La función de crecimiento de Richard y los modelos de crecimiento neoclásicos

LEOBARDO PLATA PÉREZ
PEDRO I. GONZÁLEZ RAMÍREZ
EDUARDO CALDERÓN SÁNCHEZ[1]

- **Resumen:** En este trabajo analizamos los trabajos clásicos de Solow-Swan (1956) y Ramsey (1928) retomando la posibilidad de diferentes trayectorias en la función de producción. Para este propósito se incorpora, en el análisis de ambos modelos, la función de crecimiento de producción de Richards. Encontramos que el modelo de Solow y Ramsey, con una función de producción neoclásica, representa solo casos específicos de los mismos modelos con la función de producción de Richards. Dentro del modelo de Solow aparecen de manera natural las trampas de pobreza. Este trabajo es una nueva versión ampliada y corregida de Plata L. y Calderón E (2009) aparecido en esta revista.

- **Palabras clave:** Crecimiento económico, función de crecimiento de Richard, trampas de pobreza, modelos de crecimiento neoclásico.

- **Clasificación JEL:** O41,C61.

- **Abstract:** We investigate the consequences of introducing Richard's Growth function as a production function in Solow-Swan and Ramsey models. We found that both models, with neoclassical production function, are special cases of the same model if we use Richards production function. In the Solow model, poverty traps occur in a natural way. This work is an expanded and revised version of Plata L. and Calderón E. (2009) published in this journal.

- **Key words:** Richard's growth function, neoclassical growth models, poverty traps, economic growth.

- **JEL Classification:** O41,C61.

- Recepción: 12/11/2014 Aceptación: 26/11/2015

[1] Facultad de Economía de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México. E-mail: lplata@uaslp.mx; pedro.gonzalez@uaslp.mx; jecs@hotmail.com.

■ *Introducción*

De acuerdo al modelo de Solow, la economía puede alcanzar dos estados estacionarios, uno de ellos con poco sentido económico, pues tanto la producción como el capital per cápita son iguales a cero. El otro estado estacionario se alcanza por la forma en que está construida la función de producción neoclásica; el supuesto decisivo para que esto suceda es el relacionado con la productividad marginal del capital, que tiende a cero cuando el capital tiende a infinito, pues de no existir este supuesto no se alcanzaría dicho estado estacionario.

A diferencia del modelo de Solow (1956), que no contempla que los individuos son racionales y que por tanto elijan el consumo que maximice su utilidad, el modelo de Ramsey (1928) supone que la tasa de ahorro de la población se elige con racionalidad; es decir, los consumidores eligen la trayectoria óptima de su consumo. Sin embargo, Ramsey elige la misma función de producción estándar, con los tres supuestos por todos conocidos.

Barro y Sala-i-Martin (2004) presentaron una formalización del modelo de Solow, pero en su análisis simplifican el comportamiento de la función de producción al considerar solo una posibilidad en su trayectoria. En su artículo original, Solow (1956) consideraba la posibilidad de diferentes trayectorias en la función de producción que pudieran generar múltiples equilibrios, algunos estables y otros no, incluso dejaba a consideración del lector el planteamiento de diferentes funciones de producción que consideraran estas posibilidades para el cálculo del estado estacionario.[2] Sin embargo, otras posibilidades fueron excluidas del análisis enfocándose típicamente a un comportamiento estándar de la función de producción. Una revisión del Handbook of Economic Growth de Aghion y Durlauf (2005) nos muestra una buena variedad de temas como capital humano, innovación tecnológica, gasto público, ciclos, crédito financiero, corrupción, etc. Sin embargo, estos temas se tratan haciendo modificaciones al modelo original pero manteniendo las hipótesis neoclásicas de rendimientos decrecientes en la producción. En este trabajo analizamos los trabajos clásicos de Solow-Swan (1956) y Ramsey (1928) retomando la posibilidad de diferentes trayectorias en la función de producción. Una primera versión de este trabajo aparece como nota en Plata, L. y Calderón, E. (2009). La versión actual amplía las explicaciones, presenta las justificaciones y revisa los valores de los parámetros en las gráficas presentadas en la versión de 2009. Se utilizan los mismos supuestos de ambos modelos con excepción de la función de producción. La función de producción estándar supone tres etapas en la vida de una economía, es decir, una primera etapa en la que los rendimientos son decrecientes; una segunda etapa, en la que el país comienza a industrializarse, generando que los rendimientos se vuelven crecientes y una tercera etapa en la que se agotan esos rendimientos y estos se vuelven constantes o decrecientes.[3] La diferencia respecto a estos modelos de crecimiento es que nosotros tomamos las etapas invertidas.

---

2 Recomendamos ver el trabajo original de Solow (1956: 71-72). Contiene una buena motivación histórica del papel de los supuestos esenciales y simplificadores, los antecedentes a su modelo y el desarrollo de ejemplos con diversas tecnologías incluyendo la de proporciones fijas y la función CES.

3 Modelación es similar a lo que se hace con los modelos de trampas de pobreza.

Admitimos que la explicación anterior es solo una forma de entender los procesos de crecimiento. Puede ser verdadera en algunos casos pero no es ley general para todo proceso de crecimiento. Concentrémonos por el momento en el caso de la agricultura. Cuando la relación capital trabajo es pequeña puede haber rendimientos crecientes a escala, un aumento pequeño de capital acompañado de un aumento menor en horas de trabajo puede conducir a un aumento marginal de la productividad. Pensemos en el caso de trabajar con yunta y arado con el de trabajar con una coa, la misma cantidad de horas en una parcela. Crecimiento en la relación capital trabajo genera mayor productividad en los valores pequeños de la relación capital trabajo. Cuando esta relación es relativamente grande, la tierra de la parcela ya está cansada, la yunta de bueyes está cansada y con las mismas horas dedicadas al trabajo la productividad marginal puede disminuir. La función de Richards refleja este tipo de proceso de crecimiento. Esta función tiene su origen en procesos biológicos de crecimiento. Recientemente ha sido aplicada por Khamis et al. (2005) al crecimiento de las palmas aceiteras, al crecimiento de cierto tipo de bacterias en Amir (2013) o al crecimiento de los pollos de engorda en Sakomura et al. (2005). Generalmente, los procesos de crecimiento de plantas y animales, racionales e irracionales, obedecen la propuesta de Richards: crecimiento con rendimientos crecientes en etapas tempranas acompañado de un crecimiento marginalmente decreciente antes de la madurez y hasta negativo en las etapas de senectud. La buena pregunta es ¿y cómo son las etapas de crecimiento de las economías? Para empezar, los modelos clásicos hablan de los agregados. Aun así, la propuesta de Richards se puede mantener si pensamos en el desarrollo de los grandes imperios de la civilización. Han tenido primero un auge creciente y terminan cansándose "sus factores" para antes de llegar a las etapas de decaída y desaparición.

Los autores de este trabajo pensamos que la forma de la función de producción agregada de una economía puede tener varios comportamientos. Algo similar a las funciones de utilidad Bernoulli sobre la riqueza monetaria, que nos permiten distinguir entre las diferentes preferencias sobre la riqueza monetaria. En el caso de la producción agregada podemos tener los diferentes comportamientos marginales de la producción dependiendo de factores como las instituciones, el capital humano, el medio ambiente, el entorno financiero, etc. Hemos adoptado el caso de la tecnología representada por la función de Richards para reflejar todas las diferentes posibilidades, sabiendo que es un caso especial que tiene la ventaja de que los casos clásicos, de Solow y Ramsey, nos aparecen como casos especiales. Se requiere mucho trabajo empírico en el futuro para determinar el estado de cada economía particular. Los modelos clásicos presentan solo generalizaciones. Es razonable, y también discutible, según el ejemplo que comentamos arriba, suponer que las economías agrícolas en sus primeras etapas presentan rendimientos decrecientes por la falta de tecnología y que después presentan rendimientos crecientes provenientes del desarrollo tecnológico. Sostenemos, sin embargo, que esto se debe a otros factores que dependen del ambiente en el que se desenvuelven las economías. El problema de agregación planteado por el teorema de imposibilidad de Arrow sigue aún presente, aunque las mediciones "individuales" de los factores de la producción sean cardinales.

Suponemos una economía que, en un primer momento la productividad marginal de la relación capital trabajo es positiva y creciente, después positiva y decreciente y finalmente no positiva.[4] La idea no es contra intuitiva pues es posible que para niveles muy bajos de capital este sea muy productivo (lo cual incluso no contradice la idea de la función de producción neoclásica) y que, conforme aumentemos el stock de capital en la economía, este sea cada vez más productivo hasta que llega a un punto donde comienza a ser cada vez menor y termine siendo cero.[5] Para modelar este patrón de crecimiento utilizamos la Función de Richards, que será tomada como función de producción per cápita.

Incorporando la función de producción de Richard al modelo de Solow-Swan se obtienen cuatro casos de equilibrio. Los resultados muestran que el estado estacionario obtenido en Solow (1956) y Swan (1956) es un caso especial de este modelo. La función de Richards nos permite explicar, dentro del modelo de Solow, el modelo de Trampas de Pobreza, en el que la única solución para salir de un estado estacionario bajo es elevando temporal y considerablemente la tasa de ahorro. Pero ahora el equilibrio con un nivel de capital per cápita bajo es alcanzado incluso con una productividad marginal del capital creciente, lo cual contradice lo dicho en el modelo original de trampas de pobreza, donde el equilibrio estable de bajos niveles era alcanzado gracias a la productividad marginal decreciente del capital. De forma análoga se introduce la función de producción de Richard al modelo de Ramsey (1928). El típico punto silla aparece como un equilibrio en este caso.

El artículo se organiza de la siguiente forma: en la siguiente sección se analiza la función de producción de Richard; en la tercera se obtienen los equilibrios para el modelo de Solow; en la cuarta se obtienen los equilibrios para el modelo de Ramsey; y finalmente se presentan las conclusiones.

■ *Función de Richards*

La función de Richards se representa por la siguiente ecuación:[6]

$$f(A,\beta,\sigma,\lambda,k)=\frac{A}{(1\pm e^{\beta-\sigma k})^{\frac{1}{\lambda}}} \tag{1}$$

Todos los parámetros son positivos. Tomando *A,* β, λ y σ como parámetros, la función de Richards depende únicamente de *k*, y gráficamente se observa de la siguiente manera:

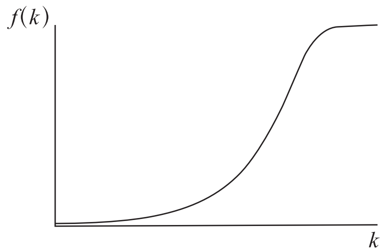
---

4 Este enfoque es consistente con el concepto de las “tres etapas de producción” definido en Call y Hollahan (1983) o Pindyck y Rubinfeld (1992). El trabajo original de Solow (1956) considera también esta posibilidad.

5 Incluso los seres vivos presentamos ese patrón de crecimiento (físico), crecemos aceleradamente en los primeros años de vida, después nuestro crecimiento se desacelera y está acotado por arriba.

6 En sentido estricto el numerador puede estar representado por $(1\pm e^{\beta-\sigma k})^{\frac{1}{\lambda}}$ tomando el signo + cuando $\lambda >$, y el signo – cuando $\lambda < 0$.

Gráfica 1
La función de Richards



Ahora bien, qué sabemos de esta función:

Primero:

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \frac{A}{(1+e^{-\infty})^{\frac{1}{\lambda}}} = A$$

y:

$$\lim_{k\to-\infty} f(k) = \frac{A}{(1+e^{\infty})^{\frac{1}{\lambda}}} = 0$$

Es decir, en el límite cuando $k_{\to\infty}$ la función toma el valor de *A*, es decir, es asintótica en *A*, por lo que en ese sentido se puede decir que está acotada por arriba por *A*. Y en el límite cuando $k_{\to-\infty}$ la función toma el valor de 0, por lo que podemos decir que está acotada por abajo por el 0. La función toma solo valores en el intervalo (0*, A*) y cuando $f(0) > 0$, lo cual implica que existe una producción libre. El parámetro *A* representa económicamente un límite potencial a la máxima producción; esto es consistente con la hipótesis de recursos limitados y tecnología fija.

Segundo:

$$f'(k) = A\frac{(1+e^{\beta-\sigma k})^{-\frac{1+\lambda}{\lambda}}}{\lambda}\sigma e^{\beta-\sigma k} > 0$$

Es decir, la función es creciente en *k*.

Tercero:

$$f''(k) = \frac{A\sigma^2}{\lambda}e^{\beta-\sigma K}\left[1+e^{\beta-\sigma k}\right]^{-\frac{1+\lambda}{\lambda}}\left[-1+\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)\left[1+e^{\beta-\sigma k}\right]^{-1}\left(e^{\beta-\sigma k}\right)\right]$$

Tomando:

$$Z = \frac{A\sigma^2}{\lambda}e^{\beta-\sigma k}\left[1+e^{\beta-\sigma k}\right]^{-\frac{1+\lambda}{\lambda}} > 0 \qquad \Rightarrow$$

$$f''(k)=Z\left[\frac{\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)(e^{\beta-\sigma k})-(1+e^{\beta-\sigma k})}{1+e^{\beta-\sigma k}}\right]=Z\left[\frac{((1+\lambda)-\lambda)(e^{\beta-\sigma k})-\lambda}{\lambda(1+e^{\beta-\sigma k})}\right]=Z\left[\frac{(e^{\beta-\sigma k})-\lambda}{\Gamma}\right]$$

Donde:

$$\Gamma=\lambda(1+e^{\beta-\sigma k})>0$$

Por lo tanto:

$$f''(k)=\frac{Z}{\Gamma}[(e^{\beta-\sigma k})-\lambda]\left\langle\begin{array}{l}>0 \quad si: \; k<\dfrac{\beta-\ln\lambda}{\sigma}\\ =0 \quad si: \; k=\dfrac{\beta-\ln\lambda}{\sigma}\\ <0 \quad si: \; k>\dfrac{\beta-\ln\lambda}{\sigma}\end{array}\right\rangle$$

De manera que los rendimientos están en función del valor de *k* de inflexión.

(2)
$$k_{\inf}=\frac{\beta-\ln\lambda}{\sigma}$$

Es decir, en un inicio, el crecimiento es cada vez más acelerado, después se frena hasta tender a cero. Lo relevante para saber cuándo la primera derivada de la función será creciente o decreciente son los parámetros β, λ y σ.[7] Estos tres parámetros definen el punto de inflexión, el cambio de curvatura al pasar de rendimientos marginales crecientes a marginales decrecientes. Las funciones logísticas son bastante simétricas, los parámetros de la función de Richards permiten situar el punto de inflexión en cualquier nivel de k, incluso negativo. Podemos tener casos con rendimientos crecientes casi siempre, un punto de inflexión e inmediatamente acercase a la asíntota. Esto permite modelar muy diferentes tipos de economías, el momento de alcanzar los rendimientos decrecientes puede ser muy pronto o muy tarde.

■ *Equilibrios en el Modelo de Solow modificado*

En este modelo tomaremos los mismos supuestos que se toman en el Modelo de Solow, con excepción de la función de producción, es decir, tenemos los siguientes supuestos: Economía cerrada y sin gobierno, tasa de ahorro constante (*s*), tasa de depreciación

[7] Cuando el numerador está representado por $(1 \pm e^{\beta-\sigma k})^{\frac{1}{\lambda}}$ fácilmente se puede verificar que cuando $\lambda < 0$ la función se comporta de la misma manera.

constante (δ), tasa de crecimiento de la población constante (η) y nivel de tecnología constante (A).

De esta forma, la Ecuación Fundamental es la siguiente:

(3) $$\dot{k} = sf(k) - \delta k - \eta k$$

Donde:

$$f(k) = \frac{A}{(1+e^{\beta-\sigma k})^{\frac{1}{\lambda}}}$$

Todos los parámetros A, β, λ y σ son positivos. Claramente se puede observar que esta función de producción no cumple con las condiciones de Inada $(\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0 \;\; y \;\; \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty)$ diferencia más importante radica en el hecho de que cuando k se aproxima a cero (o es cero) la productividad marginal del capital con la función de Richards es simplemente positiva, pero no tiende a infinito, por lo que para valores positivos de k, podemos tener más de un equilibrio.

El estado estacionario lo encontramos cuando:

(4) $$\frac{sA}{(1+e^{\beta-\sigma k})^{\frac{1}{\lambda}}} = (\delta+\eta)k$$

De la ecuación 4 podemos encontrar cuatro equilibrios.

Caso 1: Modelo de Solow $(k_{inf} \leq 0)$

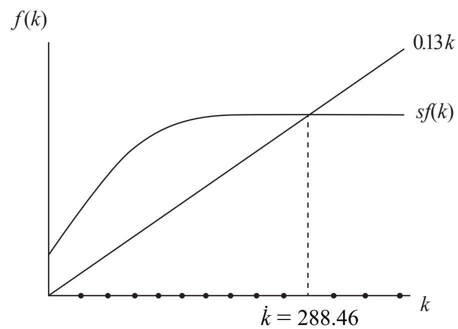
Este caso ocurre cuando la ecuación fundamental tiene solo un punto de equilibrio. Y esto sucede cuando la tecnología siempre presenta rendimientos decrecientes en los reales positivos, tal como ocurre en el Modelo de Solow.

Proposición 1: Si $\lambda > 1$ y $\beta \leq \ln\lambda$, entonces tendremos un solo estado estacionario en la economía, similar al que tenemos en el Modelo de Solow.

Demostración: Tendremos un solo equilibrio, pues para valores mayores de k_{inf} la productividad marginal del capital será decreciente. Para que $k_{inf} = 0$, se debe cumplir que $\beta = \ln\lambda$. En general cuando $\beta < \ln\lambda$, para valores positivos de k, tendremos el caso del modelo de Solow. Sin embargo, lo anterior implica que $\lambda > 1$, pues de lo contrario $\beta \leq 0$. Así pues, si $(\lambda > 1 \text{ y } \beta \leq \ln\lambda) \rightarrow k_{inf} \leq 0$ lo que implica que cuando $k \geq 0$ la productividad marginal del capital será decreciente. Y dado que $f(k)$ no puede tomar valores negativos, queda demostrado que bajo esas condiciones tendremos el mismo caso de Solow, ya que eventualmente la curva de ahorro cortará una sola vez a la recta de inversión de mantenimiento y esto no será en el cero, ya que la función de producción toma un valor positivo cuando $k = 0$, y dado que el ahorro es una fracción del volumen de producción, este también será positivo.

Ejemplo 3.1:
$A = 150; s = 0.25; \beta = \ln 2; \sigma = 1; \lambda = 2; \delta = 0.1; \eta = 0.03$

Gráfica 2
Modelo de Solow

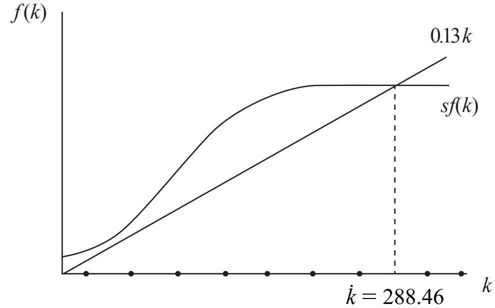


Caso 2: Equilibrio con fluctuaciones en la tasa de crecimiento económico $(k_{inf} > 0)$

En este caso, $\beta > \ln \lambda$, el punto de inflexión es más grande que cero, la tasa de crecimiento presenta fluctuaciones para llegar al único estado estacionario. En un primer momento, la tasa de crecimiento es decreciente, después llegará a ser igual a cero en el estado estacionario. Así pues, aun con un cambio importante en la función de producción (en el sentido de que para los reales positivos $f(k)$ muestra rendimientos crecientes y decrecientes), podemos tener solo un equilibrio estable.

Ejemplo 3.2:
$A = 150; s = 0.25; \beta = 15; \sigma = 2; \lambda = 5; \delta = 0.1; \eta = 0.03$

Gráfica 3
Equilibrio con fluctuaciones



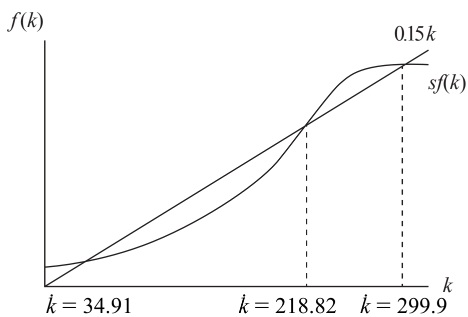
Caso 3: Trampas de Pobreza $(k_{inf} > 0)$ múltiples equilibrios)

El punto de inflexión también es mayor a cero pero ahora la economía presenta varios equilibrios. Tendremos 3 equilibrios de los cuales 2 son estables y uno más es inestable. El primer equilibrio es estable y se alcanza para un bajo nivel de capital; el segundo equilibro es inestable y se alcanza para un nivel intermedio de capital; y el tercer equilibrio también es estable y se alcanza con un alto nivel de capital. De esta forma se explican las trampas de pobreza, pues habrá dos tipos de economía, unas que alcancen el estado estacionario con un bajo nivel de capital, y por tanto de producción, y otras economías que alcancen el otro equilibrio estable con alto nivel de capital y producción.

Lo anterior es diferente al modelo original de trampas de pobreza, pues en dichos modelos se concluye que la trampa de pobreza es producto de los rendimientos marginales decrecientes del capital en la primera etapa de la economía y, en nuestro modelo, la trampa de pobreza aparece aun cuando los rendimientos del capital son crecientes en la primera etapa de la vida económica.

Ejemplo 3.3:
$A = 150; s = 0.3; \beta = 25; \sigma = 0.1; \lambda = 10; \delta = 0.1; \eta = 0.05$

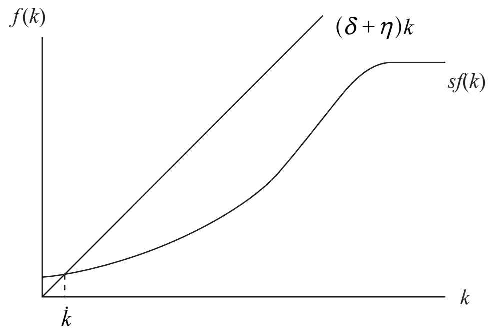
Gráfica 4
Ejemplo trampas de pobreza



Caso 4: Equilibrio con rendimientos crecientes: $(k_{inf} > 0)$, mal equilibrio)

Este caso ocurre cuando el capital de inflexión es mayor a cero pero la tasa de depreciación $(\delta + \eta)$ es muy grande comparada con los rendimientos de $f(k)$. La economía alcanza un estado estacionario estable pero con un bajo nivel de producción aun cuando los rendimientos del capital son crecientes.

Gráfica 5
Equilibrio con rendimientos crecientes



■ *Equilibrios en el modelo de Ramsey modificado*

En esta sección incorporamos la función de producción de Richard al modelo de Ramsey (1928). Mantenemos constantes todos los supuestos. Esto es, supondremos que las familias se comportan de la misma forma que supuso Ramsey, es decir, que son racionales en el sentido de que maximizan la suma descontada de las utilidades en un horizonte de tiempo continuo e infinito. La función de utilidad de los individuos es cóncava, lo que implica que tienen deseos de alisar su consumo.[8] Los individuos ofrecen su trabajo a cambio de un salario (w) y poseen activos que generan una tasa de interés (r). Las empresas del modelo las seguiremos suponiendo como lo hace Ramsey, es decir, son maximizadoras del beneficio, el cual es la diferencia entre sus ingresos, que es el precio[9] por la producción, y el pago que hacen por el factor trabajo y capital que contratan y rentan a precios w y R[10] respectivamente. Así pues, el único activo que poseen las familias es K, el cual rentan a las empresas. La economía es cerrada por lo que no se puede conseguir capital ni rentar los activos en el exterior. El salario que pagan las empresas es el mismo que reciben las familias en el mercado y el consumo de las familias son los ingresos de los empresarios.

De esta forma, al resolver el Hamiltoniano llegamos a las ecuaciones fundamentales del modelo de Ramsey. En este caso la única diferencia nuevamente la tenemos en la función de producción, por lo tanto las ecuaciones fundamentales del modelo de Ramsey con la función de Richards son:

(5) $$\dot{k} = \frac{A}{(1+e^{\beta-\sigma k})^{\frac{1}{\lambda}}} - c - (\delta+\eta)k$$

8 Seguiremos suponiendo la misma función específica $U(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$:

9 Que se supone igual a 1.

10 En equilibrio $R = r + \delta$.

y:

(6) $$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[A\frac{\left(1+e^{\beta-\sigma k}\right)^{-\frac{1+\lambda}{\lambda}}}{\lambda}\sigma e^{\beta-\sigma k} - \delta - \rho\right]$$

Ahora bien, para analizar la dinámica de la transición habrá que calcular los valores de c para los que el capital per cápita no crece y los de k y/o c para los que el consumo se estabiliza, es decir:

(7) $$\dot{k} = 0 \Rightarrow c = \frac{A}{\left(1+e^{\beta-\sigma k}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - (\delta+\eta)k$$

y:

(8) $$\dot{c} = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$ó \quad A\frac{\left(1+e^{\beta-\sigma k}\right)^{-\frac{1+\lambda}{\lambda}}}{\lambda}\sigma e^{\beta-\sigma k} = \delta + \rho$$

Sin embargo nuevamente la solución no es explicita, por tanto hay que analizar nuevamente algunos casos mediante ejemplos numéricos.

Caso 1: Modelo de Ramsey $(k_{inf} \leq 0)$
Al igual que en el *Caso 1 d*el Modelo de Solow, la función de producción también presenta siempre, en los reales positivos, rendimientos decrecientes.

Proposición 2: Si $\lambda > 1$ y $\beta \leq \ln\lambda$, entonces tendremos un solo estado estacionario en la economía con estabilidad de punto silla y que cumple con las condiciones de optimización del Hamiltoniano.
Demostración: Como ya vimos, para que el consumo no crezca, es necesario que $c = 0$ o que la productividad marginal del capital sea igual a la suma de la tasa de depreciación y la tasa de descuento, bajo estos supuestos, esto último se cumple para dos valores de *k,* uno de los cuales es negativo. Por tanto, existirán 2 estados estacionarios. Sin embargo, el estado estacionario en el que $c = 0$, no cumple con la condición de trasnversalidad. De manera que solo el equilibrio donde tanto el consumo como el capital son positivos, cumple con las condiciones de optimización.

Ejemplo 4.1:
$A = 100; \beta = \ln 3; \sigma = 2; \lambda = 3; \delta = 0.1; \eta = 0.025; \rho = 0.05$

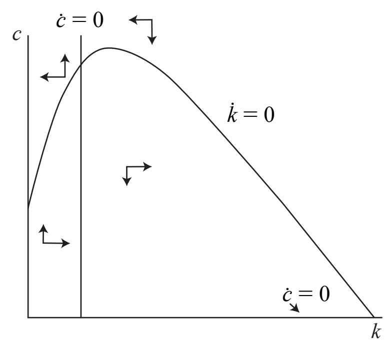
Los valores de *k p*ara los cuales el consumo no crece vienen dados por:

$$\{k = -8.5959\}, \{k = 3.5962\}$$

Ahora bien, para saber cómo cambia el consumo a la derecha del valor de $k^* = 3.5962$ solo tenemos que saber en qué parte de la función de producción nos encontramos, es decir, si en la parte donde la productividad marginal del capital es creciente o en la que es decreciente. En este ejemplo es fácil pues el punto de inflexión lo encontramos en $k_{inf} = 0$, por tanto para todo valor positivo de *k,* la productividad marginal del capital es decreciente,[11] por lo que para un valor mayor de k^* la productividad marginal del capital será menor que $(\delta + \rho)$ y el consumo caerá. Análogamente decimos lo mismo para valores de $k < k^*$ ya que la productividad marginal del capital será mayor y el consumo crecerá.

Para ver que pasa con *k* cuando no se está sobre la curva en la cual no crece, hacemos lo mismo que en el modelo de Ramsey y vemos que valores mayores de *c h*acen que el capital no crezca, el capital per cápita disminuya y viceversa. Gráficamente tenemos lo mismo que en el modelo de Ramsey.

Gráfica 6
El modelo de Ramsey (Richards)



Una diferencia notable es el hecho de que este modelo con una tecnología Cobb-Douglas arroja tres equilibrios, mientras que con la función de producción de Richards el equilibrio cuando $k = 0$ y $c = 0$ nunca se alcanzará, pues $f(0) > 0$.

Aplicando la misma lógica que con Ramsey original, podemos asegurar que el único equilibrio que alcanzará la economía será el equilibrio con estabilidad de punto silla, pues de lo contrario llegará un momento en que *k* se vuelva cero, y el consumo disminuya considerablemente, lo cual implica una tasa de crecimiento del consumo negativa, violándose la ecuación de Euler.[12] Si la economía no sigue la senda estable,

[11] Cuando el capital es muy grande, la productividad marginal tiende a cero. Por lo tanto podemos decir que es no decreciente, pero para valores cercanos a k^*, será decreciente.

[12] A diferencia de cuando se emplea la tecnología Cobb-Douglas, la ecuación de Euler no implica en este caso que cuando $k_{\to 0}$ la tasa de crecimiento del consumo sea de más infinito, de cualquier forma no es consistente, pues dados los valores de los parámetros, cuando $k = 0$, la productividad marginal del capital es la más alta, por lo que si con valores mayores de *k* obtuvimos tasas de crecimiento de *c* positivas, cuando el capital per cápita es nulo, la tasa de crecimiento debe ser la mayor.

podría llegar al equilibrio cuando $c = 0$ y cuando la curva donde *k no* crece corta el eje de las abscisas, para este caso es un $k^{**} = 800$, pero como ya se vio, esto viola la condición de transversalidad[13] y además intuitivamente no se sostiene, pues no es concebible una economía en la que el consumo sea cero. De esta forma, la economía alcanzará el equilibrio con:

$$c^* = 99.475 \text{ y } k^* = 3.5962$$

Así pues, con este caso llegamos a la misma conclusión que en el modelo de Ramsey con una tecnología neoclásica, en la que es inevitable el estado estacionario.

Caso 2: $k_{inf} > 0$ con un único equilibrio

Como vemos, es el mismo caso que se analizó en el modelo de Solow, la importancia radica en el hecho de que ahora la función de producción presentará productividad marginal del capital per cápita creciente y decreciente.[14]

Ejemplo 4.2:
$A = 100; \beta = 25; \sigma = 2; \lambda = 5; \delta = 0.1; \eta = 0.025; \rho = 0.5$

Ahora los valores de *k* que hacen que el consumo no crezca son:

$$\{k = -1.465\}, \{k = 15.291\}$$

Y los valores de *c p*ara los que el capital per cápita no crece, son:

$$c = \frac{100}{\left(1 + e^{25-2k}\right)^{\frac{1}{5}}} - 0.125k \tag{9}$$

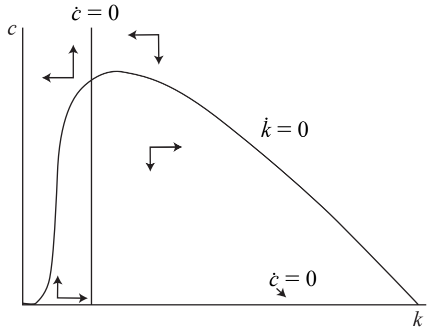
En el siguiente diagrama de fases podemos ver que estamos en una situación similar al del caso 1. Nuevamente el único equilibrio que se alcanzará será el de estabilidad de punto silla, que en este caso toma valores de $k^* = 15.291$ y $c^* = 98.013$. Lo anterior implica que la producción per cápita será $y = 99.925$, y como ya se mencionó, lo que no se consume se ahorra, el ahorro será solo de 1.912, lo que implica una tasa de ahorro $s = 0.01913$ *la* cual alcanzará para reponer los activos depreciados.

La justificación de porque no se puede llegar a otro equilibrio es el ya mencionado, si no alcanzamos el estado estacionario con estabilidad de punto silla, se viola la ecuación de Euler, ya que si *k* llega a ser cero, ello implicaría una disminución importante en la producción y por ende una caída abrupta del consumo, lo cual se traduce en una tasa de crecimiento del consumo negativa, pero esto es imposible, pues dados los valores de los parámetros, para $-1.465 < k < 15.291$, el consumo crece. El otro estado al que

[13] Para ver la forma en la que se viola esta condición, véase la parte de la dinámica de la transición del modelo de Ramsey (Ver apartado 1.3.4).

[14] Esto para valores no negativos de *k*.

Gráfica 7
Diagrama de fases *Caso 2* (Richards)



la economía puede llegar es el ya mencionado en el caso 1, es decir, cuando c = 0 y la curva donde el capital per cápita no crece corta la recta c = 0, que para este ejemplo sigue siendo k^{**} = 800, sin embargo, esto sigue violando la condición de transversalidad.

Este ejemplo nos permite observar que aun con una economía que no tiene una función de producción neoclásica se puede alcanzar un equilibrio similar.[15] A continuación se analiza el último caso que es el más interesante.

Caso 3: $k_{inf} > 0$ múltiples equilibrios
$A = 150; \beta = 25; \sigma = 0.1; \lambda = 10; \delta = 0.2; \eta = 0.05; \rho = 0.07$

Los valores de k para los que el consumo no crece son:

$$\{k = 264.92\}, \{k = 78.52\}$$

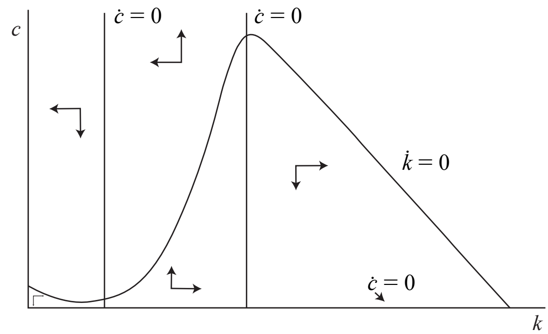
Lo cual implica que ambos valores tienen importancia económica. Ahora bien, los valores de c para los que el capital per cápita no crece son:

$$c = \frac{150}{\left(1 + e^{25 - 0.1k}\right)^{\frac{1}{10}}} - 0.25k \tag{10}$$

El diagrama de fases es como sigue:

15 Entendiéndose con ello que no siempre presenta productividad marginal del capital decreciente.

Gráfica 8
Diagrama de fases *Caso 3* (Richards)



Nuevamente hay 3 estados estacionarios en esta economía, pero no el equilibrio donde $k = 0$ y $c = 0$. El primer equilibrio de esta economía lo tenemos cuando:

$$c = 7.37 \text{ y } k = 78.52$$

Este es un equilibrio inestable, pues si el punto inicial es diferente al del equilibrio, jamás se llegará a él.[16] El tercer equilibrio, que siempre está presente, el cual se alcanzará con $k^{**} = 800$ y $c = 0$ es estable. Finalmente el segundo equilibrio, el cual es:

$$c = 80.757 \text{ y } k = 264.92$$

tiene estabilidad de punto silla. Ahora bien, como hemos hecho antes, podemos decir que la economía nunca llegará al equilibrio con k^{**} y $c = 0$, pues esto viola la condición de transversalidad, la cual implica:

$$\lim_{t\to\infty} v_t k_t = 0$$

$$v_t = v_0 e^{-(r-\eta)t} \quad \therefore \quad \lim_{t\to\infty} v_0 e^{-(r-\eta)t} k_t = 0$$

Lo anterior requiere que $r > \eta$, sin embargo, en $k^{**} = 600$, tenemos:[17]

$$f(k^{**}) = 9.4577x10^{-16}$$
$$r^{**} = f(k^{**}) \quad \therefore \quad r^{**} < \eta$$

y no se cumple dicha condición.

16 Vease el diagrama de fases.
17 Los mismo cálculos se podían haber hecho en los casos anteriores, pero en ellos era claro que no se cumplía que $r > \eta$.

Ahora bien, el primer equilibrio es inestable, por lo que la economía solo estará en él si $k_0 = 78.52$ y $c_0 = 7.37$. Pero qué pasaría si la economía desde el inicio está en ese punto, veamos si cumple la condición de transversalidad.[18]

Para ello sabemos que:

$$f(78.52) = 0.27 \quad \therefore \quad r > \eta$$

Lo que indica que si se cumple esta condición, de tal forma que si la economía inicia en este punto, es factible que se quede ahí por el resto del horizonte de vida. Pero es difícil que la economía se encuentre en ese punto, sin embargo, alguna acción de política económica nos pudiera conducir a él.

El segundo equilibrio es un equilibrio factible en el sentido de que satisface la condición de transversalidad, ya que:

$$f(264.92) = 0.2699 \quad \therefore \quad r > \eta$$

Y no solo es eso, sino que es un equilibrio con estabilidad de punto silla, lo cual implica que podemos llegar a él aun desde diversos puntos. Desafortunadamente dadas las características de la función de producción no podemos encontrar una solución explicita de la trayectoria estable que nos lleve a él, pero sí podemos asegurar la forma que tendrá.

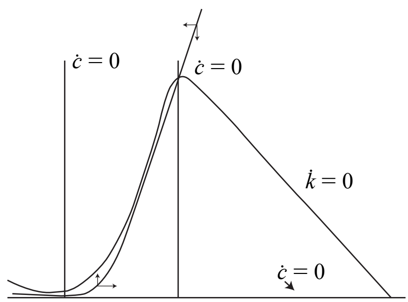
Pues bien, cuando calculamos los valores de c para los que k no crece encontramos la ecuación (10), está ecuación nos dice algo más. Supongamos por ejemplo que la economía tiene $k_0 = 0$, esto implica que $f(0) = 12.333$ y eso sería todo lo que hay disponible para consumir en la economía, pues la depreciación de k es cero. Ahora bien, como la economía es cerrada y sin gobierno, y estamos en el primer año de vida de la economía, está no podrá consumir más de esta cantidad, pero sí puede consumir menos que eso, pues el ahorro está permitido en esta economía. Ahora bien, si consume menos que eso, el ahorro generado lo empleará en incrementar el stock de capital. Por lo tanto en el siguiente periodo tendrá $k_1 > 0$, con lo cual producirá más, pero ahora, sí quiere asegurar que para el siguiente periodo la economía cuente por lo menos con el mismo capital tiene que pagar la reposición del mismo, por lo que en ese periodo tendrá menos para consumir que en el periodo anterior. Esto último nos haría pensar que si el individuo (o en este caso la unidad familiar) es racional, preferiría no haber consumido por debajo del máximo posible, pero hay que recordar que estamos hablando de la maximización de la suma de las utilidades descontadas en un horizonte de tiempo infinito, por lo tanto, gracias al altruismo que este modelo implica es como se justifica (intuitivamente) por qué la sociedad prefiere tener niveles de consumo menores, aun cuando conozcan que en el corto plazo tendrán que consumir menos.

---

18 Para esto hay que suponer que no habrá ningún disturbio en la economía que haga que se pierda el equilibrio en cualquier t en el horizonte de vida del modelo, que hemos supuesto infinito.

Si se desea otra explicación, pues basta con ver la ecuación de Euler, la cual nos dice que el consumo disminuirá cuando $k < 78.52$, por lo tanto, para que se cumplan las condiciones de optimalidad, para valores de *k meno*res al ya mencionado, los individuos deben disminuir su consumo, por tanto, para el siguiente periodo está justificado que las familias estén dispuestas a sacrificarse y consumir menos. Podemos continuar de esta forma, y encontraremos que la senda estable será como se ve en la siguiente gráfica:

Gáfica 9
Trayectoria estable *Caso 3* (Richards)

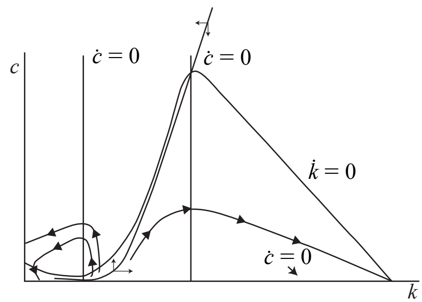


Para $k > 78.52$, la ecuación de Euler nos dice que el consumo debe crecer. Ahora bien, hay otro supuesto que hemos dejado de lado, y es el hecho de que el ahorro no se utiliza para consumir después, sino solo para ser invertido, inversión que como se sabe, es utilizada para aumentar el stock de capital o para reponer el que se ha desgastado, por lo tanto, el consumo para cada periodo de tiempo tiene que ser forzosamente menor o igual a lo que se produce, y ya que los individuos son racionales, no querrán perder capital que los haga tener menos producción en el futuro, que a la larga los llevará a reducir su consumo de manera importante. Por lo tanto la trayectoria estable está siempre por debajo de la curva que hace que *k* no crezca.

Ahora bien, trayectorias que vayan por debajo de la trayectoria estable están descartadas porque nos llevarán al equilibrio donde $c = 0$ y k^{**}, y este equilibrio se ha descartado por violar la condición de transversalidad. Trayectorias que estén por arriba de la senda estable, llevarán a la economía a una etapa en la que disminuyan el stock de capital per cápita ya que no repondrán lo que se desgasta. Tiempo después el crecimiento del consumo no será sostenible y este bajará. Eventualmente la economía puede llegar a dos puntos, a uno donde el capital sea cero, o a otro en que el consumo no exista.

Cuando el capital es cero, tal como se ve en la gráfica, implica un descenso importante en el nivel de consumo, pues pasamos de tener un consumo igual al punto donde la trayectoria corta la recta donde $k = 0$, y esa disminución en el consumo no es concebible con la ecuación de Euler, pues esta ecuación no implica una caída tan fuerte en el consumo, y por tanto no proviene de una conducta maximizadora. Además, cuando

Gráfica 10
Trayectorias explosivas *Caso 3* (Richards)



$k_{\to 0}$ la producción tiende al nivel de c que hace que k no crezca, por lo tanto no se puede consumir muy por encima de este valor.

Ahora bien, llegar a un punto donde el consumo es cero no siempre viola la condición de transversalidad, para este caso si $-90.12 < k < 283.64$ no se viola. Por tanto no podemos descartar estas trayectorias (como la que se ve en la gráfica) por esta vía. Sin embargo, la economía no termina en ese punto, pues ese no es un equilibrio, la economía seguirá experimentando descensos en los niveles de consumo los cuales serán negativos y esto no tiene sentido económico. Por tanto, hay que recordar que como restricción adicional se debe cumplir que tanto c como k deben ser mayores o iguales a cero.

De esta forma, concluimos que si la economía no se encuentra en el primer equilibrio, la senda estable será solo una y el equilibrio al que llegará la economía será de la misma naturaleza que el de Ramsey en su versión original. Sin embargo, con una acción de política económica se puede llegar al equilibrio inestable, y permanecer ahí por el resto del horizonte de vida, sin embargo esto no tiene sentido, ya que el equilibrio con estabilidad de punto silla es mejor que el inestable.

Se pueden encontrar más casos, pero no son interesantes económicamente hablando, por ejemplo, podemos tener los mismos valores de los parámetros a excepción del nivel de tecnología que ahora será de *50,* pero no encontramos equilibrios para valores positivos de c.[19] En teoría la economía puede estar oscilando, pero no se cumplirá la condición de transversalidad, ya que para estos casos esta se cumple solo cuando $206.830 < k < 240.09$, por lo tanto, no tiene sentido económico, pues si la economía pudiera oscilar, lo haría con valores de $k < 188.62$. Con esto concluimos el análisis de la función de Richards como función de producción en los modelos de crecimiento Neoclásico.

[19] $A = 50$.

■ *Conclusiones*

Debemos señalar que hay que tener cuidado con las presentaciones "sencillas y didácticas" del modelo de Solow-Swam. Es fácil atribuirle al autor original falacias que jamás dijo. La principal consiste en asegurar la existencia del estado estacionario a partir de los supuestos base y los rendimientos constantes a escala. En algunas presentaciones se introducen las condiciones de Inada para asegurar que las cosas sean como la figura del caso estándar de un equilibrio interior estable. Sin embargo, estas condiciones matemáticas para garantizar existencia de estado estacionario, no tendrían por qué ser ciertas desde el punto de vista económico. En la tercera sección del artículo original de Solow (1956), el autor advierte la posibilidad de múltiples equilibrios, anticipando así las trampas de pobreza, y la posibilidad de equilibrios no interiores.

En este trabajo analizamos los trabajos clásicos de Solow-Swan (1956) y Ramsey (1928) retomando la posibilidad de diferentes trayectorias en la función de producción. Para este propósito se incorporó en análisis de ambos modelos la función de producción de Richard.

Dentro de los resultados encontramos que el modelo de Solow y Ramsey con la función de producción neoclásica, son solo casos específicos de los mismos modelos con la función de producción de Richards. La función de Richards nos permite explicar dentro del modelo de Solow, el modelo de Trampas de Pobreza, en el que la única solución para salir de un estado estacionario bajo, es elevando temporal y considerablemente la tasa de ahorro. Pero ahora el equilibrio con un nivel de capital per cápita bajo es alcanzado incluso con una productividad marginal del capital creciente, lo cual contradice lo dicho en el modelo original de trampas de pobreza, donde el equilibrio estable de bajos niveles era alcanzado gracias a la productividad marginal decreciente del capital. Sin embargo con esta función de Richards, la economía no puede tener crecimiento económico continuo, sino que es inevitable alcanzar un estado estacionario.

Al introducir esta función de Richards al modelo de Ramsey, no encontramos resultados que contrasten de manera importante con el modelo original, ya que en la mayoría de los casos el resultado al que se llega es el mismo, a excepción de donde tenemos dos equilibrios factibles, pero uno de ellos solo se alcanza si la economía ya está en él. De esta forma, la función de Richards nos ayuda a entender que una economía que se comporta como ella misma lo específica, inevitablemente alcanzará un estado estacionario, mismo que no podrá dejar hasta que el progreso tecnológico aparezca. Por lo tanto, suponer que la economía en un inicio presenta productividad marginal del capital positiva y creciente y con el paso del tiempo, o gracias a la acumulación del capital, esta se vuelve decreciente, no es de gran ayuda para entender el proceso de crecimiento de una economía real, pues hay que recordar que no hay evidencia (al menos para los años en que se muestran estadísticas) de que una economía haya alcanzado dicho estado estacionario, por lo tanto, habrá que hacer una revisión bibliográfica a los modelos de crecimiento que incorporan la inversión en investigación y desarrollo, para después de ello tratar de ayudar a entender el cómo una economía crece.

■ *Bibliografía*

Aghion, P. y Steven, N. D. (2005). *Handbook of economic growth*. Elsevier B. V.

Amir Ashory, S. (2013) Application of richards function to the description of growth of green gram. *International Journal of Farming and Allied Sciences*, 18(2): 694-697.

Barro, R. J. y Sala-i-Martin X. (2004). *Economic growth.* New York, Mc Graw Hill.

Call, S. y William, H. (1983). *Microeoeconomía.* 2a Edición. Editorial Interamericana.

Khamis, A.; Ismail, Z.; Haron, K. y Mohamed, A. (2005). Nonlinear growth models for oil palm yield growth. *Journal of Mathemathics and Statics*, 3(1): 225-233.

Mankiw, G.; Romer, D. y Weil (1992). A Contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 2(107): 407- 437.

Plata, L. y Calderón, E. (2009) A modified version of Solow-Ramsey model using Richard´s growth function. *Econoquantum*, 1(6): 65-70.

Pindyck, R. y Rubinfeld, D. (1992). *Microeconomics.* 2a Edición. New York, McMillan.

Ramsey, F. (1928). A mathematical theory of saving. *Economic Journal,* 38: 543-559.

Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use*. Journal of Exp. Botan*y, 10: 290-300.

Sakomura, N. K.; Longo, F. A.; Oviedo Rendon, E. O.; Boa Viagen, T. C. y Ferraudo, A. (2005). *Modeling energy utilization and growth parameter description for broiler chikens*. Poultry Science Association, Inc, 84: 1363-1369.

Solow, R. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, (70): 65-94.

Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record* 32: 334-361. Reprinted in Stiglitz y Uzawa (1969).