

El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada?

Jesús Enrique Pinto Sosa y María Teresa González Astudillo

Resumen: Denominado por Lee Shulman como el *missing paradigm*, el conocimiento didáctico del contenido (CDC o *PCK, pedagogical content knowledge* por sus siglas en inglés) ha experimentado en los últimos años un crecimiento vertiginoso como corriente de investigación didáctica. A pesar de ello, hasta el momento en México no se le ha dado la suficiente importancia para ser considerado como dominio de conocimiento esencial en los programas de formación de profesores ni como objeto de investigación en educación matemática. En este artículo, se presenta primero cómo surge el CDC, su significado, fundamento y naturaleza teórica. Segundo, se describen los elementos del CDC señalando su importancia e implicaciones como objeto de estudio y como modelo teórico para la formación de profesores. Tercero, se revisan las investigaciones realizadas en el ámbito internacional, incluida una búsqueda en el campo de la educación matemática en México que dio como resultado la inexistencia de este tipo de investigaciones, por lo que se concluye la necesidad de estudiar al profesor de matemáticas desde una corriente de investigación didáctica diferente, a través de marcos conceptuales que nos permitan comprender cómo construye los significados matemáticos, los transforma y los representa en su práctica docente.

Palabras clave: conocimiento didáctico del contenido, conocimiento profesional, formación de profesores, profesor de matemática.

Abstract: Named by Lee Shulman as the *missing paradigm*, Pedagogical Content Knowledge (*PCK*) has shown a formidable development in recent years as a didactical research field. Despite that, since now, it has not been considered important enough in order to be a domain of knowledge included in the courses of teachers' instruction nor as an object of research in mathematics education at Mexico. In this paper, it is shown, firstly, how *PCK* has arisen, its meaning, its foundation and its theoretical nature. Secondly, the elements of *PCK* are described, pointing out

Fecha de recepción: 31 de marzo de 2008.

at their relevance and implications as an object of study and as a conceptual framework for teachers training. Thirdly, the research done is revised from an international point of view, and field of mathematics education in Mexico is included with the result of the inexistence of this type of research, so the paper concludes the necessity of studying the knowledge of mathematics teachers from this type of research, with conceptual frameworks that allow us to understand how mathematical meanings are built, how they are transformed and represented in the teaching practice.

Keywords: pedagogical content knowledge, professional knowledge, teachers training, mathematics teacher.

BREVE RESEÑA DEL SURGIMIENTO DEL CDC

La teoría de la enseñanza, propuesta por Lee Shulman, se pone de manifiesto por primera vez en la publicación de dos de sus artículos. El primero, *Those who understand: knowledge growth in teaching* (1986) y, posteriormente, "Knowledge and teaching: foundations of new reform" (1987). A partir de estos artículos surge su propuesta teórica y la noción del conocimiento didáctico del contenido. Entre las diferentes razones (hechos, reflexiones, estudios o exploraciones) que se fueron conjugando para su surgimiento, se deben resaltar: 1) la imperante necesidad de profesionalizar la enseñanza; 2) los resultados desfavorables en el desarrollo de habilidades cognitivas de los estudiantes de nivel secundaria (principalmente) en los exámenes nacionales e internacionales; 3) las críticas recibidas a las corrientes imperantes sobre la didáctica del profesor denominadas proceso-producto y pensamiento del profesor, que favorecieron un mayor énfasis en los procesos de evaluación y acreditación y selección de profesores basado en lo pedagógico (casi exclusivamente), asumiendo que el contenido está cubierto por el hecho de tener una licenciatura en la disciplina correspondiente; 4) la ineludible necesidad de recuperar y asignarle el justo valor al conocimiento del contenido como elemento igualmente importante en el perfil del profesor y crear un modelo que integrara el conocimiento del contenido con el conocimiento pedagógico, y 5) la reforma de la enseñanza en Estados Unidos, en la que se manifestó de manera recurrente (en sus diferentes textos y estudios) la necesidad de elevar la enseñanza a la categoría de una ocupación más respetada partiendo de un supuesto básico y esencial: que existe una base de conocimiento para enseñar.

De este modo surge la corriente de investigación que Shulman denominó “conocimiento base para la enseñanza”, cuya finalidad básica es el análisis del conocimiento profesional del profesor. Esta perspectiva teórica de Shulman y colaboradores (Shulman y Sykes, 1986, y Wilson, Shulman y Richert, 1987) no deja de lado los avances y la perspectiva teórica del pensamiento del profesor, sino que los considera y además destaca el papel central que ocupa en la enseñanza la comprensión de los contenidos curriculares por parte del docente y los alumnos, sintetizándose en tres sus características esenciales (López, 1999):

- a) Refleja una naturaleza más bien didáctica (y no psicológica).
- b) El saber profesional de los profesores debería integrar las proposiciones teóricas y los procedimientos técnicos que los dirigen y que pueden optimizar la actuación en el aula.
- c) Tanto el conocimiento de la disciplina como el conocimiento de los fundamentos psicopedagógicos tienen mucho que aportar a la mejora de la práctica de la enseñanza de una materia escolar concreta.

Para ello, Shulman propuso un mínimo de conocimientos que debe tener el profesor y los agrupó inicialmente en tres categorías (Shulman, 1986): conocimiento del contenido de la materia específica, *conocimiento didáctico del contenido (CDC)* y conocimiento curricular. Posteriormente, Shulman (1987, p. 8) reconoce otras categorías de conocimientos y las organiza como saberes o conocimientos indispensables. Propone siete categorías (incorporando las citadas en 1986): conocimiento de la materia impartida, conocimientos pedagógicos generales, conocimiento del currículo, *conocimiento didáctico del contenido*, conocimiento de los educandos y de sus características, conocimiento de los contextos educacionales, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase hasta la gestión y el financiamiento, y conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educacionales.

Entre estas categorías, el CDC adquiere particular interés, debido a que defiende, propone y justifica un conjunto de conocimientos (amalgamados entre sí) sobre el contenido específico y cubre un vacío (o complemento) necesario sobre el conocimiento del profesor de una asignatura específica (Pinto y González, 2006). El trabajo de Shulman y colaboradores, así como de otros autores (por ejemplo, Chinnappan y Lawson, 2005; An, Kulm y Wu, 2004), evidencian la existencia y necesidad de este cuerpo de conocimientos que giran en relación al contenido. Aunque inicialmente esta teoría se origina en el campo de la ense-

ñanza del inglés, biología, matemáticas y estudios sociales, con profesores de nivel secundaria (Shulman, 1986), esta corriente de investigación en didáctica ha experimentado en los últimos años un crecimiento vertiginoso (López, 1999; Nakiboglu y Karakoc, 2005) y se ha extendido a otras disciplinas y otros niveles escolares.

El CDC no se limita a estudiar cómo se enseña para obtener conocimiento de la didáctica general, sino que busca que el profesor comprenda lo que se ha de aprender y cómo se debe enseñar el contenido a partir de la propia práctica docente, de la comprensión de cómo el alumno aprende y comprende, resuelve problemas y desarrolla su pensamiento crítico acerca de dicho contenido (Shulman, 1987).

SIGNIFICADO Y COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

El conocimiento didáctico del contenido¹ es especialmente interesante porque identifica los diferentes bagajes de conocimientos para la enseñanza. Como señala Shulman (1987):

Representa la mezcla entre materia y pedagogía por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. El conocimiento didáctico de la materia es la categoría que con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo (p. 8).

El CDC representa la intersección entre conocimiento de la materia *per se*, los principios generales de pedagogía y el contexto; sin embargo, no es únicamente una mera conjunción (Shulman, 1993) o integración (Gess-Newsome y Lederman, 1999) de elementos, sino una transformación del conocimiento del contenido a contenido enseñable, lo que implica, según Glatthorn (1990), saber cómo adaptar el material representado a las características de los alumnos. Para

¹ También conocido como conocimiento del contenido pedagógico (Llinares, 1993), conocimiento sobre didáctica de la asignatura (Bromme, 1994), o bien, conocimiento didáctico específico (Martín del Pozo, 1994, en López, 1999, pp. 78-79).

Shulman (1986), el CDC “va más allá del conocimiento de la materia específica para ser para la dimensión de conocimiento de la materia específica para la enseñanza” (p. 9), ya que si bien el conocimiento de la materia es necesario como uno de los componentes del conocimiento, hay que incorporar elementos adicionales (por ejemplo conocimiento curricular del contenido; repertorio de estrategias instruccionales; selección, diseño y uso diverso de materiales de apoyo; conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido), que marcan la diferencia de ser matemático a ser profesor de matemáticas.

Shulman (1986) define y caracteriza el CDC de la siguiente manera:

las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros... incluye un conocimiento [o comprensión] de lo que hace que el aprendizaje de un tópico específico sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y experiencias traen consigo al aprender estos tópicos y lecciones frecuentemente enseñados con anterioridad (p. 9).

Estas formas de representación a que hace referencia son “formas de expresar, exponer, escenificar o representar ideas de otra manera, de suerte que los que no saben puedan llegar a saber, los que no entienden puedan comprender y discernir, y los inexpertos puedan convertirse en expertos” (Shulman, 1987, p. 7), en otras palabras, se trata de las estrategias de enseñanza a la luz del tópico específico, o bien, la didáctica del contenido específico. Así pues, el profesor debe tener un amplio repertorio de formas o alternativas de representación, algunas de las cuales derivan de la investigación, mientras que otras se originan de la práctica docente. El CDC trata de cómo puede ser interpretado el contenido específico en una situación de enseñanza (Cooney, 1994). Supone la comprensión de tópicos centrales en cada materia por parte del profesor y que éste sea capaz de responder a los siguientes tipos de preguntas acerca de cada tópico:

¿Qué conceptos clave, habilidades y actitudes potencia este tópico en los estudiantes? ¿Cuáles son los aspectos de este tópico que son muy difíciles de entender para los estudiantes? ¿Cuál es el más grande interés intrínseco del estudiante? ¿Qué analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones, simulaciones, manipulaciones u otras formas parecidas son más eficaces para lograr

que los alumnos comprendan este tópico? ¿Cuáles preconcepciones de los estudiantes son posibles de considerar en su forma de aprender el tópico? (Shulman y Sykes, 1986, p. 9.)

Caracterizado como un modelo cílico, sinérgico, integral, flexible, incluyente e investigable (Pinto y González, 2006), el CDC no se puede examinar a partir del estudio de uno de sus componentes sin considerar la inclusión de los otros. Evaluar un solo componente, separado de los otros, conlleva a un riesgo sustancial de distorsionar su significado, caracterización e interpretación (Baxter y Lederman, 1999). Como modelo, el CDC está compuesto de elementos esenciales que se interrelacionan y se transforman en representaciones ideales que pueden facilitar su comprensión, desarrollo e investigación, dentro de un continuo de modelos que van de integrativos a transformativos acerca del conocimiento del profesor (Gess-Newsome y Lederman, 1999).

La revisión y el análisis de la perspectiva teórica que sustenta los componentes del CDC ofrecen un panorama amplio sobre los elementos que subyacen a la teoría propuesta por Shulman y colaboradores y que es retomado por otros investigadores (por ejemplo, Chinnappan y Lawson, 2005; Chen, 2004; An, Kulm y Wu, 2004; Sánchez y Llinares, 2002 y 2003; Llinares, 2000; Baxter y Lederman, 1999). Permite una visión específica sobre el conocimiento de la didáctica del contenido específico que incorpora, según Shulman (1986) y Grossman (1989), por lo menos tres componentes básicos: el conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar, el conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico) y el conocimiento del estudiante.

A continuación se describirán las características y la naturaleza conceptual de cada uno de estos componentes del CDC que contribuyen a comprender la sinergia de conocimiento que debe tener y desarrollar el profesor en su práctica docente.

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO DE LA DISCIPLINA POR ENSEÑAR

Shulman (1986) define este primer nivel de conocimiento como la “cantidad y organización de conocimiento *per se* en la mente del profesor” (p. 9). Como elemento esencial y previo a su labor de enseñar, el profesor deberá tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar: “el profesor necesita no sólo conocer o comprender qué, sino además saber también por qué esto es así,

sobre qué supuestos pueden ser ciertas estas justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas" (Shulman, 1986, p. 9).

Muchos son los expertos que opinan que los profesores necesitan tener un sólido conocimiento matemático para la enseñanza (por ejemplo, Shulman, 1986; Even, 1990; Llinares, 1993; García, 1997; López, 1999). Conocer bien el contenido de una lección incrementa la capacidad del profesor para realizar actividades diferentes en el aula, coordinar y dirigir las intervenciones y preguntas de los estudiantes, generar un cúmulo de estrategias de enseñanza vinculadas con el contenido y profundizar en el porqué y el para qué de la asignatura. No conocer bien el contenido es limitativo para desarrollar muchas de estas capacidades o habilidades (Carslen, 1987, en López, 1999, y McDiarmid, Ball y Anderson, 1989).

El estudio del conocimiento del contenido matemático del profesor es una línea de investigación que se orienta a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento matemático (genérico o específico) que tienen los profesores; así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento.

CONOCIMIENTO DE LA DIDÁCTICA ESPECÍFICA (REPRESENTACIONES O ESTRATEGIAS INSTRUCCIONALES PARA LA ENSEÑANZA DEL TÓPICO)

Shulman (1986 y 1987) y Barnett y Hodson (2001) afirman que los profesores no sólo tienen o deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido de manera efectiva, es decir, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades del estudiante. Para ello, se debe tener un conocimiento pedagógico (de métodos de enseñanza y aprendizaje) adaptado al contexto específico de la materia, esto es, el conocimiento de la didáctica específica. Este conocimiento de la didáctica específica² se define como:

las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una

² También denominado como conocimiento de estrategias y representaciones de instrucción según Grossman (1990, en Putnam y Borko, 2000).

palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros (Shulman, 1986, p. 9).

En el conocimiento de la didáctica específica se conjugan dos elementos centrales del CDC: *a) el conocimiento del profesor acerca de las representaciones de la materia y b) el conocimiento del profesor de las estrategias instruccionales asociadas al contenido específico que se enseña* (Van Driel, De Jong y Verloop, 2002). La atención, por lo tanto, se centra en el conocimiento del profesor sobre diferentes representaciones instruccionales³ vinculadas a un tópico concreto, el modo como las interpreta y utiliza en el aula, poniendo también en juego el conocimiento y uso de los otros componentes del CDC.

CONOCIMIENTO DEL ESTUDIANTE

No menos importante es el tercer componente del CDC: el conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido que desea enseñar. Hawkins (en Smith y Neale, 1989) define este dominio de conocimiento como la habilidad de hacer “penetrable” el contenido a los estudiantes. Consiste en la apremiante necesidad de que el profesor incorpore e integre a su bagaje de conocimientos los diferentes errores, preconcepciones y concepciones de los estudiantes y las condiciones instruccionales necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta (Shulman, 1986). Para Shulman y sus colaboradores, este conocimiento redundaría en una mejor comprensión sobre el tópico específico de que se trate, no sólo por parte de los estudiantes, sino también en relación con el nivel del CDC que tiene el profesor.

Diferentes autores (por ejemplo, Shulman, 1986; Marks, 1989; McDiarmid, Ball y Anderson, 1989; López, 1999) insisten en la necesidad de que el profesor, además de conocer los procesos psicológicos de aprendizaje, debe también conocer cómo aprende un alumno a estudiar un tópico específico. Esto implica conocer el origen y evolución del proceso cognitivo del estudiante (según edad, grado, experiencia y escolaridad), las motivaciones (intrínsecas y extrínsecas), las expectativas e intereses, las maneras de aprender, las preconcepciones, concepciones y dificultades relativas al aprendizaje de las matemáticas en general y del tópico específico matemático

³ Las representaciones instruccionales son elementos utilizados por el profesor para ayudar en la generación del conocimiento por parte de los alumnos (Llinares, Sánchez y García, 1994) y para construir y establecer relaciones (Graeber, 1999).

en particular. Gran parte de este cuerpo de conocimientos se ha ido adquiriendo como consecuencia de las dos últimas décadas de amplia investigación cognitiva sobre el aprendizaje del estudiante, lo cual ha producido muchos datos útiles sobre concepciones, errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes y de su pensamiento matemático (Even y Tirosh, 1995).

IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DEL CDC

La perspectiva teórica del CDC ha recibido mucha atención en los últimos años (Even, 1993; Llinares, Sánchez y García, 1994; Even y Tirosh, 1995; Fernández-Balboa y Stiehl, 1995; Gess-Newsome y Lederman, 1999; Van Driel, De Jong y Verloop, 2002; An, Kulm y Wu, 2004). El CDC ha tenido diferentes implicaciones, las cuales se clasifican en dos vertientes: las necesarias para la formación inicial y permanente del profesor y las vinculadas como objeto de estudio o de investigación.

FORMACIÓN INICIAL Y PERMANENTE DEL PROFESORADO

En 1999, Shulman describe cómo la noción del CDC fue la causa por la que surgieron subsecuentes iniciativas en relación con la formación del profesorado. La primera de ellas fue a través de la National Board of Professional Teaching Standards (Cámara Nacional de Estándares para la Profesionalización de la Enseñanza), la cual optó (a finales de la década de 1980) por una estructura que designa dominios de certificación por áreas de contenido, así como niveles de desarrollo para los estudiantes; de hecho, muchas instituciones (estadounidenses e inglesas, principalmente) incorporaron el CDC dentro de sus estándares de acreditación y certificación. Ejemplos de estas instituciones son la Southern Utah University, la Longwood University, la Michigan State University o el King College. Otras universidades e institutos de educación superior y responsables de la formación de profesores incorporaron como parte de sus programas alguna(s) asignatura(s), módulos o seminarios sobre el CDC específico de la disciplina por enseñar, o bien, proyectos de desarrollo de formación de profesores a través del CDC. Ejemplos son la University of California, la University of Vermont, la Central Connecticut State University, Escuela de Educación y Estudios Profesionales o la State University of New York.

Otra de las implicaciones importantes de esta perspectiva teórica fue la creación de asociaciones, fundaciones y organizaciones para la formación de profesores. Tal es el caso de La fundación Carnegie para el Mejoramiento de la Enseñanza (The Carnegie Foundation for Advancement of Teaching <http://www.carnegiefoundation.org/index.htm>), fundada desde 1906 por Andrew Carnegie en Stanford, California (Estados Unidos). Dirigida actualmente por Lee Shulman, es un centro de formación e investigación independiente cuya misión principal es “hacer y desarrollar todo lo necesario para estimular, elevar y dignificar la profesión de ser profesor y, por consiguiente, la educación superior” (en <http://www.carnegiefoundation.org/>).

Por último, el desarrollo y el interés por el CDC en el mundo de la educación superior ha contribuido al reconocimiento gradual de que la visión de la calidad de enseñanza va más allá del dominio de contenido de un área específica (Shulman, 1999, pp. x-xi). Esto ha llevado a que en los últimos años exista un mayor interés en explorar y estudiar el CDC en el nivel de educación superior. Por ejemplo, actualmente la Fundación Carnegie incorpora recomendaciones y proyectos específicos para el desarrollo de programas de formación de profesores en ese nivel.

OBJETO DE INVESTIGACIÓN

El desarrollo del CDC en relación con la formación de profesores ha traído como consecuencia el incremento de las investigaciones sobre éste. Ejemplo de este interés es el congreso de 2004 de la National Science Teachers Association (NSTA, en <http://www.nsta.org/ncse2004> recuperado en octubre de 2004), el cual incluyó dentro de los seis grupos de discusión el de “El profesor altamente cualificado y el Conocimiento Didáctico del Contenido” (The Highly Qualified Teacher and Pedagogical Content Knowledge).

Esta área de investigación también ha sido reconocida recientemente en el “Estudio conjunto ICMI/IASE. Educación Estadística en la Matemática escolar: retos para la enseñanza y la formación del profesor” (http://www.ugr.es/%7Eicmi/aise_study/, recuperado en julio de 2008), elaborado por la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) y la International Association for Statistical Education (IASE) en el mes de junio de 2008, donde se discutió, analizó y justificó la necesidad de hacer más investigación sobre el CDC requerido para la enseñanza y el modo en que los profesores usan su conocimiento estadístico al enseñar

estadística, así como explorar cuál es el CDC básico y las competencias que los profesores requieren para enseñar eficazmente la estadística en diferentes niveles escolares y cómo se relacionan estas competencias.

Autores como Marks (1990a y 1990b) afirman que, en el futuro, las investigaciones deben desarrollarse en diferentes áreas y niveles y producir más ejemplos del CDC en un contexto dado, usando tal vez diversos métodos de recogida y análisis de datos. Los estudios deben “ayudar a comprender más las diferencias y aspectos comunes entre materias o áreas para construir la base del conocimiento para la enseñanza” (Marks, 1990b, p. 11), determinar las necesidades que los profesores tienen para enseñar un tópico específico de matemáticas (Even, 1990) y mejorar la calidad de nuestros programas de formación de profesores. El análisis de los diferentes trabajos publicados en educación matemática, que han utilizado el CDC como teoría para explorar el conocimiento del profesor, ha permitido caracterizar diferentes cuestiones de tipo conceptual y metodológico como: los principales tópicos estudiados, los sujetos participantes, los diseños de investigación y los instrumentos de recogida de datos. Para ello, Pinto y González (2006) consultaron cerca de 20 investigaciones, desde la aparición del CDC hasta la actualidad, dentro de las cuales estuvieron: Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988), Wallece (1990), Marks (1990a y 1990b), Even (1990), Hutchison (1992), Even (1993), Llinares, Sánchez y García (1994), Even y Tirosh (1995), Baturo y Nason (1996), Swenson (1998), Fan (1998), Howald (1998), Baxter y Lederman (1999), Smith (2000), Wanko (2000), Llinares (2000), Durand (2003); Badillo (2003), Sánchez y Llinares (2003 y 2002), An, Kulm y Wu (2004), Chen (2004), Chinnappan y Lawson (2005), y Llinares y Krainer (2006).

Como resultado de esta revisión, Pinto y González (2006) encontraron que el mayor número de investigaciones ha sido sobre el conocimiento del contenido por enseñar (cerca de 88%), mientras que menos de 50% ha estudiado el conocimiento de la didáctica específica del contenido y del conocimiento acerca del proceso de aprendizaje del estudiante, respectivamente; siendo los tópicos de las fracciones y las funciones los temas más estudiados.

Aun cuando los estudios sobre el CDC se circunscriben al contexto y naturaleza de cada investigación, de sus propósitos, metodologías de investigación, sujetos participantes y tópico específico, se identificaron algunos resultados comunes: *a)* todavía prevalecen serios problemas en la adquisición, dominio y uso del conocimiento del contenido por enseñar de parte del profesor; *b)* los profesores tienen dificultades para establecer la relación entre el conocimiento del contenido por enseñar con las representaciones instruccionales y el conocimiento del

proceso de aprendizaje del estudiante; *c)* se evidencia, a partir del pobre conocimiento del contenido por enseñar, un limitado o nulo conocimiento de la didáctica específica y del conocimiento del estudiante; *d)* se evidencia la necesidad de planear, desarrollar, implementar y evaluar programas de formación de profesores con enfoques diferentes a los actuales, es decir, con enfoques más integradores y no desde un solo dominio de conocimiento, a la luz de los resultados obtenidos en las diferentes investigaciones; *e)* se recomienda, como principales fuentes de formación del CDC, la investigación de la didáctica de las matemáticas, las creencias y concepciones de los profesores, la reflexión de la acción y sobre ella, la experiencia profesional y personal del docente, la interacción entre colegas, lecturas, entre otros, y *f)* se confirman algunas relaciones significativas, como aquellas entre las concepciones de la matemática y su enseñanza y aprendizaje y el CDC, así como aquellas entre niveles altos del CDC y una actitud positiva del profesor, y el conocimiento del contenido por enseñar vinculado con la experiencia docente del profesor como elementos diferenciadores del profesor con mucha/poca experiencia. Los resultados también dan cuenta de lo complejo que es investigar el CDC. Esto último ha representado un desafío para los investigadores, ya que la cognición del profesor, como lo es el CDC, no puede ser observada directamente, pues por definición, el CDC es particularmente un constructo interno (Baxter y Lederman, 1999). Estos autores afirman que la cognición del profesor se lleva a cabo inconscientemente, es decir, los maestros no siempre poseen el lenguaje para expresar sus pensamientos y creencias; lo que manifiesta que es un constructo altamente complejo, no fácil de medir ni evaluar. Es un constructo constituido por lo que los profesores conocen, lo que los profesores hacen y las razones por las que los profesores actúan.

Es preciso resaltar que, en el contexto de México, se hizo una revisión de artículos de investigación y divulgación, de tesis de maestría y doctorado en matemática educativa del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) y del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM, Campus Monterrey) a finales de 2004 y no se encontró ningún estudio acerca del CDC en el campo de la educación matemática. Se encontró un único trabajo (véase García, 1994) sobre concepciones acerca de la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de ésta y un número importante de estudios sobre concepciones de un tópico específico (por ejemplo, el concepto de límite, variación, azar, derivadas, función, etc.), con lo cual se demuestra un claro avance en materia de investigación acerca de las concepciones y dificultades de los estudiantes sobre ciertos tópicos matemáticos.

CONCLUSIÓN

El CDC es una perspectiva teórica que surge a partir del conocimiento base para la enseñanza de Lee Shulman. A diferencia de otras perspectivas de investigación didáctica (por ejemplo, la de proceso-producto y la del pensamiento del profesor), favorece el estudio del profesor a la luz del conocimiento del contenido específico que se enseña. Actualmente, el estudio del CDC, como modelo de formación de profesores y como objeto de investigación, ha tenido un interés particular en años recientes. Tal es el caso del campo de la educación matemática. No pretende suprimir, obviar o desvalorizar otros componentes del conocimiento en la tarea de enseñar, sino únicamente defiende, propone y justifica un conjunto de conocimientos (amalgamados entre sí) sobre el contenido específico, para con ello cubrir un vacío (o complemento) necesario sobre el conocimiento del profesor de una asignatura específica.

El CDC representa un esfuerzo para desarrollar un modelo sobre la cognición del profesor; proporciona un nuevo marco analítico para la organización y recogida de información sobre la cognición del profesor; resalta la importancia del conocimiento de la materia en cuestión y su transformación para la enseñanza, incorpora hallazgos de otros constructos relacionados y facilita una visión más integrada del conocimiento del profesor y su práctica en el salón de clases (Nakiboglu y Karakoc, 2005).

Si bien el CDC en educación matemática ha tenido bastante interés en los últimos años y cada día adquiere mayor atención y reconocimiento en el ámbito internacional (en las instituciones educativas y centros de investigación y como parte de programas de formación inicial y permanente y de los procesos de evaluación, acreditación y selección de profesores), parece ser que en México no es así. Todavía tiene un nulo o bajo nivel de construcción para la formación inicial y permanente de profesores y una relativa ausencia de investigación del CDC centrada en el profesor. Esto lleva a preguntarnos: ¿desde qué perspectivas teóricas se estudia el conocimiento profesional del profesor de matemáticas? ¿por qué es un constructo no encontrado en la literatura en matemática educativa en México?, o bien, en México ¿el CDC es una cuestión ignorada?

Como señalan Marks (1989), Even (1990) y Shulman (1999), es necesario desarrollar más investigación sobre los diferentes componentes, categorías, características, dimensiones e indicadores del CDC para seguir generando un cuerpo de conocimientos que fundamente y oriente la formación de los programas de formación inicial y permanente y subsecuentes investigaciones. Es indispensable

lograr la conexión entre la investigación didáctica del conocimiento del profesor (a través del CDC) y los programas de formación de profesores. Sólo a través de la investigación será posible conocer y demostrar los beneficios del CDC, difundir sus alcances, incrementar su credibilidad como modelo de formación y dar cabida a programas de carácter práctico y con un alto impacto en el mejoramiento del desarrollo profesional del profesor y del pensamiento crítico del estudiante.

El desarrollo de la investigación sobre el CDC permitirá acercarnos a las bases teóricas y prácticas que requieren los programas de formación, conocer cómo se desarrolla u opera en la realidad escolar, clarificar su comprensión y significado, y generar un repertorio de estrategias o representaciones instruccionales. Como señala García (1997), “el futuro de la investigación sobre el profesor está en las cogniciones de éste y el contexto en el que se construyen. Estos serán aspectos sobre los que se basarán las investigaciones en formación del profesorado de matemáticas” (p. 100).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- An, S., G. Kulm y Z. Wu (2004), “The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and U.S.”, *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 7, pp. 145-172.
- Badillo, J.E. (2003), *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia*, Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España.
- Barnett, J. y D. Hodson (2001), “Pedagogical context knowledge: toward a fuller understanding of what good science teachers know”, *Science Teacher Education*, núm. 85, pp. 426-453.
- Baturo, A. y R. Nason (1996), Students teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 31, núm. 3, pp. 235-268.
- Baxter, J. y N. Lederman (1999), “Assessment and measurement of pedagogical content knowledge”, en J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for science education*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic, pp. 147-161.
- Bromme, R.F. (1994), “Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge”, en R. Biehler, R. Sholz, R. Sträâer y B. Winkel-

- mann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Londres, Kluwer Academic Publishers, pp. 73-88.
- Carpenter, T., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey (1988), "Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, núm. 5, pp. 385-401.
- Chen, W. (2004), "Learning the skill theme approach: Salient and problematic aspects of pedagogical content knowledge", *Education*, vol. 125, núm. 2, pp. 194-212.
- Chinnappan, M. y M. Lawson (2005), "A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 8, pp. 197-221.
- Cooney, T. J. (1994), "Research and teacher education: In search of common ground", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, núm. 6, pp. 608-636.
- Durand, F. E. (2003), "Secondary mathematics pre-service teacher's conceptions of rational numbers", *Dissertation Abstracts International*, vol. 64, núm. 09, 3227A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 3105761).
- Even, R. (1990), "Subject matter knowledge for teaching and the case of functions", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 21, núm. 6, pp. 521-544.
- (1993), "Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, núm. 2, pp. 94-116.
- Even, R. y D. Tirosh (1995), "Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 29, núm. 1, pp. 1-20.
- Fan, L. (1998), "The development of teachers' pedagogical knowledge: An investigation of mathematics teachers in three high-performing high schools", *Dissertation Abstracts International*, vol. 59, núm. 07, 2322 A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 9841511).
- Fernández-Balboa, J.M. y J. Stiehl (1995), "The generic nature of pedagogical content knowledge among college professors", *Teaching and Teacher Education*, vol. 11, núm. 3, pp. 293-306.
- García, B. M. (1997), *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*, Universidad de Sevilla, Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIEM), Sevilla, Kronos.
- García, J.M. (1994), *La relación entre la conceptualización de los profesores acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y la resolución de problemas*, Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

- Gess-Newsome, J. y N.G. Lederman (eds.) (1999), *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for Science Education*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic.
- Glatthorn, A.A. (1990), *Supervisory Leadership*, Nueva York, Harper Collins.
- Graeber, A.O. (1999), "Forms of knowing mathematics: What pre-service teachers should learn", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, núms. 1-3, pp. 189-208.
- Grossman, P. (1989), "A study in contrast: Sources of pedagogical content knowledge for secondary English", *Journal of Teacher Education*, vol. 40, núm. 5, pp. 24-31.
- Howald, C.L. (1998), "Secondary teachers' knowledge of functions: Subject matter knowledge, pedagogical content knowledge and classroom practice", *Dissertation Abstracts International*, vol. 59, núm. 05, 1500A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 9834470).
- Hutchison, L.S. (1992), "How does prior subject matter knowledge affect the learning of pedagogical content knowledge in a mathematics methods course at the pre-service", *Dissertation Abstracts International*, vol. 54, núm. 01, 117A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 9312688).
- Llinares, C.S. (1993), "Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento del contenido pedagógico y entornos de aprendizaje", en L. Montero y J. Vez (eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado I*, Santiago de Compostela, Tórculo, pp. 377-407.
- (2000), "Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: A case from the teaching of the concept of function", *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, vol. 6, núm. 1, pp. 41-62.
- Llinares, C.S., V. Sánchez y B.M. García (1994), "Conocimiento del contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación de las fracciones", *Revista de Educación*, núm. 304, pp. 199-225.
- Llinares, S. y K. Krainer (2006), "Mathematics (student) teacher and teacher educators as learners", en A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, Rotterdam, Países Bajos, Sense Publishers, pp. 429-459.
- López, R. J. (1999), *Conocimiento docente y práctica educativa. El cambio hacia una enseñanza centrada en el aprendizaje*, Málaga, Ediciones Aljibe.
- Marks, R. (1989), "What exactly is pedagogical content knowledge? Examples from mathematics", ponencia presentada en la AERA Annual Conference, San Francisco, marzo.

- (1990a), “Pedagogical content knowledge in elementary mathematics”, *Dissertation Abstracts International*, vol. 51, núm. 01, 101A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 9017884).
- (1990b), “Pedagogical Content Knowledge. From a mathematical case to a modified conception”, *Journal of Teacher Education*, vol. 41, núm. 3, pp. 3-11.
- McDiarmid, G.W., D.L. Ball y Ch.W. Anderson (1989), “Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject-specific pedagogy”, en M.C. Reynolds (ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher*, Issue paper 88-6, Oxford, Pergamon Press.
- Nakiboglu, C. y O. Karakoc (2005), “The forth knowledge domain a teacher should have: The pedagogical content knowledge”, *Educational Sciences: Theory & Practice*, vol. 5, núm. 1, pp. 201-206.
- Pinto, S.J. y M.T. González (2006), “Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en matemáticas. Una aproximación para su estudio”, *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, del 7 al 9 de septiembre, Universidad de Huesca, España, pp. 237-255.
- Putnam, R. y H. Borko (2000), “El aprendizaje del profesor: implicaciones de las nuevas perspectivas de la cognición”, en B.J. Biddle, T.L. Good e I.F. Goodson (eds.), *La enseñanza y los profesores I*, Barcelona, Temas de educación, Paidós, pp. 219-309.
- Sánchez, V. y S. Llinares (2002), “Imágenes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes para profesores de secundaria y tareas matemáticas escolares”, *Revista de Educación*, núm. 329, pp. 443-461.
- (2003), “Four student teachers' pedagogical reasoning on functions”, *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 6, pp. 5-25.
- Shulman, L.S. (1986), “Those who understand: Knowledge growth in teaching”, *Educational Research*, vol. 15, núm. 2, pp. 4-14.
- (1987), “Knowledge and teaching: Foundations of new reform”, *Harvard Educational Review*, vol. 57, núm. 1, pp. 1-22.
- (1993), “Renewing the pedagogy of teacher education: The impact of subject-specific conceptions of teaching”, en L. Moreno y J.M. Vez (eds.), *Las didácticas específicas en la formación de profesores*, Santiago, Tórculo, pp. 53-69.
- (1999), “Foreword”, en J. Gess-Newsome y N. Lederman (eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge*, Londres, Kluwer Academic Publishers, pp. ix-xii.

- Shulman, L.S. y G. Sykes (1986), "A national board for teaching?: In search of bold standard", *Paper commissioned for the task force on teaching as a profession*, Carnegie Forum on Education and the Economy, marzo.
- Smith, D.C. y D.C. Neale (1989), "The construction of subject matter knowledge in primary science teaching", *Teaching and Teacher Education*, vol. 5, núm. 1, pp. 1-20.
- Smith, K.H. (2000), "Early childhood teachers' pedagogical content knowledge in mathematics", *Dissertation Abstracts International*, vol. 61, núm. 10, 3886A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 9991808).
- Swenson, K.A. (1998), "Middle school mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of probability: Its relations to probability instruction", *Dissertation Abstracts International*, vol. 59, núm. 02, 440A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 9824767).
- Van Driel, J., O. de Jong y N. Verloop (2002), "The development of pre-service chemistry teachers' pedagogical content knowledge", *Science Teacher Education*, núm. 86, pp. 572-590.
- Wallece, M.L. (1990), "How do teachers know geometry? A multi-case study of secondary school geometry teachers' subject-matter and pedagogical content knowledge (subject matter knowledge)", *Dissertation Abstracts International*, vol. 51, núm. 12, 4052 A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 9112737).
- Wanko, J.J. (2000), "Going public: The development of teacher educator's pedagogical content knowledge", *Dissertation Abstracts International*, vol. 62, núm. 01, 109A (Microfilmes de la Universidad, núm. AAT 3000635).
- Wilson, S.M., L.S. Shulman y A. Richert (1987), "150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching", en J. Calderhead (ed.), *Exploring Teacher Thinking*, Londres, Casell, pp. 104-124.

DATOS DE LOS AUTORES

Jesús Enrique Pinto Sosa

Facultad de Educación, Universidad Autónoma de Yucatán, México
psosa@uady.mx

María Teresa González Astudillo

Facultad de Educación, Universidad de Salamanca, España
maite@usal.es