La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes

José María Gavilán Izquierdo, María Mercedes García Blanco y Salvador Llinares Ciscar

Resumen: En este trabajo introducimos la idea "modelación de la descomposición genética de una noción" para explicar la práctica del profesor de matemáticas desde el punto de vista de la construcción del conocimiento matemático (aprendizaje) que parece potenciar en los estudiantes. Esta idea se usa para analizar la práctica de dos profesores de matemáticas de bachillerato (16-18 años) cuando introducen el concepto de derivada. El análisis permite identificar los principios que fundamentan la práctica del profesor. Finalmente se reflexiona sobre la complementariedad de la idea de "modelación de la descomposición genética de una noción" en relación con las diferentes aproximaciones generadas en educación matemática dirigidas a explicar la práctica del profesor.

Palabras clave: práctica del profesor, mecanismo de construcción, aprendizaje, modelación de la descomposición genética, derivada.

Abstract: In this paper we introduce the construct "modelling of the genetic decomposition of a notion" to explain mathematic teacher's practice from the point of view of the construction of mathematical knowledge (learning) that seems to develop in the students. This construct is used to analyse two teachers' teaching when introducing the notion of derivative to high school students (16-18 years). The results of the analysis allowed characterizing the principles on which the teacher draw on his/her practice. Finally it is meditated about the complementarity of the idea of "modelling of the genetic decomposition of a notion" in relation to the different approaches generated in mathematical education directed to explain the teacher's practice.

Keywords: teacher's practice, mechanism of construction, learning, modelling of the genetic decomposition, derivative.

Fecha de recepción: 1 de julio de 2007.

DIFERENTES MANERAS DE APROXIMARNOS AL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR

La importancia de las investigaciones sobre práctica del profesor ha sido señalada y abordada por numerosos investigadores desde distintos enfoques teóricos, con el objeto de describir y proponer modelos que permitan explicarla (Llinares, 2000; Escudero y Sánchez, 1999a, 1999b, 2002; Franke *et al.*, 2007; Laborde y Perrin-Glorian, 2005; Ponte y Chapman, 2006; Schoenfeld, 1998; Simon *et al.*, 2000). Desde la teoría antropológica de lo didáctico Barbé *et al.* (2005) señalan que las maneras de enseñar (las praxeologías didácticas) son de naturaleza espontánea y que es posible describir lo "práctico", pero que hay dificultad para abordar lo que justifica la componente teórica, ya que no hay modelos didácticos teóricos suficientemente desarrollados. La generación de un modelo didáctico teórico que justifique una determinada práctica del profesor de matemáticas es, desde este punto de vista, uno de los objetivos de la investigación centrada en la práctica del profesor. Por otra parte, desde un enfoque sociocultural de la práctica, la actividad del profesor viene dada por la manera en la que éste crea las condiciones para que los estudiantes se introduzcan en una comunidad de práctica matemática. Desde este punto de vista, resulta de interés identificar la manera en la que los profesores usan y justifican los instrumentos de la práctica para conseguir su objetivo, ya que permite determinar la manera en la que usa y emplea el discurso para conseguir ese objetivo (Llinares, 2000; Meira, 1998).

Desde planteamientos cognitivos, la práctica del profesor "incluye no sólo lo que los profesores hacen, sino también lo que piensan sobre lo que hacen y sus motivaciones para actuar de esa manera" (Simon *et al.*, 2000, p. 581) englobando sus ideas sobre las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Simon *et al.*, 2000; Tzur *et al.*, 2001). Desde este punto de vista, se resalta el hecho de que es posible relacionar los objetivos de aprendizaje y las actividades del profesor a través de la caracterización de "trayectorias hipotéticas de aprendizaje". Estas trayectorias hipotéticas de aprendizaje permiten al profesor realizar predicciones sobre la manera en que los estudiantes pueden aprender al realizar las tareas (Simon, 1995). Por otra parte, Schoenfeld y sus colaboradores (Schoenfeld, 1999; Schoenfeld *et al.*, 1999) proporcionan modelos de las acciones y decisiones de los profesores en el aula para poder describir y explicar la enseñanza en contexto. El modelo cognitivo propuesto considera el conocimiento, las creencias y los fines del profesor como aspectos relevantes. El modelo presupone que durante la práctica se activan determinadas metas, conocimientos y creencias que guían la toma de decisiones del profesor en el aula. Desde esta perspectiva, se considera relevante caracterizar los planes de acción del profesor, lo que acontece en el aula y la manera en la que el profesor espera que se desarrolle la lección ("imagen de la lección") (Schoenfeld *et al.*, 1999).

La relación entre la práctica del profesor y la manera de entender el aprendizaje de los alumnos ha sido subrayada de diferentes maneras en las distintas aproximaciones y con diversos grados de explicitación. Desde este punto de vista, esta línea de investigación puede avanzar en la medida en la que el análisis de la práctica del profesor se vincule en cierta medida a una determinada manera de entender el aprendizaje de los estudiantes. Así, por ejemplo, se pretende a través de la idea de "trayectoria hipotética de aprendizaje" (Simon *et al.*, 2000) o de la idea de "rutas cognitivas" (Robert y Rogalski, 2005). Sin embargo, en este momento es necesario seguir avanzando en la articulación de aproximaciones a la interpretación de la práctica del profesor de matemáticas que expliciten claramente cómo se entiende la manera en la que los estudiantes construyen el conocimiento matemático. Es decir, la manera de interpretar la práctica del profesor desde el aprendizaje potencial que puede generar en sus estudiantes. En este ámbito es en el que proponemos, en este trabajo, el instrumento teórico "modelación de la descomposición genética", en el sentido de que explicita más claramente el modelo usado para explicar el aprendizaje de los alumnos cuando se modela la práctica del profesor. En este sentido, la investigación realizada (Gavilán, 2005) tiene como foco de atención la práctica del profesor y se subraya la necesidad de generar modelos teóricos que ayuden a entenderla.

Esta línea de investigación intenta complementar otras iniciativas que se centran en describir la eficacia de determinadas aproximaciones a la instrucción considerando el nivel de logros de los estudiantes, así como las investigaciones que tienen como foco el desarrollo de materiales curriculares considerando un determinado modelo de aprendizaje de los estudiantes. La importancia de esta línea de investigación radica en asumir que la práctica del profesor no es una "variable transparente" en el desarrollo de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

LA NOCIÓN DE PRÁCTICA DEL PROFESOR Y EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

La práctica del profesor la vemos "como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada" (Llinares, 2000, p. 110). Para la realización de las tareas, el profesor recurre a un conjunto de instrumentos, como son los problemas que propone, el discurso que potencia en el aula, los materiales didácticos que puede usar, los medios tecnológicos, etc. ... Por otra parte, cuando un profesor realiza su labor en el aula, tiene un objetivo: "que sus estudiantes construyan conocimiento matemático". Por tanto, el análisis de la práctica del profesor debe considerar la manera en la que parece potenciar *la construcción de conocimiento matemático en sus estudiantes*. Este significado de la idea de práctica hace hincapié en la relación entre la enseñanza y el aprendizaje. Sin embargo, esta línea de investigación no asume que, una vez descrita una determinada práctica del profesor, ésta pueda garantizar un nivel determinado de eficacia en los estudiantes. Precisamente el hecho de que las interacciones en el aula impliquen autores (profesores y estudiantes) con unos determinados instrumentos (los problemas) en un contexto fijado (el aula) subraya el aspecto social del fenómeno que se quiere estudiar. Es decir, el objetivo no es identificar unas determinadas prácticas que aseguren que los alumnos aprenderán de una determinada manera, sino comprender por qué un profesor se comporta de la manera en que lo hace y qué influye en las decisiones que toma. Lo que esta investigación asume es que es el conocimiento y las concepciones del profesor, tanto de las matemáticas como del proceso de aprendizaje, lo que determina sus acciones. Incluso cuando debe manejar determinados dilemas en la enseñanza que lo llevan a tomar decisiones que conllevan realizar acciones con las que puede no estar completamente identificado. Con estas referencias previas, es necesario explicitar, como investigadores, qué estamos entendiendo cuando hablamos de "comprensión de los conceptos matemáticos" o "aprendizaje matemático". Necesitamos describir qué se va a entender por estos términos en el análisis realizado.

Una manera de entender la construcción del conocimiento matemático en el aula es a través del modelo APOS (Asiala *et al.*, 1996) que considera distintas maneras de conocer los conceptos matemáticos (acción-proceso-objeto-esquema) y diferentes mecanismos de construcción de éstos (interiorización, encapsulación, coordinación...). Las distintas relaciones entre los dos componentes del modelo (concepciones-formas de conocer y mecanismos de construcción) se organizan en la descomposición genética del concepto. Para Dubinsky y colaboradores (Asiala *et al.*, 1996, p. 7) la descomposición genética de un concepto es "un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo puede desarrollarse el concepto en la mente de un individuo". Estos autores subrayan la idea de mecanismos constructivos para describir la manera en la que se desarrolla el concepto. En Dubinsky (1996) podemos encontrar una amplia caracterización de los elementos teóricos del modelo APOS.

LA MODELACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE UNA NOCIÓN MATEMÁTICA

Entendemos la práctica del profesor desde lo que permite al profesor ayudar a que los estudiantes construyan conocimiento matemático. La perspectiva sociocultural de la práctica y el modelo de desarrollo de la comprensión (APOS) serán nuestros referentes teóricos para articular la aproximación adoptada.

Desde el enfoque sociocultural, utilizamos la noción de "instrumentos de la práctica" usados por el profesor para constituir una comunidad de práctica matemática en el aula. Por otra parte, desde el modelo APOS, utilizamos la noción "mecanismo de construcción de conocimiento" y la idea de descomposición genética de un concepto. A partir de la consideración conjunta de la idea de instrumento de la práctica y de la descomposición genética, caracterizamos la "modelación de la descomposición genética de una noción/concepto" como una idea que nos permite explicar la práctica del profesor, pero no necesariamente la relación entre la práctica y un determinado nivel de éxito en los estudiantes.

Consideramos en este trabajo que una noción matemática se puede componer de distintos conceptos. Por ejemplo, la noción de derivada se puede considerar conformada a través de tres conceptos, derivada de una función en un punto ($f'(a)$), función derivada ($f'(x)$) y operador derivada ($D(f)$). En esta situación, "la modelación de la descomposición genética de una noción matemática (o concepto)", realizada por el profesor, es una descripción de los mecanismos de construcción que el profesor modela, de la secuencia de estas modelaciones y de la organización de las relaciones que establece entre dichos mecanismos a través del uso de diferentes instrumentos de la práctica. Una modelación de un mecanismo de construcción "es una forma de dar significado, desde la perspectiva de los investigadores, a las acciones del profesor, a sus decisiones sobre qué problemas utilizar, a cómo gestiona el contenido matemático en el aula y a las justificaciones que proporciona" (Gavilán *et al.*, 2007, p. 160). La "modelación de la descomposición genética de un concepto o noción matemática" nos permite hablar de las características de la práctica del profesor que favorecen los procesos de construcción *potencial* del conocimiento en los estudiantes y de lo que puede estar justificando dichas características.

Los instrumentos de la práctica del profesor (modos de representación y los elementos matemáticos del concepto), así como la manera en la que el profesor los usa, nos permiten como investigadores identificar la modelación de algún mecanismo de construcción. Las características del "uso que hace el profesor de los instrumentos de la práctica" viene dado por las relaciones que establece más o menos explícitamente entre las ideas matemáticas cuando las presenta a sus estudiantes, y por las conversiones entre los modos de representación que utiliza con el objetivo de que los estudiantes lleguen a construir los significados pretendidos, independientemente del modo de representación utilizado (Duval, 1996). En este sentido, cuando un profesor "hace y dice cosas" en el aula, crea las condiciones para que sus estudiantes puedan construir los significados del concepto. Así, el profesor no "construye las formas de conocer los conceptos", sino que pone los medios –crea el contexto– para que sus estudiantes construyan los significados y desarrollen los mecanismos de construcción pretendidos. Éste es el motivo por el que intentamos describir la manera en la que el profesor "modela mecanismos de construcción de conocimiento".

A partir de esta caracterización de la idea "modelación (del profesor) de la descomposición genética" planteamos las siguientes cuestiones:

- ¿Podemos identificar distintas "modelaciones de la descomposición genética de un concepto/noción" realizadas en la práctica?
- ¿Es posible identificar a través de la modelación que hace el profesor de la descomposición genética características de su práctica con poder explicativo (principios que fundamentan la práctica)?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

En esta investigación participaron dos profesores de enseñanza secundaria (Juan y María) con varios años de experiencia. Estos profesores mostraron su conformidad a utilizar su imagen y gestionaron las autorizaciones para disponer de las imágenes de sus estudiantes, con la finalidad de realizar esta investigación. Todos los nombres que aparecen son seudónimos con el objeto de garantizar la confidencialidad y anonimato de los participantes (compromiso ético de los investigadores). La investigación se centró en el análisis de la práctica del profesor durante la introducción de la noción de derivada a estudiantes de bachillerato (16-18 años). Los estudiantes sólo habían abordado con anterioridad las ideas relativas a límite y continuidad.

La práctica del profesor engloba distintos escenarios, pero aquí consideramos la práctica que se desarrolla ligada al aula. Hay dos fases o momentos clave para el desarrollo de la práctica: momento de la planificación y momento de la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje (Llinares 2000; Schoenfeld, 1998; Simon y Tzur, 1999). La unidad didáctica realizada por Juan abarcó 17 clases de 45 minutos cada una. Este profesor organizó su enseñanza a través de la resolución de problemas y no usaba libro de texto. Algunas de las clases fueron impartidas en el aula de informática (las clases núm. 3, núm. 9 y núm. 16). Se utilizó software de dos tipos, primero el programa de geometría dinámica *Cabri-Géomètre II* en la clase núm. 3 con dos archivos realizados por el profesor y puestos a disposición de los estudiantes; y después se utilizó el programa *Funciones para Windows*, en las clases núm. 9 y núm. 16. A María se le grabaron las 12 clases que comprendía la unidad didáctica, con una duración media de 50 minutos cada una. María seguía un libro de texto *Bachillerato, Matemáticas I* del que planteaba la mayoría de las tareas para sus alumnos. Todas las sesiones de la unidad didáctica de María se desarrollaron en el aula ordinaria de clase. Ambos grupos eran de primer curso de bachillerato (16-17 años).

Recogida de datos

Se han recogido datos tanto de la fase de planificación como de la fase de gestión de la enseñanza. Realizamos una entrevista sobre la planificación de la unidad didáctica antes del comienzo de la unidad didáctica que tenía como objetivo obtener información sobre la planificación realizada. Esta entrevista era semiestructurada con un guión previo. En la primera parte indagamos sobre el grupo de estudiantes y sus conocimientos previos. La segunda parte de la entrevista trató sobre la unidad didáctica: contenidos, tipo y secuencias de tareas y objetivos; recogimos también la planificación que había realizado el profesor. En la tercera parte se plantearon cuestiones que incidían sobre cómo el profesor entendía que los alumnos llegaban a dotar de significado a los conceptos matemáticos. Por ejemplo, para indagar sobre los significados gráficos de la derivada de la función en un punto, $f'(a)$, preguntábamos, "¿utilizas el cálculo de secantes, de pendientes de secantes para las derivadas?"

En la fase de gestión, grabamos en video todas las sesiones de clase, y realizamos varias entrevistas con el profesor a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica, a fin de obtener información sobre cómo estaba viendo el profesor el desarrollo de las lecciones. En las grabaciones disponíamos de una cámara con micrófono de ambiente y un micrófono inalámbrico que llevaba el profesor, quien grababa su discurso y las interacciones con los estudiantes cuando estaban en el radio de acción del micrófono. A fin de "familiarizar" a los estudiantes con la presencia de la cámara y un observador, antes de comenzar la unidad didáctica realizamos una grabación de prueba. En ambos casos las sesiones de clase grabadas en video fueron transcritas en su totalidad. Se recogieron los materiales utilizados por los profesores, tales como colecciones de problemas y ficheros de ordenador para Cabri-Géométre II. El uso de diferentes fuentes de datos permitió que nuestra investigación se ajustara al criterio de "triangulación" de las fuentes tal y como es planteado por Schoenfeld (2001).

Análisis de los datos

El análisis tenía como objetivo identificar la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por el profesor, a fin de describir y caracterizar su práctica e inferir los principios que fundamentan dicha práctica. El análisis se realizó en tres niveles: un primer nivel de naturaleza descriptiva y dos niveles de naturaleza inferencial (inferir la modelación de la descomposición genética y, a partir de ella, inferir las características de la práctica que la fundamentan).

El primer nivel de análisis tenía como objetivo hacer una "inmersión" en los datos y "reducir" el volumen de datos (Powell *et al.*, 2003). Esta primera aproximación a los datos nos permitió tener una visión global de la práctica del profesor y relacionar lo que el profesor había dicho en la entrevista de planificación y en las entrevistas durante el desarrollo de las lecciones con lo que sucedía en el aula.

El segundo nivel de análisis tenía como objetivo inferir la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por el profesor. Para ello se identificaron las modelaciones de los diferentes mecanismos constructivos, su secuencia, y las relaciones entre ellos. Este segundo nivel de análisis se llevó a cabo en dos fases. En un primer momento (fase 1), se identificaban "segmentos de enseñanza" en el sentido de Leinhardt (1989), entendidos como partes de la lección reconocibles por el profesor y los estudiantes. Escudero

(2003) señala que los segmentos se pueden caracterizar con base en los objetivos de aprendizaje pretendidos por el profesor. En un segundo momento (fase 2), considerábamos agrupaciones de segmentos (identificados en la fase 1) en los que era posible identificar aspectos de la práctica del profesor que nos permitieran inferir la modelación de otro mecanismo de construcción. Fue necesario realizar estas agrupaciones de segmentos para dar cuenta del carácter sistémico de la enseñanza de las matemáticas que se puso de manifiesto en uno de los profesores. La identificación y caracterización de cada segmento de enseñanza fue consensuado por al menos dos investigadores, cumpliendo de esta manera un criterio de "triangulación" propuesto por el grupo RUMEC (Asiala *et al.*, 1996) referido a la convergencia en las interpretaciones de los investigadores sobre un hecho. El resultado de este análisis es un informe que caracteriza la práctica del profesor desde la perspectiva del investigador y da cuenta de la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por el profesor. Los datos reunidos en este segundo nivel de análisis se usan para construir "viñetas" (Gavilán, García y Llinares, 2007). Una viñeta es un informe de la práctica del profesor que señala el momento cronológico en el que sucede la acción del profesor y se compone, esencialmente, de los datos utilizados (generalmente de diferentes fuentes) y de la inferencia realizada por los investigadores sobre la modelación del mecanismo de construcción identificado en la práctica y apoyado en la revisión de la literatura sobre investigaciones que utilizan APOS. En definitiva, una viñeta da cuenta en la investigación de los datos y de su análisis de manera conjunta, es una "manera" de contar el análisis de los datos a partir de los datos empíricos.

Desde las viñetas, el tercer nivel de análisis pretende inferir los principios que fundamentan la práctica del profesor y, por tanto, pueden ayudar a explicarla. Esta manera de proceder permite identificar características de la práctica del profesor que trascienden lo específico del caso concreto, e intenta producir conocimiento relevante para comprender la idea de "práctica del profesor". Este tercer nivel de análisis es el que justifica por qué no se utilizan los niveles de desempeño de los alumnos para relacionarlos con la caracterización de la práctica realizada y si se intenta inferir a partir de esta caracterización cómo las creencias y las concepciones del profesor (maneras de entender el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje) parecen justificar las decisiones tomadas. Posiblemente podría desarrollarse en este punto otra línea de investigación, optando en este momento metodológico por la comparación de la caracterización de la práctica con los logros de los estudiantes.

En el siguiente gráfico se detallan los distintos niveles de análisis, así como las relaciones entre ellos.

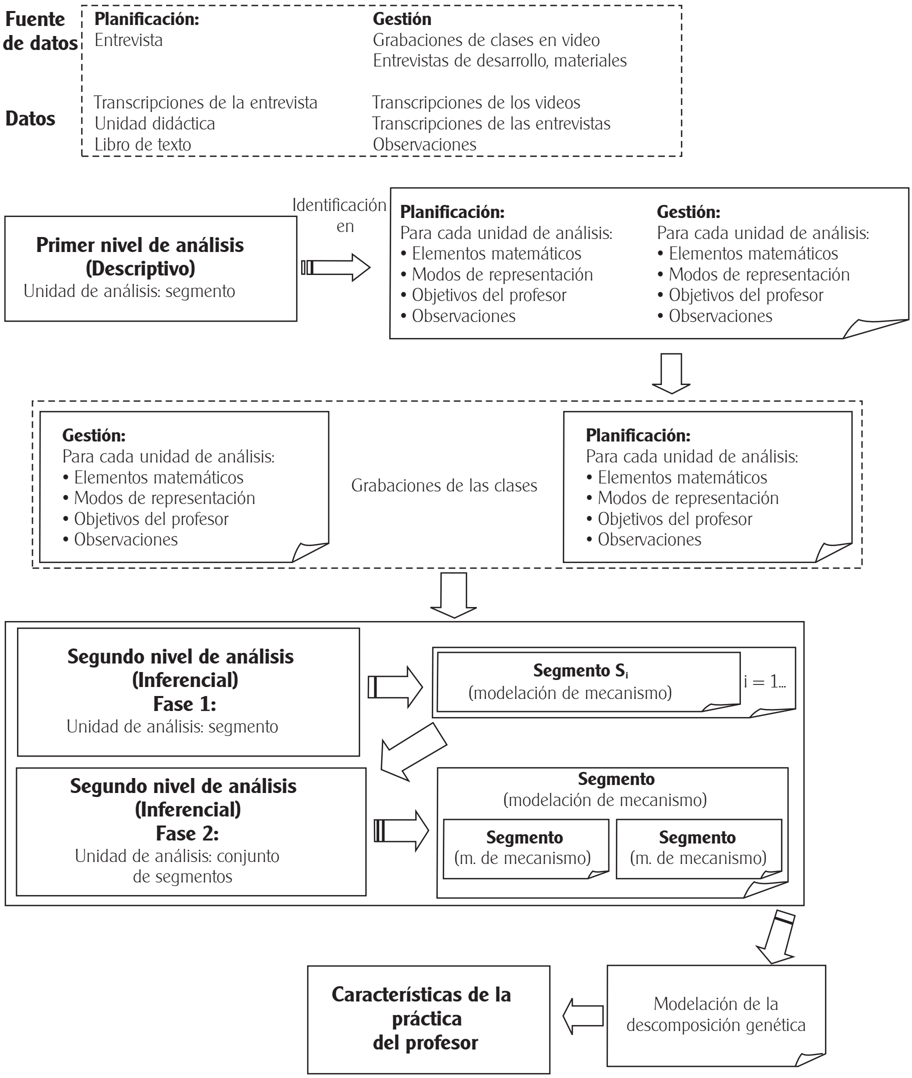


Gráfico 1 Esquema metodológico

RESULTADOS

Las características de la práctica de Juan vista desde la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada

La enseñanza de la derivada desarrollada por Juan consideraba la relación explícita entre:

- la derivada de una función en un punto, $f'(a)$
- la función derivada, $f'(x)$, y
- la idea de operador derivada, $D(f)$.

Para Juan, la función derivada aparece como puente entre la derivada de una función en un punto y el operador derivada. La enseñanza de la derivada que realiza Juan viene caracterizada por la modelación de los mecanismos de construcción de los diferentes conceptos de la noción de derivada que considera y las relaciones entre ellos. Para mostrar esta característica de la práctica de Juan, usaremos viñetas en las que se describe cómo modela Juan en el aula tres de los mecanismos constructivos sobre los que se construye el significado de la noción de derivada: el *mecanismo de interiorización y el mecanismo de encapsulación* de la función derivada en un punto $x = a$, y el *mecanismo de interiorización* de la función derivada. Esta manera de actuar de Juan en la enseñanza de la derivada potencia la construcción de la función $f'(x)$ a partir de la creación de diferentes situaciones en las que pretende que los estudiantes doten de significado a la idea de derivada en un punto $x = a$.

Modelaciones del mecanismo de interiorización de la derivada de f *en un punto* $x = a$ [$f'(a)$]

La tarea que plantea Juan a sus alumnos en la tercera clase es:

> Dada la función $f(x) = x^2$. Completar la tabla de valores dada por las tasas de variación media en el punto $x = 1$ y calcular $f'(1)$. Repetir y obtener $f'(2)$.
> Completar la tabla de valores:
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | x | 1 | 2 | −1 | 0 |
> | $f'(x)$ | | | | |
>
> Obtener la expresión algebraica de $f'(x)$

Inicialmente Juan calcula los valores de $f'(1)$ y $f'(2)$ mediante el uso de aproximaciones sucesivas apoyándose en la idea del cociente incremental. El trabajo que hace Juan con las sucesiones de los diferentes cocientes incrementales cuando varía los puntos que se acercan a $x = a$ ($a = 1$ y 2) puede ser interpretado como una modelación del mecanismo de interiorización de $f'(a)$.

Juan pide a sus estudiantes que calculen el valor de $f'(1)$ usando la relación entre los significados de la idea del cociente incremental y la pendiente de la recta secante. Para ello Juan, apoyándose en el software que le permite relacionar la sucesión numérica de valores del cociente incremental y la representación gráfica de las secantes, confecciona una tabla de valores para los cocientes incrementales $(f(a) - f(1))/(a - 1)$ a partir de las acciones de los estudiantes y utiliza la representación grafica de la función y la recta secante por los puntos $(1, f(1))$ y $(a, f(a))$ para tener "casos" sobre los cuales desarrollar la reflexión sobre la acción. Juan recuerda a los estudiantes cómo se calculaba la tasa de variación y su significado geométrico como pendiente de la recta secante. A continuación, Juan subraya el *proceso de aproximación* que le permite hacer énfasis en el significado de cómo se puede llegar a entender la idea de la "variación de la función en el punto" y la "recta tangente y su pendiente". El diálogo entre Juan y sus alumnos en este segmento de la clase es el siguiente (entre <> comentarios que aclaran el discurso), en el que plantea interrogantes para que los estudiantes puedan pensar sobre cómo se calculan los valores (reflexión sobre la acción):

> J (Juan): Cuando <el punto> "*a*" se va acercando a 1 cada vez más ¿y si *a* vale 0.9?, ¿y si vale 0.99?, entonces íbamos poniendo estos valores <confeccionando la tabla de valores de cocientes incrementales>, aquí teníamos el valor, el valor de *a* y aquí poníamos, recordáis como lo poníamos $(f(1) - f(a))/(1 - a)$, estos valores y decíamos ¿cuánto nos va a salir cuando pongamos aquí el 1? ¿Cual es la variación de la función en el punto 1? Si aquí poníamos 0.9 <valor de *a*> va a salir una cosa, si aquí ponemos 0.99 otro valor, aquí ponemos 0.99999. Cuando ponga 0.9 al cuadrado, pues saldrá 0.81/(1 − 0.9).

Con esta manera de proceder, Juan intenta hacer "visible" a los estudiantes el proceso de variación tanto del cociente incremental como de la transformación de la recta secante en tangente a la curva en un punto ($x = 1$) y de su relación. Juan sabe que el reconocimiento de los estudiantes de estas variaciones en el contexto analítico y geométrico y su relación se apoya en la identificación del paso al límite de la "tendencia" de estos valores y de las rectas secantes. En estos momentos y por la manera de actuar de Juan, éste no necesita que sus alumnos tengan plenamente construido el concepto de límite para que puedan manejar el proceso de aproximación modelado y la relación entre los contextos numéricos y geométricos. En este sentido, podemos indicar que es posiblemente este contexto de introducción a la derivada el que puede realizar aportes al proceso de construcción del significado de límite de los alumnos. El contexto así generado permite proporcionar a los estudiantes referencias para desarrollar procesos de abstracción reflexiva que ayuden a encapsular la propia idea de límite.

El objetivo por el que Juan actúa de esta manera es que pretende que sus estudiantes construyan la relación entre los significados analítico (tasa de variación) y gráfico (pendiente de la recta secante) de la idea de derivada. De esta manera, para conseguir su objetivo, Juan "modela" estas dos acciones, el cálculo de la tasa de variación (elemento matemático, modo analítico) y trazar la recta secante a la curva por dos puntos y su pendiente (elemento matemático, modo gráfico). Por ejemplo, la interacción que sigue es ilustrativa de cómo Juan intenta hacer "ver" a sus estudiantes el paso al límite a través de la reflexión sobre el conjunto de valores obtenidos:

> J: Luego aquí ¿qué habrá que poner? <Refiriéndose al último valor de la tabla de cocientes incrementales, el valor del límite>
> Estudiante: 2
> J: 2, la pendiente de la tangente en el punto 1, es decir, cuando sea la recta tangente la pendiente va a ser precisamente 2.

Con esta manera de actuar, Juan intenta que sus estudiantes puedan tener la posibilidad de interiorizar los significados de la derivada de f en el punto $x = 1$. En una de las entrevistas de desarrollo, Juan indicaba la importancia dada a esta manera de proceder:

> [mi objetivo es que los estudiantes] se hagan idea de qué es realmente aproximar, cómo pueden coger puntos aproximándolos al otro y cómo va variando la tangente, *cómo va variando en principio la secante y va tendiendo hacia la tangente* geométrica de la curva, ésa era la idea.

En esta situación el mecanismo de interiorización se apoya en dos aspectos relevantes, la visualización del paso al límite (tanto en la sucesión del cociente incremental, como de la transformación de la recta secante en recta tangente en

$x = 1$), y en la simbiosis entre los modos de representación analítico y gráfico utilizados como instrumentos para favorecer la visualización del paso al límite y, por tanto, para constituir el contexto que pueda ayudar a desarrollar los mecanismos de interiorización en los estudiantes.

Por otra parte, Juan intenta crear en el aula situaciones en las que sus estudiantes pueden desarrollar *mecanismos de encapsulación*. Para ello Juan repite su forma de actuar en el cálculo del valor de la derivada en $x = 1$ para diferentes puntos. Juan planteó a continuación la misma situación para $x = 2$. Esta manera de actuar parece indicar que Juan intenta crear el contexto que facilite en sus estudiantes la encapsulación de las *acciones* desarrolladas para diferentes puntos y, así, que los estudiantes puedan construir la idea de función derivada en un punto $f'(a)$. En la entrevista de planificación Juan señalaba la importancia de esta manera de actuar para vincular significados al valor de $f'(a)$:

> Con aproximaciones, cogemos la secante y ahora vamos obteniendo un poquito más, vamos obteniendo cada vez más... una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente. Una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente... y van calculando las pendientes en cada momento, entonces ahora tenemos la tangente.

Lo que hace Juan al manejar estas tareas, se identifica con lo que Asiala *et al.* (1997, p. 407) describen como las *acciones* y *mecanismo de interiorización* de $f'(a)$ en modo gráfico y analítico, en el proceso de construcción de los significados por parte de los estudiantes:

> **1a. Gráfico:** la acción de conectar dos puntos de una curva y formar la cuerda que es la parte de la recta secante a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la línea secante por los dos puntos...
> **1b. Analítico:** la acción de calcular la media de la razón de cambio a través del cálculo del cociente incremental en un punto.
> **2a. Gráfico:** interiorización de las acciones del punto 1a en un proceso cuando los dos puntos de la gráfica de la función están "cada vez más próximos".
> **2b. Analítico:** interiorización de las acciones del punto 1b cuando los intervalos de tiempo son cada vez más pequeños, es decir, la amplitud del intervalo de tiempo se acerca cada vez más a cero...

Desde esta perspectiva, podemos describir la actuación de Juan en este segmento usando los elementos matemáticos (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006) y modos de representación (instrumentos de la práctica).

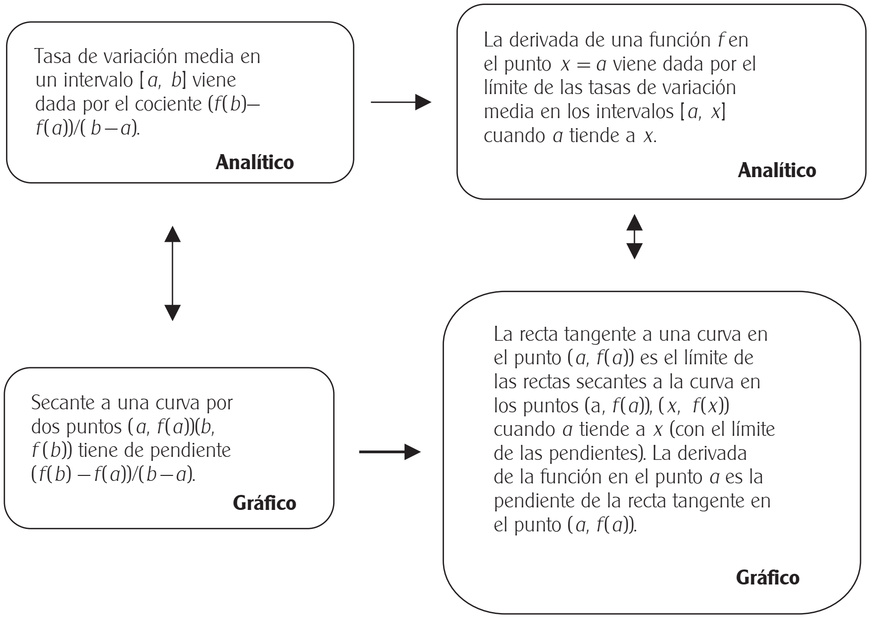


Gráfico 2 Mecanismo de interiorización de $f'(a)$

Modelaciones del mecanismo de encapsulación de f ′(a) e interiorización de f ′(x)

Al variar el valor del punto x se pretende generar una situación que permita emerger el significado de $f'(a)$ para cualquier $x = a$. Esta forma de actuar puede ser interpretada como una manera de modelar el *mecanismo de encapsulación de* $f'(a)$. Breidenbach *et al.* (1992, p. 250) señalan que:

> Cuando es posible para un proceso ser transformado por alguna acción, entonces podemos decir que ha sido encapsulado como un objeto. De manera más general, en el mismo sentido de la afirmación anterior la encapsulación viene como necesidad de una acción o proceso.

La descripción de este segmento de la enseñanza de Juan permite entender su actuación cuando intenta hacer visible a sus estudiantes el paso a una x general. Es el intento de hacer concebir a los estudiantes las *acciones* anteriores como *proceso*. Para ello, la introducción de $f'(x)$ para $f(x) = x^2$ se hace usando el lenguaje.

> J: ¿Seremos nosotros capaces de encontrar la forma algebraica de esto? <Refiriéndose a la tabla de valores de $f'(x)$>.
> Si yo pongo aquí x <sustituyendo el 2 por *x*> ¿qué tengo que poner aquí?, o dicho de otra manera ¿a quién será igual $f'(x)$? O lo que es lo mismo, la función derivada de x^2.
> Sería esto mismo, pero en vez de poner 1 y 2, aquí en vez de poner 4 y en estas cosas, pues poner x, y ahora *a* se tiene que ir acercando a x, o sea, *va a ser esto mismo* que estamos haciendo aquí, [...]
> [...]
> ¿Cuánto valdrá $(x^2 - a)/(x - a)$ cuando *a* se está acercando a x? Estamos en un punto cualquiera x, calculamos la ordenada y ahora cogemos un punto próximo a él, *a*, calculamos la ordenada, calculamos la tasa de variación media. O lo que es lo mismo la expresión algebraica de una función nueva que se va a llamar función derivada... esto va a ser x + x, que vamos a tener 2 veces x, luego esto va a ser, esto cuando yo ponga aquí x, que voy a poner aquí 2 veces x, ésta va a ser la función derivada ¿eh?

En el discurso generado, Juan intenta colocar en el mismo momento lo particular y lo general. Es la estrategia que usa para poder crear *el contexto* en el cual sus estudiantes pueden estar en condiciones de generar un mecanismo de interiorización. En estos momentos podemos interpretar que, al colocar lo general y lo particular juntos, Juan modela el mecanismo de interiorización de $f'(x)$. Nosotros utilizamos la caracterización de dicho mecanismo recogida en la literatura, Dubinsky (1996, p. 35), para apoyar esta interpretación:

> Una concepción proceso permite al sujeto pensar en una función como algo que recibe una o más entradas, o valores de las variables independientes, que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que regresa las salidas, o los valores de las variables dependientes, como resultado.

El gráfico siguiente (gráfico 3) describe la gestión del contenido matemático, reseñado en este apartado, realizada por Juan mediante el uso de los instrumentos de la práctica (modos de representación y elementos matemáticos).

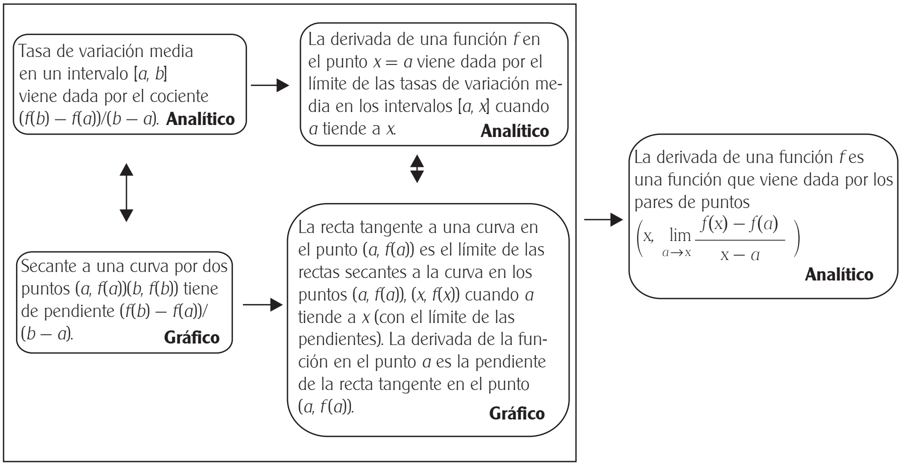


Gráfico 3 Mecanismos de encapsulación de *f′(a)* e interiorización de *f′(x)*

Los principios que fundamentan la práctica de Juan

La descripción de la práctica de Juan, realizada a través de la modelación de los mecanismos de construcción del conocimiento que parece potenciar en sus estudiantes, permite identificar dos "principios" que fundamentan su práctica: el uso integrado de los modos de representación analítico y gráfico como instrumentos que favorecen el proceso de construcción de los significados, y la relación explícita entre los diferentes conceptos matemáticos de la noción de derivada establecida a través de los mecanismos de construcción del conocimiento.

1. Uso integrado de los modos de representación analítico y gráfico como instrumentos para modelar los mecanismos de construcción del conocimiento sobre la derivada. Juan pretende que los estudiantes construyan el significado de $f'(a)$ como un objeto, integrando los significados gráficos y analíticos (interiorización analítico-gráfico y encapsulación analítico-gráfico de $f'(a)$). Para ello, realiza la modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada a través de la generalización a todos los puntos del paso al límite de la derivada de una función en un punto integrando lo gráfico y lo analítico (interiorización de $f'(x)$).

El operador derivada se construye a partir de la función derivada, mediante el cálculo de funciones derivadas como límite, que es una generalización a todas las funciones (encapsulación de $f'(x)$) y su generalización para obtener las reglas de derivación (interiorización límite-regla). La inversión de un proceso es otro proceso, Juan modela la inversión de $D(f)$ apoyándose en los significados analíticos y gráficos (inversión analítico-gráfico). Las modelaciones de desencapsulaciones de $f'(a)$ y $f'(x)$ aparecen para vincularle los significados analíticos y gráficos (interiorización analítica e interiorización gráfica de $f'(a)$...).

2. Organización y relación de los distintos conceptos. Juan establece relaciones explícitas entre los conceptos que conforman la noción de derivada, $f'(a)$, $f'(x)$ y $D(f)$. Para ello, Juan construye de manera explícita la idea de función derivada a partir de la idea de derivada de una función en un punto. Establece la relación entre $f'(a)$ y $f'(x)$ a través de las modelaciones de los *mecanismos de encapsulación* y *desencapsulación* de $f'(a)$ con la *modelación de la interiorización* de $f'(x)$. Establece la relación entre $f'(x)$ y $D(f)$ con las modelaciones de los mecanismos de encapsulación de $f'(x)$ e interiorización de $D(f)$. A partir de la función derivada, Juan intenta que los estudiantes den significado al operador derivada. La inversión del operador derivada le permite considerar la integración indefinida (antidiferenciación) como un proceso.

Juan organiza los distintos conceptos que conforman la derivada de manera que, para construir una idea, se apoya en las construidas previamente haciendo "visibles" las relaciones que se establecen como un objetivo explícito. Juan subraya explícitamente las relaciones entre ideas matemáticas como una manera de dotar de significado a los conceptos. El gráfico 4 describe la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada realizada por Juan en su práctica.

En resumen, podemos caracterizar la práctica de Juan por el énfasis dado a la idea de relación y a la necesidad de visualizar los procesos de aproximación sucesiva que constituyen los pasos al límite. Las diferentes maneras de visualizar la idea de relación en la práctica de Juan vienen dadas por: relaciones entre significados en distintos modos de representación y relaciones entre los diferentes conceptos que conforman la noción de derivada.

Las características de la práctica de María vista desde la modelación de la descomposición genética de la noción de derivada

La enseñanza de la noción de derivada desarrollada por María se apoya en la consideración aislada de tres conceptos matemáticos:

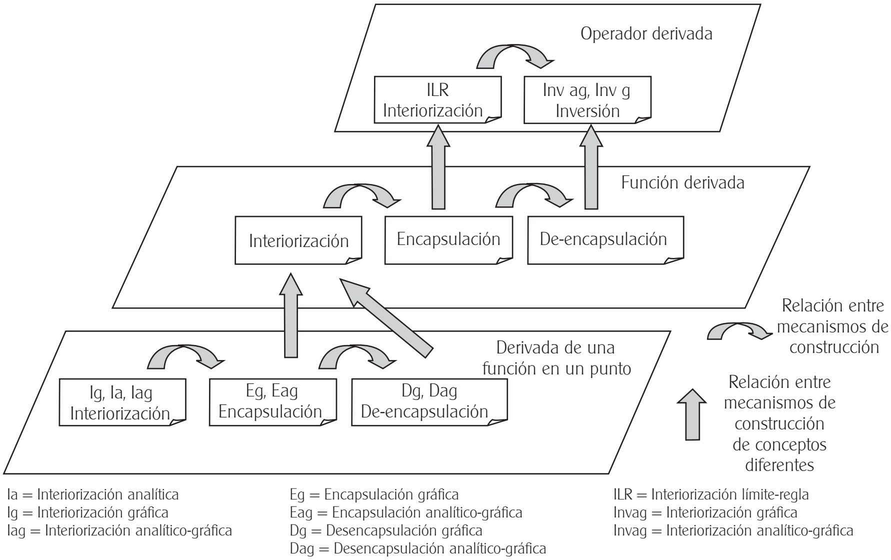


Gráfico 4 Modelación de la descomposición genética de la derivada realizada por Juan

- la derivada de una función en un punto, $f'(a)$
- la función derivada $f'(x)$, y
- la idea del operador derivada, $D(f)$.

Para mostrar las características de la práctica de María usaremos dos viñetas. En la primera se identifica la presentación de acciones para $f'(a)$ sin la modelación del mecanismo de interiorización. La segunda viñeta muestra cómo modela María el mecanismo de interiorización de $f'(x)$ a partir de una regla de $f'(a)$ pero sin referencia explícita a su significado.

Énfasis sobre las reglas: modelación de acciones para el cálculo de la derivada de una función en un punto en contexto analítico y gráfico sin relaciones explícitas

El segmento recogido en esta viñeta sucede en la segunda clase de la unidad didáctica. María proporciona a los estudiantes una receta para calcular la derivada de una función en un punto que ella denomina “la regla de los cuatro pasos”.

Para María esta manera de obtener el valor numérico de $f'(a)$ es un aspecto relevante de la noción de derivada. Esta manera de actuar potencia la forma de conocer la acción que se caracteriza por la existencia de detalles precisos de los pasos de la transformación que se concretan como pasos dados por una receta (Asiala *et al.*, 1996; Breidenbach *et al.*, 1992). Las tareas planteadas son las siguientes:

1. Hallar la derivada de $y = x^2$ en el punto $x = 2$.	
2. Hallar la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:	
a) $f(x) = 3x^2 - 1$	*b)* $f(x) = (2x + 1)^2$
c) $f(x) = 3/x$	*d)* $f(x) = 1/(x + 2)$

Para resolver la primera tarea, cálculo de $f'(2)$, María proporciona un procedimiento-receta que permite obtener la derivada de una función en un punto utilizando la definición de límite. Primero da el algoritmo y luego lo aplica a la tarea propuesta. El diálogo en el aula es el siguiente:

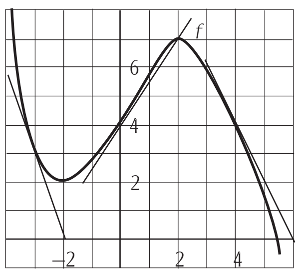
> M (María): Tenemos que hallar esto, este límite <límite de cocientes incrementales>.
> Bien, yo, para que no os perdáis os voy a dar cuatro pasos a seguir, ¡eh! *Para que en el cálculo no os perdáis*. Como tengo que calcular este límite, y antes de este límite, tengo que calcular esta fracción y antes de esta fracción tengo que calcular $f(a + h)$ y $f(a)$ ¿no? *Vamos a hacerlo paso a paso* ¿vale?
> 1º vamos a calcular $f(a + h)$, en este caso $f(2 + h)$,
> 2º vamos a calcular $f(2 + h) - f(2)$ ¿no? Primero calculamos esto, después calculamos la resta, ¿después qué tenemos que calcular?
> E: la h.
> M: ¡Ah! no, porque la h es un número que tiende a cero. Antes de calcular el límite, ¿qué tendremos que calcular? Todo esto, hacer el cociente éste, ¿no? Tercero $(f(a + h) - f(2))/h$, ¿en último lugar?
> E: El límite.
> M: El límite, el límite cuando la h tiende a cero de $f(a + h)$...
> E: ¿La a no sería 2?

La manera de proceder de María pretende hacer visible a los estudiantes que el cálculo del valor numérico $f'(a)$ se lleva a cabo mediante la aplicación de un procedimiento dado en cuatro pasos y que para los estudiantes es suficiente seguirlo paso-a-paso. Dicho procedimiento viene expresado en el modo analítico. María desarrolla parte de este segmento de enseñanza, centrado en proporcionar de manera clara el procedimiento-receta que sus estudiantes deben seguir, pidiendo a sus estudiantes que repitan la regla de los cuatro pasos. María considera que, de esta manera, los estudiantes llegan a saber lo que es el valor de la derivada de una función en un punto determinado $x = a$ [$f'(a)$]. El planteamiento realizado por María no apoya la reflexión del estudiante sobre estas acciones repetidas, por lo que no constituye el contexto para modelar el mecanismo de interiorización de $f'(a)$, quedándose en el nivel de una acción para los significados de $f'(a)$. La importancia dada por María a esta manera de obtener $f'(a)$ a través de la receta "regla de los cuatro pasos", diferenciándolo de la función derivada, es señalada por ella en la entrevista de planificación.

> Además yo voy a insistir mucho en este curso, por ser la primera vez en que los niños ven las derivadas, la derivada no de funciones... la función derivada, sino en la derivada en un punto, en un punto. Ahí es donde quiero que apliquen la definición ¿eh? a través de la regla de los cuatro pasos, es decir, que $f(x + h)$, $f(x + h) - f(x)$, etc., entonces pero en un punto concreto.

Con posterioridad, en la tercera clase de la unidad didáctica, María presenta una tarea en un contexto gráfico subrayando el papel de una regla para obtener el valor de la derivada de una función en un punto (véase gráfico). La regla, que María proporciona a los estudiantes, viene dada por la memorización de la frase "El valor de la derivada de una función en un punto a es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $(a, f(a))$".

Halla f' en los puntos de abscisas −3, 0 y 4.
Halla las pendientes de las rectas tangentes trazadas en esos puntos.



Para resolver esta tarea se utiliza una regla que da la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto. En esta tarea María pide a los estudiantes que repitan varias veces la frase. La interacción característica viene reflejada en el siguiente extracto:

M: Lo tenéis hasta que *memorizar*, lo tenéis que saber, ¿qué es la derivada en un punto?
E: La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto que es igual a "*a*".
[...]
M: Vale. Jorge, ¿qué es la derivada?
E: La pendiente de la curva a la recta, recta tangente igual.
M: A la curva. Venga, Noelia.
E: La pendiente a la recta tangente a la curva en el punto x igual a "*a*".
M: Muy bien. Miriam.
E: La pendiente de la recta tangente a la curva en x igual a *a*.
M: ¿Qué es, Eduardo, la derivada en el punto −3?
E: Pues la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $a = -3$.
M: Luego, fíjate en el dibujo, vamos a ver; vamos a hallar la recta, la tangente en el punto −3. Nos viene incluso dibujada la recta pendiente, la roja, nos viene en rojo; ¿Cuál es la pendiente de esta recta?, ¿cómo hallábamos la pendiente de esa recta? Sería −3, sería 3/1.

María y los estudiantes aplican la regla que calcula el valor numérico de $f'(a)$ y calculan la pendiente de la recta tangente formando un triángulo rectángulo y usando la definición de tangente de un ángulo.

M: ¿Cuál sería la derivada en el punto 0? La roja, en el punto 0, ¿estás viendo la recta que tiene dibujada, la tangente que tiene dibujada la curva? <en la gráfica de la tarea>.
¿Qué inclinación tiene?, es decir, tengo que fijarme en otro punto para ver la inclinación, para saber la pendiente, porque la pendiente *tiene que formar el triángulo; ese rectángulo que veíamos para hallar el cateto opuesto partido por el cateto contiguo que era la pendiente*, ¿no? Por el punto que pasa por el punto.
E: (2, 7).

> M: ¿Qué pendiente tiene, Ana? ¿Qué pendiente tiene esa recta? ¿Todavía no la has visto? ¿Cuánto? Es cateto opuesto.
> Vamos a ver el triángulo, es éste, ¿ves? 1, 2 y 3 ¿no?, y 1 y 2; 3/2, tres medios, es la derivada a la curva.

María y los estudiantes van repitiendo la regla para obtener el valor numérico $f'(a)$ en los siguientes puntos. María repite las acciones dadas por la regla, sin construir los contextos que favorezcan la reflexión, que es una característica del mecanismo de interiorización (Dubinsky, 1996). Esta manera de actuar subraya la ausencia de intentos de modelar mecanismos de construcción de los significados vinculados a estos conceptos matemáticos, centrándose únicamente sobre las acciones (recetas). María no establece explícitamente ninguna relación con las acciones modeladas en las sesiones anteriores centradas en determinar el valor del cociente incremental en contexto analítico.

Modelación del mecanismo de interiorización de $f'(x)$

La situación descrita a continuación sucede en las clases tercera y cuarta de la unidad didáctica. María modela la función derivada como acción, construyendo una tabla de valores y centrándose en cada momento en un solo punto. Los valores se obtienen en cada punto por medio de la regla de los cuatro pasos. A continuación María generaliza a todos los puntos la manera de obtener los valores. En la literatura, considerando el concepto de función (para referirnos a la función derivada), Dubinsky (1996) considera que, cuando se conoce la función como acción, poco puede hacerse además de evaluarla en puntos concretos, la función como proceso se caracteriza de la siguiente manera:

> Una concepción proceso permite al sujeto pensar en una función como algo que recibe una o más entradas, o valores de las variables independientes, que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que regresa las salidas, o los valores de las variables dependientes, como resultado (Dubinsky, 1996, p. 35).

Por tanto, el hecho de usar la tabla de valores, construida aplicando una regla, potencia la construcción de la función derivada como acción al tomar puntos concretos. En este sentido la modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada que hace María potencia en los estudiantes la función derivada como proceso en un contexto analítico. La generalización a todos los puntos en los que calcula el límite al tomar una variable genérica x es un indicio de una manera de modelar el mecanismo de interiorización de la función derivada. En la entrevista de planificación María indicaba:

> A través de la regla de los cuatro pasos, es decir, que $f(x + h)$, $f(x + h) - f(x)$, etc. ... Entonces... pero en un punto concreto, que lo haga muchas veces, *que se habitúen a ese cálculo,* y después haremos, no ya demasiadas veces, haremos para una función ya concreta...
>
> Lo que es la función derivada, es decir, ya no vamos a determinar en un punto, sino *vamos a hacerlo para* cualquier *valor de* x, entonces le podemos hacer un ejemplo. Fíjate incluso como se la quiero decir. Les quiero decir por ejemplo, la derivada de x^2 ya la hemos hallado. Esta función la hemos hallado en el punto 2, en el punto 3, en varios puntos ¿no?, incluso si quiero: ¡venga! Vamos a hacer una lista, vamos a hacer una tabla de valores ¿no?, cuando la x vale 2, ¿cuánto vale la $f'(x)$? Cuando la x vale 3, ¿cuánto vale? Cuando la x vale...
>
> Es una función, entonces si es una función incluso la podemos representar.
>
> Pues entonces, a eso le podríamos llamar una función y además la función derivada... Bueno, en vez de hacer punto a punto... y ahora ¿cuál va a ser su fórmula? A todo esto ¿cuál va a ser la expresión algebraica de esa función?

En esta declaración de los objetivos pretendidos, María modela en su discurso la construcción de $f'(x)$ como proceso al generar dicha función desde la "generalización" de un conjunto de casos particulares. En este momento María parece asumir que $f'(a)$ es una regla que debe aplicarse en varios puntos y luego, usando la tabla y "viendo" la sucesión de valores obtenidos, intentar establecer la expresión de $f'(x)$. Para que el "paso a lo general" sea "visible" a los alumnos, exige que el ejemplo sobre el que se construye la situación sea conocido. De ahí que use $f(x) = x^2$ y espere que la sucesión de valores que se obtiene con la aplicación de la regla a distintos valores de x le permita "mostrar" que corresponden a valores de la función $f(x) = 2x$. El discurso del aula establece de manera oral la relación entre el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, el valor del cociente incremental y el valor de la derivada de la función en un punto.

M: El otro día estuvimos viendo $f'(2)$, la calculábamos *utilizando la regla de los cuatro pasos,* ¿cuánto salió $f'(2)$?
E: 4.
M: *Igual lo podríamos haber hecho* $f'(0)$, en vez de haberlo hecho con $f'(2)$, lo podríamos haber hecho con el 0 ¿verdad?, de la misma manera ¿y qué pensáis que hubiera salido?
E: 0.
M: 0, lo sabéis porque va, sabéis ya. Si *hubiéramos hecho en el 1,* ¿qué hubiera salido?
E: 1.
M: No, si lo hubiéramos hecho en el 1.
E: 2.
M: Hubiera salido 2; y si lo hubiéramos hecho en el -1; quien no sepa el porqué, bueno, no importa, es si lo hubiésemos hecho de la misma manera.
E: -2.
M: Hubiese salido -2, etc. Es decir <completa la tabla de valores $x|f'(x)$>, en el punto 3 me hubiera salido 6; en el... 6, hubiese salido 12, etc. ¿eh?
Si yo hubiese hecho en cada uno de esos puntos, me hubiese ido saliendo eso <se refiere a esos valores>. Resulta que la derivada, la derivada, la derivada, se puede considerar como una función, la que a cada valor, a cada número les va a asignar un valor.
[...]
La derivada se puede considerar como una función que a cada punto de la curva le asigna el valor de la pendiente.
E: Tangente.
M: De la tangente en ese punto.
Esa función ¿qué es una función? la que a cada x le asigna una *y* ¿no? bueno, pues, repito otra vez, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, bien, pues esa función, esa función, es la función derivada, ésa es una función que se llama función derivada.
Entonces, ¿cómo se obtiene? es decir, cómo se me da a mí la función y cómo paso a lo que se llama su función derivada.
Le asigna su pendiente, su pendiente es 2x, ésta sería la función derivada de ésta <la función $f(x) = x^2$> ¿de dónde sale eso, de que esta 2x es la función derivada de esta x^2?, pues sale de aplicarle la regla de los cuatro pasos que vimos ayer, pero en vez de a un punto, a la función; es decir, acordaros de la regla de los cuatro pasos.

María introduce en su discurso el significado de $f'(a)$ como pendiente de la recta tangente pero sólo en sentido nominal, ya que en lo que se apoya para la construcción de $f'(x)$ es en suponer que lo mismo que se hace para valores concretos se puede hacer con un x genérico y la expresión que le sale se asume que es $f'(x)$. En la entrevista de desarrollo María indicaba,

> *Pasar de la función a la función derivada* lo hice con una tabla de valores, me refiero que a cada punto de la curva se le asigna su pendiente. Una función, *una regla mediante la cual asignas valores, la función derivada que no le veo dificultad, es una regla más que tú haces.*

En la entrevista de desarrollo, María justifica el procedimiento para obtener funciones derivadas dadas por una regla, la regla de los cuatro pasos utilizando un punto arbitrario x, a partir de la regla de los cuatro pasos en puntos concretos. La modelación del mecanismo de interiorización realizada por María produce la función derivada como *generalización de una regla*, la regla que calcula la derivada de una función en un punto en cuatro pasos, obteniéndose la regla para x general. La modelación de la *interiorización de la acción* dada por la regla para la derivada de una función en un punto, generalizar dicha regla para x genérica permite potenciar la *función derivada como proceso*. En definitiva la función derivada como proceso viene de alguna manera dada "como una regla".

Los principios que fundamentan la práctica de María

A partir de la modelación de la descomposición genética llevada a cabo por María podemos inferir algunas características de su práctica que nos permiten explicarla desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. Una característica es la falta de construcción de contextos que permitan a los estudiantes generar mecanismos de construcción del conocimiento. La inexistencia de contextos que potencien los mecanismos de construcción del conocimiento se manifiesta en la falta de conexión que María establece entre los significados vinculados a los diferentes conceptos matemáticos de la derivada y entre los significados vinculados a los modos de representación. El gráfico 5 representa las características inferidas de la práctica de María.

1. La no integración entre lo analítico y lo gráfico en el uso de los modos de representación. María pretende que los estudiantes lleguen a construir el significado de $f'(a)$ como un proceso pero con dos significados, gráfico y analítico, no vinculados (interiorización analítica e interiorización gráfica). Los significados interiorizados no tienen ninguna presencia posterior. Para ello, María modela acciones que no serán interiorizadas con posterioridad, generalmente en un único modo de representación (más frecuentemente en modo analítico). Para la función derivada, María generaliza el significado de la derivada de una función en un punto dado por un límite como regla. Esta construcción, potenciada por la práctica de María, para $f'(x)$ no se relaciona con el operador derivada. El operador derivada se introduce mediante "reglas de derivación" sin vinculación explícita a los otros conceptos, $f'(a)$ y $f'(x)$. La ausencia de modelaciones de mecanismos de desencapsulación es una manifestación de la poca relevancia dada a los significados, al apoyarse esencialmente en reglas.

Las acciones modeladas permiten a María dar a los alumnos procedimientos algorítmicos para obtener el número $f'(a)$, aspecto sobre el que se apoya para construir la función derivada generalizando el uso de la regla de los cuatro pasos. En este caso, los significados geométricos no desempeñan un papel relevante. La construcción del operador derivada, hecha por María, gira alrededor de las "reglas de derivación" de naturaleza analítica, con ausencia de aspectos geométricos en su construcción. La manera de proceder de María para $f'(a)$ indica la construcción de contextos en los que no se propicia la construcción progresiva de los significados matemáticos al enfatizar los aspectos procedimentales.

Una característica de la práctica de María es la no integración entre lo analítico y lo gráfico en las modelaciones de mecanismos de construcción y acciones. Cuando aparecen ambas representaciones, predomina la analítica y el significado geométrico es meramente "testimonial".

2. Organización y relación de los distintos conceptos. María no considera las relaciones entre conceptos como un aspecto especialmente relevante en la gestión que hace de los distintos conceptos que conforman la noción de derivada. Un aspecto que hay que subrayar de la práctica de María es que, en las modelaciones realizadas para el operador derivada, no se establecen relaciones con los significados de $f'(a)$ y $f'(x)$. La relación entre la función derivada en un punto, $f'(a)$, y la función derivada, $f'(x)$, se establece a través de la generalización de una regla y no de los significados interiorizados de $f'(a)$.

Esta desvinculación de significados entre distintos conceptos puede ser una manifestación de la importancia dada por María al uso de "reglas" o procedimientos de cálculo. La manera de actuar de María pone de manifiesto su interés en que los estudiantes asocien el uso de reglas a los conceptos. La importancia de las reglas en la práctica de María se manifiesta en que en los casos en los que se establece relación entre dos conceptos, por ejemplo entre la función derivada en un punto, $f'(a)$, y la función derivada, $f'(x)$, la relación viene apoyada en una regla. En este sentido, María organiza el contenido matemático apoyándose en dos bloques temáticos sin establecer relaciones explícitas: $f'(a)$, $f'(x)$ por un lado y $D(f)$ por el otro.

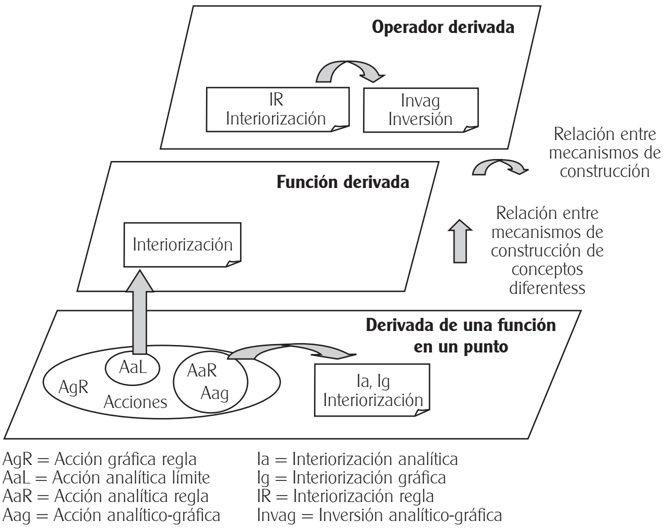


Gráfico 5 Modelación de la descomposición genética de la derivada realizada por María

En resumen, la práctica de María viene caracterizada por el énfasis dado a las reglas y procedimientos para calcular, y la poca presencia de relaciones significativas entre representaciones y entre distintos conceptos. En particular, no aparecen explícitamente las relaciones entre modos de representación. Además, la falta de relaciones se observa, por ejemplo, en la construcción "separada" de $f'(a)$, $f'(x)$ y del operador derivada, y en el hecho de que la relación entre la derivada de la función en un punto, $f'(a)$, y la función derivada, $f'(x)$, se realiza mediante la generalización de una regla. De esta manera, los significados que los estudiantes pueden haber interiorizado de $f'(a)$ no aparecen para apoyar la posible construcción de la idea de función derivada, $f'(x)$, sino como un apéndice de lo realizado anteriormente sin finalidad aparente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados del análisis de la práctica de Juan y María apoyan la idea de que la modelación de la descomposición genética es una herramienta útil para identificar las diferentes características que parecen justificar la práctica del profesor.

La organización y relaciones de los conceptos $f'(a)$, $f'(x)$ y $D(f)$ que realizan los profesores se explicita claramente con el uso de "modelación de la descomposición genética". En el modelo APOS, Asiala *et al.* (1996, p. 11) consideran que, para conseguir la comprensión de un concepto, es necesaria "una colección de procesos y objetos que pueden ser organizados de manera estructurada formando un esquema". La modelación de la descomposición genética utilizada para describir la práctica del profesor permite dar cuenta de cómo éste construye las situaciones de aula para que los estudiantes puedan llegar a organizar la colección de procesos y objetos que constituyen el esquema de la noción de derivada.

Por ejemplo, el gráfico 6 muestra cómo Juan tenía en cuenta las relaciones entre los diferentes conceptos de la noción de derivada como una manera de crear situaciones para potenciar la comprensión del esquema por parte de los estudiantes.

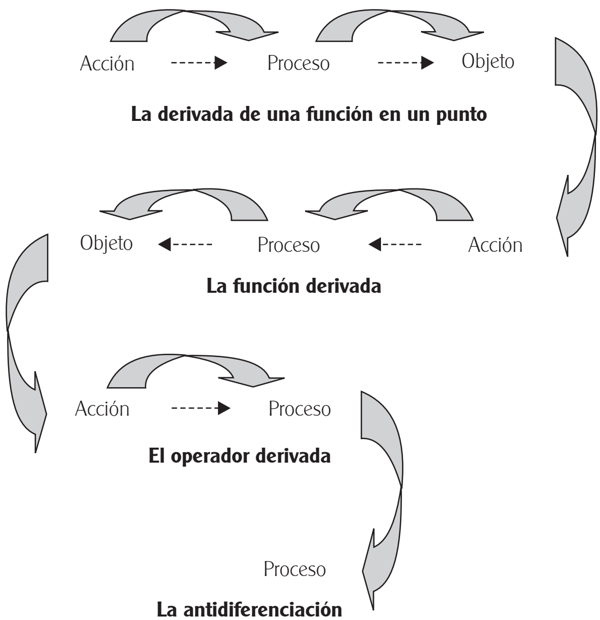


Gráfico 6 Esquema de la noción de derivada "potenciado" por la práctica de Juan

Por otra parte, desde los resultados obtenidos es posible inferir los principios que fundamentan la práctica del profesor y que tienen cierto potencial explicativo. En este sentido, la modelación de la descomposición genética tiene en cuenta las variables siguientes:

- Uso de los sistemas de representación como instrumentos de la práctica: referido a si hay un uso integrado (o bien, qué grado de integración, o bien la ausencia de ésta) de los modos de representación, para modelar mecanismos de construcción.
- Organización de los distintos conceptos y cómo los relaciona: referido a la secuencia y relaciones que se establecen entre los conceptos a través de las relaciones entre modelaciones de mecanismos de construcción.

Estas variables nos ayudan a caracterizar, y por tanto a explicar, la práctica del profesor. Pensamos que estas variables pueden proporcionarnos algunas ideas, aunque debe ser objeto de posteriores investigaciones, sobre las concepciones del profesor relativas a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y sobre las matemáticas escolares. Por tanto, creemos que este trabajo apunta a que "una parte importante de la práctica del profesor" puede explicarse desde sus concepciones y no tanto desde la estructura del currículo que deben gestionar, ya que en nuestra investigación los dos profesores debían gestionar un currículo organizado y estructurado de la misma manera.

El uso de la modelación de la descomposición genética permite identificar las formas de conocer que el profesor potencia para los distintos conceptos y las relaciones entre ellas. De esta manera, el modo en el que el profesor constituye los diferentes contextos para que los estudiantes tengan la posibilidad de generar los mecanismos de construcción de los significados matemáticos "traza" una hipótesis de cómo puede desarrollarse el aprendizaje de los estudiantes. Esta idea está en consonancia con las propuestas de otros investigadores, Simon *et al.* (Simon, 1995, p. 135) cuando utilizan la noción de "trayectorias hipotéticas de aprendizaje (*hypothetical learning trajectory,* en el original)... para referirse a las predicciones del profesor sobre el camino por el que el aprendizaje puede desarrollarse". Por otro lado, Robert y Rogalski (2005, p. 274) introducen la noción de "ruta cognitiva (*cognitive route,* en el original)" entendida como "el contenido matemático procesado durante la lección –conceptos matemáticos, tipos de herramientas usadas (para representar o calcular), tipos de tareas dadas a los estudiantes– puede ser como una ruta cognitiva organizada para los estudiantes".

Por otro lado, la teoría de las funciones semióticas (Godino, 2003) ha sido aplicada para el análisis de "procesos de estudio" con la derivada como tema matemático (Font, 2000; Contreras *et al.*, 2005) y entre los resultados obtenidos señalan "la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada" (Contreras *et al.*, 2005, p. 164) referidos al trabajo del profesor para potenciar dicho paso. El uso de la modelación de la descomposición genética como herramienta de análisis de la práctica del profesor nos ha permitido identificar algunas de las posibles causas de la complejidad vinculada al trabajo del profesor para crear las situaciones en el aula para que sus alumnos puedan comprender el paso de la derivada en un punto a la función derivada, tales como la necesidad de que se vinculen los significados construidos de acuerdo con la descomposición genética prescrita (acción-proceso-objeto) en los distintos modos de representación, y en ligar los conceptos $f'(a)$ y $f'(x)$ mediante mecanismos de encapsulaciones y desencapsulaciones.

Nuestros resultados "complementan", de alguna manera, aspectos de la teoría antropológica de lo didáctico, en el sentido de que de alguna forma el uso de los modos de representación y las relaciones entre conceptos de una noción matemática (identificados mediante la modelación de la descomposición genética) puede aportar información sobre la "tecnología" del profesor, justificaciones del uso de determinadas técnicas didácticas de la praxeología didáctica. Es decir, información sobre el bloque teórico (tecnología + teoría) de la praxeología didáctica.

Terminamos con algunas reflexiones. En primer lugar, vincular la herramienta "modelación de la descomposición genética" a la idea de noción matemática (conjunto de conceptos) más que a conceptos nos permite, como investigadores, indagar sobre las relaciones de los conceptos (en el modelo APOS, organizaciones y relaciones entre maneras de conocer cada concepto). En segundo lugar, el uso de la idea de "modelación de la descomposición genética", para dar cuenta de cómo organiza el profesor los diferentes contextos de aprendizaje para sus estudiantes permite subrayar la dimensión social, ya que el análisis no se refiere a un estudiante concreto, sino al colectivo de la clase, al aportar información de la construcción de conocimiento en interacción entre el profesor y los estudiantes. En este sentido podemos considerar la dimensión sociocultural. En tercer lugar, el modelo APOS desempeña un papel fundamental en su elaboración teórica y uso en la investigación; sin embargo, pensamos que esta herramienta trasciende el uso de un modelo teórico concreto sobre la construcción del conocimiento matemático y puede ser utilizada con otros modelos. Finalmente, los intentos de procesos de cambio en la práctica del profesor pueden venir determinados por intervenciones de formación que ayuden a modificar la modelación de la descomposición genética, "completándola" en el sentido que vayan desarrollando las investigaciones en educación matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., A. Brown, D.J. Devries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education", en J. Kaput, A. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II,* CBMS Issues in Mathematics Education, núm. 6, Washington, American Mathematical Society and Mathematical Association of America, pp. 1-32.

Asiala, M., J. Cottrill, E. Dubinsky y K. Schwingendorf (1997), "The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative", *Journal of Mathematical Behaviour,* vol. 16, núm. 4, pp. 399-431.

Barbé, J., M. Bosh, L. Espinoza y J. Gascón (2005), "Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 59, núms. 1-3, pp. 235-268.

Breidenbach, D., E. Dubinsky, J. Hawks y D. Nichols (1992), "Development of the Process Conception of Function", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 23, núm 3, pp. 247-285.

Contreras A., V. Font, L. Luque y L. Ordóñez (2005), "Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 25, núm. 2, pp. 151-186.

Dubinsky, E. (1996), "Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria", *Educación Matemática,* vol. 8, núm. 3, pp. 24-41.

Duval, R. (1996), "Quel cognif tretenir en didactique des mathématiques?", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 16, núm. 3, pp. 349-380.

Escudero, I. (2003), *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje,* Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.

Escudero, I., y V. Sánchez (1999a), "Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje", *Quadrante. Revista teórica e de Investigaçao,* vol. 8, pp. 85-110.

——— (1999b), "The Relationship between Professional Knowledge and Teaching Practice: The Case of Similarity", en O. Zaslavky (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 305-312.

——— (2002), "Integration of Domains of Knowledge in Mathematics Teachers' Practice", en A.D. Cockburn y E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 2, pp. 177-184.

Font, V. (2000b), "Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno", UNO, *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 25, pp. 21-40.

Franke, M.L., E. Kazemi y D. Battey (2007), "Mathematics Teaching and Classroom Practice", en F. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning Charlotte*, Charlotte, NC., IAP-NCTM, pp. 252-256.

Gavilán, J.M. (2005), *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.

Gavilán, J.M., M.M. García y S. Llinares (2007), "Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 25, núm. 2, pp. 157-170.

Godino, J.D. (2003), *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática* [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf] (marzo de 2006).

Laborde, C. y M.J. Perrin Glorian (2005), "Introduction Teaching Situations as Object of Research: Empirical Studies within Theoretical Perspectives", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 59, núms. 1-3, pp. 1-12.

Leinhardt, G. (1989), "Math Lessons: A Contrast of Novice and Expert Competence", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 52-57.

Llinares, S. (2000), "Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas", en J.P. Ponte y L. Sarrazina (eds.), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia, Actas da Escola de Verao-1999*, Lisboa, Sección de Educación Matemática Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación/Sociedad de Educación y Matemática, pp. 109-132.

Meira, L. (1998), "Making Sense of Instructional Devices: The Emergence of Transparency in Mathematical Activity", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 29, núm. 2, pp. 121-142.

Ponte, J.P. y O. Chapman (2006), "Mathematics Teachers' Knowledge and Practice", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future,* Taiwan y Rotterdam, Sense Publishers, pp. 461-494.

Powell, A.B., J.M Francisco y C.A. Maher (2003), "An Analytical Model for Studying the Development of Learners' Mathematical Ideas and Reasoning Using Videotape Data", *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 22, núm. 4, pp. 405-435.

Robert, A., y J. Rogalski (2005), "A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a French 10th Grade Class", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 59, núms. 1-3, pp. 269-298.

Sánchez-Matamoros, G., M. García y S. Llinares (2006), "El desarrollo del esquema de derivada", *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 24, núm 1, pp. 85-98.

Schoenfeld, A.H. (1998), "Toward a Theory of Teaching-in-context", *Issues in Education,* vol. 4, núm. 1, pp. 1-94.

——— (1999), "Models of the Teaching Process", *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 18, núm. 3, pp. 243-261.

——— (2001), "Purposes and Methods of Research in Mathematics Education", en D. Holton (ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level (An* ICMI *Study),* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 221-236.

Schoenfeld, A.H., J. Minstrell y E. van Zee (1999), "The Detailed Analysis of an Established Teacher's Non-Traditional Lesson", *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 18, núm 3, pp. 281-325.

Simon, M.A. (1995), "Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 26, núm. 2, pp. 114-145.

Simon, M.A., y R. Tzur (1999), "Explicating the Teachers' Perspective from the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 30, núm. 3, pp. 252-264.

Simon, M.A., R. Tzur, K. Heinz, M. Kinzel y M.S. Smith (2000), "Characterizing a Perspective Underlying the Practice of Mathematics Teachers in Transition", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 31, núm. 5, pp. 579-601.

Tzur, R., M.A. Simon, K. Heinz y M. Kinzel (2001), "An Account of a Teacher's Perspective on Learning and Teaching Mathematics: Implications for Teacher Development", *Journal of Mathematics Teacher Education,* vol. 4, núm. 3, pp. 227-254.

DATOS DE LOS AUTORES

José María Gavilán Izquierdo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas,
Universidad de Sevilla, España
gavilan@us.es

María Mercedes García Blanco
Departamento de Didáctica de las Matemáticas,
Universidad de Sevilla, España
mgblanco@us.es

Salvador Llinares Ciscar
Departamento de Innovación y Formación Didáctica,
Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es