

Suplemento / Supplement

Compacidad en celdas aplicada al diseño de zonas electorales

ERIC RINCÓN GARCÍA

MIGUEL ANGEL GUTIÉRREZ ANDRADE ¹

- **Resumen:** El diseño de zonas electorales es un problema que busca garantizar la democracia mediante la aplicación de condiciones tales como: equilibrio poblacional, contigüidad y compactidad geométrica. En este artículo se propone el uso de una nueva medida de compactidad geométrica, que mide la calidad de las zonas electorales construidas mediante una malla formada con celdas cuadradas. Para determinar su eficiencia se diseñó una metodología que permite obtener mallas tan pequeñas como el estudio lo requiera. Finalmente se eligió un caso de estudio, cuya configuración topográfica provoca que algunas medidas de compactidad tradicionales den resultados de calidad muy pobre y, debido a la complejidad computacional del problema, se diseñó un algoritmo basado en recocido simulado. Los resultados obtenidos muestran que la nueva medida favorece la creación de zonas con formas rectas y evita las figuras retorcidas o dispersas, dando como resultado zonas de muy buena calidad.
- **Abstract:** The design of electoral zones is a complex problem which aims at ensuring democracy through the application of conditions such as population balance, contiguity and compactness. This paper proposes a new measure of compactness, which uses a mesh formed with square cells to measure the quality of the electoral zones. For this, we chose a real case whose topographical settings cause some traditional measures of compactness to give very poor quality re-

¹ Facultad de Ingeniería, DIMEI - Departamento de Sistemas, UNAM. E-mail: caracol_loco@yahoo.com y Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Departamento de Ingeniería Eléctrica. E-mail: gamma@xanum.uam.mx, respectivamente. Agradecemos el apoyo financiero al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México. También el apoyo de la Dirección Ejecutiva del Registro Federal de Electores, en particular al Ing. Miguel Ángel Rojano López. Deseamos expresar nuestro agradecimiento al Director de la Revista EconoQuantum, Dr. Willy W. Cortez y a los árbitros anónimos por sus comentarios y sugerencias que hicieron que el artículo se enriqueciera.

sults. Due to the computational complexity of the problem, an algorithm was designed based on simulated annealing. The results show that the new measure favors the creation of high quality zones with straight forms and avoids dispersed or twisted figures while having a minor effect in the population balance.

- **Palabras clave:** Regionalización, distritación electoral, representación ciudadana, geografía electoral, elecciones, gerrymandering, optimización.
- **Clasificación JEL:** C61, C63
- Fecha de recepción: 10/06/2009 Aceptación: 21/10/2009

■ *Introducción*

El diseño de zonas ocurre cuando pequeñas áreas o unidades geográficas básicas (*UGB*) deben ser agrupadas en zonas que resulten aceptables según los requerimientos impuestos por el problema estudiado. Dependiendo del contexto, dichos requerimientos pueden incluir, por ejemplo, la generación de zonas conexas, con la misma cantidad de habitantes, clientes, medios de comunicación, servicios públicos, etcétera. El diseño de zonas aparece en diversas aplicaciones como son la distritación escolar (Ferland & Guénette, 1990. Schoepfle & Church, 1991. Caro, Shirabe, Guignard & Weintraub, 2004. desJardins, Bulka, Carr, Jordan & Rheingans, 2006), territorios de ventas (Hess & Samuels, 1971. Bergéy, Ragsdale & Hoscole, 2003. Ríos-Mercado & Fernández, 2009. Tavares-Pereira, Rui, Mousseau & Roy, 2007), zonas de vigilancia policial (D'Amico, Wang, Batta & Rump, 2002) o áreas de servicios y mantenimiento (Segal & Weinberger, 1977. Muyldermans, Cattrysse, Van Oudheusden & Lotan, 2002. Blais, Lapierre & Laporte, 2003. Shortt, Moore, Coombes & Wymer, 2005) y uso de tierras (Cova & Church, 2000. Macmillan, 2001. Williams, 2002. Shirabe, 2005).

Sin embargo, el caso más conocido por su influencia en los resultados de procesos electorales es el diseño de zonas electorales o distritación política, el cual consiste en agrupar *UGB*, generalmente unidades administrativas, en un número predeterminado de zonas o distritos (Mehrotra, Johnson & Nemhauser, 1998. Cirincione, Darling & O'Rourke, 2000. Bozkaya, Erkut & Laporte, 2003. Baçao, Lobo & Painho, 2005. Bong & Wang, 2006. Chou & Li, 2007). En este caso se busca garantizar la democracia, o al menos dificultar la manipulación de los

procesos electorales, mediante la construcción de distritos conexos, que contengan el mismo número de electores (equilibrio poblacional) y eviten formas retorcidas y alargadas (compacidad geométrica).

De esta forma, el problema de diseño de zonas puede plantearse como un problema de optimización combinatoria, donde la función objetivo busca la mejor combinación entre equilibrio poblacional y compacidad geométrica mientras las restricciones garantizan la conexidad de las zonas. Debe observarse que el equilibrio poblacional y la compacidad geométrica son objetivos que están en competencia, ya que la mejora en uno de ellos puede provocar el deterioro del otro.

El cumplimiento de las restricciones del problema de distritación en cuanto a la conexidad, equilibrio poblacional, tiempos de traslado, etc., es relativamente sencillo de satisfacer dentro de los modelos, ya que se pueden manejar en forma clara y explícita, ya sea en las restricciones o en la función objetivo. El requisito de compacidad geométrica es muy difícil de satisfacer, ya que no existen medidas que resulten adecuadas, para todos los casos, por la gran diversidad de formas y tamaños de las *UGB*. En el caso de distritación electoral, las *UGB* generalmente tienen que ver con tamaños mínimos y máximos de población y, por lo tanto, en zonas despobladas se tienen *UGB* con áreas muy grandes y en zonas urbanas pueden tener un área muy pequeña, de tal manera que al formar los distritos con formas tan variadas, el incluir o excluir alguna *UGB* hace que la forma del distrito se desfigure al igual que las formas de los distritos que están adyacentes. En este trabajo se propone una medida de compacidad geométrica que utiliza celdas cuadradas para promover la creación de zonas con formas rectas. Al aplicarla, en un estudio, se observó que la medida no sólo cumple con el objetivo propuesto, sino que además tiene pocos conflictos con el equilibrio poblacional, dando como resultado zonas de muy buena calidad, por su forma y por el número de electores que contienen.

El artículo se desarrolla de la siguiente manera: en la sección 2 se explica la complejidad del problema tanto por el tamaño del espacio de soluciones como por su complejidad computacional; en la sección 3 se presentan, de manera breve, los antecedentes y características principales del diseño de zonas electorales; en la sección 4 se realiza una breve introducción al concepto de compacidad geométrica y sus dificultades para medirla; en la sección 5 se explica la compacidad por celdas y se define la medida de compacidad propuesta; en la sección 6 se plantea el modelo de optimización utilizado; en la sección 7 se describe un caso de estudio y los resultados obtenidos con la medida propuesta; en la sección 8 se encuentran las conclusiones. Finalmente, en el apéndice se realiza una introducción al algoritmo de recocido simulado.

■ *Complejidad*

Una de las razones por las que el diseño de zonas es un problema difícil se debe al tamaño del espacio de soluciones que, en los problemas reales, generalmente hace irrealizable cualquier tentativa de enumerar implícita o explícitamente todas las soluciones factibles. Aun para un pequeño número de *UGB* y zonas, la cantidad de posibles arreglos es enorme; por ejemplo, el número total de soluciones para dividir n *UGB* en k zonas está dado por el número de Stirling del segundo tipo (Altman, 1997):

$$(1) \quad S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^i \left[\frac{k}{(k-1)!i!} \right] (k-i)^n$$

En casos especiales se puede reducir el tamaño del espacio solución; por ejemplo, si se generan zonas con exactamente r *UGB* cada una de ellas, el número de soluciones está dado por:

$$(2) \quad S'(n, k, r) = \frac{n!}{(r!)^k}$$

O bien, si se considera que las *UGB* están conectadas en una cadena y cada una es contigua solamente a dos vecinos, exceptuando a las ubicadas en los extremos, el número de soluciones está dado por (Baçao, Lobo & Painho, 2005):

$$(3) \quad S''(n, k) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Como se puede ver, incluso en casos muy especiales, el espacio de soluciones crece rápidamente. Aunado a lo anterior se han demostrado los siguientes resultados en términos de complejidad computacional (Altman, 1997. Gilbert, Holmes & Rosenthal, 1985):

Propuesta 1: Crear zonas ajenas con equilibrio poblacional es un problema NP-duro.

Propuesta 2: Crear una zona conexa que minimice el costo asociado a las unidades geográficas que la forman es un problema NP-duro.

Propuesta 3: Crear un plan de zonificación conexo y con equilibrio poblacional es un problema NP-duro.

Propuesta 4: Crear un plan de zonificación que maximice la compacidad geométrica es un problema NP-duro.

Por lo tanto, diseñar zonas conexas con equilibrio poblacional y compacidad geométrica, como ocurre en zonas electorales, es un problema al menos NP-duro y tratar de resolverlo de manera exacta implica tiempos de búsqueda demasiado largos.

■ *Zonas electorales*

El diseño de zonas electorales es un problema que ha sido analizado por su influencia en los resultados de estos procesos. Se han propuesto diferentes normas que regulan la construcción de los distritos y que buscan evitar la manipulación de éstos a favor o en contra de algún partido, candidato o sector social. Se sabe que en 1842, el congreso de Estados Unidos crea su primera ley relacionada con la construcción de distritos electorales, en la cual se establece que los distritos deben ser conexos, para evitar la creación de zonas fragmentadas. Posteriormente, en 1871 añaden el concepto de igualdad poblacional, con lo cual se garantiza el principio “un hombre, un voto”, que busca la igualdad de representación política entre los ciudadanos. Sin embargo, estos dos principios fueron insuficientes para evitar la manipulación conocida como *gerrymandering*² (Chou & Li, 2006), que se caracteriza por la construcción de zonas que buscan disminuir la representación política de un partido mediante la agrupación o dispersión de los votos que lo favorecerían. Por este motivo, en 1901 agregan el concepto de compacidad geométrica para prevenir la creación de zonas con formas irregulares o confusas características del *gerrymandering*. Actualmente, los principios de conexidad, equilibrio poblacional y compacidad geométrica son considerados como imprescindibles en el diseño de zonas electorales en procesos políticos democráticos.

Posteriormente, en los años sesenta, se empiezan a usar las computadoras para generar zonas electorales y se llega a considerar que la automatización de estos procesos podía convertirse en un “antídoto” contra el *gerrymandering* (Vickrey, 1961). En 1963 (Weaver & Hess, 1963) y en 1965 (Hess, Weaver, Siegfeld, Whelan & Zhitlau, 1965) se desarrollan los primeros algoritmos y medidas para el diseño automatizado de zonas electorales con base en los principios de conexidad, equilibrio

² Gerrymandering denota cualquier manipulación injusta en la frontera o forma de las zonas electorales con fines políticos. Este concepto surge en 1812 cuando Elbridge Gerry, gobernador del estado de Massachusetts y quinto vicepresidente de Estados Unidos, cambió los límites de zonas electorales para favorecer al partido republicano. Como una de las zonas “parecía salamandra”, unieron las palabras “Gerry” y “salamander” dando origen al concepto “gerrymander”.

poblacional y compacidad geométrica. A partir de ese momento empezaron a desarrollarse diferentes algoritmos y formas de medir la calidad de los planes de zonificación.

En el 2004 se inició un proceso de redistribución electoral para la República Mexicana. Los lineamientos que debía respetar dicha distribución se encuentran referidos en el acuerdo del Consejo General del IFE CG-104-2004³. En este documento se mencionan los siguientes acuerdos:

1. Los distritos se integrarán con territorio de una sola entidad federativa.
2. Para la determinación del número de distritos que habrá de comprender cada entidad federativa, se observará lo dispuesto en el Artículo 53 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos.
3. Se aplicará el equilibrio demográfico en la determinación de los distritos partiendo de la premisa de que la diferencia de población de cada distrito, en relación con la media poblacional estatal, será lo más cercano a cero.
4. Se procurará la conformación de distritos electorales con mayoría de población indígena. En todo caso se preservará la integridad territorial de las comunidades indígenas.
5. Los distritos tendrán continuidad geográfica tomando en consideración los límites político-administrativos y los accidentes geográficos.
6. En la delimitación de los distritos se procurará obtener la mayor compacidad, de tal forma que el perímetro de los distritos tenga una forma geométrica lo más cercana a un polígono regular. Ningún distrito podrá rodear íntegramente a otro.
7. Para la integración de distritos se utilizará la distribución municipal y seccional vigente. La unidad de agregación mínima será la sección electoral.
8. Los distritos se constituirán preferentemente con municipios completos.
9. Para establecer las cabeceras distritales se considerarán los siguientes parámetros: mayor población, vías de comunicación y servicios públicos. En caso de existir dos o más localidades semejantes y una de ellas sea, en la actualidad, cabecera distrital, prevalecerá esta última.
10. En la conformación de los distritos se procurará optimizar los tiempos de traslado entre los recorridos a su interior, considerando su tamaño, su extensión y la distribución geográfica de sus localidades.

3 Se encuentra disponible en: <http://www.ife.org.mx/documentos/TRANSP/docs/consejo-general/acuerdos/2004/15JUL04/150704ap10.pdf>

Los 10 puntos anteriores del acuerdo del IFE se manejaron dentro del modelo, desarrollado por el IFE, de dos formas diferentes. Específicamente los puntos 1, 2, 4, 5, 7 y 9 se incorporaron a las restricciones del modelo, mientras que los puntos 3, 6, 8 y 10 se incluyeron en la función objetivo.

Cabe mencionar que en este artículo solamente se manejan, dentro de la función objetivo, los puntos 3 y 6 de la lista anterior, que corresponden al equilibrio poblacional y a la compacidad geométrica respectivamente, ya que este trabajo se centra en la implementación de la nueva medida de compacidad y su capacidad de generar zonas de buena calidad cuando compite contra un objetivo de mayor importancia como es el equilibrio poblacional.

■ *Problemática de la compacidad geométrica*

Como ya se mencionó, los criterios de conexidad, equilibrio poblacional y compacidad geométrica son considerados como imprescindibles en el diseño de zonas electorales y se han propuesto diferentes formas para medirlos. En particular se ha observado que los métodos propuestos para medir el equilibrio poblacional y generar zonas conexas producen resultados muy parecidos.

Sin embargo, las propuestas para medir la compacidad geométrica pueden producir resultados muy diferentes y, en algunos casos, incongruentes con el principio que dio origen a este concepto (Altman, 1998). De hecho, la compacidad geométrica no ha sido definida de manera exacta, dando como resultado la creación de una gran variedad de métodos matemáticos, que buscan medir de manera cuantitativa las irregularidades en la forma de las zonas (Niemi, Grofman, Carlucci & Hofeller. 1990). No obstante, ninguna de las medidas propuestas hasta el momento ha resultado totalmente satisfactoria y en algunos casos se ha probado que sus resultados son incongruentes al aplicarlas a ciertas figuras geométricas (Young, 1988).

Más aún, la capacidad para generar zonas compactas en aplicaciones reales puede verse disminuida al competir con otros criterios, como el equilibrio poblacional, o al ser aplicadas en configuraciones topográficas que dificulten su desempeño. Por este motivo se acepta la combinación de diferentes métodos que en conjunto sean capaces de favorecer las formas deseadas, con lo cual se pueden crear soluciones de mejor calidad, pero la medida obtenida será difícil de entender y de aplicar.

Por lo anterior, la elección del método, o combinación de métodos, adecuado se convierte en una tarea complicada que recae en las organi-

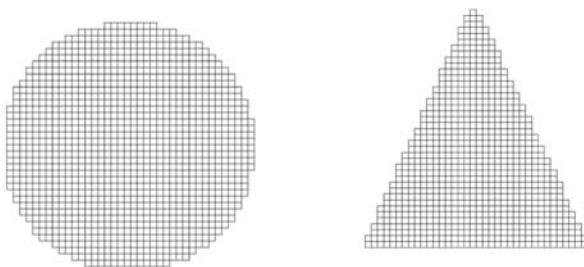
zaciones encargadas de la distritación de cada país, dando como resultado el uso de diferentes medidas.

- *Compacidad por celdas*

En esta sección se define una nueva medida que cuantifica, de manera sencilla, las irregularidades de las zonas diseñadas. Se explica el concepto de compacidad por celdas, que se utilizará para la construcción de zonas electorales.

La primera consideración es que toda figura debe ser vista y analizada como un conjunto de celdas cuadradas del mismo tamaño, ver Figura 1.

Figura 1
Círculo y triángulo formados por 1,169 y 757 celdas cuadradas respectivamente



Fuente: Elaboración propia

Debe observarse que cada celda y sus lados sólo tienen dos opciones, formar parte del contorno de la figura o estar en el interior de ésta. A partir de lo anterior se presentan las siguientes definiciones:

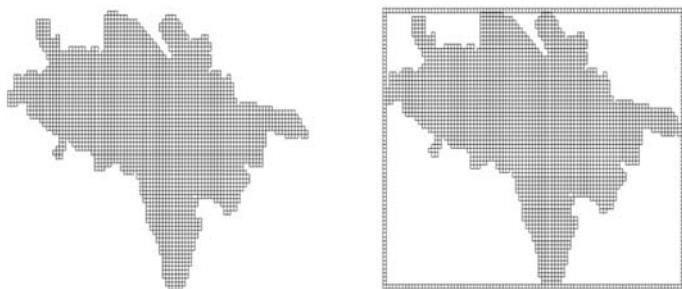
Definición 1: El perímetro es la suma de longitudes de los lados que se encuentran en el contorno de la figura.

Definición 2: El perímetro en celdas es la suma de las celdas que forman el contorno de la figura.

Se observa que una zona con forma retorcida, alargada y dispersa tendrá un perímetro y perímetro en celdas mucho mayor que el mínimo rectángulo, formado por celdas cuadradas, que la inscribe, ver Figura 2. Por lo tanto, la máxima compacidad se obtendrá cuando la zona y el rectángulo que la inscribe tengan, aproximadamente, el mismo perímetro

y perímetro en celdas. Con lo cual se favorece el diseño de zonas con pocas irregularidades y formas rectas.

Figura 2
Zona analizada y mínimo rectángulo que la inscribe



Fuente: Elaboración propia

Para determinar la compacidad de las zonas se realizará la siguiente operación

$$(4) \quad \frac{PC_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z} + \frac{P_Z}{P_R}$$

Donde:

P_Z es el perímetro de la zona.

PC_Z es el perímetro en celdas de la zona.

P_R es el perímetro del mínimo rectángulo que inscribe a la zona.

PC_R es el perímetro en celdas del mínimo rectángulo que inscribe a la zona.

De esta forma, $\frac{PC_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z}$ y $\frac{P_Z}{P_R}$ medirán la diferencia entre el perímetro y el perímetro en celdas respectivamente, de la zona y el cuadrado que la inscribe.

Como el perímetro y el perímetro en celdas del rectángulo sólo se diferencian en 4 unidades, se puede hacer la siguiente simplificación

$$(4) \quad \frac{PC_Z + P_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z}$$

Por último, se observa que para todas las zonas $\frac{P_Z}{P_R} > 1$ y $\frac{PC_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z} > 2$, por lo cual se realiza el siguiente ajuste

$$(6) \quad Comp = \frac{PC_Z + P_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z} - 3$$

De esta forma, las zonas más compactas tendrán valores muy cercanos a cero. Debe notarse que la ecuación propuesta requiere de pocos pasos para ser calculada, lo cual favorecerá el desempeño de cualquier algoritmo que requiera calcular en varias ocasiones el costo de las zonas diseñadas.

■ *Modelo*

Como se mencionó anteriormente, en este artículo se diseñarán zonas electorales tomando en cuenta los principios de equilibrio poblacional, conexidad y compacidad geométrica. En esta sección se presenta un modelo que toma en cuenta estos principios para resolver el diseño de zonas como un problema de optimización combinatoria.

La función objetivo minimiza el costo del equilibrio poblacional y la compacidad geométrica, mientras que la conexidad será garantizada mediante las restricciones.

El equilibrio poblacional será medido con la fórmula usada por el Instituto Federal Electoral de México (IFE) en la redistribución que actualmente está vigente.

$$(7) \quad \sum_{S \in R} \left(\frac{100P_T}{d_a(P_N / 300)} \right)^2 \left(\frac{P_S}{P_T} - \frac{1}{n} \right)^2$$

Donde:

P_N es la población nacional electoral

P_T es la población electoral de la entidad.

P_S es la población electoral del distrito S .

d_a es el porcentaje de desviación poblacional máxima aceptable para la entidad.

$R = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ donde r es el número de distritos electorales que se deben generar en la entidad.

300 corresponde al número total de distritos electorales del país.

De esta forma, mientras menor sea el valor obtenido por una solución, mayor será su equilibrio poblacional. De hecho, se espera que las zonas propuestas como solución final tengan un valor en el intervalo $[0,1]$, ya que valores mayores indicarían un desequilibrio muy alto.

Para medir la compacidad geométrica de cada zona se utilizará la compacidad en celdas explicada anteriormente.

$$(8) \quad Comp = \frac{PC_Z + P_Z}{PC_R} + \frac{PC_R}{PC_Z} - 3$$

Donde:

P_Z es el perímetro de la zona.

PC_Z es el perímetro en celdas de la zona.

P_R es el perímetro del mínimo rectángulo que inscribe a la zona.

PC_R es el perímetro en celdas del mínimo rectángulo que inscribe a la zona.

También en este caso, las zonas más compactas tendrán valores más pequeños e idealmente se espera que las zonas propuestas como solución final tengan valores en el intervalo $[0,1]$. Sin embargo, debe notarse que se le dará prioridad al equilibrio poblacional, aunque esto implique que las zonas diseñadas obtengan valores de compacidad geométrica mayores que 1.

Para garantizar la conexidad de las zonas se utilizarán las restricciones propuestas por Shirabe (Shirabe, 2005). Estas ecuaciones establecen una analogía entre encontrar un camino para unir cualesquiera dos *UGB* y el movimiento que seguiría un fluido desde múltiples fuentes hasta un sumidero. De esta forma, una zona es conexa si el abastecimiento enviado desde cada vértice llega al sumidero sin salir de la sub-red.

$$(9) \quad \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} y_{j|s} - \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} y_{j|s} \geq x_{is} - Mw_{is} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(10) \quad \sum_{i \in I} w_{is} = 1 \quad \forall s \in R$$

$$(11) \quad \sum_{\{j|(i,j) \in A\}} y_{j|s} \leq (M-1)x_{is} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(12) \quad x_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(13) \quad w_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(14) \quad y_{ijs} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A$$

Donde:

$I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ n es el número de UGB consideradas en el problema.

$R = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ r es el número de zonas que se deben generar.

$$w_{is} = \begin{cases} 1 & \text{si la UGB } i \text{ de la zona } s \text{ es un sumidero} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i \in I, \quad s \in R$$

$$A = \{(i, j) : \text{las UGB } i, j \text{ son contiguas}\}$$

$$x_{is} = \begin{cases} 1 & \text{si la UGB } i \text{ pertenece a la zona } s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i \in I, \quad s \in R$$

y_{ijs} es una variable continua no negativa que representa la cantidad de flujo desde $UGB i$ hasta la $UGB j$ en la zona s .

M es un número mayor que la cantidad de variables asociadas a las UGB .

Antes de presentar el modelo se agrega la siguiente notación:

$Z_s = \{i : x_{is} = 1\}$, es el conjunto de UGB que forman la zona s con $s \in R$.

$P = \{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_r\}$, es un plan de zonificación.

$C_1(P)$, costo de equilibrio poblacional asociado al plan de zonificación P .

$C_2(P)$, costo de compacidad geométrica asociado al plan de zonificación P .

α_1, α_2 son factores de ponderación

De esta forma, cada zona Z_s , está formada por las UGB que le fueron asignadas, $x_{is} = 1$, y el plan de zonificación P se encuentra formado por las zonas $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_r$,

Utilizando esta notación se plantea el problema de la siguiente manera:

$$(15) \quad \text{Minimizar} \quad C(P) = \alpha_1 C_1(P) + \alpha_2 C_2(P)$$

Sujeto a:

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n x_{is} \geq 1 \quad \forall s \in R$$

$$(17) \quad \sum_{s=1}^r x_{is} = 1 \quad \forall i \in I$$

$$(18) \quad \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{ijs} - \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jis} \geq x_{is} - Mw_{is} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(19) \quad \sum_{i \in I} w_{is} = 1 \quad \forall s \in R$$

$$(20) \quad \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} y_{jis} \leq (M-1)x_{is} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(21) \quad x_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(22) \quad w_{is} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in R$$

$$(23) \quad y_{ijs} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Con este planteamiento, la función objetivo busca que el resultado óptimo tenga el mejor equilibrio poblacional y la mayor compacidad geométricamente posible. La restricción (16) garantiza que en cada zona se incluya al menos una *UGB*. La restricción (17) obliga a cada *UGB* a pertenecer exactamente a una zona. Por lo tanto, las restricciones (16) y (17) garantizan que todo plan de zonificación factible esté formado por el número exacto de zonas ajenas entre sí y que se incluyan todas las *UGB*. Las restricciones (18), (19) y (20) garantizan la conexidad de las zonas construidas y las restricciones (21), (22) y (23) indican el tipo de variables utilizadas. En particular, la restricción (21) indica la imposibi-

lidad de dividir o fraccionar las *UGB*, lo cual complica la construcción de zonas compactas.

En este punto es importante destacar que los resultados obtenidos en este trabajo no son comparables con la distritación propuesta por el IFE para las elecciones del 2006, ya que las funciones objetivo son distintas y, por lo tanto, las soluciones propuestas buscarán el equilibrio entre criterios diferentes. Más aún, el objetivo no es competir con los distritos, de muy buena calidad, diseñados por el IFE, sino proponer una nueva medida de compacidad geométrica, eficiente y capaz de generar zonas con formas rectas incluso en escenarios complicados.

■ *Aplicación*

Para determinar la eficiencia de la compacidad en celdas se aplicó el modelo propuesto al estado de Baja California Norte, México. En este estado viven 2,487,367 electores y se encuentra formado por 319 *UGB* que deben ser divididas en 8 zonas electorales, con un porcentaje de desviación poblacional máximo $d_s=15\%$, de acuerdo con lo estipulado por el IFE. Por último, se considerará una población nacional de 97,483,412 electores, según el censo practicado por INEGI en el año 2000.

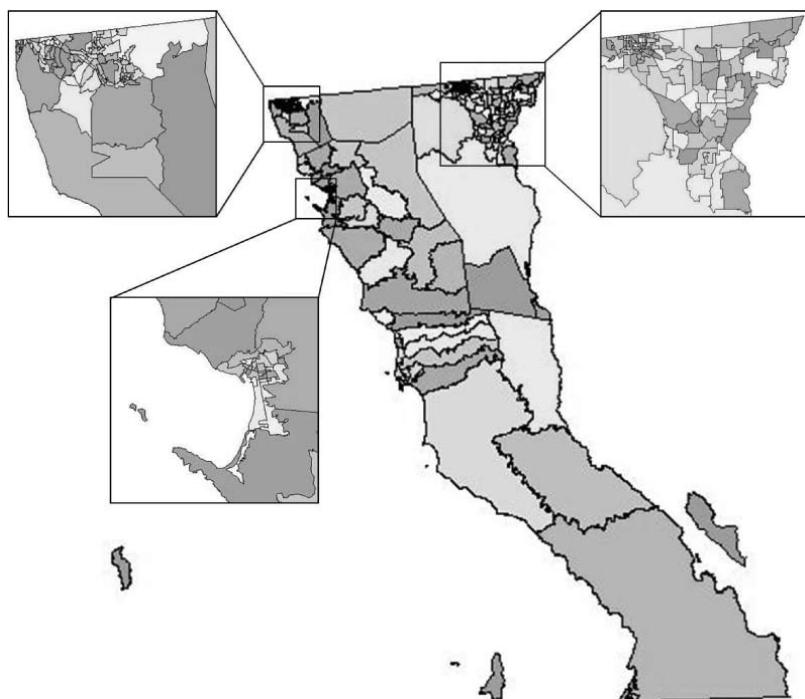
En la Figura 3 se presentan las 319 *UGB* que forman el estado de Baja California Norte y se puede observar su gran variedad en formas y tamaños, que lo convierte en uno de los estados más complicados en la República Mexicana, al tratar de diseñar zonas geométricamente compactas. Por lo anterior se considera que si los resultados son satisfactorios en este caso, serán de buena calidad, al aplicar el mismo modelo, en el resto de la República Mexicana.

A fin de aplicar la compacidad por celdas, el estado fue dividido en celdas cuadradas de 10 metros por lado. Para hacerlo se utilizó el sistema de información geográfica Arcview 3.0, que permite obtener, a partir de los archivos originales en formato shape, archivos en formato grid con celdas cuadradas del tamaño que se desee. De esta forma, cada unidad geográfica es transformada en un conjunto de celdas cuadradas.

Para conocer el número de celdas y lados que forman el perímetro de cada *UGB*, así como el perímetro que comparten con las unidades vecinas, se diseñó un scrip en Avenue⁴, que obtiene esta información del archivo grid y la envía a archivos de texto, que son utilizados posteriormente, para calcular el costo de la compacidad de cada zona. Debe

⁴ Avenue es el lenguaje de programación de Arcview, utilizado para personalizar y desarrollar aplicaciones en este sistema de información geográfica.

Figura 3
Unidades geográficas básicas de Baja California Norte



Fuente: Dirección de cartografía electoral del Registro Federal de Electores, IFE.

observarse que el área de cada celda es de 100m², pero la misma metodología puede aplicarse con celdas más grandes o pequeñas según lo requiera el problema, por ejemplo, en el diseño de zonas para una ciudad podrían construirse celdas de 1 metro por lado.

Para determinar los valores de los factores de ponderación, α_1 y α_2 , se realizaron varias corridas del algoritmo heurístico y se observó cómo variaban los costos de equilibrio poblacional y compacidad geométrica tanto en las soluciones visitadas como en las soluciones finales. Se notó que se favorecían las soluciones con un buen equilibrio poblacional, dando como resultado valores relativamente altos en la compacidad geométrica. Para equilibrar esta situación, en ambas medidas se asignó un valor de ponderación bajo al equilibrio poblacional en comparación con el valor asignado a la compacidad geométrica: $\alpha_1 = 0.1$ y $\alpha_2 = 5$.

El algoritmo de optimización calcula en cada iteración, el número de habitantes, el perímetro y el perímetro en celdas de cada zona, para establecer el costo de cada solución, con el cual se determina si las nuevas soluciones son aceptadas o rechazadas según los criterios de recocido simulado. En el anexo se incluyen detalles sobre el funcionamiento de este algoritmo.

Los resultados obtenidos se presentan en la Cuadro 1. Para cada zona se observa que el costo de equilibrio poblacional se encuentra en el intervalo [0,1] y el porcentaje de desviación poblacional es inferior al 15% permitido, siendo más penalizadas las zonas cuya cantidad de electores se aleja del ideal, aproximadamente 310,921.

Cuadro 1
Costos de las zonas construidas por recocido simulado

| Zona | Electores | Equilibrio Poblacional | Desviación poblacional (%) | Compacidad Geométrica |
|------|-----------|------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1 | 322 249 | 0.0540150 | 3.64 | 0.020923 |
| 2 | 269 506 | 0.7219569 | 13.32 | 0.238686 |
| 3 | 305 902 | 0.0106026 | 1.61 | 4.023066 |
| 4 | 315 242 | 0.0078595 | 1.399 | 0.278721 |
| 5 | 283 741 | 0.3109521 | 8.74 | 0.057087 |
| 6 | 322 497 | 0.0564060 | 3.72 | 0.064701 |
| 7 | 340 267 | 0.3624934 | 9.44 | 0.096957 |
| 8 | 327 963 | 0.1222492 | 5.48 | 0.093032 |

Fuente: Elaboración propia.

En el caso de la compacidad geométrica, se obtienen costos menores que 1 en la mayoría de las zonas, excepto en la zona 3, cuyo costo se ve afectado, principalmente, por la forma del estado, ver Figura 4. De esta forma, las zonas diseñadas son congruentes con los objetivos propuestos, ya que se favorecen las formas rectas evitando figuras retorcidas, alargadas y dispersas, al tiempo que se obtienen costos bajos de equilibrio poblacional.

En la Cuadro 2 se presentan los resultados obtenidos al favorecer el equilibrio poblacional. Destacan los porcentajes de desviación poblacional tan bajos y los costos de compacidad geométrica tan altos. Este ejemplo permite ver con claridad la competencia que existe entre el equilibrio poblacional y la compacidad geométrica, ya que al favorecer a uno de los objetivos se deteriora la calidad del otro.

Figura 4
Zonas generadas al aplicar la compacidad por celdas



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 2
Costos de las zonas construidas
al favorecer el equilibrio poblacional

| ZONA | Electores | Equilibrio Poblacional | Desviación poblacional (%) | Compacidad Geométrica |
|------|-----------|------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1 | 301 630 | 0.03633388 | 2.99 | 0.18941 |
| 2 | 304 646 | 0.01657329 | 2.02 | 0.35617 |
| 3 | 303 335 | 0.02422199 | 2.44 | 6.43412 |
| 4 | 303 288 | 0.02452307 | 2.45 | 5.61276 |
| 5 | 313 599 | 0.00301898 | 0.86 | 1.62502 |
| 6 | 321 579 | 0.04781456 | 3.43 | 0.91425 |
| 7 | 310 409 | 0.00011029 | 0.16 | 0.62131 |
| 8 | 328 881 | 0.13577420 | 5.77 | 0.62742 |

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5 se pueden observar las zonas obtenidas y sobresalen las formas de las zonas 3 y 5, dos de las zonas peor evaluadas por la compacidad en celdas, por sus contornos retorcidos que podrían despertar sospechas de una manipulación de tipo gerrymandering. Incluso la zona 4 obtiene un costo de compacidad elevado, debido a su perímetro tan irregular, que se aleja de los trazos rectos deseados.

Figura 5
Zonas generadas al favorecer al equilibrio poblacional



Fuente: Elaboración propia.

■ *Conclusiones*

Se utilizó la medida de compacidad en celdas para calcular la compacidad geométrica de zonas electorales generadas por un algoritmo heurístico basado en recocido simulado. Se observó que esta medida evita la formación de zonas alargadas y retorcidas y su eficiencia no se encontró limitada, ni fue limitante para lograr un buen equilibrio poblacional, con lo cual, los planes de distritación obtenidos difícilmente podrían ser rechazados u objetados.

Más aún, la sencillez de las operaciones propuestas permiten que cualquier algoritmo requiera muy poco tiempo de ejecución para calcular la compacidad en celdas y, por lo tanto, mejora la eficiencia en la búsqueda de soluciones con respecto a otras medidas de compacidad geométrica. Esta característica la hace muy valiosa cuando se diseñan zonas en muchos escenarios, como ocurre en las distritaciones realizadas en los 32 estados de la República Mexicana.

Finalmente, se advierte que el uso de un sistema de información geográfica para generar las celdas requeridas por la medida permite hacer un análisis tan fino como lo requiera el proyecto, sin importar la extensión o configuración topográfica del espacio geográfico estudiado. De hecho, gracias al trabajo realizado en la dirección de cartografía del IFE, es posible aplicar este método en toda la República Mexicana.

- *Apéndice*
Recocido simulado

Recocido Simulado es una de las metaheurísticas que, por su simplicidad y buenos resultados en numerosos problemas, se ha convertido en una herramienta muy popular, con aplicaciones en diferentes áreas de optimización (Glover, Ghaziri, González, Laguna, Moscato & Tseng, 1996). El concepto fue introducido a inicios de la década de los ochenta y de manera independiente por Kirkpatrick (Kirkpatrick, Gellat & Vecchi, 1983) y Cerny (Cerny, 1985).

Su fundamentación se basa en el trabajo de Metropolis en el campo de la termodinámica estadística (Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller & Teller, 1953), en el cual se modela el proceso de recocido de sólidos simulando los cambios energéticos en un sistema de partículas conforme decrece la temperatura, hasta converger a un estado estable (congelado).

El modelo diseñado por Metropolis considera las leyes de la termodinámica para aproximar la probabilidad de un incremento energético de magnitud δE a una temperatura t mediante la ecuación

$$A.1 \quad P[\delta E] = \exp(-\delta E / kt)$$

Donde k es la constante de Boltzmann.

En el algoritmo de Metropolis se genera una perturbación aleatoria en el sistema y se calculan los cambios de energía resultantes: si hay una caída energética, el cambio se acepta automáticamente; si se produce un incremento energético, el cambio será aceptado con una probabilidad dada por (9). El proceso se repite durante un número predeterminado de iteraciones hasta que el sistema está “congelado”.

Por otro lado, el algoritmo de recocido simulado inicia con una solución y en cada iteración se genera de manera aleatoria una solución vecina. Si la solución vecina mejora el valor de la función objetivo con respecto a la solución actual, esta última es reemplazada. Cuando la nueva solución no mejora el valor de la función objetivo, se puede aceptar el cambio de la solución actual con cierta probabilidad dada por:

$$A.2 \quad p = \exp\left(-\frac{f(P_A) - f(P_B)}{T}\right)$$

Donde $f(P_A)$ es el costo de la solución actual, $f(P_B)$ es el costo de la solución vecina y T es un parámetro de control llamado temperatura del

proceso. El valor de la temperatura se va disminuyendo conforme el algoritmo avanza, pero cada valor que toma es mantenido estable durante cierto número de iteraciones, para permitir que el algoritmo explore distintas soluciones con la misma probabilidad de aceptarlas. Debe observarse que al inicio, cuando la temperatura es alta, se tiene una mayor probabilidad de aceptar soluciones inferiores, lo cual permite la exploración del espacio solución y evita la convergencia prematura a mínimos locales. Sin embargo, conforme disminuye el valor de la temperatura, el algoritmo se hace más selectivo y difícilmente acepta soluciones inferiores, iniciando una búsqueda que lo guía hacia un mínimo local. Finalmente, el algoritmo es detenido cuando la temperatura alcanza un valor límite y devuelve la mejor solución encontrada.

■ *A.1 Solución Inicial*

El primer paso del algoritmo consiste en construir una solución inicial factible, para lo cual selecciona de manera aleatoria r *UGB* que asigna a zonas diferentes y las marca como *UGB* no disponibles. Después se realizan las siguientes instrucciones hasta que todas las *UGB* están marcadas como no disponibles:

- Elegir una zona.
- Generar una lista con las *UGB* disponibles que colindan con ella.
- Seleccionar una *UGB* de la lista.
- Incluir en la zona la *UGB* elegida y marcarla como no disponible.

De esta forma se obtiene una solución factible con r zonas conexas ajenas que incluyen a todas las *UGB*, cuya calidad no necesariamente es buena pero que podrá mejorarse en el proceso de búsqueda.

■ *A.2 Solución vecina*

Como se explicó anteriormente, el algoritmo inicia con la construcción de una solución factible y, durante el proceso de búsqueda y mejora, se garantizará que las nuevas soluciones conserven esta característica. Para generar una solución vecina se elige de manera aleatoria una zona y se genera una lista con las *UGB* que pueden ser enviadas a una zona contigua. Por lo tanto, en la lista se incluyen las *UGB* que se encuentran en colindancia con otras zonas y que, al ser cambiadas, no provocan una desconexión en la zona a la cual pertenecen. Finalmente, se selecciona aleatoriamente una *UGB* de la lista y es cambiada a la zona con la cual colinda; en caso de que

colinde con dos o más zonas se hace una elección aleatoria. En caso de que la zona elegida inicialmente esté formada por una sola *UGB* se evita el cambio, ya que esto implicaría una disminución en el número de zonas.

Siguiendo este procedimiento, cada solución vecina es una solución factible que se diferencia de la anterior sólo por la ubicación de una *UGB*. Se debe mencionar que es importante elegir de manera aleatoria las *UGB* que son cambiadas para evitar que el algoritmo favorezca algunas soluciones y para aumentar las posibilidades de visitar un mínimo global.

■ *Bibliografía*

Altman, M. (1997). "Is Automation the Answer: The Computational Complexity of Automated Redistricting", *Rutgers Computer and Law Technology Journal*, 23(1), pp. 81-141.

Altman, M. (1998). "Traditional Districting Principles: Judicial Myths vs. Reality". *Social Science History*, 22(2), pp. 159-200.

Baçao, F., Lobo, V., Painho, M. (2005). "Applying genetic algorithms to zone design". *Soft Comput*, 9, pp. 341-348.

Bergey, P. K., Ragsdale, C. T., Hoskote, M. (2003). "A Simulated Annealing Genetic Algorithm for the Electrical Power Districting Problem". *Annals of Operations Research*, 121, pp. 33-55.

Blair, D. J., Biss, T. H. (1967). "The Measurement of Shape in Geography: An Appraisal of Methods and Techniques". *Bulletin of Quantitative Data for Geographers*, 11, Nottingham University.

Blais, M., Lapierre, S. D., Laporte, G. (2003). "Solving a home-care districting problem in an urban setting". *Journal of the Operational Research Society*, 54, pp. 1141-1147.

Bong, C. W., Wang, Y. C. (2006). "A Multiobjective Metaheuristic for Spatial-based Redistricting". *Int. J. Services Operations and Informatics*, 1(1y2), pp. 146-164.

Bozkaya, B., Erkut, E., Laporte, G. (2003). "A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting". *European Journal of Operational Research*, 144, pp. 12-26.

Bribiesca, L. (1997). "Measuring 2-D shape compactness using the contact perimeter". *Computers Math. Applic.* 33(11), pp. 1-9.

Caro, F., Shirabe, T., Guignard, M., Weintraub, A. (2004). "School redistricting: embedding GIS tools with integer programming". *Journal of the Operational Research Society*, 55, pp. 836-849.

Cerny, V. (1985). "A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45, pp. 41-55.

Chou, C., Li, S. P. (2006). "Taming the Gerrymander-Statistical physics approach to Political Districting Problem". *Physica A*, 369, pp. 799–808.

Chou, C., Li, S. P. (2007). "Spin systems and Political Districting Problem". *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 310, pp. 2889–2891.

Cirincione, C., Darling, T. A., O'Rourke, T. G. (2000). "Assessing South Carolina's 1990s congressional districting". *Political Geography*, 19, pp. 189–211.

Cova, J. T., Church, R. L. (2000). "Contiguity Constraints for Single-Region Site Search Problems". *Geographical Analysis*, 32(4), pp. 306–29.

D'Amico, S., Wang, S., Batta, R., Rump, C. (2002). "A simulated annealing approach to police district design". *Computers & Operations Research*, 29, pp. 667–684.

desJardins, M., Bulka, B., Carr, R., Jordan, E., Rheingans, P. (2006). "Heuristic search and information visualization methods for school redistricting". *AI Magazine*, 28(3), pp. 59–72.

Ferland, J., Guenette, G. (1990). "Decision Support System for the School Districting Problem". *Operations Research*, 38(1), pp. 15–21.

Gilbert, K. C., Holmes, D. D., Rosenthal, R. E. (1985). "A Multiobjective Discrete Optimization Model for Land Allocation". *Management Science*, 31(12), pp. 1509–1522.

Glover, F., Ghaziri, H. M., González, J. L., Laguna, M., Moscato, P., Tseng, F. T. (1996). *Optimización heurística y redes neuronales*. Ed. Paraninfo, Madrid, España .

Hayes, B. (1996). "Machine politics". *American Scientist. Research triangle park*, 84(6), pp. 522-526.

Hess, S. W., Weaver, J. B., Siegfeldt, H. J., Whelan, J. N., Zitzlau, P. A. (1965). "Nonpartisan Political Redistricting by Computer". *Operations Research*, 13(6), pp. 998–1006.

He, S., Samuels, S. (1971). "Experiences with a Sales Districting Model: Criteria and Implementation". *Management Science*, 18(4), Application Series, Part 2, Marketing Management Models, pp. 41-54.

I.F.E. (2004). *Gaceta electoral*. I.F.E., 18, pp. 119-134.

Kirkpatrick, S., Gellat, C. D. Vecchi, M. P. (1983). "Optimization by simulated annealing". *Science*, 220, pp. 671-680.

Macmillan, W. (2001). "Redistricting in a GIS environment: An optimisation algorithm using switching-points". *Journal of geographical systems*, 3, pp. 167-180.

Mehrotra, A., Johnson, E. L., Nemhauser, G. L. (1998). "An Optimization Based Heuristic for Political Districting". *Management Science*, 44(8), pp. 1100-1114.

Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., Teller, E. (1953). "Equation of state calculation by fast computing machines". *Journal of Chemistry Physics*, 21, pp. 1087- 1091.

Muyldermans, L., Cattrysse, D., Van Oudheusden, D., Lotan T. (2002). "Districting for salt spreading operations". *European Journal of Operational Research*, 139, pp. 521–532.

Niemi, R. G., Grofman, B., Carlucci, C., Hofeller, T. (1990). "Measuring Compactness and the Role of a Compactness Standard in a Test for Partisan and Racial Gerrymandering", *Journal of Politics*, 52(4), pp. 1155-1181.

Ríos-Mercado, R. Z., Fernández, E. (2009). "A reactive GRASP for comercial territory design problem with multiple balancing requirements". *Computers & Operations Research*, 36(3), pp 755–776.

Schoepfle, B., Church, R. (1991). "New network representation of a classic school districting problem". *Socio-Econ Plann Sci.* 25(3), pp. 189-197.

Segal, M., Weinberger, D. (1977). "Turfing". *Operations Research*, 25(3), 367-386.

Shirabe, T. (2005). "A Model of Contiguity for Spatial Unit Allocation". *Geographical Analysis*, 37, pp. 2-16.

Shortt, N. K., Moore, A., Coombes, M., Wymer, C. (2005). "Defining regions for locality health care planning: A multidimensional approach". *Social Science & Medicine*, 60, pp. 2715–2727.

Tavares-Pereira, F., Rui, J., Mousseau, V., Roy, B. (2007). "Multiple criteria districting problems: The public transportation network pricing system of the Paris region". *Ann Oper Res.* 154, pp. 69–92.

Vickrey, W. (1961). "On The Prevention of Gerrymandering". *Political Science Quarterly*, 76(1), 105-110.

Weaver, J. B., Hess, S. W. (1963). "A Procedure for Nonpartisan Districting: Development of Computer Techniques". *The Yale Law Journal*, 73(2), pp. 288-308.

Williams, J. C. (2002). "A Zero-One Programming Model for Contiguous Land Acquisition". *Geographical Analysis*, 34(4), pp. 330–49.

Young, H. P. (1988). "Measuring the Compactness Of Legislative Districts". *Legislative Studies Quarterly*. 13(1), pp. 105-115.