 1. Esta idea, que sugiere aprovechar el sentido de lo "poco probable", "muy probable", "igualmente probable" para construir una escala de probabilidad, es decir, para asociar números a esos grados de creencia que asignamos a diferentes eventos, no se considera en el actual programa.

Idea fundamental 2. Ésta se relaciona con los tópicos de "espacio muestral" y "probabilidad" del Programa de Estudio; sin embargo, Heitele subraya la aleatoriedad, mientras que este tema está ausente en el programa.

Idea fundamental 3. La regla de la suma está cubierta parcialmente por el punto 5 del Programa de Estudio, ya que en éste la regla se propone sólo para eventos mutuamente excluyentes.

Idea fundamental 4. El Programa de Estudio sólo sugiere el tema de independencia, mientras que Heitele, además, le da mucha importancia a la noción de probabilidad condicional.

Idea fundamental 5. Sólo la consideración de distribuciones equiprobables hace semejante el punto "equiprobabilidad y juego justo" del Programa con la idea de "equidistribución y simetría". Con esta idea fundamental Heitele propone al análisis de la simetría de artefactos aleatorizadores para justificar la suposición de equiprobabilidad, mientras que en el Programa no hay sugerencias en ese sentido, sólo se propone el análisis de las probabilidades de un juego para saber si es justo; es decir, determinar la probabilidad de ganar de los contendientes y compararlas. En caso de que haya equiprobabilidad de esos eventos el juego es justo.

Idea fundamental 6. El caso de la combinatoria se trata en el Programa, pero no bajo el subtema "Nociones de probabilidad" sino bajo "Diagramas y tablas". Sin embargo, en varias "orientaciones didácticas" de los temas de probabilidad del Programa se sugiere el uso de operaciones combinatorias.

Idea fundamental 7. La coincidencia es en la técnica de simulación para resolver problemas cuya solución por el método convencional puede resultar difícil para los estudiantes. Heitele abunda en la importancia del modelo de urna para representar diversas situaciones y en su relación con el enfoque frecuentista de la probabilidad, mientras que en el Programa no se hacen explícitos estos aspectos.

En resumen, se puede observar que los puntos del Programa están contenidos en las ideas fundamentales de Heitele, pero no las cubren en su totalidad. Las ideas fundamentales 1, 8, 9 y 10 no son tratadas en los subtemas de "Nociones de probabilidad" del Programa. Los tópicos como el de *aleatoriedad, regla general de la suma, probabilidad condicional, simetría, modelo de urna* y *enfoque frecuentista de probabilidad* se hacen explícitos en las ideas fundamentales de Heitele, pero no se mencionan en el Programa de Estudio de Secundaria (SEP, 2006).

LAS IDEAS DE PROBABILIDAD EN OTROS CURRÍCULOS DE SECUNDARIA

Hemos analizado los "conocimientos y habilidades" del Programa de Estudio para determinar los seis temas generales que abarcan. Esto nos permitió hacer una comparación con las ideas fundamentales propuestas por Heitele. La labor de haber determinado esos temas también nos permite hacer una comparación con currículos de otros países. A continuación, presentamos una traducción de los temas del currículo de Australia, Reino Unido y Estados Unidos tomada de Jones, Langrall y Mooney (2007), además, se presentan los temas de probabilidad del currículo de España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y los temas del currículo de México de 1993 (SEP, 1993). Después de cada lista de contenidos, se resume su comparación con el programa mexicano.

Conviene aclarar que la escuela secundaria en México es obligatoria, tiene tres grados (1°, 2° y 3°) después de lo seis grados de primaria y atiende a los adolescentes de más o menos 12 a 14 años. En Inglaterra el nivel "key stage 3" es equivalente al mexicano, pues va de los grados 7 a 9. En Estados Unidos, el nivel *middle school* abarca los grados de 6 a 8, esto significa que comienza un año antes que la secundaria en México y, como consta de 3 años, también termina un año antes. En Australia y España, sus respectivos currículos del nivel de secundaria abarcan los grados de 7 a 10, es decir, tienen un año más que el mexicano.

AUSTRALIA

- Comprender y explicar los usos sociales de procesos de azar (por ejemplo, investigar el uso de la probabilidad en seguros y juegos).
- Construir espacios muestrales para analizar y explicar resultados posibles de experimentos simples y calcular probabilidades mediante el análisis de casos igualmente probables (incluidos experimentos de uno, dos y tres etapas).
- Estimar probabilidades de eventos mediante su frecuencia relativa en la repetición de experiencias muchas veces.
- Modelar situaciones y organizar y llevar a cabo simulaciones
  [Comprender, construir, estimar, modelar].

Se puede observar que el currículo de Australia tiene dos puntos que no están incluidos en los temas del Programa de Estudio mexicano. Uno es el que se refiere a los "usos sociales de procesos de azar" y el tercero, que se refiere a estimar probabilidades mediante las frecuencias relativas. A la inversa, el currículo de Australia no contempla la regla de la suma, la regla del producto ni la independencia.

Reino Unido

- Comprender y utilizar la frecuencia relativa como un estimador de la probabilidad.
- Ser conscientes de que, cuando se asignan probabilidades, la frecuencia relativa y las consideraciones de equiprobabilidad pueden no ser apropiadas y, entonces, es necesario realizar una estimación "subjetiva".
- Entender y aplicar la regla de la suma de probabilidades para eventos mutuamente excluyentes.
- Comprender que, cuando se trabaja con dos eventos independientes, la probabilidad de la ocurrencia de ambos es menor que la probabilidad de que alguno de ellos ocurra (excepto cuando la probabilidad es 0 o 1).
- Calcular la probabilidad de combinaciones de eventos dada la probabilidad de cada uno de dos eventos independientes e ilustrar probabilidades de eventos combinados de varios eventos, utilizando tablas y diagramas de árbol.

En el currículo del Reino Unido hay tres puntos que no cubre el currículo mexicano: el primero, que se refiere a la frecuencia relativa, el segundo, que incluye la probabilidad subjetiva, y el cuarto, que alude a la desigualdad de que la probabilidad de una conjunción sea menor que la probabilidad de cualquiera de sus coyuntos. A la inversa, este currículo no menciona el espacio muestral ni la simulación.

A pesar de que el currículo de todo Reino Unido hace explícita la inclusión del enfoque subjetivo de probabilidad, Kapadia (2008) observa que el programa que desarrolla el currículo para Inglaterra no lo incluye; opina que es grave la omisión, pues "las nociones subjetivas de la probabilidad son las primeras nociones que desarrollan los niños, aunque sobre una base informal" (p. 2).

Estados Unidos

- Modelar situaciones mediante la organización y realización de experimentos o simulaciones para determinar probabilidades.
- Modelar situaciones describiendo su espacio muestral y calcular probabilidades.

- Apreciar el poder de utilizar un modelo de probabilidad mediante la comparación de resultados experimentales con esperanzas matemáticas.
- Hacer predicciones basadas en probabilidades teóricas o experimentales.
- Desarrollar una apreciación del uso sostenido de la probabilidad en el mundo real.

Hay intersección del Programa de Estudio mexicano con el de Estados Unidos sólo en los dos primeros puntos. En el programa de México están ausentes: el punto 3, sobre frecuencia relativa y esperanza matemática, el 4, que habla de la predicción, y el 5, sobre los usos sociales de la probabilidad. A la inversa, el currículo de Estados Unidos no menciona la equiprobabilidad, la regla de la suma, la regla del producto ni la independencia.

España

- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.
- Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
- Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.

Hay aspectos comunes del currículo mexicano en los puntos 2, 3 y 4 con el español; pero sólo parcialmente, pues en el mexicano no se menciona el vocabulario y no se habla de comprobación de conjeturas (1 y 4 del currículo español). Tampoco hay algo semejante al punto 5 del español, que se refiere al azar y a los usos sociales de la probabilidad. Por otro lado, el currículo de España no sugiere tratar la regla de la suma, la regla del producto ni la independencia.

México (1993)

Primer grado

- Actividades y problemas que favorezcan:
  - El registro y tratamiento, en situaciones sencillas, de los resultados de un mismo experimento aleatorio que se repite varias veces.
  - La exploración y enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria.
  - La estimación y comparación de probabilidades en situaciones diversas, de manera empírica o teórica.
  - La familiarización con algunas de las situaciones ideales de la probabilidad: volados, lanzamientos de dados, rifas, ruletas, extracciones de una urna, etcétera.
  - La apropiación gradual del vocabulario empleado en la probabilidad: resultados posibles, casos favorables, etcétera.
- Uso de diagramas de árbol y arreglos rectangulares en la enumeración de los posibles resultados de una experiencia aleatoria (resultados de dos o tres volados consecutivos, lanzamiento de dos dados, etcétera).
- Expresión de la probabilidad de un evento como una fracción, un decimal y un porcentaje.

Segundo grado

- Noción frecuencial de la probabilidad:
  - Registro y tratamiento de los resultados de experimentos aleatorios.
  - Ejemplos para ilustrar el uso de la noción frecuencial de la probabilidad.
  - Valores de la probabilidad y su significado usual.
- Experiencias aleatorias y fórmula clásica:
  - Ejemplo de experiencias aleatorias con resultados equiprobables y no equiprobables; ejemplos de experiencias repetidas.
  - Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de una experiencia aleatoria.
  - Aplicaciones de la fórmula clásica de la probabilidad.
  - Elaboración de tablas y gráficas de probabilidades.
- Problemas sencillos que pueden resolverse por simulación.

- Primeros cálculos con probabilidades:
  - Probabilidad de que un evento no ocurra.
  - Aplicaciones elementales de la regla de la suma.

Tercer grado

- Nociones de la probabilidad:
  - Enriquecimiento y explotación de la noción frecuencial en la solución de problemas de probabilidad.
  - Aplicaciones diversas de la fórmula clásica de la probabilidad.
- Cálculos con probabilidades:
  - Probabilidad de que un evento no ocurra; de que ocurra uno de dos eventos; aplicabilidad del principio de la suma.
  - Uso de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Probabilidades de transición y regla del producto. Aplicaciones.
- Solución de problemas por simulación; esquema de urnas de Bernoulli.

Como se puede observar, el programa de probabilidad de 1993 era muy extenso, de manera que el de 2006 tuvo que eliminar varios de los temas. Además, el programa de 1993 contenía la idea de "currículo en espiral", promovida por Bruner, que defendía la recurrencia de ideas fundamentales en los diferentes grados. Una de esas ideas es la de probabilidad frecuentista; en primero, "La estimación y comparación de probabilidades en situaciones diversas, en forma empírica", en segundo, "Noción frecuencial de la probabilidad", y en tercero, "Enriquecimiento y explotación de la noción frecuencial en la solución de problemas de probabilidad". Ahora bien, este tema no se menciona en absoluto en el programa de 2006. Esta supresión trae como consecuencia que también se eliminarán varias experiencias sugeridas en el programa de 1993, como el de realizar el registro de experiencias de juego realizadas por los alumnos (que estaban en 1° y 2° grados), la estimación y comparación de probabilidades empíricas y teóricas, familiarización con situaciones de juegos y aplicaciones de las probabilidades de transición (probabilidad condicional).

El siguiente cuadro resume de manera gruesa la comparación entre los temas de los cinco programas analizados. La técnica para elaborarla es la siguiente. Se extraen los temas principales de un currículo (Australia) y se enlistan los tópicos que abarca con un asterisco en la columna correspondiente. En seguida, se toma otro currículo (Reino Unido), se revisan los temas que abarca y se agregan a la lista sólo aquellos que no surgieron en el currículo anterior, los ya considerados se marcan con asterisco. Así se continúa hasta agotar los temas.

Cuadro 1 Comparación de los temas de probabilidad de los programas de secundaria de cuatro países y de México

	Australia	Reino Unido	Estados Unidos	España	México 1993	México 2006
Usos sociales de procesos de azar	*		*	*		
Espacio muestral	*		*	*	*	*
Equiprobabilidad	*				*	*
Cálculo de probabilidades	*	*	*	*	*	*
Frecuencia relativa y probabilidad experimental	*	*	*	*	*	
Modelación y simulación	*		*	*	*	*
Probabilidad subjetiva		*				
Regla de la suma para eventos mutuamente excluyentes		*			*	*
Desigualdad de la conjunción		*				
Regla de producto para eventos independientes		*			*	*
Combinatoria, árbol, etc.		*			*	*
Esperanza matemática			*			
Predicción			*			
Formulación de conjeturas				*		
Vocabulario y lenguaje del azar				*	*	

En relación con las tres primeras columnas referentes a los temas de probabilidad en los currículos de Australia, Reino Unido y Estados Unidos, Jones *et al* (2007) observan lo siguiente:

> Los tres documentos curriculares se enfocan fuertemente en que los estudiantes manejen probabilidades numéricas; sin embargo, se tienen en cuenta aun los procesos aleatorios haciendo énfasis en su impredecibilidad en el corto plazo y su estabilidad a la larga. Este aspecto de la estabilidad se considera, en general, asociado a la probabilidad experimental (empírica).
>
> La característica más fuerte en los tres currículos de secundaria es el enfoque tanto en la probabilidad clásica como en la aproximación frecuentista a la probabilidad. Basados en los antecedentes de probabilidad informal vistos en la escuela primaria, los currículos de secundaria subrayan la determinación de probabilidades teóricas y experimentales (Jones, Langrall y Mooney, p. 913).

Este comentario está relacionado con las filas 4 y 5, referidas al cálculo de probabilidades y a la probabilidad frecuentista. En este sentido, vale la pena observar que el tema de probabilidad frecuentista al que se refieren Jones *et al*. fue eliminado del programa de estudios mexicano (SEP, 2006). También hay que señalar que ocurre otro contraste en la fila 1, donde se han agrupado las ideas sobre "los usos sociales de procesos de azar", que es recomendado por los currículos de tres países, inclusive en los programas de México de 1993, pero que ahora está ausente en el programa de 2006.

CONSIDERACIÓN DE "SESGOS DE APRENDIZAJE" EN LOS PROGRAMAS

En la anterior descripción de los programas de diferentes países, sólo se mencionan los grandes temas que los componen, pero no la manera como recomiendan su desarrollo. La información que transmite la lista de temas de un currículo es, aunque fundamental, muy limitada, de manera que es difícil que indique en qué medida y cómo se recomienda tener en cuenta los resultados alcanzados por la didáctica de la probabilidad, como las dificultades y los sesgos de aprendizaje. Para darse una idea de este aspecto, es necesario buscar los comentarios o adendas que suelen acompañar al currículo. En esta sección agregamos información de los currículos de Reino Unido, Estados Unidos y España.

Los programas de Reino Unido incluyen la recomendación de tener en cuenta que no todas las situaciones cumplirán las condiciones para asignar probabilidades con el enfoque clásico o frecuentista y que, por tanto, se incluya también un enfoque subjetivo. Recomiendan también considerar la falacia de la conjunción. Los temas de este currículo muestran cierta preocupación por incluir resultados de la investigación. Sin embargo, en opinión de Kapadia (2008), los programas de Inglaterra “no muestran signos de tratar con áreas clave de concepciones erróneas”, lo que indica que los programas no consideran los resultados de los temas que han sido investigados en la didáctica de la probabilidad.

En los estándares curriculares en los que se expone de manera desarrollada el currículo de Estados Unidos, se menciona la importancia de tener en cuenta los sesgos del aprendizaje: “Las concepciones erróneas acerca de la probabilidad las tienen no sólo los estudiantes, sino también muchos adultos. Para corregir estas concepciones erróneas, es útil que los estudiantes hagan predicciones y entonces comparen sus predicciones con los resultados reales” (NCTM, 2000, p. 254). Y recomienda explícitamente prever el sesgo de equiprobabilidad: “Algunos estudiantes incorrectamente esperarán que haya tres resultados igualmente probables al arrojar dos monedas una vez: dos caras, dos sellos y uno de cada uno” (NCTM, p. 254). Al repetir 60 veces el experimento los estudiantes que así piensen preverán que cada evento ocurrirá alrededor de 20 veces; sin embargo, los resultados reales difícilmente satisfarán esta expectativa.

En un apartado llamado “Contenidos actitudinales” de la unidad didáctica de “Estadística y probabilidad” del currículo español sólo se recomienda: “cautela y sentido crítico ante las creencias populares sobre los fenómenos aleatorios” y “desarrollo del sentido común en la interpretación de fenómenos probabilísticos”, sin hacer ninguna alusión a dificultad o sesgo particular.

El programa de México de 1993 le daba un peso importante a las representaciones, el lenguaje y la reiteración de los temas fundamentales, pero no incluyó indicación alguna sobre los sesgos y dificultades que por entonces ya se conocían. En el currículo de México 2006, se prevé una situación para dar una discusión acerca de la independencia, aprovechando que los estudiantes puedan caer eventualmente en la falacia del jugador (NCTM, p. 95).

Peard (2008), quien considera que los cursos de probabilidad pueden ayudar a que los ciudadanos tomen actitudes responsables ante los juegos de azar presentes en la vida social, como loterías y casinos, ha presentado una propuesta para organizar el currículo de probabilidad a fin de reflexionar sobre el funcionamiento de los juegos de azar, clarificando la noción de esperanza matemática y su relación con lo que se puede ganar a la larga en un juego, la independencia y las heurísticas de probabilidad.

LA CULTURA PROBABILÍSTICA

Para analizar la sección de orientaciones didácticas del Programa de Estudio, hemos elegido un marco propuesto por Gal (2005) para caracterizar el conocimiento probabilista que deberían aprender los alumnos y desarrollar los adultos durante su vida.

Este autor se pregunta: ¿por qué estudiar probabilidad? (más adelante resumimos su reflexión al respecto). Existen, por lo general, dos respuestas. La primera es que la probabilidad es una parte importante de las matemáticas y la estadística y forma la base para estudios más avanzados de interés profesional. La segunda es que el aprendizaje de la probabilidad es esencial para ayudar a preparar a los estudiantes para la vida, ya que los eventos aleatorios y los fenómenos de azar están en los ámbitos en los que vivimos y permean nuestra vida privada y profesional.

Gal (2005) describe cuatro clases de conocimiento que forman la base para una cultura básica en probabilidad, a saber, *grandes ideas de la probabilidad, cálculo de probabilidades, lenguaje* y *contextos*. Una aclaración importante es que Gal considera que los elementos propuestos están estrechamente relacionados, de modo que, si su enseñanza se enfoca en uno o dos de ellos, no serán suficientes para desarrollar una alfabetización (que también se llamará "cultura básica" o simplemente "cultura") en probabilidad.

Grandes ideas

La familiaridad de los estudiantes con las ideas fundamentales de *aleatoriedad, independencia, variación, predicción/incertidumbre* es necesaria para que desarrollen la habilidad de entender la derivación, representación, interpretación y las implicaciones de los enunciados probabilísticos. Algunos aspectos de esas ideas pueden representarse con símbolos matemáticos o con términos estadísticos, pero su esencia no puede ser totalmente cubierta por las nociones técnicas.

La *aleatoriedad* es un concepto escurridizo que ha producido muchos debates. No obstante, sin entrar en detalles de la discusión, es fundamental que la enseñanza deje clara la idea de que la probabilidad trata con eventos aleatorios, es decir, con procesos cuyos resultados no pueden predecirse. Su contrario es la regularidad de una ley, en la que es posible predecir con certeza el desarrollo de un proceso. Una de las dificultades para la comprensión de estos conceptos consiste en que entre la máxima aleatoriedad y la certeza hay un continuo de posibilidades.

La *independencia* estocástica también es una noción compleja, ya que es una propiedad tanto de fenómenos del mundo como de sistemas matemáticos. La noción más intuitiva es la que surge de eventos de fenómenos que no interactúan, de modo que la ocurrencia de un evento de uno de los fenómenos no modifica la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento del otro fenómeno. En estos casos, la probabilidad conjunta de un par de eventos, cada uno de los cuales pertenece a uno de esos fenómenos, es el producto de sus probabilidades. Ésta es la noción que debe introducirse en la educación básica. Su contrario es la dependencia, es decir, la noción de que en fenómenos o sistemas que interactúan, por lo general, aunque no siempre, la ocurrencia de un evento modifica la probabilidad de que ocurra otro.

La *variación* es una característica de los procesos probabilísticos y su cuantificación es muy importante. La descripción, explicación o control de la variación usualmente se presenta como la motivación básica para cualquier tipo de investigación estadística. La variación subyace en el enfoque frecuentista de la probabilidad y tiene que ver con cuán seguros podemos estar de que determinados procesos se desarrollen dentro de ciertos límites. La noción contraria a la variación es la de estabilidad; ésta ocurre cuando los resultados de un proceso suelen ser constantes.

La *predictibilidad/incertidumbre*. Las nociones de aleatoriedad, independencia y variación deben comprenderse no sólo por sí mismas, sino también como las bases para comprender la cuarta gran idea, la relación entre la *predicción* y la *incertidumbre*, nociones relacionadas con los conceptos de *confianza* y *riesgo*. La predicción y la incertidumbre se relacionan con el estado de nuestro conocimiento general sobre la verosimilitud de un cierto evento.

Cálculo de probabilidades

Se trata de los recursos mediante los cuales se puede calcular o estimar una probabilidad. A menudo se promueven dos definiciones de probabilidad, la clásica y la frecuentista, las cuales derivan en procedimientos para estimar probabilidades. Puesto que la definición clásica sólo puede aplicarse a un conjunto muy limitado de situaciones de azar, la definición frecuentista desempeña el papel de ampliar el universo de situaciones en las que la teoría es aplicable, además de servir de puente entre el modelo y la realidad.

Lenguaje

Numerosos autores defienden la propuesta de que los estudiantes deben aprender el lenguaje de la probabilidad, esto es, los términos y expresiones que se utilizan para comunicarse acerca del azar y la probabilidad. Se entenderán por *términos* los conceptos de la teoría: experiencias aleatorias, eventos, espacio muestral, etc., pero también las grandes ideas: aleatoriedad, independencia, variación, predicción e incertidumbre. Las expresiones son frases comunes que se utilizan con frecuencia para situaciones de azar como: "hay 80% de probabilidad de lluvia", "1 de cada 100 habitantes desarrolla diabetes", "tener al menos 5 éxitos en 10 repeticiones...", "muy probable", "es casi seguro que...", "es imposible", etcétera.

Contextos

La educación en probabilidad no sólo debe permitir que los estudiantes aprendan algo de las grandes ideas, el cálculo de probabilidades y el lenguaje del azar, sino también de los procesos probabilísticos importantes en el mundo real. Entender que el azar y la probabilidad afectan eventos y procesos del mundo real y de la vida de las personas es fundamental para que los estudiantes se interesen en esta materia. Gal sugiere los siguientes contextos en los que se pueden encontrar situaciones y problemas interesantes: el mundo físico, los procesos tecnológicos, la conducta humana, salud y medicina, crimen y justicia, negocios y finanzas, políticas públicas, servicios meteorológicos, juegos de azar y apuestas, decisiones personales (*v. g.* uso de cinturón de seguridad, aceptación en la universidad, etcétera).

LA CULTURA PROBABILISTA EN LAS "ORIENTACIONES DIDÁCTICAS" DEL PROGRAMA

Los elementos de la cultura probabilista que según Gal deben adquirirse durante la formación son útiles para analizar aspectos más específicos de los temas de nociones de probabilidad del currículo mexicano. La pregunta sería: ¿en qué medida los contenidos probabilistas expresados en las "orientaciones didácticas" promueven los elementos de una cultura probabilista? Para acercarnos a una respuesta, buscaremos dichos elementos en las orientaciones didácticas del Programa de Estudio (SEP, 2006).

PRIMER GRADO

En lo que se refiere al primer grupo de "conocimientos y habilidades", a saber, "enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria", "utilizar la escala de la probabilidad entre 0 y 1 y vincular diferentes maneras de expresarla" y "establecer cuál de dos o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificar la respuesta" (SEP, 2006, p. 48), se encuentra lo siguiente en la sección "Orientaciones didácticas":

> La determinación del espacio muestral en una situación de azar se relaciona estrechamente con los problemas de conteo. La dificultad que enfrentan los alumnos para enumerar los posibles resultados de una experiencia aleatoria influye poderosamente en el cálculo de la probabilidad de un evento. Por esto se sugiere plantear problemas en los que se vincule el conteo con la probabilidad. Por ejemplo:
>
> - Si en un salón hay 10 mujeres y 20 hombres y en otro, hay 15 mujeres y 5 hombres ¿cuántas parejas distintas se pueden formar tomando una persona de cada salón?
> - ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar al azar a una persona de cada salón, se alternen un hombre y una mujer? (problema de probabilidad)" (SEP, 2006, p. 48).

Se hace énfasis en la relación entre la determinación del espacio muestral y la combinatoria. Se reconoce que es difícil contar, pero que influye en el cálculo de la probabilidad. Se sugiere, entonces, que se relacione el conteo con la probabilidad.

La sugerencia y el problema propuesto apuntan a desarrollar sólo el punto 2 de la lista de Gal, a saber, el cálculo de probabilidades. En él no se promueve ninguna de las "grandes ideas" de la cultura probabilista, ya que no invita a reflexionar sobre la variación, aleatoriedad, independencia o predictibilidad/incertidumbre.

El mensaje: "plantear problemas en los que se vincule el conteo con la probabilidad" destaca la parte combinatoria y no promueve la discusión sobre la incertidumbre, la variación, la independencia y la relación predicción/incertidumbre.

El vocabulario de probabilidad que se utiliza se reduce a las expresiones "probabilidad" y "seleccionar al azar". El contexto no es el más apropiado para fomentar la reflexión de situaciones de azar; podría dar origen a la pregunta: ¿Qué incertidumbre se mide? Es cierto que, si se "selecciona al azar" una persona de cada salón, el resultado es incierto, no se puede predecir porque desde un comienzo se postula que la selección será al "azar". Pero ¿por qué se hace la selección al azar y no se hace deliberada? ¿Acaso no es mejor seleccionar a los estudiantes para los fines que se necesite, definiendo algún criterio racional? ¿Por qué se opta voluntariamente por la irracionalidad del azar? Quien quiera que sea el sujeto que hace la selección, ¿por qué prefiere realizar una acción incierta, cuando se podría hacer determinada? Una simple situación de una lotería contiene un contexto más adecuado que la selección al azar de estudiantes de dos grupos. ¿En cuántas situaciones de la vida escolar, en situaciones científicas o sociales, se nos presenta la necesidad de seleccionar estudiantes al azar de dos grupos?

Lo preocupante es que la orientación didáctica que subyace en ese problema es que la idea de azar o incertidumbre no es importante, es simplemente un adorno coloquial que quiere decir "haga como si...". No hay una preocupación por sugerir una situación científica donde se muestre la utilidad de la probabilidad, por ejemplo, para hacer una predicción o tomar una decisión y cuyas consecuencias sean en algún sentido relevantes.

En el bloque 5, p. 60 del conocimiento y habilidad 5.6, "Reconocer las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, sobre la base de la noción de resultados equiprobables y no equiprobables", vienen las siguientes "orientaciones didácticas":

> Este tipo de problemas [los de juego justo] es interesante, porque los alumnos tienen la posibilidad de anticipar una respuesta y, enseguida, buscar algún

> procedimiento que les permita verificarla. Las razones para establecer si un juego es equitativo o no pueden ser muy variadas y conviene considerarlas y discutirlas, a fin de que los alumnos se animen a expresar sus ideas. Poco a poco, con la intervención de los propios compañeros o del maestro, tendrán en cuenta las restricciones que impone el texto del problema. Un ejemplo de las situaciones que se puede plantear es la siguiente:
>
> - Carmen y Daniel juegan a lanzar dos dados. Las reglas son las siguientes: En cada lanzamiento se calcula la diferencia entre los puntos de ambos dados, si es 0, 1, 2, Carmen gana una ficha. Si resulta 3, 4 o 5, Daniel gana una ficha. El juego se inicia con un total de 20 fichas, de las que se toma una cada vez que gana el jugador. El juego termina cuando no quedan más fichas. Si tuvieran que jugar ¿qué jugador preferirían ser? ¿Por qué?
>
> Se sugiere elaborar la gráfica de probabilidad de este juego para percibir las condiciones en las que se realiza y preguntar cómo deberían ser para que el juego fuera equitativo (SEP, 2006, p. 60).

La expresión "anticipar una respuesta" nos remite a la idea de predicción; una vez hecha, surge la de "buscar algún procedimiento que les permita verificarla". Aunque se señala que "Las razones para establecer si un juego es equitativo o no pueden ser muy variadas...", en realidad, las pertinentes se reducen a dos: teórica o empírica. La primera consiste en encontrar un espacio muestral equiprobable y calcular y comparar las probabilidades de los eventos {0, 1, 2} y {3, 4, 5}. La segunda consiste en hacer experiencias repetidas y estimar la probabilidad mediante frecuencias relativas. Aunque se entiende que el espíritu de la orientación es discutir todas las iniciativas de los estudiantes, lo cierto es que debe descartarse la posibilidad de argumentar experimentalmente, ya que en los conocimientos y habilidades del programa se ha omitido cualquier referencia a la probabilidad frecuentista. En consecuencia, hay una sola manera de argumentar razonablemente y es haciendo el listado del espacio muestral, determinar la distribución de la variable "la diferencia entre los puntos de ambos dados" y, sobre la base de ésta, calcular la probabilidad de los eventos en cuestión. Estas orientaciones contienen dos ideas fundamentales reconocidas por Heitele: variable y distribución, las cuales no están previstas en la sección de "Conocimientos y habilidades". Cabe mencionar que el concepto de "juego justo" no necesariamente está asociado a la equiprobabilidad, como lo señala el programa. Los apostadores pueden tener diferentes probabilidades de ganar y lo que lo hace justo o no son los valores de la variable "apuesta"; si el valor esperado de esta variable es cero, entonces el juego es justo.

Segundo grado

El primer bloque de "Conocimientos y habilidades" referido al tema "nociones de probabilidad" contiene los siguientes dos puntos: "Distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son independientes" y "Determinar la manera en la que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos independientes". Las orientaciones didácticas correspondientes son:

> La noción de independencia en situaciones de azar tiene varios matices y su estudio es importante porque la intuición suele llevar a errores ante problemas relativamente simples y porque es necesario que los alumnos elaboren procedimientos sistemáticos para los casos más complejos. A continuación, se enuncian tres ejemplos de problemas en los que la idea de independencia está presente:
>
> - Se lanzan cinco volados consecutivos y en todos ellos ha caído sol ¿Cuál es la probabilidad de que en el sexto volado también caiga sol?
>
> A menos que la moneda o las condiciones del lanzamiento estén trucadas, la probabilidad de obtener sol en una serie de volados siempre es $\frac{1}{2}$. Los resultados de un lanzamiento y otro son eventos independientes, es decir, la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

El problema es interesante y el tipo de respuesta común suele ser erróneo. Se piensa que es más probable el resultado "águila" en el sexto lanzamiento. Como se menciona en los antecedentes de este artículo, a la concepción subyacente se le llama "falacia del jugador" y se relaciona con las "grandes ideas" de *aleatoriedad* e *independencia* formuladas por Gal. No se sugiere realizar algún cálculo, construir un espacio muestral o vincularlo con una regla del producto. El contexto es de juegos y no implica lenguaje nuevo.

- Se va a realizar una rifa con doscientos boletos que han sido numerados del 1 al 200. Todos los boletos se han vendido. El boleto ganador será el primero que se saque de una urna. Ana compró los boletos 81, 82, 83 y 84. Juan adquirió los boletos 30, 60, 90 y 120. ¿Quién tiene más oportunidades de ganar?

Este es un problema de aplicación de la definición clásica de probabilidad, y su relación con la noción de independencia es muy débil. No es un buen problema para inducir a los estudiantes a elegir una secuencia basados en la representatividad a fin de que, partiendo de esto, se dé la discusión sobre la independencia, pues ambas secuencias tienen un patrón y ninguna de ellas parece generada por el azar. Tampoco tiene que ver con las otras "grandes ideas" de la cultura probabilista. Es un problema de cálculo, no implica lenguaje nuevo y el contexto es de juegos.

- Se lanzan simultáneamente un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga sol y el número 4? (SEP, 2006, p. 95).

Éste es un ejemplo sencillo para deducir la regla del producto de probabilidades. Se relaciona con la independencia en su aspecto de cálculo. No implica terminología nueva y el contexto es de juegos.

Consideren el ejemplo de lanzar un dado:

¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?
¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar?
¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par o impar?
¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par o menor que tres?
¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par y menor que tres?

Las anteriores preguntas son para aplicar las reglas de la suma y del producto, es decir, se centran en el cálculo. La manera como se presenta la situación no favorece el desarrollo de las grandes ideas. El centro de los problemas está en el cálculo de probabilidades, en particular, aplicando la regla de Laplace. Respecto al lenguaje, debe destacarse el uso de los conectivos "o" e "y". El contexto es de juegos de azar.

Como se menciona en el programa, "la noción de independencia tiene varios matices" y se han detectado dificultades de distintos tipos; en el programa se menciona el de “la falacia del jugador”, pero también se encuentra la confusión de eventos independientes con eventos mutuamente excluyentes y la confusión entre experiencias independientes y eventos independientes (Sánchez, 1996; Díaz y De la Fuente, 2007), las cuales no se prevén en el programa.

Tercer grado

Los conocimientos y habilidades propuestos para este grado se reducen al punto “Utilizar simulación para resolver situaciones probabilistas” (SEP, 2006, p. 119). El problema sugerido en las “orientaciones didácticas” es:

> Un agente comercial sabe que cada vez que visita a un cliente tiene 20% de probabilidad de hacer dos ventas; 50% de probabilidad de hacer sólo una y 30% de probabilidad de no hacer nada. Un día tiene una cita con cinco clientes. ¿Cuánto puede esperar ganar ese día si por cada venta que realiza gana $20.00?

El desarrollo de este problema se relaciona con los cuatro elementos de Gal. Al realizar la simulación, se verá que los resultados varían aleatoriamente, por ejemplo, el que aquí escribe repitió cinco veces cinco visitas; en mi caso, en cada conjunto de cinco visitas el vendedor ganaría: 140, 100, 60, 80, 20 que, en promedio, representan 80 pesos de ganancia. Si 20 estudiantes realizan cada uno cinco experiencias simulando cinco visitas, se tendrían 100 experiencias de cinco visitas. Simulando esta situación en computadora, el autor obtuvo un promedio de 91.2. El valor teórico es 90. Se puede mostrar que la variabilidad de este valor es pequeña, aunque para hacerlo, sería necesario consumir mucho tiempo en clase o auxiliarse de computadora. En este sentido, en el programa no se aclara el tipo de simulaciones y hasta qué punto deben elaborarlas los estudiantes; podrían hacer solamente simulaciones físicas o también con ayuda de calculadoras y computadoras, podrían reproducir simulaciones sugeridas por el profesor o idear el modelo a partir del problema.

La independencia está implícita en este tipo de experimentos y, dando una discusión, se puede ver la relación de la impredecibilidad en pocos ensayos con la posibilidad de hacer una buena predicción si se repite la experiencia muchas veces. La simulación representa una manera alternativa de cálculo de probabilidades, pero hay que tener en cuenta que se basa en la definición frecuentista de probabilidad, la cual ha sido evadida en todos los puntos anteriores. Respecto al lenguaje, sólo se agregaría el término "simulación". El contexto es, por primera vez, diferente del juego.

Aunque el problema tiene potencial didáctico, no está sustentado por el trabajo anterior, como lo muestra el hecho de que requiere el antecedente del trabajo con la definición frecuentista de probabilidad y con contextos diferentes al de juego. Por ejemplo, el problema se basa en una distribución de probabilidades dada; no es difícil prever que esto da origen a la pregunta: ¿cómo se obtuvieron las probabilidades de 20%, 50% y 30% que tiene el vendedor para hacer 0, 1 y 2 ventas, respectivamente? En todos los cálculos anteriores, se vieron situaciones de juego con espacios muestrales equiprobables y, de pronto, sin ninguna preparación, se ofrecen probabilidades de eventos de la vida social (que un vendedor haga ventas), en la que no se tiene un modelo ya no digamos para calcular las probabilidades de los eventos involucrados, sino ni siquiera para imaginar de dónde provienen.

En el siguiente cuadro se resume la valoración que se ha hecho arriba de cada problema de las "orientaciones didácticas" del programa. El rasgo "▯" significa que el problema no propicia los elementos de la cultura probabilista correspondiente; el rasgo "◷" que sí los propicia, en algunos casos se sustituye ese rasgo por una palabra que indica la gran idea con la que se relaciona o el lenguaje que introduce.

	Primer grado		**Segundo grado**				**3er. grado**
Grandes ideas	▯	▯	Aleatoriedad e Independencia	¿?	Indep.	▯	Todas
Cálculo de probabilidades	◷	◷	▯	◷	◷	◷	◷
Lenguaje /vocabulario	--	--	--	--	"y" y "o"	◷	Simulación
Contexto	▯	Monedas	Monedas	Rifa	Dados	Dados	Comercio

CONCLUSIONES

Este trabajo se realizó para responder una pregunta sobre la calidad del mensaje contenido en los enunciados sobre temas de probabilidad del programa de matemáticas de secundaria de México, en particular, si promueve una cultura probabilística. Sin embargo, en el curso de la investigación y, como parte de la búsqueda de una respuesta, surgieron otras preguntas relacionadas con el propósito del programa sobre el tema, las ideas y temas importantes que desarrollan y la presencia en el programa de indicios que informen sobre la previsión de los sesgos e ideas previas que sobre probabilidad suelen utilizar los estudiantes del nivel.

Se ha podido constatar que no hay un objetivo referido a los contenidos de probabilidad en el programa diferente a los declarados para todo el contenido matemático y el manejo de la información.

Los temas que se resaltan en el programa son: espacio muestral, equiprobabilidad y definición clásica de probabilidad, regla de la suma, regla del producto, independencia y simulación. Se destaca la ausencia de temas como "usos sociales de procesos de azar" y "frecuencia relativa y probabilidad experimental". Se revela una inconsistencia en el hecho de no tener en cuenta este último tema en todo el programa y proponer el de "simulación" en tercer grado.

El programa proporciona problemas que prevén el sesgo de equiprobabilidad con el tema "juego justo", por ejemplo cuando se define la variable "la diferencia entre los puntos de las caras de dos dados". Sin embargo, el espacio muestral subyacente es equiprobable y no se sugieren otros que no lo sean. En el tema de independencia, se menciona que "tiene matices" para indicar que se debe ser cuidadoso y se sugiere una situación para promover una discusión sobre la "falacia del jugador". Se echan de menos situaciones para tratar más a fondo el sesgo de la equiprobabilidad con experiencias cuyo espacio muestral no se reduzca a un conjunto equiprobable de resultados. No hay tampoco situaciones que prevean el sesgo de la atención ni situaciones que revelen la compleja relación entre la proporcionalidad y la probabilidad. Por otro lado, no se prevé diferenciar entre experiencias y eventos independientes ni se invita a establecer una clara diferencia entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes.

Respecto a nuestra pregunta inicial, podemos decir que los temas de probabilidad del programa 2006 están cargados hacia uno de los elementos sugeridos por Gal, a saber, el cálculo de probabilidades. En particular, la ausencia de la probabilidad frecuentista o experimental impide que surjan las "grandes ideas" de aleatoriedad, variación y predictibilidad/incertidumbre. Se favorece sólo el enfoque clásico con énfasis en problemas combinatorios. Esta decisión trae como consecuencia que el contexto privilegiado sea el de juegos de azar, no se hace señalamiento alguno sobre los "usos sociales del azar" ni sobre la importancia de considerar contextos científicos además de los de juegos.

El mensaje que se envía a través del programa de estudios de matemáticas de México (SEP, 2006) a los profesores y a la sociedad mexicana en relación con el subtema de probabilidad podría mejorarse sustancialmente si se asume como objetivo desarrollar una alfabetización o cultura probabilista en el sentido de Gal. Para hacerlo, pueden resultar útiles las experiencias de otros países y el trabajo de investigadores en educación con especialidad en probabilidad.

Para finalizar, conviene insistir en el carácter de sistemas anidados que tiene el programa. Cada subsistema está formado por elementos relacionados entre sí de manera que, si se modifica un elemento, esto afecta a todo el subsistema. Por lo anterior, la introducción de los temas importantes, cuya ausencia en el currículo hemos señalado, implica una reorganización del subsistema de probabilidad; tarea que, desde mi punto de vista, valdría la pena realizar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahlgren, A. y J. Garfield (1991), "Analysis of the probability curriculum", en R. Kapadia y M. Borovcnik (eds.), *Chance encounters: Probability in education,* Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Press, pp. 108-134.

Batanero, C., M. Henry y B. Parzysz (2005), "The nature of chance and probability", en G. A. Jones (ed.), *Exploring* Probability *in School. Challenges for teaching and learning,* Nueva York, Springer, pp. 15-37.

Benson, C. T. y G. A. Jones (1999), "Assessing students' thinking in modeling probability contexts", *The Mathematics Educator,* vol. 7, núm. 1, pp. 4-12.

De Finetti, B. (1974), *Theory of Probability,* Londres, John Wiley.

Diaz, C., e I. de la Fuente (2007), "Assessing students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning", en *International Electronic Journal of Mathematics,* vol. 2, núm. 3. Disponible en: www.iejme.com.

English, L. D. (2005), "Combinatory and the development of children's combinatorial reasoning", en G. A. Jones (ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning,* Nueva York, Springer, pp. 121-141.

Falk, R. (1983), "Experimental models for resolving probability ambiguities", *Proceedings of the seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Tel Aviv, Israel, pp. 319-325.

Gal, I. (2005), “Towards ‘probability literacy’ for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas”, en G. A. Jones (ed.), pp. 39-63.

Garfield, J. y A. Alhgren (1988), “Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research”, *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 19, núm. 1, pp. 44-63.

Green, D. R. (1982), *Probability concepts in 11-16 year old pupils,* informe del Center for Advancement of Mathematical Education in Technology, Loughborough, University of Technology.

——— (1983), “A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years”, en D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Congress on Teaching Statistics,* Sheffield, Reino Unido, Teaching Statistics Trust, pp. 766-783.

Hacking, I. (1975), *The emergence of probability,* Cambridge, MA, Cambridge University Press.

Hawkins, A. S. y R. Kapadia (1984), “Children’s conceptions of probability –A psychological and pedagogical review”, *Educational Studies in Mathematics,* núm. 15, pp. 349-377.

Heitele, D. (1975), “An epistemological view on fundamental stochastic ideas”, *Educational Studies in Mathematics,* núm. 6, pp. 187-205.

Howson, G. (1991), *National Curricula in Mathematics,* Londres, The Mathematical Association.

Jones, G. A. (ed.) (2005), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning,* Nueva York, Springer.

Jones, G. A., C. W. Langrall y E. S. Mooney (2007), “Research in Probability: Responding to classroom realities”, en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Greenwich, CT, Information Age Publishing, pp. 909-955.

Kapadia, R. (2008), *Chance Encounters –20 years later. Fundamental ideas in teaching probability at school level,* documentos propuestos por el Topic Study Group 13: Research and development in the teaching and learning of probability en el International Congress on Mathematical Education (ICME), Monterrey, México, [http://tsg.icme11.org/tsg/show/14#inner-documents].

Kapadia, R. y M. Borovcnik (eds.) (1991), *Chance encounters: Probability in education,* Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Press.

Lecoutre, M. P. (1992), “Cognitive models and problem spaces in ‘purely random’ situations”, *Educational Studies in Mathematics,* núm. 23, pp. 557-568.

Lecoutre, M. P. y J. L. Durand (1988), "Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 19, pp. 357-368.
Lecoutre, M. P. y J. Cordier (1990), "Effet du mode de présentation d'un problème aléatoire sur les modèles développés par les élèves", *Bulletin de l'APMEP*, núm. 372, pp. 9-22.
Metz, K. E. (1998), "Emergent ideas of chance and probability in primary-grade children", en S. P. Lajoie (ed.), *Reflections on Statistics: Learning, teaching and assessment in grades K-12*, Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 149-174.
Ministerio de Educación y Ciencia (2007), "238 REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria", BOE No. 5, España.
NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, The National Council of Teacher of Mathematics.
Peard, R. (2008), *Teaching the mathematics of gambling to reinforce responsible attitudes towards gambling*, documentos propuestos por el Topic Study Group 13: Research and development in the teaching and learning of probability en el International Congress on Mathematical Education (ICME), Monterrey, México, [http://tsg.icme11.org/tsg/show/14#inner-documents].
Sánchez, E. (1996), "Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes", en F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, México, Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 389-404.
SEP (1993), *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Secundaria*, México, Secretaría de Educación Pública.
——— (2006), *Educación Básica. Secundaria. Programas de Estudio 2006*, México, Secretaría de Educación Pública.
Shaughnessy, J. M. (1977), "Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 8, pp. 285-316.
——— (1983), "The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin?", en R. W. Sholtz (ed.), *Decision Making under Uncertainty*, Ámsterdam, Países Bajos, Elsevier Science Publishers.
——— (1992), "Research in probability and statistics: Reflections and directions", en D. A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 465-494.
Steinbring, H., y G.von Harten, (1983), "Learning from experience – Bayes' theorem: a model for stochastic learning", en D. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G.

M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, V. 2, Sheffield, Universidad de Sheffield, pp. 701-714.

Tversky, A. y D. Kahneman (1982), "Judgments of and by representativeness", en D. Kahneman, D. Slovic y A. Tversky (eds.), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Cambridge University Press, pp. 84-100.

Watson, J. (2005), "The probabilistic reasoning of middle school students", en G. A. Jones (ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for teaching and learning*, Nueva York, Springer, pp. 145-169.

——— (2006), *Statistical Literacy at School. Growth and Goals*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

Zimmermann, G. M. y G. A. Jones (2002), "Probability simulation: What meaning does it have for high school students?", *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, vol. 2, núm. 2, pp. 221-236.

DATOS DEL AUTOR

Ernesto Sánchez
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV-IPN, México
esanchez@cinvestav.mx