

# Los indivisibles en el cálculo contemporáneo

Vrunda Prabhu y Bronislaw Czarnocha

**Resumen:** La obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis es la expresión aritmética de la obra *Geometria Indivisibilibus* de Bonaventura Cavalieri, autores que abordaron lo indivisible. En *El método de los teoremas mecánicos*, descubierto apenas en 1910, Arquímedes también abordó lo indivisible. Esas obras son anteriores al actual uso generalizado del concepto de límite. Las fórmulas que presentamos en este artículo constituyen una reformulación de la obra de Wallis y Cavalieri para proporcionar fundamentos matemáticos rigurosos contemporáneos; a saber: el concepto de límite. Basados en la intuición de un estudiante y en lo indivisible de Arquímedes, Cavalieri y Wallis se formulan dos integrales: la integral de Cavalieri-Wallis y la integral de Porter-Wallis. Esas integrales ofrecen una nueva perspectiva de los conceptos clásicos de medida, área e integral definida. La elaboración de la integral de Cavalieri-Wallis aclara las ambigüedades del principio de Cavalieri, reemplazando “todas las líneas” en la obra de Arquímedes y Cavalieri, mientras que la elaboración de la integral de Porter-Wallis, visualmente atractiva, ancla el concepto del área en un marco estadístico, el cual inspira la enseñanza tradicionalmente difícil de la integral de Riemann en los experimentos de enseñanza de Cálculo de primer año llevados a cabo en varios lugares de Estados Unidos y México.

*Palabras clave:* indivisible, integral definitiva, integral de Riemann, integral de Porter-Wallis, integral de Cavalieri-Wallis.

**Abstract:** *Arithmetica Infinitorum* of John Wallis is the arithmetization of the work *Geometria Indivisibilibus* of Bonaventura Cavalieri, both of which utilised the indivisible. *The Method of Archimedes* found only in 1910 also utilised the indivisible. These works predate the current ubiquitous use of the concept of the limit. The formulations presented in this article reformulate the work of Wallis and Cavalieri providing contemporary rigorous mathematical foundations, viz., the limit concept.

---

Fecha de recepción: 28 de agosto de 2006. Traducción del inglés de Mario Zamudio Vega.

Two integrals, Cavalieri-Wallis and Porter-Wallis integrals, are formulated on the basis of student intuition, and the Indivisible of Archimedes, Cavalieri and Wallis. These integrals provide a new viewpoint on classical concepts of measure, area and the definite integral. Cavalieri-Wallis construction clarifies ambiguities of Cavalieri Principle, replacing “all the lines” in the work of Archimedes and Cavalieri. The visually appealing Porter-Wallis construction anchors the concept of area in a statistical framework, which informs the traditionally difficult pedagogy of the Riemann integral in freshman Calculus teaching experiments conducted at various sites in the United States and Mexico.

*Keywords:* indivisible, definite integral, Riemann integral, Porter-Wallis integral, Cavalieri-Wallis integral.

## INTRODUCCIÓN

El objeto de nuestro estudio es lo indivisible tal como aparece en las obras de Arquímedes, Cavalieri y Wallis. En cada una de esas obras, lo indivisible no tiene anchura, en oposición a una cantidad que ya no es divisible. En este artículo, por tanto, nuestra atención se centra en los indivisibles que no tienen anchura, a diferencia de la paradoja de Zenón, Aquiles y la tortuga, donde encontramos lo indivisible con un ancho finito distinto de cero (Bergson, 1911). En particular, nos centramos en lo indivisible desde el punto de vista de Cavalieri y Wallis.

Considérense los pasajes de Arquímedes, Cavalieri y Wallis:

En la *Arithmetica Infinitorum* (Wallis, 1656; Stedall, 2004), las fórmulas con que Wallis “investiga la cuadratura de las curvas” se presentan como:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{0+1=1}{1+1=2} & = \frac{1}{2} & = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\
 \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} & = \frac{5}{12} & = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \\
 \frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} & = \frac{14}{36} & = \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \\
 \dots & \dots & \dots
 \end{array} \tag{1}$$

El principio de Cavalieri establece: dadas dos figuras planas  $l$  y  $k$  entre dos líneas paralelas, si toda sección paralela  $sl$  de la figura  $l$  corresponde a una sección

paralela  $sk$  de la figura  $k$  y el cociente de sus longitudes  $\frac{s_l}{s_k} = r$  es constante para cada par, entonces el cociente de sus áreas  $\frac{A_l}{A_k}$  es el mismo.

La idea de Arquímedes en *El método* y en *La cuadratura de la parábola*, en el sentido de que la figura está formada por todas las líneas paralelas que la forman, le permitió calcular el área, estableciendo una correspondencia de uno a uno de cada línea delimitada por la parábola con la línea correspondiente en un triángulo elegido adecuadamente cuya área pudiese calcularse con precisión.

En el meollo de la obra de Cavalieri, la principal herramienta matemática es el cociente. Para Wallis, en su expresión aritmética de la obra de Cavalieri, la naturaleza geométrica del cociente empleado por este último se traduce en una operación con los cocientes, esto es, la suma finita de cocientes. En el caso de Arquímedes, sigue siendo el cociente el que se emplea, pero, en su caso, como condición de equilibrio en el principio de la palanca a través del cual el área delimitada por la parábola se transforma en el área de un triángulo situado adecuadamente.

Presentamos los resultados y reflexiones del experimento de enseñanza Introducción de los Indivisibles en la Enseñanza del Cálculo, financiado por la subvención NSF/ROLE #0126141 de 2002 a 2006. El experimento de enseñanza fue motivado por el reciente redescubrimiento que hicieron Czarnocha *et al.* (2001) de la intuición de los indivisibles en el pensamiento de los estudiantes de cálculo en relación con el límite de las sumas de Riemann. Puesto que la intuición de los estudiantes respecto al área resultó ser similar a la de Arquímedes, Cavalieri y Wallis, en cuyas manos el método había dado pruebas de ser una importante proeza de cálculo, el equipo de investigación y enseñanza empezó a verificar si dicha intuición podía llegar a desarrollarse en el aparato matemático de los estudiantes como una herramienta igualmente sólida y claramente definida para la medición de áreas. Las cuestiones de investigación planteadas en el experimento de enseñanza fueron:

- 1) ¿Cómo tiene lugar el proceso de transformación y desarrollo de la intuición de las líneas (los indivisibles) en un concepto matemático preciso?
- 2) La introducción de la construcción de Cavalieri-Wallis basada en los indivisibles, la interacción de esa construcción con la construcción normal de Riemann y la enseñanza en la que se integran una y otra, ¿permiten fortalecer la comprensión de los estudiantes del concepto de la integral definida?

Nuestras consideraciones sobre el enfoque posteriores al experimento sugieren que el concepto adecuado para el análisis del desarrollo del aprendizaje que se plantea en la segunda pregunta de investigación es el marco recientemente formulado de la trayectoria hipotética de la enseñanza (Simon, 1995; Clements, 2000), que en nuestro caso parte de la intuición de que las líneas pertenecen al concepto del área y termina en el concepto “científico” del cálculo. La información respecto a la manera en la que los estudiantes comprenden y desarrollan los nuevos conceptos se recolectó en el contexto de los experimentos de enseñanza, en los que colaboraron varias instituciones diferentes de enseñanza superior ampliamente representativas de los antecedentes y las poblaciones de estudiantes. Las instituciones fueron: un instituto de humanidades predominantemente femenil de Missouri, tres institutos comunitarios urbanos, dos de ellos del Bronx, la Universidad Estatal de Kansas, un instituto politécnico de Texas y un instituto comunitario de Pensilvania. El proyecto piloto se llevó a cabo en un instituto politécnico de la Ciudad de México. Todos los experimentos de enseñanza incluyeron a estudiantes de los primeros dos semestres de Cálculo de primer año en las diferentes instituciones. William Mahavier, de la Universidad de Emory, especialista en el Método de Descubrimiento Texano de Moore, Jack Porter, topólogo de la Universidad de Kansas, y Victor Katz, historiador de matemáticas de la Universidad del Distrito de Columbia, fungieron en diferentes períodos como consultores del proyecto. La integral Porter-Wallis se presentó a los estudiantes como un paso para llegar al método de las sumas de Riemann, que había sido diagnosticado como difícil para los estudiantes. La información se recolectó en el salón de clases en forma de tareas, cuestionarios y exámenes; y al final del semestre se llevaron a cabo entrevistas clínicas con los participantes.

## DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

### EL MARCO TEÓRICO

Las preguntas de investigación hicieron necesario que se integrara la intuición de los indivisibles que se había descubierto con el concepto de la integral definida. Con ese propósito, la construcción que Cavalieri elaboró en el siglo XVII (véase adelante) se empleó como puente entre la intuición de los indivisibles/las líneas y la integral definida formal. El énfasis en el papel de la intuición natural de los estudiantes llevó a que la esperanza de que éstos adquirieran un mayor

dominio de las matemáticas se depositara en la integración de su intuición con el contenido académico. Nuestra enseñanza concordaba con y respondía a la afirmación de Griffin (Griffin *et al.*, 1995), en el sentido de que una de las razones principales del reducido grado de éxito en las matemáticas parece ser la separación cada vez más amplia que tiene lugar entre la comprensión informal intuitiva de las matemáticas por parte de los niños y los algoritmos que necesitan para aprender en su educación formal; sin embargo, en lugar de achacar la responsabilidad de dicha separación a la naturaleza abstracta de las matemáticas, como sugieren Núñez y Lakoff (1998), nosotros creemos que el enfoque adecuado es la inclusión tanto del aspecto abstracto de las matemáticas como de sus raíces intuitivas en el programa de matemáticas y mediante la integración cuidadosa de uno y otras a todo lo largo y ancho de la zona de desarrollo próximo (ZPD, por sus siglas en inglés), diseñada y controlada pedagógicamente, para que los estudiantes profundicen en la comprensión de ambos aspectos. La zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1986) entre la intuición “espontánea” de los indivisibles y el “concepto científico” de la integral es un marco teórico natural para investigar ese proceso de aprendizaje, porque postula que el desarrollo conceptual es producto de la integración adecuada de los conceptos espontáneos y científicos en el estudiante. Según Vygotsky,

la fuerza de los conceptos científicos reside en su carácter consciente y deliberado, mientras que, por el contrario, la fuerza de los conceptos espontáneos reside en lo relacionado con lo situacional, lo empírico y lo práctico. Esos dos sistemas conceptuales, que se desarrollan “desde arriba” y “desde abajo”, revelan su naturaleza verdadera en la interrelación del desarrollo real con la zona de desarrollo próximo.

Este punto de vista sugiere el enfoque del andamiaje de la enseñanza, en el que la intuición del concepto se desarrolla “desde abajo” y los conceptos matemáticos se desarrollan “desde arriba”, hasta que la distancia conceptual entre los dos planos de desarrollo concuerda con la extensión de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes. La obra de Czarnocha y Prabhu (2006) contiene un análisis más detallado de ese proceso en el contexto de la enseñanza del límite de una secuencia. La sutileza de las construcciones mentales que quisiéramos que los estudiantes llevaran a cabo sugiere el concepto de un plan (Skemp, 1987) como la herramienta de análisis adecuada para la construcción. Por consiguiente, nuestro marco teórico consiste en la mezcla de teorías y metodologías

que abordan tanto los aspectos sociales como los individuales del desarrollo cognitivo.

## LA METODOLOGÍA

Los experimentos de enseñanza del proyecto se llevaron a cabo con la ayuda de la metodología cíclica de la Investigación de la Enseñanza, un perfeccionamiento del experimento de enseñanza de la Research in Undergraduate Mathematics Education Community (Comunidad de Investigación de la Educación Universitaria de las Matemáticas; RUMEC, por sus siglas en inglés), fundada en 1996 en Estados Unidos. El experimento de enseñanza puesto en práctica por RUMEC (Asiala *et al.*, 1996) se basó en el hecho de que todos los investigadores del grupo eran profesores de matemáticas en alguno de los institutos o universidades de Estados Unidos y tenían la posibilidad de enseñar la misma materia cada año académico, empleando y evaluando estrategias de enseñanza refinadas, circunstancia que permitió la introducción de la metodología cíclica:

Enseñanza → recolección de datos → análisis y refinamiento teórico de las estrategias de enseñanza → siguiente ciclo del experimento.

Además de que reduce prácticamente a cero el desfase temporal entre la investigación y la enseñanza, la metodología cíclica posee una riqueza que trasciende la contradicción que describe Elliot (1991), quien afirma:

En la investigación activa, la teoría se deriva de la práctica y está constituida por un conjunto de abstracciones y generalizaciones sobre ella. Lo anterior contradice marcadamente el punto de vista racionalista técnico que considera la práctica como la aplicación de teorías y principios que son comprendidos previamente a su puesta en práctica.

La metodología cíclica es particularmente útil para la determinación experimental de la zona de desarrollo próximo del estudiante a través del proceso antes descrito. Son necesarios varios de esos ciclos para determinar la extensión de la zona de desarrollo próximo del estudiante relativa al concepto en cuestión y para diseñar estrategias de enseñanza que ayuden a los estudiantes a atravesar su zona de desarrollo próximo.

En nuestra metodología, el maestro-investigador puede iniciar la recolección de la información concerniente a un problema en particular en su salón de

clases, buscar la relación entre las observaciones y el conocimiento teórico del aprendizaje existente en el campo y, sobre esa base, formular hipótesis nuevas, más generales (o más detalladas), que deberán ser verificadas en la siguiente ocasión en la que el maestro enseñe el mismo tema de matemáticas; o, guiado por la base de conocimiento teórico, el maestro-investigador puede introducir nuevas estrategias de enseñanza (o la organización del programa de estudios basada en una teoría del aprendizaje en particular) para evaluar y corregir su efectividad y modificar la teoría original, si es necesario. De esa manera, correlacionando la experiencia del profesional con el conocimiento teórico en el campo (en cualquiera de las dos direcciones y en ambas), el maestro-investigador puede unir, de una manera intelectualmente creativa, la teoría derivada de la práctica individual con las teorías compartidas en la profesión. La repetición cíclica de la enseñanza del mismo tema, inherente a la profesión de la enseñanza de las matemáticas, permite organizar la enseñanza, ya sea como la aplicación de una teoría a la práctica, ya sea como la derivación de una teoría de la práctica. La correlación de la experiencia individual sobre la enseñanza con el marco teórico otorga a la versión del experimento de enseñanza que se propone su calidad objetiva.

La secuencia de la enseñanza ha evolucionado a lo largo de tres ciclos de enseñanza-investigación y sirve, al mismo tiempo, como un instrumento de investigación con cuya ayuda se evalúan los grados de comprensión del estudiante. Posteriormente, los resultados de la evaluación se introducen en el ciclo siguiente, lo cual lleva al refinamiento de la secuencia de la enseñanza.

## EL DESARROLLO INTUITIVO DEL CONCEPTO

Considérese el problema de cálculo típico de determinar el área de la región delimitada por la gráfica de la función  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las líneas verticales  $x = a$  y  $x = b$ . En lugar de proceder de la manera típica para obtener el límite de las sumas parciales mediante el empleo del enfoque de Riemann, considérese lo siguiente: dividase el intervalo de integración  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de ancho igual, lo que arroja la partición  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , donde  $x_i = \frac{(b-a)i}{n}$ . En la partición hay  $n + 1$  puntos. Considérense los cocientes del tipo  $\frac{f(x_i)}{f(b)}$ . En este caso, se supone que  $f$  es una función monótona creciente y que su valor máximo en el intervalo que se considera es  $f(b)$ .

El cociente  $\frac{f(x_i)}{f(b)}$  denota el cociente de los “indivisibles” o el cociente de las longitudes de dos intervalos de la línea del número real. Considérese la suma finita de estos cocientes:

$$\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{f(b)}$$

Ahora, empléese el método bien conocido pero muy poco utilizado de la suma de cocientes; a saber: la suma finita de cocientes es el cociente de sus sumas. De ahí:

$$\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{f(b)} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)}{(n+1)f(b)} \quad (2)$$

Compárense las fórmulas (2) con el pasaje antes mencionado (1) de la obra de Wallis. Sea la función  $f(x) = x^2$  y el intervalo  $[a, b] = [0, 1]$ . Entonces, las tres líneas de (1) denotan el cociente en (2), utilizando el valor de  $n = 1$ ,  $n = 2$  y  $n = 3$ , respectivamente.

Llamemos a esos cocientes los cocientes de Cavalieri-Wallis ( $CW_n$ ):

$$\begin{aligned} CW_1 &= \frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 1} \\ CW_2 &= \frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 2} \\ &\dots \end{aligned}$$

y generalicemos a:

$$CW_n = \frac{0^2 + 1^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + \dots + n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)} = \frac{2n+1}{6n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times n}$$

O

$$CW_n = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \left(\frac{i}{n}\right)^2}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{i}{n}\right)}{f_{\max} n + 1} \quad (3)$$

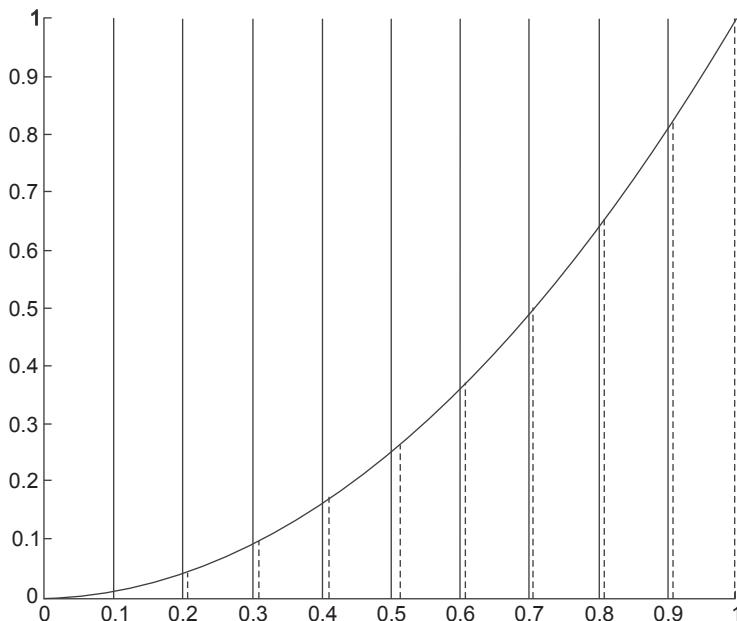


Figura 1

La figura 1 representa la gráfica de  $f(x) = x^2$  en  $[0, 1]$ , lo cual permite interpretar la ecuación (3) como el cociente de la suma de  $n + 1$  ordenadas equidistantes de la función  $f(x)$  dividida por la suma de  $n + 1$  correspondiente a las ordenadas de la función  $f_{\max} = f(1) = 1$ , que son las alturas indivisibles del rectángulo de referencia que las delimita (Czarnocha y Prabhu, 2002).<sup>1</sup>

Consecuentemente, la ecuación (3) se puede reformular de la siguiente manera:

$$CW_n = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{i}{n}\right)}{1 \times (n+1)}$$

<sup>1</sup> El rectángulo de referencia es el rectángulo con una base igual al dominio de la función y cuyas alturas están en correspondencia con las ordenadas de la función tomadas en ciertos puntos específicos. Si se considera que la altura del rectángulo es  $f_{\max}$ , tenemos un rectángulo delimitante y, si la altura es 1, tenemos un rectángulo de referencia normalizado.

Naturalmente, los “cocientes parciales”  $CW_n$  se relacionan con las sumas de Riemann correspondientes. La correspondencia se puede establecer entre:

- 1)  $CW_n$  y  $R_n$  una suma de Riemann construida en la misma partición equidistante del dominio del intervalo y con los mismos puntos muestra para los valores de la función,

y entre:

- 2)  $CW_n$  y  $R_{n+1}$  construida en una partición del dominio de malla tamaño  $\frac{1}{n+1}$ , con una selección especial de puntos muestra para los valores de la función.

*Nota:* El límite de los cocientes  $CW_n$  en el intervalo  $[0, 1]$  es la altura promedio de la función  $f(x)$  en el intervalo y se define en la siguiente sección. Por consiguiente, el límite del cociente de la suma de un número finito de muchos indivisibles espaciados equidistantemente es la altura promedio de la función en el mismo intervalo.

*Nota:* Recuérdese el teorema del valor promedio del cálculo:

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

En la siguiente sección, se establece la conexión del valor promedio con un concepto recientemente definido, llamado la integral de Porter-Wallis.

## LAS MATEMÁTICAS DEL ENFOQUE

### Definición 1. La integral de Cavalieri-Wallis

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada:

$$CW \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} CW_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)}{M(n+1)} \quad (4)$$

donde  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$ , ...  $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$  y  $M$  es el supremo (la menor de las cotas superiores) de la función.  $CW \int_a^b f(x)dx$  se denomina la integral de Cavalieri-Wallis o integral  $CW$  de la función  $f$  definida en el intervalo  $[a, b]$ .

Obsérvese que, puesto que  $f$  está acotada,  $M = f_{\max}$  es el valor máximo de la función en el intervalo  $[a, b]$ . En el caso de una función polinómica positiva arbitraria  $f(x)$  en  $[a, b]$ , la integral  $CW$  es igual a:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=n} f\left(a + \frac{(b-a)}{n} i\right)}{f_{\max}(n+1)} = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{f_{\max}(n+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(b-a)f_{\max}} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n} \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{f_{\max}(n+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)A_r} R_n = \frac{A_f}{A_r} \end{aligned} \quad (5)$$

$A_r = (b - a) \times f_{\max}$  es el área del rectángulo con la base  $(b - a)$  y la altura  $f_{\max}$  (figura 1).

El primer término de la ecuación (5) es proporcional al cociente de dos indivisibles simples correspondientes, uno de cada región, que desaparece en el paso al límite. En Prabhu (Prabhu et al., 2004), se muestra que la diferencia entre la integral de Cavalieri-Wallis y la integral de Riemann es la diferencia de un invisible.

Obsérvese que el factor constante  $f_{\max}$  no influye en el paso al límite. Geométricamente, refleja el hecho de que la integral  $CW$ , establecida por (5), es el cociente del área de la región dividida por el área del rectángulo de referencia con una base igual al dominio de la función y con la altura  $M$ . En ocasiones resulta útil normalizar ese factor en la definición, definiéndolo como igual a 1; geométricamente, ello significa que el rectángulo de referencia tiene una altura de 1. En ese caso, la integral  $CW$  adquiere una nueva interpretación de la altura promedio de la función, un importante componente de la integral de Porter-Wallis, que se define a continuación.

**Definición 2. La integral de Porter-Wallis**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y, para cada  $n$ , defínase la suma aproximada de la altura promedio:

$$\text{altura promedio } n(f) = \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i)}{(n+1)} = PW_n(f) \quad (6)$$

donde  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$ , ...  $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$ .

$$PW \int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} PW_n(f) = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \quad (7)$$

$PW \int_a^b f(x)dx$  se denomina integral de Porter-Wallis o integral  $PW$  de la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ .

**Obsérvese** la distinción entre las dos integrales antes definidas. La integral  $PW$  calcula el área de la región en consideración y el límite real utilizado en el cálculo, esto es, la altura promedio de la región. Por otra parte, la integral  $CW$  calcula el cociente del área de la región dividida por el área del rectángulo delimitante.

**Obsérvese** otra distinción importante entre las dos integrales. En el primer caso, se utiliza la suma de los cocientes, mientras que, en el segundo caso, se utiliza el concepto estadístico del promedio.

**Obsérvese** que, desde el punto de vista de las matemáticas modernas, la claridad conceptual y de cálculo de la integral  $PW$  hace de ella una herramienta útil y que ha sido utilizada en esta serie en lugar de la integral  $CW$ . De ahí, tenemos que:

$$\begin{aligned} PW \int_a^b f(x)dx &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} PW_n(f) = (b-a) f_{\max} \lim_{n \rightarrow \infty} CW_n(f) \\ &= A_r \times CW \int_a^b f(x)dx \end{aligned} \quad (8)$$

En la siguiente sección se muestra que la integral  $PW$  es el producto del valor promedio de los valores equidistantes específicamente seleccionados de la función y de la longitud del intervalo. De esa manera, se obtiene una nueva definición del área de una región irregular, definición que es intuitiva, simple y satisfecha por regiones geométricas regulares (véase la sección 5).

## ALTURA PROMEDIO Y ÁREA

El concepto que surge de la altura promedio es el fundamento tanto de la integral  $PW$  como de la integral  $CW$ . Cuando se multiplica por la longitud del intervalo, su resultado es el área en la forma de la integral  $PW$ ; cuando se divide por  $M$ , el supremo (la menor de las cotas superiores) de la función, su resultado es el cociente del área en la forma de la integral  $CW$ . Dado que es la constante [invariante] de la transformación de dilatación no homogénea, es necesario que, de acuerdo con el programa Erlangen de Klein, se convierta en el centro de la atención de los estudios futuros. En seguida demostramos lo razonable del concepto.

### Definición 3

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada:

$$\text{altura promedio} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i)}{n+1} \quad (9)$$

donde  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$ , ...  $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$ .

### Definición 4

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada:

$$\text{área } (b-a) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i)}{n+1} \quad (10)$$

donde  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$ , ...  $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$ ,

que es, desde luego, la integral de Porter-Wallis.

A continuación se presenta el cálculo de las áreas de las figuras geométricas comunes, utilizando la nueva definición y demostrando lo razonable del enfoque.

### 1) Rectángulo

Considérese un rectángulo con dos lados a lo largo de ejes positivos, con vértices en el origen,  $(a, 0)$ ,  $(a, b)$  y  $(0, b)$ . La altura del rectángulo es de  $b$  unidades y se representa la función de esa altura como  $f(x) = b$ ,  $0 \leq x \leq a$ . De acuerdo con nuestra nueva definición, la altura promedio es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)b}{n+1} = b$$

$$\text{Área} = \text{ancho} \times \text{altura promedio} = a \times b$$

Obsérvese que  $x_i = 0 + \frac{ai}{n} = \frac{ai}{n}$  en el cálculo anterior.

### 2) Triángulo

Considérese un triángulo que conecta los puntos  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  y  $(a, b)$ . La función de la altura es  $f(x) = \frac{b}{a}x$ ,  $0 \leq x \leq a$  y para  $0 \leq i \leq n$ :

$$x_i = 0 + \frac{ai}{n} = \frac{ai}{n}$$

y  $f(x)_i = \frac{b}{a} \times \frac{ai}{n} = \frac{bi}{n}$ . La altura promedio es

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{bi}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n(n+1)} \sum_{i=0}^n i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Área} = \text{ancho} \times \text{altura promedio} = a \frac{b}{2}$$

### 3) Trapecio

Considérese un trapecio con las alturas  $a$  y  $b$  y la base  $e$ , como se muestra en la siguiente figura.

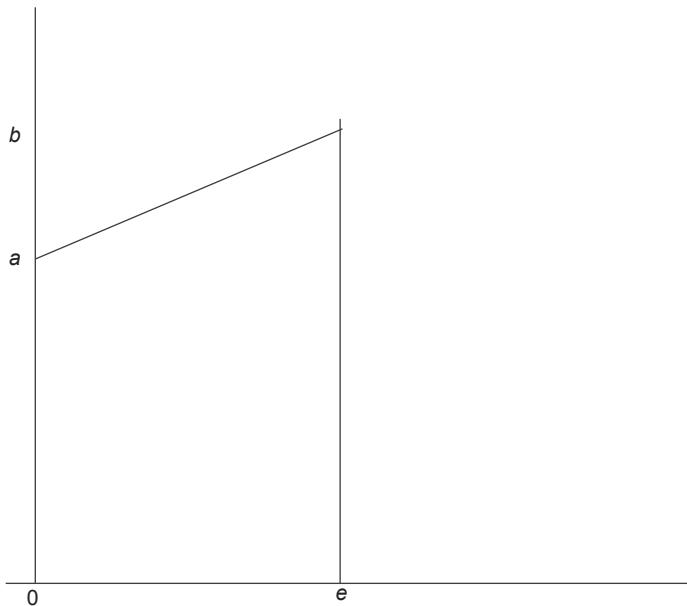


Figura 2

La altura promedio de este trapecio es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i)}{n+1}$$

donde  $x_i = \frac{ei}{n}$

$$f(x_i) = f\left(\frac{ei}{n}\right)$$

Ahora:

$$f(x) = \left(\frac{b-a}{e}\right)x + a$$

$$f(x_i) = \left( \frac{b-a}{n} \right) i + a$$

Entonces, la altura promedio del trapecio es:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} PW_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{(b-a)i + a}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b-a}{n} \frac{n(n+1)}{2} + a(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{b-a}{2} + a\end{aligned}$$

Por consiguiente, el área del trapecio es:

$$\begin{aligned}\text{área} &= e \left( \frac{b-a}{2} + a \right) \\ &= e \times \frac{(b+a)}{2}\end{aligned}$$

Cuando  $a = 0$ , se obtiene un triángulo ortogonal cuya fórmula para el área implica el promedio entre las alturas 0 y  $b$ .

#### 4) Función potencia

Considérese la función  $f(x) = x^p$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Encuéntrese el área delimitada por la curva  $y$  sobre el eje de las  $x$ . La altura promedio es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left( \frac{i}{n} \right)^p = \frac{1}{p+1}$$

Nota: Se trata de la fórmula de Wallis, interpolada en el último paso del cálculo anterior, la cual permite calcular las sumas de las potencias de los enteros en el caso de cualquier entero positivo  $p$ .

$$\text{Por ende, área} = (\text{ancho}) \times (\text{altura promedio}) = (1-0) \left( \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p+1}.$$

## LAS IMPLICACIONES MATEMÁTICAS

Obsérvese que, en el caso de una función acotada  $f(x)$  con un dominio  $[0, 1]$ , la integral PW emplea fundamentalmente sólo el subconjunto de números racionales en  $[0, 1]$  (o, más bien, un subconjunto commensurable de  $[0, 1]$ ), que tiene una medida de Lebesgue de 0. Es intrigante que ese conjunto de medida de Lebesgue 0 posea información sobre el área de la región en  $[0, 1]$  limitada por la función  $y = f(x)$  y las líneas  $y = f(0)$  e  $y = f(1)$ , puesto que, de acuerdo con las matemáticas clásicas, el área/medida de tal región es sustentada por la parte no commensurable del intervalo unidad y no por el conjunto commensurable de números racionales. Si trasladamos el intervalo de integración de tal manera que los puntos finales sean números irracionales, surge un problema interesante.

Volvamos nuestra atención ahora a la integrabilidad de CW y PW.

### Teorema

*La clase de funciones integrables CW y PW incluye la clase de funciones Riemann integrables.*

### Prueba

Sea  $f$  una función Riemann integrable en un intervalo compacto, digamos  $[0, 1]$ . Sea  $M$  la mínima cota superior de  $f$  en  $[0, 1]$ . Entonces, podemos demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M \times CW_n(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(f)$ .

Dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(f)$  existe y es igual a  $\int_0^1 f(x)dx$ , entonces el  $\lim_{n \rightarrow \infty} CW_n(f)$  también existe y es igual a:

$$\frac{\int_0^1 f(x)dx}{M}$$

Resta demostrar cómo se establece la correspondencia entre  $CW_n$  y  $R_{n+1}$ .

Considérese la partición para las dos integrales como sigue. La partición utilizada para calcular la integral CW es la malla de tamaño  $\frac{1}{n}$  y, en esa partición, las alturas  $n + 1$  se calculan en los puntos mostrados a continuación en

el primer renglón. En el siguiente renglón, considérese una partición de malla tamaño  $\frac{1}{n+1}$  y, para cada uno de esos subintervalos, calcúlense las alturas para la suma de Riemann como sigue: para el primer intervalo,  $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ , utilizaremos la altura en 0, para el segundo intervalo,  $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right]$ , utilizaremos la altura calculada en  $\frac{1}{n}$ , etc.; y para el último intervalo,  $\left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+1}\right]$ , calcularemos la altura en  $\frac{n}{n}$ .

$$CW_n : 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

$$R_{n+1} : 0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n+1}{n+1}$$

Esta selección de puntos para evaluar la función  $f(x)$  para la suma de Riemann nos proporciona la correspondencia requerida  $M \times CW_n = R_{n+1}$ , de tal manera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1} = M \lim_{n \rightarrow \infty} CW_n$ . Por consiguiente, cada función Riemann integrable es  $CW$  y  $PW$  integrable [LQQD].

Obsérvese que no se cuenta con una condición necesaria y suficiente. Si una función es Riemann integrable, entonces todo límite de sumas de Riemann adecuadas dará la integral  $CW$ ; sin embargo, si una función es  $CW$  integrable, entonces sólo se está utilizando un límite en ciertos subconjuntos racionales de intervalos limitados y ello no es lo suficientemente general para demostrar que una función es Riemann integrable, es decir, surge una interrogante natural: ¿existe alguna función  $CW$  y  $PW$  integrable que no sea Riemann integrable? La respuesta es afirmativa.

## Ejemplo

Considérese la función de Dirichlet, la función característica de los números racionales.

$$f(x) = 1 \text{ si } \frac{p}{q} \text{ para los enteros } p, q, \text{ con } q \neq 0,$$

de lo contrario,  $f(x) = 0$ .

Se sabe que esta función no es Riemann integrable; sin embargo, *es PW integrable* con el valor 1! En realidad, dado que  $f(x) = 1$  para cada número racional y puesto que, para cada  $n$ ,  $PW_n$  se define en  $[0, 1]$  sólo sobre los números racionales,  $PW_n(f) = 1$ , de tal manera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} PW_n = 1$ .

El teorema fundamental del cálculo aplicado a la integral *PW*

*Si  $f'$  es continua en  $[a, b]$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales, entonces:*

$$PW \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \quad (8)$$

### Demostración

*f* es continua (ya que es diferenciable) en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y, por ende, es uniformemente continua.

Sea  $\{x_i : 0 \leq i \leq n\}$  una partición equidistante de  $[a, b]$ . Para  $n$  grande, dado que  $f'$  es uniformemente continua, para  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , se cumple que  $f'(x_i) \approx f'(t_i)$  para  $0 \leq i \leq n$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} PW \int_a^b f'(x)dx &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} PW_n(f') = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f'(x_i)}{(n+1)} \\ &\approx (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f'(t_i)}{(n+1)} \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\frac{b-a}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (f(b) - f(a)) \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

[LQJD].

**Obsérvese** que el teorema mencionado también se puede demostrar con la ayuda de la integral de Riemann, utilizando la ecuación (7). Para la función  $f'$  en el intervalo  $[a, b]$ , si  $PW(f')$  denota la integral  $PW$ ,  $R(f')$  denota la integral de Riemann y  $CW(f')$  denota la integral  $CW$ , entonces, por (7), tenemos:

$$PW(f') = A_r CW(f')$$

de donde:

$$PW(f') = A_r CW(f') = Ar \left( \frac{r(f')}{Ar} \right) = R(f') = f(b) - f(a).$$

## PARA DESHACER EL NUDO GORDIANO DEL PRINCIPIO DE CAVALIERI

Hasta aquí, nuestra exposición se ha basado en la reinterpretación de las fórmulas de Wallis (1). Volvemos ahora la atención al principio de Cavalieri y, en particular, a la paradoja de Cavalieri-Torricelli, cuyo análisis revelará una vez más el concepto de la altura promedio de la región irregular, que es fundamental en ambas integrales.

El principio de Cavalieri establece: dadas dos figuras planas  $l$  y  $k$  entre dos líneas paralelas, si cada sección paralela  $s_l$  de la figura  $l$  corresponde a una sección paralela  $s_k$  de la figura  $k$  y el cociente de sus longitudes  $\frac{s_l}{s_k} = r$  es constante para cada par, entonces el cociente de sus áreas  $\frac{A_l}{A_k}$  es el mismo.

Según Struik,

[Cavalieri] consideraba las áreas como la suma de indivisibles, los segmentos de línea de que está compuesta, y los volúmenes como la suma de áreas planas. Demostró cómo medir áreas planas y volúmenes sólidos mediante la comparación de los indivisibles de las primeras con los indivisibles de los segundos. Tomando los indivisibles paralelos unos a otros, Cavalieri llegó al principio que todavía se conoce con su nombre.

Sin embargo, el marco conceptual del principio de Cavalieri no establece explícitamente cómo seleccionar las líneas correspondientes, ambigüedad que

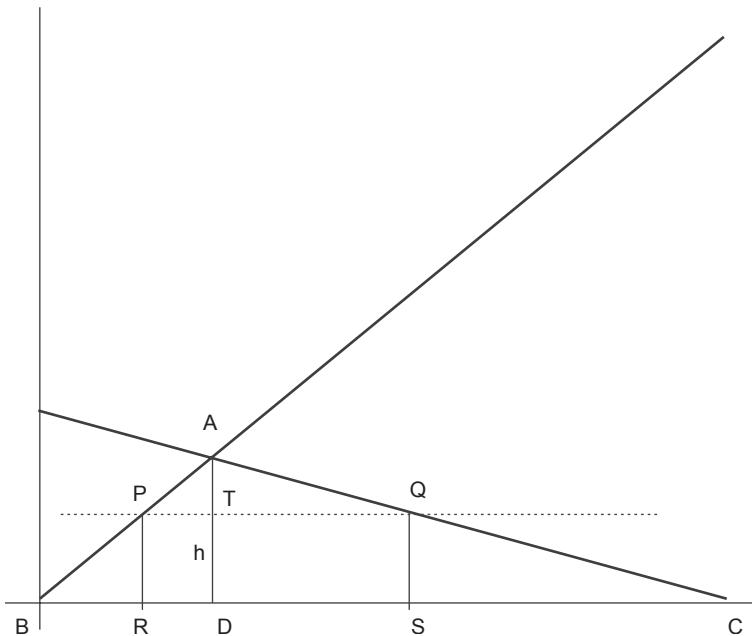


Figura 3

se expresa adecuadamente mediante la paradoja de Cavalieri-Torricelli (Struik, 1969). Con la ayuda de la figura 3, ilustramos las correspondencias para las que es válido el principio de Cavalieri y para las que no lo es.

En particular, supóngase que la correspondencia se define como: “la línea PT en el triángulo ABD corresponde a la línea TQ en el triángulo ACD”. Entonces, por el teorema de Tales, su cociente es constante e igual a  $BD:DC$ . Por lo demás, se puede demostrar fácilmente que las áreas también conservan el mismo cociente, lo cual confirma la validez del principio de Cavalieri.

Por otra parte, si definimos la correspondencia entre las líneas como: “la línea PR corresponde a la línea QS”, entonces su cociente es claramente 1:1; sin embargo, las áreas de los triángulos pertinentes no tienen el cociente 1:1. Tal es el contenido de la paradoja de Cavalieri-Torricelli. Cavalieri era muy consciente de la dificultad y, según Struik (1969), “resolvió la paradoja considerando las líneas PR y QS como hilos de una trama. Si, por ejemplo,  $AC = 2AB$  y si  $AB$  contiene 100 puntos, entonces  $AC$  contiene 200 y, por tanto, hay 100 hilos en  $ABD$  contra 200 hilos en  $ADC$ ”. Según Baron (1968), este razonamiento presupone

que el ancho de cada hilo es el mismo; Struik hace notar que Cavalieri utiliza en ese caso la noción de los números infinitesimales, antes bien que la de los números indivisibles. Aparentemente, Cavalieri era muy consciente de la profundidad de las dificultades conceptuales con que había topado, pero esperaba que “el deshacer ese nudo gordiano podía dejarse a un Alejandro posterior, según lo expresó” (Struik, 1969, p. 218).<sup>2</sup>

### UNA SEGUNDA SOLUCIÓN CONTEMPORÁNEA

Nosotros proponemos una segunda solución a la misma ecuación  $AC = 2AB$ , que no fue considerada por Cavalieri. En esa solución, tanto  $AC$  como  $AB$  contienen el mismo número de 100 puntos; sin embargo, el intervalo entre cualesquier dos líneas consecutivas en  $AC$  equivale a dos veces el intervalo entre los indivisibles correspondientes en  $AB$ . Esta solución introduce de manera muy natural la noción de la dilatación; los intervalos entre dos puntos correspondientes consecutivos en  $AC$  y  $AB$  están relacionados por una transformación de dilatación no homogénea en el plano  $(x, y) \rightarrow (ax, y)$ . Una constante [invariante] de la transformación de dilatación es la media aritmética de los indivisibles distribuidos equidistantemente. Por consiguiente, la información oculta en la correspondencia  $PT$ , a diferencia de la información contenida en la correspondencia  $PT \leftrightarrow TQ$ , es que la media aritmética de los indivisibles distribuidos equidistantemente en cada triángulo tiene el mismo valor, esto es,  $\frac{h}{2}$ .

La segunda solución revela que, para un tipo de correspondencias de líneas, el aspecto esencial del argumento no es la comparación de las áreas, sino la comparación de las alturas promedio de las figuras pertinentes. El principio de Cavalieri deriva el área de la suma de una cantidad ilimitada de líneas o indivisibles, lo cual lleva a problemas como la paradoja de Cavalieri-Torricelli. Dado que la integral  $PW$  utiliza las alturas promedio de la función, introduce el paso faltante en la transición de los indivisibles al área. La paradoja se resuelve mediante el promedio, en oposición a la “suma”. “Todas las líneas” son representadas como

---

<sup>2</sup> La historia del nudo gordiano tiene su origen en el periodo del siglo IV antes de nuestra era, en la época de Alejandro Magno, rey de Grecia y conquistador de Persia. De acuerdo con la leyenda, quien deshiciera el nudo donado al templo de Zeus por Gordio I llegaría a ser el rey de Asia Menor. Alejandro Magno cortó el nudo gordiano con su espada en el año 333 antes de nuestra era.

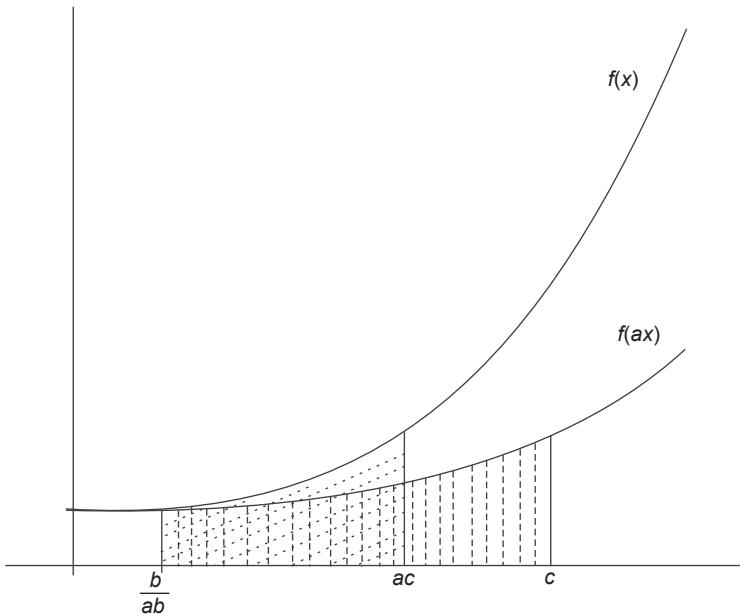


Figura 4

el límite del promedio de los indivisibles muestra tomados en un número finito de muchos puntos equidistantes.

Nos basaremos en estas ideas para demostrar directamente que la integral CW es constante [invariante] en dilatación y, por tanto, que su valor es constante en los dos triángulos de la paradoja de Cavalieri-Torricelli.

### Lema

La integral de Cavalieri-Wallis es invariante con respecto a las dilataciones,  $(x, y) \rightarrow (ax, y)$ ,  $a \neq 0$ .

$$CW \int_{ab}^{ac} f(x) dx = CW \int_b^c f(ax) dx$$

(Prabhu *et al.*, 2004).

Obsérvese la diferencia con el hecho de que la integral de Riemann no es invariante en esta situación  $\int_{ab}^{ac} f(x) dx = a \int_b^c f(ax) dx$  (Wildberger, 2002).

## Prueba

$$CW \int_{ab}^{ac} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i)}{(n+1)f(ac)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f\left(\frac{(ac-ab)i}{n}\right)}{(n+1)f(ac)}$$

donde  $x_i = \frac{(ac-ab)i}{n}$

También:

$$CW \int_b^c f(ax)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f(ax_i)}{(n+1)f(c)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n f\left(a\frac{(c-b)i}{n}\right)}{(n+1)f(c)}$$

donde  $x_i = \frac{(c-b)i}{n}$

Obsérvese que las dos sumas son iguales debido a que, por dilatación  $(x, y) \rightarrow (ax, y)$ ,  $f(c) = f(ac)$ . LQDD.

Volviendo a la discusión de la paradoja de Cavalieri-Torricelli, compárense los triángulos ABD y ACD de la figura 3 con los triángulos POR y QOS de la figura 5, respectivamente. Los dos lados AB y AC del triángulo ABC se reconsideran como la función  $f(x)$  y su dilatación,  $f(ax)$ , en la figura 5, estableciendo una correspondencia entre dichos triángulos en las dos figuras; a saber: el triángulo POR corresponde al triángulo ABD y el triángulo QOS corresponde al triángulo ACD. Obsérvese que el lado AC del triángulo se traslada primero para que pase a través del origen y luego se refleja en el eje vertical para obtener la nueva figura que sigue (figura 5).

En particular, considérese que el lado del triángulo que pasa a través del origen sea:

$$f(x) = mx$$

y el otro lado inclinado del triángulo sea:

$$g(x) = m_1x + b$$

En el primer paso trasladamos  $g(x)$ , de tal manera que pase por el origen, traslación denotada por:

$$g_1(x) = m_1x$$

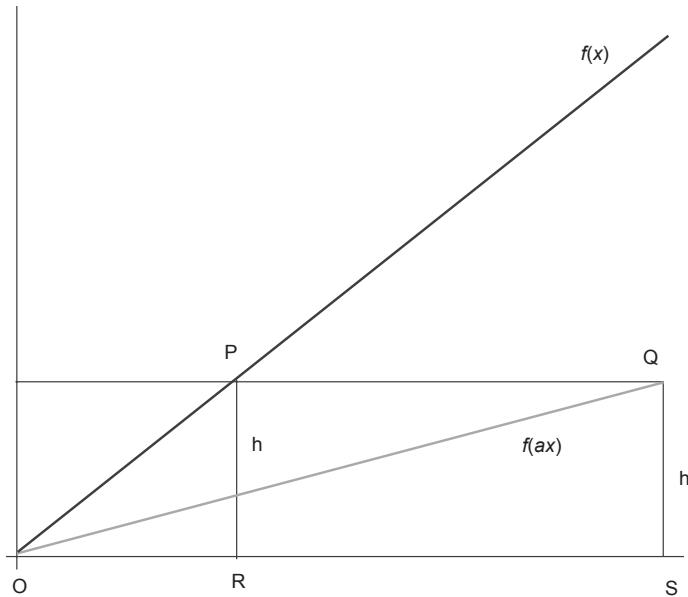


Figura 5

En el siguiente paso, reflejamos  $g_1(x)$  sobre el eje vertical para obtener:

$$g_2(x) = -m_1 x$$

Afirmación:  $g_2(x)$  es una dilatación de  $f(x)$

$$g_2(x) = -m_1 x = \left( \frac{-m_1}{m} \right) mx = \left( \frac{-m_1}{m} \right) f(x) = f(ax)$$

con una dilatación constante  $a = \frac{-m_1}{m}$

De donde, de acuerdo con el lema mencionado, tenemos:

$$CW \int_0^R f(x) dx = CW \int_0^S f(ax) dx = \frac{1}{2}$$

por (11), sección 6.

## ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN Y CONTRIBUCIÓN AL CAMPO DE LA EDUCACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

La teoría de Vygostky sugiere que el lenguaje es un medio de evaluación; consecuentemente, nos valemos extensamente de la “senda” que siguen los estudiantes en sus ensayos, senda cuya función, desde el punto de vista de la evaluación, es proporcionar indicios de la dinámica del pensamiento del estudiante, la coherencia de los conceptos y la profundidad y coordinación de su plan. Además de los ensayos matemáticos, la información incluye transcripciones de las entrevistas clínicas llevadas a cabo al final del periodo escolar, así como el método del grupo de control para evaluar el impacto de la nueva enseñanza en la comprensión que logre el estudiante del concepto normal de la integral definida y en lo cómodo que se sienta con dicho concepto. En el método del grupo control, la solución de problemas pertinentes en el examen final se emplea como la pauta de la efectividad.

### LOS RESULTADOS

Los resultados del proyecto poseen muchas dimensiones.

- 1) Se ofrecen pruebas afirmativas que responden a la interrogante de la investigación: ¿se fortalece en los estudiantes la comprensión del concepto de la integral definida con la introducción de la integral de Cavalieri-Wallis basada en los indivisibles, la interacción de dicha construcción con la integral normal de Riemann y la enseñanza que integra una y otra construcción?
- i) La colección de 11 ensayos del segundo semestre de Cálculo de primer año en un instituto técnico superior en la primavera de 2003 indica que todos y cada uno de los 11 estudiantes de la clase comprendieron cabalmente la construcción de Cavalieri-Wallis y su relación con el método de Riemann. Se entregó a los estudiantes una tarea de ensayo para describir su razonamiento y sus métodos de cálculo del volumen de la región obtenida rotando la región delimitada por  $y = x^2$ ,  $y = 1$  y  $x = 0$  en torno al eje de las  $y$ . Todos los estudiantes fueron claros en la diferencia entre los dos métodos y observaron la similitud de cálculo entre los dos, aun cuando cada uno tiene un significado operativo significativamente diferente. La simplicidad del empleo del valor promedio de la altura, que en el caso bidimensional reduce el pro-

blema al rectángulo trazado sobre la base, multiplicada por la altura promedio obtenida a partir del proceso de aproximación/limitación, o, en el caso tridimensional, al cilindro con el radio promedio obtenido a partir del proceso similar, está expresada inequívocamente en todos los ensayos (y en muchas entrevistas clínicas). En su ensayo, uno de los estudiantes afirma: “Después utilicé el radio promedio para trazar una figura conocida, un cilindro en este caso, y recurrió a la geometría básica para calcular el volumen aproximado del sólido”.

- ii) A los estudiantes de un grupo experimental y de uno de control se les planteó el siguiente problema: Sea

$$\int_0^3 (x^2 + 1)dx$$

Muestre todo el trabajo desarrollado para lo siguiente y haga un dibujo para ilustrar su representación geométrica.

- a) ¿Qué representa geométricamente la integral definida mencionada?
- b) Utilice la definición para evaluar la integral definida mencionada.
- c) Aplique el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida.

El problema fue uno de 15 de un examen final de tres horas para el curso. Había 14 estudiantes en el grupo experimental y 21 en el grupo control en un instituto comunitario urbano. El grupo control recibió clases de los miembros experimentados del cuerpo docente de la facultad de matemáticas, que introdujeron el límite de una secuencia como requisito para la integral definida, pero no introdujeron la construcción de Porter-Wallis. Los estudiantes del grupo experimental recibieron instrucciones de elegir cualquiera de las dos construcciones con la que se sintieran cómodos.

	% que aplicó la geometría	% obtenido de resultados geométricos correctos	% que aplicó correctamente el teorema fundamental del cálculo
$N = 14$ grupo experimental	100	43	57
$N = 21$ grupo tradicional	52	10	38

Los resultados tabulados muestran que la inclusión de la construcción *PW* como paso para llegar a la construcción de Riemann realmente fue útil para los estudiantes en lo que respecta a la manera de abordar la integral definida, así como en lo que se refiere al modo de abordarla exitosamente, en comparación con la efectividad de la enseñanza normal limitada a la integral de Riemann. La comparación de los resultados de *ii)* con los de *i)* sugiere que la nueva construcción podría ser más efectiva en su función de apoyo para los estudiantes de los institutos comunitarios urbanos que para los de los institutos técnicos con una carrera de cuatro años.

- 2) Hemos desarrollado las dos nuevas secuencias de enseñanza como la base de la Reforma del Cálculo de Segunda Generación (Prabhu *et al.*, 2004; Czarnocha y Prabhu, 2006), abordando los límites de las secuencias y los elementos lógicos requeridos para ello y la integral definida en Cálculo de primer año (Czarnocha y Prabhu, *NSF Final Report*, 2006).
- 3) La transformación de la metodología del Experimento de Enseñanza de RUMEC en el enfoque bidireccional de la práctica para la investigación y la investigación para la práctica se expandió y formalizó como el Modelo NYC de Enseñanza-Investigación (Prabhu y Czarnocha, 2006). La metodología, que es particularmente efectiva para el proceso del mejoramiento cíclico de la enseñanza en el salón de clases, se ha utilizado exitosamente en experimentos de enseñanza en Estados Unidos, Polonia y la India.
- 4) Hemos proporcionado tres componentes diferentes de la respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cuál es el proceso de transformación y desarrollo de la intuición de las líneas (los indivisibles) en un concepto matemático preciso?

En otras palabras, la pregunta de investigación se refiere a la trayectoria hipotética de la enseñanza (Simón, 1995), que parte de la intuición de las líneas como pertenecientes al concepto del área y desemboca en el concepto “científico” del cálculo. Podemos proporcionar tres fases de su desarrollo: el primer paso temprano del desarrollo fue notado por Oughthred y Mitchelmore (Oughthred y Mitchelmore 2000), quienes observaron que

...algunos niños persistían en atribuir a la longitud la cualidad de llenar espacios: median el área de un cuadrado mediante el cálculo de la longitud de uno de los lados, movían la regla y sumaban la longitud del lado a la medida

previa, y así sucesivamente, hasta terminar ese proceso repetitivo en algún momento arbitrario.

Mientras que Oughthred y Mitchelmore interpretan esos resultados como la confusión del área con el lado medido varias veces, nosotros sugerimos que esos actos de los niños podrían ser motivados por la intuición de los indivisibles/las líneas como los componentes básicos del área.

Un estudiante de Cálculo de primer año de una importante universidad estadounidense del oeste medio hace explícito el segundo paso del desarrollo de la trayectoria hipotética de la enseñanza y el aprendizaje cuando está tratando de entender la suma de Riemann (Czarnocha *et al.*, 2001). Obsérvese la similitud de la actividad mental de la medición y la suma de la longitud de las líneas que componen el área delimitada por la figura con la actividad física de los niños antes descrita. En lugar de medir un número finito de líneas, el estudiante de cálculo imagina la medición de un número infinito de ellas, seguida por la suma de un conjunto infinito de números: sus longitudes.

Citamos un fragmento de la entrevista clínica, acompañado del análisis de la zona de desarrollo próximo del estudiante que indica las conexiones faltantes del plan:

- [1] *E5*: Pues, ah, bueno, la suma de Riemann lo descompone en  $n$ , un número infinito
- [2] de rectángulos. Y es difícil aplicar la teoría que lo sustenta. Es difícil para mí.
- [3] Ah... básicamente, la suma de Riemann era sólo el total del área de un número de
- [4] rectángulos donde siempre se tenía un número con cierto error, porque no
- [5] concordaban directamente con cada punto.
- [6] *Entrevistador*: ¿Cómo obtendría el área...
- [7] *E5*: Ah...
- [8] *Entrevistador*: ...más aproximada posible?
- [9] *E5*: El área más aproximada posible sería tomando la longitud de un segmento de línea
- [10] del eje de las  $x$  a la función misma. Y eso le daría un número infinitamente
- [11] grande de... muchas áreas que sumar. Y eso es lo que le da la integral definida.
- [12] Sólo le permite, ¿sabe?, poder trabajar básicamente con un rectángulo
- [13] sin ancho, sólo altura. Así que, se calcula, ¿sabe?, la longitud de un
- [14] segmento de línea. Así que se suma la longitud de todos y cada uno de los segmentos de línea
- [15] y, ah, se obtiene un área. *[Pausa]* Se puede, estoy tratando de recordar la teoría
- [16] que sustenta la manera en que la integral definida le da la suma de los rectángulos. No
- [17] recuerdo eso. Ah...

Las líneas 1 y 2 revelan una fractura en la zona de desarrollo próximo del estudiante entre los términos finitos de la secuencia de las sumas parciales de Riemann y su límite (cuando  $n \rightarrow \infty$ ), el área delimitada por la curva. En este caso, la noción intuitiva de la suma del área de un número finito de muchos rectángulos, que se aproxima al área buscada, no ha sido adecuadamente desarrollada (en el sentido de Vygostky antes mencionado) en la noción precisa del límite para tener en cuenta y dar sustento a la noción “científica” de la integral definida. Vygostky confirma que “es esencial llevar primero los conceptos espontáneos a cierto grado de desarrollo que garantice que los conceptos científicos [el límite, en este caso] se encuentren realmente justo sobre los espontáneos” (p. 195). Debido a esa falta de desarrollo, el estudiante construye la noción de la suma infinita.

Las líneas 4, 5 y 9 revelan una de las fuentes espontáneas de la intuición de las líneas. El estudiante las considera, correctamente, como carentes del error de aproximación, que todo rectángulo delimitante o incluyente contiene. Nuestro experimento piloto, llevado a cabo en el otoño de 2000, reveló que los estudiantes que se preocupan por el ajuste exacto, la medida exacta de la línea, asimilan la técnica de los indivisibles muy rápidamente.

En las líneas 10 y 11, el estudiante integra la idea de las líneas (indivisibles) con la suma infinita para obtener el área. Una vez más, la suma total de las líneas es infinita debido a la falta del concepto adecuado del límite. En la línea 11, incorpora, superficialmente en ese momento, la integración de los indivisibles al plan de la integral definida.

Para facilitar la tercera fase de la trayectoria hipotética del desarrollo en la transformación de la intuición de lo indivisible en un concepto científico, hemos tomado la noción del estudiante de la suma infinita de longitudes de líneas y, con la ayuda de las fórmulas de Wallis, la hemos transformado en las integrales definidas de Porter-Wallis y Cavalieri-Wallis, cuyas matemáticas ya fueron abordadas en secciones anteriores. La indicación de que cierto número de estudiantes haya preferido la integral de Porter-Wallis a la construcción de Riemann para determinar el área delimitada por la curva dada sugiere que esos estudiantes asimilaron el desarrollo propuesto del concepto.

### LAS VOCES DEL SALÓN DE CLASES

La integral de Porter-Wallis fue introducida en la enseñanza en el contexto del experimento de enseñanza financiado por la subvención NSF/ROLE # 0126141, Introducción de los Indivisibles en la Enseñanza del Cálculo. Las respuestas de los estudiantes, que confirman la hipótesis del proyecto de que entre los estudiantes existen dos intuiciones del concepto del área, pueden agruparse de acuerdo con esas intuiciones. Los pasajes de los ensayos de los estudiantes citados a continuación indican que, para algunos de ellos, la integral *PW* es más simple en los cálculos y, para algunos otros, que conceptualmente es más significativa que la construcción de Riemann; para otros más, aquellos que entienden que el área se ajusta a los cuadrados unitarios, la construcción de Riemann es más natural. La integral *PW*, con un número reducido de variables cambiantes y su relación directa con el concepto intuitivo del promedio, se presenta como el sustento de la integral de Riemann para el Cálculo de primer año.

En el caso de las funciones continuas limitadas con un número finito de discontinuidades, la noción de la integración de Porter-Wallis coincide con la integración de Riemann y es más simple de derivar. La mayoría de los libros de texto y de los docentes introducen las sumas de Riemann con una ilustración geométrica de una serie de rectángulos verticales de anchos diferentes y alturas diferentes. La ilustración ayuda a entender una suma de Riemann, pero no mucho en el proceso del límite. Tanto el número de rectángulos como los anchos variantes y las alturas variantes son cambiantes y contribuyen a la confusión del estudiante. La integral de Porter-Wallis, que implica únicamente los valores de la función en puntos equidistantes y su promedio, simplifica significativamente ese problema; además, la definición de la integración de Riemann requiere no sólo un límite que incluye dos variables sino también el empleo de redes. Existe la tendencia a “deslizarse” sobre la compleja naturaleza de esa definición, especialmente debido a que su potencial completo nunca ha sido utilizado en el curso (Knisley, 1997); por lo demás, la integral *PW* implica menos variables en el proceso de obtención del límite, emplea el límite de secuencias en lugar del de redes y, puesto que:

- a) no emplea la noción de aproximación al área, y
- b) la altura indivisible con ancho 0 se ajusta exactamente al punto de la curva, los estudiantes consideran a menudo que la integral *PW* es “más exacta”.

Los pasajes de los estudiantes citados a continuación provienen de sus ensayos de matemáticas, cuyo objetivo era comparar los dos enfoques.

*E1:* Puedo decir que los dos métodos me parecen naturales, aunque el método de Riemann parece ser más complejo para mí. Las razones que tengo para decir eso son, primero: conocer dos métodos diferentes para calcular el área me ayudará a aprender más; por ejemplo: en el método de cálculo del área, el hecho de basarme primero en Riemann me ayuda a determinar si los rectángulos están delimitados por la curva (inscritos) o sobre ella (circunscritos), antes de aplicar el método correspondiente. El método de Porter-Wallis es menos complejo para mí, porque sólo tengo que aplicar una fórmula al cálculo del área; por lo tanto, puedo recordarlo más fácilmente.

*E2:* Me parece que el método de Porter-Wallis es más natural y fácil de aplicar que el de Riemann, porque tiene más sentido que, encontrando la altura promedio, finalmente llegue a encontrar el área delimitada por la curva. También es más fácil de calcular. No nos perdemos; pero con Riemann me pierdo muchas veces.

*E3:* Personalmente, prefiero el método de Riemann debido a los rectángulos visualmente compuestos, lo cual coincide con mi comprensión de lo que pasa, incluidas las funciones de la fórmula, etcétera. También siento que es más natural; lo básico de la integral de Riemann es encontrar las áreas más exactas (medición de las áreas) delimitadas por la curva y las fórmulas y los métodos satisfacen el objetivo.

*E4:* Al comparar los dos métodos, me parece que Riemann es mejor para el cálculo del área. Aunque los dos métodos deberían de arrojar fundamentalmente el mismo resultado, mi hipótesis es que el método de Riemann es más preciso. La razón es la siguiente: cuando se calcula el área de un rectángulo o de cualquier figura geométrica, se tienen las unidades como cuadrados unitarios; la idea es que debemos poder ajustarlas en los cuadrados de longitud y ancho de 1 unidad. El número de cuadrados es igual al área de la figura. Esto parece relacionarse con la idea que sustenta a la integral de Riemann. Por consiguiente, me parece que la integral de Riemann es un mejor método para calcular el área.

## CONCLUSIONES

Se concluye este artículo con algunas implicaciones más de los nuevos conceptos, al mismo tiempo que se hace notar su naturaleza poco común. Se ha mostrado un proceso mediante el cual el análisis de las entrevistas clínicas de los estudiantes centrado en la construcción de Riemann, combinado con la reinterpretación moderna de las fórmulas de Wallis, lleva a la formulación de nuevos conceptos matemáticos, las integrales de Cavalieri-Wallis y Porter-Wallis, y proporciona una nueva percepción de la naturaleza del principio de Cavalieri, algo que no sospechaba el autor de este artículo. La relación mutua entre esas integrales es muy interesante en sí misma. Por una parte, la integral de Cavalieri-Wallis permite calcular el cociente de las áreas, mientras que, por otra parte, la integral de Porter-Wallis permite calcular el área misma. Como resultado, la integral de Cavalieri-Wallis es constante [invariante] respecto a la dilatación, pero no así la integral de Porter-Wallis. Igualmente interesante es la función de la equidistancia. Mientras que la equidistancia de los indivisibles en la construcción original de Cavalieri se introduce a mano, por así decirlo, en el enfoque que se presenta en este artículo es esencial para la definición el significado y la construcción de la integral de Porter-Wallis. La formulación de la integral de Porter-Wallis motivó que se hiciera una nueva definición del área, definición en la que la partición equidistante de la base desempeña una función crítica. Si las distancias entre los puntos muestra no fuesen iguales, entonces la fórmula (10) no arrojaría la media aritmética de las alturas. Para poder explicar ese efecto, sería necesario introducir ponderaciones estadísticas para cada ordenada muestra de la suma. Además, la integral de Porter-Wallis simplifica la exposición de la integral definida en el cálculo y constituye un fundamento más sólido para la integral de Riemann, que es más compleja.

También resulta intrigante ponderar el descubrimiento del área, que se puede definir para un rectángulo cuya base es el conjunto de números racionales en el intervalo de unidades  $[0, 1]$  en el eje de las  $x$  y cuya altura es el intervalo continuo  $[0,1]$  en el eje de las  $y$ . Como antes se mencionó, el área medida con la ayuda de la medida de Lebesgue de un objeto de esas características es 0; sin embargo, el área medida con la ayuda de la integral de Porter-Wallis es 1. ¿Qué significa esa fascinante diferencia? ¿Qué nos dice respecto al concepto de un área en general? ¿Es el concepto típico de la medida de Lebesgue lo suficientemente rico como para sacar a la luz todas las propiedades de los números racionales? Además, ¿cuál es el análogo de la integral de Lebesgue en el contexto del

método Porter-Wallis? ¿Cuáles son las consecuencias matemáticas de la segunda solución propuesta para la paradoja Cavalieri-Torricelli? ¿Cuál es la función de la invariabilidad de dilatación de la nueva definición de la altura promedio de las regiones irregulares? Los estudiantes universitarios de matemáticas pueden abordar exitosamente estas nuevas interrogantes si se les da la oportunidad de lidiar con cuestiones fundamentales de las matemáticas, como la relación entre lo discreto y lo continuo, la relación entre el cociente y el promedio o el significado del concepto de área.

Deseamos extender las gracias a nuestros colegas Mohamed Messaoudene, Ivan Petrovic, Maria Psarelli, Alexander Vaninsky y Joe Johnson por sus aleccionadoras discusiones sobre el tema y por su contribución intelectual.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arquímedes (1957), *The Method Treating of Mechanical Problems*, Great Books of the Western World, Encyclopedia Britannica, Hutchins, R. M. (coord. en jefe), vol. 7, pp. 569-596.
- Asiala M. et al. (1996), "A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education Research II", en J. Kaput, A. Schoenfeld y E. Dubinsky (coords.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*, pp. 1-32.
- Baron, M. E. (1968), *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, Pergamon.
- Bergson, H. (1911), *The Cinematographical Mechanism of Thought and the Mechanistic Illusion - A Glance at the History of Systems - Real Becoming and False Evolutionism*, en *Creative Evolution*, trad. de Arthur Mitchell, H.D., Nueva York, Henry Holt, cap. 4, pp. 272-370.
- Boyer, C. (1968), *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, John Wiley, pp. 48-51.
- Cavalieri, B. (1635), *Geometria Indivisibilibus Continuorum. Nova Quadam Ratione Promota*, Bononiae, Typis Clementis Feronij.
- Clement, J. 2000, "Analysis of Clinical Interview: Foundation and Model Viability", en A.E. Kelly y J. Lesh, *Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey.
- Czarnocha, B., E. Dubinsky, S. Loch, V. Prabhu y D. Vidakowic (2001), "Conceptions of Area: In Students and in History", *College Mathematics Journal*, vol. 32, núm. 3.

- Czarnocha, B. y V. Prabhu (2002), *Introducing Indivisibles into Calculus Instruction*, Grant Proposal NSF-ROLE #0126141.
- \_\_\_\_\_(2004), *Design Experiment and Teaching-Research - Two Methodologies to Integrate Research and Practice*, Presentation, Proceedings of Epi-Steme-1, 13 al 17 de dic, Goa, India, Homi Bhabha Science Education Center.
- \_\_\_\_\_(2006), "Teaching-Research, NY City Model", *Dydaktyka Matematyki*, vol. 29.
- \_\_\_\_\_(2006), *NSF Final Report Introducing Indivisibles into Calculus Instruction*, Washington DC, NSF.
- \_\_\_\_\_(2006), *Indivisibles in Calculus Instruction - A TR-NYC Report of Second Generation Calculus Reform*, Presentation, Estambul, ICTM3.
- Elliot, J. (1991), *Action Research for Educational Change*, Buckingham Open University.
- Griffin, S., R. Case y A. Copodilupo (1995), "Teaching for Understanding: The Importance of Central Conceptual Structures in the Elementary Mathematics Curriculum", en A. McKeough, J. Lupart y J. Marini (coords.), *Teaching for Transfer*, New Jersey, Lawrence Erlbaum, p. 124.
- Knisley, J. (1997), "Calculus: A Modern Perspective", *The American Mathematical Monthly*, núm. 104, pp. 724-727.
- Lehrer, R., M. Jenkins y H. Osana (1998), "Longitudinal Study of Children's Reasoning about Space in Geometry", en R. Lehrer y D. Chazan (coords.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, Mahwah, NJ., Lawrence Erlbaum, pp. 137-167.
- Núñez, R. E. y G. Lakoff (1998), "What Did Weierstrass Really Define? The Cognitive Structure of Natural and E-d Continuity", *Mathematical Cognition*, vol. 4, núm. 2, pp. 85-101.
- Oughthred y Mitchelmore (2000), "Young Children's Intuitive Understanding of the Rectangular Area Measurement", *JRME*, vol. 31, núm. 2, pp. 144-167.
- Prabhu, V., J. Porter y B. Czarnocha (2004), *Research into Learning Calculus, History of Mathematics and Mathematical Analysis*, ICME-10, e-proceedings.
- Prabhu, V. y B. Czarnocha (2006), *After the Wave - Building Capacity among the Teacher-Action Researchers in Rural Tamil Nadu*, Presentation, Epi-Steme-2, India, Homi Bhabha Science Education Center.
- Simon, M. (1995), "Reconstructing Mathematical Pedagogy from a Constructive Perspective", *JRME*, vol. 26, pp. 114-125.
- Skemp, R. R. (1987), *Psychology of Learning Mathematics*, Hillsday, New Jersey, Lawrence Erlbaum.

- Struik, D. J. (1969), *A Source Book in Mathematics 1200-1800*, Cambridge, Harvard University Press, p. 214.
- Vygotsky, L. (1986), *Thought and Language*, Cambridge, MIT Press.
- Wallis, J. (1656), *Arithmetica Infinitorum*, Typis Leon Lichfield Academiae Typographi, Oxonii.
- Wildberger, N. J. (2002), “A New Proof of Cavalieri’s Quadrature Formula”, *American Mathematical Monthly*, núm. 109, p. 843.

## DATOS DE LOS AUTORES

### **Vrunda Prabhu**

Bronx Community College, Nueva York, Estados Unidos  
vrunda.prabhu@bcc.cuny.edu

### **Bronislaw Czarnocha**

Hostos Community College, Nueva York, Estados Unidos  
bczarnocha@hostos.cuny.edu