

# *Decisiones de consumo y portafolio con Utilidad Diferencial Recursiva Estocástica (UDRE): Modelos alternativos*

ISELA ELIZABETH TÉLLEZ-LEÓN<sup>1</sup>  
FRANCISCO VENEGAS-MARTÍNEZ<sup>2</sup>

- **Resumen:** La elasticidad de sustitución intertemporal y el coeficiente de aversión al riesgo se obtienen regularmente de modelos de valuación de activos basados en el consumo como en Merton (1973), Lucas (1978), Breeden (1979) y Maenhout (2004). Sin embargo, esta visión es criticada por dos razones: la primera relacionada con el aspecto empírico, ya que en diversas investigaciones prácticas, los modelos no se ajustan a los datos, y la segunda es que no distinguen entre la elasticidad de sustitución intertemporal y el coeficiente de aversión al riesgo debido a la forma funcional de la utilidad que suponen estos enfoques. Evidentemente, estos dos conceptos son de gran utilidad para la teoría económica, ya que se refieren a aspectos diferentes y relevantes sobre las preferencias de los consumidores. Esta investigación se concentra en el segundo problema, siendo el objetivo utilizar el concepto de Utilidad Diferencial Recursiva Estocástica (UDRE) para obtener los parámetros en cuestión de manera separada, pero dentro de un mismo modelo. Bajo este marco se desarrollan varios modelos de decisión de un consumidor racional con acceso a diferentes activos; esto permite obtener una mejor interpretación y explicación de los mencionados parámetros. Por último, se realizan ejercicios de estática comparativa para explicar la dinámica de las variables de decisión ante cambios en las variables independientes con datos de la economía mexicana.
- **Palabras clave:** Selección de portafolio, consumo, métodos matemáticos, técnicas de optimización.
- **Clasificación JEL:** G11, E21, C61.
- **Abstract:** The intertemporal elasticity of substitution and the risk aversion coefficient are regularly obtained from models for the valuation of assets based on consumption as in Merton (1973), Lucas (1978), Breeden (1979) and Maenhout (2004). However, this approach is criticized for two reasons: the first is related to the empirical issue, since in practical research the models do not fit the data, and the

---

<sup>1</sup> Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional. E-mail: tellezelizabeth\_2015@yahoo.com

<sup>2</sup> Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional. E-mail: fvenegas1111@yahoo.com.mx

second one does not distinguish between intertemporal elasticity of substitution and risk aversion coefficient due the functional form of utility assumed in this approach. Evidently, these two concepts are useful in the economic theory, since they are related to different relevant aspects of consumer preferences. This research focuses on the second problem, being the goal of this paper to use the concept of Recursive Stochastic Differential Utility to obtain the parameters in question, separately, but in the same model. Under this framework, several continuous-time decision making models of a rational consumer having access to different assets are developed, this allows a better interpretation and explanation of the mentioned parameters. Finally, comparative static exercises are performed to explain the dynamics of the decision variable to changes in the independent variables with Mexican data.

■ **Key words:** Portfolio choice, consumption, mathematical methods: optimization techniques.

■ **JEL Classification:** G11, E21, C61.

■ Recepción: 27/10/2014

Aceptación: 09/06/2015

### ■ *Introducción*

En la literatura económica y financiera es importante determinar la magnitud de la elasticidad de sustitución intertemporal por el consumo y el grado relativo de aversión al riesgo de un consumidor racional.<sup>3</sup> Los modelos tradicionales de valuación de activos basados en consumo (por sus siglas en inglés, *Consumption Capital Asset Pricing Model*, CCAPM) estudiados por Merton (1973), Lucas (1978), Breeden (1979), Breeden *et al.*, (1989) y, más recientemente, Maenhout (2004) funden al coeficiente de aversión al riesgo y a la elasticidad de sustitución intertemporal dentro del índice de satisfacción instantánea y esto conlleva a serias limitaciones de interpretación.<sup>4</sup>

Diversos estudios empíricos muestran que la estimación de los parámetros en modelos del tipo CCAPM presenta problemas de ajuste con los datos (Chatterjee *et al.*, 2004, y Mehra and Prescott, 1985). Por ejemplo, los activos con betas bajos ofrecen retornos más altos que los señalados por CAPM, lo que produce no solo inconsistencias en la teoría, sino también limitaciones en el análisis e interpretación de las preferencias de un consumidor racional. No es necesario decirlo, pero en la realidad no hay información perfecta, por lo tanto las decisiones cotidianas se encuentran en un ambiente de incertidumbre, lo cual requiere de modelos que describan y expliquen la forma de tomar decisiones de manera más realista y, por lo tanto, es necesario que dichos modelos permitan que los individuos tomen decisiones de portafolio no solo por su perfil de

<sup>3</sup> Véase, al respecto, el trabajo seminal de Arrow (1965).

<sup>4</sup> Otro modelo que comparte el enfoque CCAPM es el de Cox *et al.*, (1985).

riesgo-rendimiento, sino también por sus preferencias inter-temporales de sustitución del consumo.<sup>5</sup>

Así pues, los modelos tradicionales presentan una elasticidad de sustitución inter-temporal asociada con el inverso del coeficiente de aversión al riesgo (Chatterjee *et al.*, 2004), lo cual conlleva a complicaciones de interpretación en la práctica cuando se estiman dichos parámetros y es por ello que la obtención de cada parámetro en forma separada, dentro de un mismo modelo, será de gran utilidad.

Es importante mencionar que la necesidad de separar la sustitución intertemporal del consumo y la aversión al riesgo ha sido analizada en diversos trabajos, entre los cuales, destacan: Epstein (1988), Giovannini y Weil (1989), Campbell (1990), Kandel y Stambaugh (1990), Epstein y Zin (1990, 1991a, 1991b) y Bufman y Leiderman (1990). Esta investigación parte del concepto de utilidad inter-temporal recursiva, en tiempo discreto, propuesto por Epstein y Weil (1990) y encuentra su motivación en los modelos estándar de Epstein y Zin (1989) y Weil (1990). Estos modelos permiten cierto grado de separación entre la aversión al riesgo y la elasticidad de sustitución intertemporal, lo cual es alcanzado con una razonable relajación de los axiomas de la teoría de la utilidad esperada intertemporal; siendo la principal relajación el permitir la consideración de riesgo de consumo inter-temporal.

Asimismo, en esta investigación, bajo el enfoque de utilidad recursiva, se desarrollan varios modelos de toma de decisiones de un consumidor racional con acceso a diferentes activos riesgosos, en tiempo continuo, obteniendo una mejor interpretación y explicación de los mencionados parámetros. Las soluciones cerradas que se obtienen para las restricciones presupuestales extienden el trabajo de Duffie y Epstein (1992).<sup>6</sup> Los modelos propuestos producen importantes hallazgos teóricos, consistentes con las observaciones, debido a la flexibilidad ofrecida por la utilidad diferencial estocástica para separar la tasa sustitución intertemporal del consumo del coeficiente de aversión al riesgo.

La importancia de aislar cada uno de los parámetros antes mencionados radica en que es posible cuantificar la sensibilidad intertemporal del consumo ante cambios en los precios relativos, lo cual tiene incidencia directa en las decisiones de los agentes económicos o en medidas de política económica aplicadas a sus decisiones. Por otro lado, el coeficiente de aversión al riesgo indica qué tan dispuesto está un agente a rechazar una inversión incierta. Por ejemplo, si un agente económico tiene un aumento en su riqueza, elegirá aumentar la proporción del activo riesgoso en su portafolio si su aversión al riesgo relativa baja. Es de esperarse que el consumo pasado influya en las decisiones actuales a través de su efecto en la riqueza actual. Por lo tanto, separar estos aspectos de las preferencias implica un mayor realismo, porque la elección sobre el consumo o un activo afectan la decisión de los agentes en cada estado de la naturaleza.

<sup>5</sup> Algunos otros estudios que extienden el análisis de las estructuras alternativas de preferencias y la valuación de activos son: Detemple y Zapatero (1991), Sundaresan (1989), Constantinides (1990), Hindy (1990) y Huang (1987).

<sup>6</sup> Estos autores analizan a la utilidad recursiva en tiempo continuo. Otros investigadores que aplican el concepto de utilidad recursiva son: Chatterjee *et al.*, (2003).

Finalmente, los agentes que participan en los mercados financieros lo hacen para buscar rendimientos que incrementen su consumo en el futuro y con ello su utilidad.

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma. En la sección “Utilidad Diferencial Recursiva Estocástica (UDRE)” se extiende el concepto de utilidad recursiva en tiempo continuo y en ambientes estocásticos (Duffie y Epstein, 1992). En la sección “Planteamientos y solución de modelos con UDRE” se plantean los modelos de decisión, bajo el enfoque UDRE, cuando el individuo tiene acceso a un bono, uno o varios activos riesgosos, un derivado y saldos reales. A través de la sección “Implicaciones teóricas de los modelos desarrollados con UDRE y su contraste con Hamilton-Jacobi-Bellman” se discuten las implicaciones teóricas encontradas en los modelos desarrollados. En el transcurso de la sección “Estática comparativa” se realizan ejercicios gráficos de estática comparativa para explicar la dinámica de las variables de decisión ante cambios en las variables independientes; para ello se emplearon datos del consumo, precios de bonos, el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y los precios derivados sobre futuros del IPC en México. Por último, se presentan las conclusiones.

#### ■ *Utilidad Diferencial Recursiva Estocástica (UDRE)*

La literatura sobre los modelos macroeconómicos inter-temporales, generalmente, se basa en supuestos poco realistas. Por ejemplo, en el modelo CAPM los agentes del modelo son adversos al riesgo y maximizan la utilidad de su riqueza en el período subsecuente; estos no pueden afectar los precios, tienen expectativas homogéneas y cuentan con perfecta información; así mismo existe un activo libre de riesgo sobre el cual los individuos prestan y se endeudan en cantidades ilimitadas. En otras palabras, el mercado de activos es perfecto y la oferta de activos es fija. Por todo lo anterior, en estudios empíricos las estimaciones presentan sesgos, lo cual es de esperarse sobre todo por la presencia de más factores de riesgo que activos negociables (Venegas-Martínez y González-Aréchiga, 2000). Y la limitación más fuerte es que no es posible con este tipo de modelos analizar la elasticidad de sustitución inter-temporal y el coeficiente de aversión al riesgo por separado.

En tiempo discreto, los dos parámetros mencionados han sido derivados solo como una aproximación bajo el supuesto de que el consumo y el rendimiento de los activos tienen distribución normal, como en Epstein y Zin (1991a). En este caso, los dos factores del modelo son susceptibles a la crítica de Roll (1977) sobre el CAPM con un portafolio agregado, ya que este incluye activos no comerciables y esto hace que los rendimientos del portafolio no sean observables. Posteriormente surgen los modelos de utilidad recursiva de Duffie and Epstein (1992), en los que la valuación de activos tiene una mayor influencia en el análisis. Un aspecto relevante es que estos modelos son inmunes a la crítica de Roll (1977).

Utilidad Diferencial Recursiva Estocástica es consistente con la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes (1973) que satisface la prima de una opción europea, véase, al respecto, Venegas-Martínez *et al.*, (2013). El problema del consumidor con UDRE se define en la siguiente función de valor:

$$J(a_t) = \max_{c_s | s \in [t, \infty)} E_t \left[ \int_t^\infty \frac{C_s^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} e^{-\rho(s-t)} ds \right]$$

De esta manera, si separamos las integrales a través de límites consecutivos de integración, tenemos:

$$J(a_t) = \max_{c_s | s \in [t, \infty)} \left\{ \int_t^\infty \frac{C_s^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} e^{-\rho(s-t)} ds - e^{-\rho dt} E_{t+dt} \left[ \int_{t+dt}^\infty \frac{C_s^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} e^{-\rho(s-(t+dt))} ds \right] \right\}$$

Consecuentemente,

$$J(a_t) = \max_{c_s | s \in [t, t+dt)} \left\{ \frac{C_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} dt + o(dt) + e^{-\rho dt} E_t J(a_t + da_t) \right\}$$

Después de varios pasos, que se detallan en la sección “Planteamientos y solución de modelos con UDRE”, se llega a la expresión:

$$0 = \frac{B^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} + A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-k}} \left[ -\rho + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \left[ (r + \theta_i(\mu - r)) - B \right] - \frac{1}{2} R \theta_i^2 \sigma^2 \right] \equiv H$$

Al calcular  $\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0$ , tenemos  $\mu - r - R \theta_i^2 \sigma^2 = 0$ . Con ello,  $\theta = \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right) \frac{1}{\sigma R}$ .

Al sustituir el valor de  $\theta$  en  $H$  obtenemos:

$$0 = \frac{B^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} + A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-k}} \left[ -\rho + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \left( r + \frac{\lambda^2}{2R} - B \right) \right] \equiv K$$

Si se obtiene la parcial de  $K$  con respecto de  $B$ , obtenemos:

$$\frac{\partial K}{\partial B} = \frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R} B^{-\frac{1}{\varepsilon}} - A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-k}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0$$

Precisamente,

$$B = (1-R)^{-\varepsilon} A^{\frac{1-\varepsilon}{1-k}}$$

Al sustituir en  $B$  en  $K$ , la expresión resultante es:

$$A = \left[ \varepsilon \rho + (1 - \varepsilon) \left( r + \frac{\lambda^2}{2R} \right) \right]^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} (1 - R)^{-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$$

Se resuelve A en B y se llega a la solución del problema de optimización del consumidor.

$$c_t = (1 - R)^{-\varepsilon} (1 - R)^\varepsilon \left( \varepsilon \rho + (1 - \varepsilon) \left( r + \frac{\lambda^2}{2R} \right) \right) a_t$$

En esta sección se introdujo el concepto de UDRE, el cual difiere del enfoque tradicional de Hamilton-Jacobo-Bellman (HJB) en: el planteamiento matemático del problema del consumidor racional, en el uso de las aproximaciones a la función de valor y en la obtención de los parámetros en estudio (la elasticidad de sustitución intertemporal y el coeficiente de aversión al riesgo). Ya que, con HJB tenemos:

$$\text{Maximizar } E \left[ \int_0^\infty \frac{c_s^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} e^{-\rho(s)} ds \middle| F_t \right]$$

$$\text{sujeto a: } da_t = a_t(1 - \theta_t)dR_b + a_t\theta_t dR_s - c_t dt$$

$$dR_b = r dt \quad dR_s = \mu dt + \sigma dW_t$$

Después de varios pasos, si  $c_t$  es óptimo se llega a la ecuación de HJB, el problema es encontrar la función de valor de la forma:

$$0 = \frac{c_s^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} e^{-\rho t} + \frac{\partial J(a_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(a_t, t)}{\partial a_t} a_t \mu_a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(a_t, t)}{\partial a_t^2} a_t^2 \sigma_a^2$$

Cuando se ha encontrado dicha función de valor y el candidato de solución, se realizan pasos algebraicos para encontrar:

$$0 = \frac{c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}} - \rho \beta + \beta \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \mu_a + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \beta \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \sigma_a^2 = H$$

Ahora con  $H$  y sus derivadas se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \frac{c_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}} - \rho \beta + \beta \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \mu_a + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{\varepsilon} \right) \beta \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \sigma_a^2 \\ \frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 = \frac{1 - \frac{1}{\varepsilon}}{a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}} c_t^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \beta \frac{\left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right)}{a_t} \Rightarrow c_t^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \beta a_t^{-\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow c_t = \beta^{-\varepsilon} a_t \\ \frac{\partial H}{\partial \theta_t} = 0 = \beta \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) (\mu - r) - \theta_t \sigma^2 \beta \frac{\left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right)}{\varepsilon} \Rightarrow \theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \varepsilon \end{cases}$$

Después de sustituir el resultado de las parciales en  $H$ , se obtiene una expresión para  $c_t$ , en términos solo de parámetros, así como para la prima de riesgo  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ .

La trayectoria del consumo está dada por:

$$c_t = \left[ \varepsilon \rho + (1 - \varepsilon) \left( r + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon (\mu - r)^2}{\sigma^2} \right) \right] a_t$$

$$c_t = \left[ \varepsilon \rho + (1 - \varepsilon) \left( r + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda^2 \right) \right] a_t$$

En resumen, con UDRE, la decisión de consumo se ve afectada por la aversión al riesgo; mientras que con HJB solo se observa la influencia de la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Además, como puede observarse con UDRE, el parámetro de aversión al riesgo se encuentra en el denominador de la proporción de la riqueza que el agente representativo destina a la tenencia del activo riesgoso, lo cual se interpreta de la siguiente forma: si un individuo tiene mayor aversión al riesgo (una  $R$  mayor), esto ocasiona que la proporción de la riqueza que se destina a la tenencia del activo riesgoso disminuya, en términos gráficos la función será más cóncava. Esto no se observa en la solución del problema del consumidor racional a través de HJB.

#### ■ *Planteamiento y solución de modelos con UDRE*

En el análisis empírico, en ocasiones, cuando se obtiene la dirección correcta del signo en la aversión al riesgo, es posible separar la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo de la aversión al riesgo. No obstante, la aversión al riesgo con el enfoque UDRE es mejor explicada debido a que esta visión distingue entre el tipo de información proporcionada.

A continuación se presenta el planteamiento de los modelos alternativos, en el contexto de UDRE, en la toma de decisiones de consumo y portafolio de un consumidor racional. En el problema de decisión del consumidor racional la función objetivo está dada por:

$$(1) \quad \underset{\theta_s, C_s}{\text{Maximizar}} E \left\{ \int_0^{\infty} \frac{C_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} e^{-\rho t} dt \middle| F_0 \right\}$$

donde  $C_t$  es consumo,  $\rho$  es la tasa subjetiva de descuento,  $\varepsilon$  es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo,  $R$  es el coeficiente de aversión al riesgo (o grado relativo de aversión al riesgo) y  $\bar{q}_t$  es el vector de proporciones que se asignan a los diferentes activos disponibles en los mercados financieros. En el Cuadro 1, en forma de resumen, se presenta un conjunto de posibles restricciones presupuestales depen-

diendo del tipo de activos que se incluyan en el portafolio. En este cuadro, la cantidad  $a_t$  representa el nivel de la riqueza del individuo,  $\sigma$  la volatilidad del activo riesgoso;  $dR_i, i = b, S, m, V$  es el rendimiento de un bono,  $b$ , o de un activo riesgoso,  $S$ , o de saldos monetarios reales,  $m$ , o de un producto derivado,  $V$ , con pago al vencimiento; y, por último,  $\pi$  es el nivel de inflación.

Cuadro 1

| Activos   | Restricción  |
|---|--|
| Bono + activo riesgoso                            | $da_t = a_t(1 - \theta_t)dR_b + a_t\theta_t dR_s - C_t dt$   |
| Bono + saldos reales                              | $da_t = a_t(1 - \theta_t)rdt + a_t\theta_t\left[\left(-\pi + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t\right] - C_t dt$                                 |
| Bono + activo riesgoso + derivado                 | $da_t = a_t(1 - \theta_{1t} - \theta_{2t})dR_b + a_t\theta_{1t}dR_s + a_t\theta_{2t}dR_V - C_t dt$<br>$V = V(S, t)$ es el precio de un derivado          |
| Bono + activo riesgoso + derivado + saldos reales | $da_t = a_t(1 - \theta_{1t} - \theta_{2t} - \theta_{3t})dR_b + a_t\theta_{1t}dR_s + a_t\theta_{2t}dR_V + a_t\theta_{3t}dR_\pi - C_t dt$<br>$V = V(S, t)$ |
| Bono + dos acciones (riesgosas)                   | $da_t = a_t(1 - \theta_{1t} - \theta_{2t})dR_b + a_t\theta_{1t}dR_{1s} + a_t\theta_{2t}dR_{2s} - C_t dt$   |

Ahora bien, si se escribe el problema en términos de una función de valor,  $J(a_t)$ , o utilidad indirecta, se tiene que:

$$(2) \quad J(a_t) = \frac{\max}{\theta_s, C_s \Big|_{s \in [t, \infty)}} E_t \left\{ \int_t^\infty \frac{C_s^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{1-R} e^{-\rho(s-t)} ds \right\}$$

Al separar la expresión anterior en términos de dos integrales con límites consecutivos de integración, se sigue que:

$$(3) \quad J(a_t) = \max_{\theta_s, C_s \Big|_{s \in [t, t+dt]}} \int_t^{t+dt} \frac{C_s^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{1-R} ds + o(dt) + e^{-\rho(s-t)} E_t \max_{\theta_s, C_s \Big|_{s \in [t+dt, \infty)}} \left\{ \int_{t+dt}^\infty \frac{C_s^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{1-R} e^{-\rho(s-(t+dt))} ds \right\}$$

Si se reescribe ahora la función de utilidad indirecta como:

$$J(a_t) = V(a_t)^{\frac{1-\frac{1}{\epsilon}}{1-R}} \quad \text{con} \quad V(a_t) = Aa_t^{1-R},$$

se obtiene

$$J(a_t) = A^{\frac{1-\frac{1}{\epsilon}}{1-R}} a_t^{1-\frac{1}{\epsilon}}.$$



Si se emplea de nuevo la definición de  $J(a_t)$ , se tiene:

$$(4) \quad V(a_t)^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} = \max_{\theta_t, C_t} \left\{ \frac{C_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} ds + o(dt) + e^{dt} E_t V(a_t + da_t) \right\}^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}}$$

A continuación se reescribe la riqueza marginal,  $da_t$ , en términos de las restricciones del cuadro 1 y se supone que los rendimientos de los activos son conducidos por las siguientes dinámicas, en términos de cambios porcentuales:

$$dR_b = \frac{db_t}{b_t} = rdt$$

$$dR_s = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

donde  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo de incumplimiento,  $\mu$  es el rendimiento anualizado del activo riesgoso y  $\sigma$  es su volatilidad instantánea. El proceso  $W_t$  es un movimiento browniano estándar que inicia en cero, presenta incrementos independientes y tiene distribución normal con media cero y varianza  $dt$ , es decir,

$$E[dW_t] = 0$$

y

$$\text{Var}[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt.$$

De esta manera, las restricciones presupuestales se pueden reescribir en el Cuadro 2 como:

Cuadro 2

| Modelos                | Reescribiendo $da_t$ con supuestos adicionales  |
|------------------------|---|
| Bono + activo riesgoso | $da_t = a_t(1 - \theta_t)rdt + a_t\theta_t(\mu dt + \sigma dW_t) - C_t dt$                  |
|                        | entonces,   |
|                        | $da_t = a_t\left(r + \theta_t(\mu - r) - \frac{C_t}{a_t}\right)dt + a_t\theta_t\sigma dW_t$ |
|                        | con $C_t = Ba_t \Rightarrow B = \frac{C_t}{a_t}$  |
|                        | $da_t = a_t(r + \theta_t(\mu - r) - B)dt + a_t\theta_t\sigma dW_t$                          |

## Modelos

Reescribiendo  $da_t$  con supuestos adicionales

Bono + saldos reales

$$dR_m = \frac{d\left(\frac{M_t}{P_t}\right)}{\frac{M_t}{P_t}} = \frac{d\left(\frac{1}{P_t}\right)}{\frac{1}{P_t}}$$

Como  $dP_t = \pi P_t dt + \sigma P_t dW_t$ , entonces al aplicar el lema de Itô, se tiene:

$$dR_m = \frac{d\left(\frac{1}{P_t}\right)}{\frac{1}{P_t}} = \frac{1}{P_t} \left[ \left( \left( \frac{1}{P_t^2} \right) \pi P_t + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{P_t^3} \right) \sigma^2 P_t^2 \right) dt + \left( \frac{1}{P_t^2} \right) \sigma P_t dW_t \right]$$

$$dR_m = \left( -\pi + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt - \sigma dW_t,$$

en cuyo caso  $da_t$  satisface:

$$da_t = a_t \left( r + \theta_t \left( -\pi + \frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) + B \right) dt + a_t \theta_t \sigma dW_t,$$

Bono + activo riesgoso + derivado

$$dR_v = \frac{dV_t}{V_t} = \mu_v dt + \sigma_v dW_t.$$

Por el lema Itô, se sigue que:

$$\mu_v = \frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2}{V}$$

$$\sigma_v = \frac{\frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t}{V}$$

Por lo tanto,

$$da_t = a_t \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) - \frac{C_t}{a_t} \right] dt + a_t (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v) dW_t$$

Bono + activo riesgoso + derivado + saldos reales

$$da_t = a_t (1 - \theta_{1t} - \theta_{2t} - \theta_{3t}) r dt + a_t \theta_{1t} (\mu dt + \sigma dW_t) + a_t \theta_{2t} (\mu_v dt + \sigma_v dW_t) + a_t \theta_{3t} (\pi dt + \sigma dW_t) - C_t dt$$

se reescribe de la siguiente forma:

$$da_t = a_t \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) + \theta_{3t} (\mu_n - r) - \frac{C_t}{a_t} \right] dt$$

$$+ a_t (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v + \theta_{3t} \sigma_p) dW_t$$

| Modelos                            | Reescribiendo $da_t$ con supuestos adicionales  |
|------------------------------------|---|
| Bono + dos acciones<br>(riesgosas) | $dR_{1t} = \frac{dS_{1t}}{S_{1t}} \Rightarrow dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_{1t}$ $dR_{2t} = \frac{dS_{2t}}{S_{2t}} \Rightarrow dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dW_{2t}$ <p>Por lo tanto,</p> $da_t = a_t \left( r + \theta_{1t} (\mu_1 - r) + \theta_{2t} (\mu_2 - r) - \frac{C_t}{a_t} \right) dt + a_t (\theta_{1t} \sigma_1 dW_{1t} + \theta_{2t} \sigma_2 dW_{2t})$ |

A continuación, en el Cuadro 3, se obtiene el cambio marginal en la función de valor,  $dV(a_t)$ , después de aplicar el lema de Itô:

Cuadro 3

| Modelos  | $dV(a_t)$   |
|--|---|
| Bono + activo<br>riesgoso                                  | $dV(a_t) = \left\{ \frac{\partial V}{\partial a_t} a_t \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) - \frac{C_t}{a_t} \right] dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_t^2} a_t^2 (\theta_{1t} \sigma)^2 \right\} dt + \frac{\partial V}{\partial a_t} a_t (\theta_{1t} \sigma) dW_t$  |
| Bono + saldos<br>reales                                    | $dV(a_t) = \left\{ V'(a_t) a_t \left[ g(\bar{\theta}_t) - \frac{C_t}{a_t} \right] dt + \frac{1}{2} V''(a_t) a_t^2 \sigma^2 \right\} dt + V'(a_t) a_t \sigma dW_t$   |
| Bono + activo<br>riesgoso +<br>derivado                    | $dV(a_t) = \left\{ \frac{\partial V}{\partial a_t} a_t \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) - \frac{C_t}{a_t} \right] \right\} dt +$ $\left\{ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_t^2} a_t^2 (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v)^2 \right\} dt +$ $\frac{\partial V}{\partial a_t} a_t (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v) dW_t$   |
| Bono + activo<br>riesgoso +<br>derivado +<br>saldos reales | $dV(a_t) = \left\{ \frac{\partial V}{\partial a_t} a_t \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) + \theta_{3t} (\mu_\pi - r) - \frac{C_t}{a_t} \right] + \right\} dt$ $\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_t^2} a_t^2 (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v + \theta_{3t} \sigma_\pi)^2 \right\} dt +$ $+ \frac{\partial V}{\partial a_t} a_t (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v + \theta_{3t} \sigma_\pi) dW_t$ |
| Bono + dos<br>acciones (ries-<br>gosas)                    | $dV(a_t) = \left\{ \frac{\partial V}{\partial a_t} a_t \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) - \frac{C_t}{a_t} \right] + \right\} dt$ $\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial a_t^2} a_t^2 (\theta_{1t}^2 \sigma_1^2 + \theta_{2t}^2 \sigma_2^2 + 2\theta_{1t} \theta_{2t} \sigma_1 \sigma_2 \rho) \right\} dt +$ $+ \frac{\partial V}{\partial a_t} a_t (\theta_{1t} \sigma_1 + \theta_{2t} \sigma_2) dW_t$                   |

Para simplificar la notación se incorporan algunas definiciones, las expresiones especificadas en el Cuadro 4:

Cuadro 4

| Modelos   | Expresiones auxiliares para simplificar la notación de los modelos   |
|---|--|
| Bono + activo riesgoso                            | $g(\bar{\theta}_t) = r + \theta_t(\mu - r)$ y $\sigma_a = \theta_t\sigma$  |
| Bono + saldos reales                              | $g(\bar{\theta}_t) = r + \theta_t(-\pi + \frac{1}{2}\sigma^2 - r)$ y $\sigma_a = \theta_t\sigma$   |
| Bono + activo riesgoso + derivado                 | $\sigma_a = (\theta_{1t}\sigma + \theta_{2t}\sigma_v), g(\theta_{1t}, \theta_{2t}) = r + \theta_{1t}(\mu - r) + \theta_{2t}(\mu_v - r)$ y $g(\bar{\theta}_t) = g(\theta_{1t}, \theta_{2t})$  |
| Bono + activo riesgoso + derivado + saldos reales | $g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = g(\bar{\theta}_t) = [r + \theta_{1t}(\mu - r) + \theta_{2t}(\mu_v - r) + \theta_{3t}(\mu_\pi - r)]$ y $\sigma_a = (\theta_{1t}\sigma + \theta_{2t}\sigma_v + \theta_{3t}\sigma_\pi)$  |
| Bono + dos acciones (riesgosas)                   | $g(\theta_{1t}, \theta_{2t}) = g(\bar{\theta}_t) = r + \theta_{1t}(\mu_1 - r) + \theta_{2t}(\mu_2 - r)$ y $\sigma_a^2 = \theta_{1t}^2\sigma_1^2 + \theta_{2t}^2\sigma_2^2 + 2\theta_{1t}\theta_{2t}\sigma_1\sigma_2\rho$<br><br>donde $Cov(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt, \sigma_{1a} = \theta_{1t}\sigma_1, \sigma_{2a} = \theta_{2t}\sigma_2, \sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2,$<br><br>$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ y $g(\bar{\theta}_t) = g(\theta_{1t}, \theta_{2t}).$ |

Con base en la notación anterior, y considerando de nuevo a  $dV(a_t)$ , se sigue que:

$$(5) \quad dV(a_t) = \left\{ V'(a_t)a_t \left[ g(\bar{\theta}_t) - \frac{C_t}{a_t} \right] dt + \frac{1}{2} V''(a_t)a_t^2 \sigma_a^2 \right\} dt + V'(a_t)a_t \sigma_a dW_t$$

En virtud de que, por definición,  $V(a_t + da_t) = V(a_t) + dV(a_t)$ , se obtiene:

$$(6) \quad V(a_t + da_t) = V(a_t) + \left\{ V'(a_t)a_t \left[ g(\bar{\theta}_t) - \frac{C_t}{a_t} \right] + \frac{1}{2} V''(a_t)a_t^2 \sigma_a^2 \right\} dt + V'(a_t)a_t \sigma_a dW_t$$

Después de elevar a la potencia  $(1 - \varepsilon^{-1})/(1 - R)$ , sustituir  $V(a_t) = Aa_t^{1-R}$  y  $C_t = Ba_t$ , y aplicar la esperanza a la expresión (6), se tiene:

$$(7) \quad A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} = \max_{\bar{\theta}_t, C_t} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{B^{1-\frac{1}{\varepsilon}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} dt + o(dt) + A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} + A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \left[ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) (g(\bar{\theta}_t) - B) \right] dt \right] \\ & \left[ -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) R \sigma_a^2 dt - \rho A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} dt \right] \end{aligned} \right\}$$

Si la expresión anterior se divide por  $dt$  y se toma el límite cuando  $dt \rightarrow 0$ , entonces los valores óptimos de  $C_t$ ,  $\bar{\theta}_t$  satisfacen la siguiente condición necesaria:

$$(8) \quad 0 = \frac{B^{1-\frac{1}{\varepsilon}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} + A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \left[ \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) (g(\bar{\theta}_t) - B) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) R \sigma_a^2 \right] - \rho A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

Si se divide la expresión anterior entre  $a_t^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$ , se obtiene que:

$$(9) \quad 0 = \frac{B^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-R} + A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} \left[ -\rho + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) (g(\bar{\theta}_t) - B - \frac{1}{2} R \sigma_a^2) \right]$$

Para obtener los puntos críticos, se deriva parcialmente (9) con respecto de  $B$ , se sustituye  $A^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}}$  en la ecuación (9), se multiplica todo por  $(1-R)B^{\frac{1}{\varepsilon}}$  y después se eliminan términos similares para llegar al cuadro siguiente:

Cuadro 5

| Modelos   | Puntos críticos   |
|---|---|
| Bono + activo riesgoso                            | $A^* = \left( \frac{1}{1-R} \right)^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} \left[ \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left( r + \theta_t (\mu - r) - \frac{1}{2} R (\theta_t \sigma)^2 \right) \right]^{\frac{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}}$ $B^* = \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left[ r + \theta_t (\mu - r) - \frac{1}{2} R (\theta_t \sigma)^2 \right]$ $C_t^* = \left[ \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left( r + \theta_t (\mu - r) - \frac{1}{2} R (\theta_t \sigma)^2 \right) \right] a_t$   |
| Bono + saldos reales                              | $A^* = \left( \frac{1}{1-R} \right)^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}} \left[ \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left( r + \theta_t \left( -\pi + \frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) - \frac{1}{2} R (\theta_t \sigma)^2 \right) \right]^{\frac{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}}$ $B^* = \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left[ r + \theta_t \left( -\pi + \frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) - \frac{1}{2} R (\theta_t \sigma)^2 \right]$ $C_t^* = \left[ \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left( r + \theta_t \left( -\pi + \frac{1}{2} \sigma^2 - r \right) - \frac{1}{2} R (\theta_t \sigma)^2 \right) \right] a_t$  |
| Bono + activo riesgoso + derivado                 | $A^* = \left\{ \varepsilon 1 - R^\varepsilon \left[ \rho - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \left( r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) - \frac{1}{2} R (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v)^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$ $B^* = \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) - \frac{1}{2} R (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v)^2 \right]$ $C_t^* = \left[ \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left( r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) - \frac{1}{2} R (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v)^2 \right) \right] a_t$   |
| Bono + activo riesgoso + derivado + saldos reales | $A^* = \left( \frac{1}{1-R} \right)^{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}}$ $\times \left[ \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left( r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) + \theta_{3t} (\mu_\pi - r) - \frac{1}{2} R (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v)^2 \right) \right]^{\frac{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}}{1-R}}$ $B^* = \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left[ r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) + \theta_{3t} (\mu_\pi - r) - \frac{1}{2} R (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v)^2 \right]$ $C_t^* = \left[ \varepsilon \rho + (1-\varepsilon) \left( r + \theta_{1t} (\mu - r) + \theta_{2t} (\mu_v - r) + \theta_{3t} (\mu_\pi - r) - \frac{1}{2} R (\theta_{1t} \sigma + \theta_{2t} \sigma_v)^2 \right) \right] a_t$ |

| Modelos                         | Puntos críticos   |
|---------------------------------|---|
| Bono + dos acciones (riesgosas) | $A^* = \left(\frac{1}{1-R}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{1-R}}$ $\times \left[ \varepsilon\rho + (1-\varepsilon)(r + \theta_{1i}(\mu_1 - r) + \theta_{2i}(\mu_2 - r) - \frac{1}{2}R(\theta_{1i}^2\sigma_1^2 + \theta_{2i}^2\sigma_2^2 + 2\theta_{1i}\theta_{2i}\sigma_1\sigma_2\rho)) \right]^{\frac{\frac{1-\varepsilon}{1-R}}{1-R}}$ $B^* = \varepsilon\rho + (1-\varepsilon)\left[r + \theta_{1i}(\mu_1 - r) + \theta_{2i}(\mu_2 - r) - \frac{1}{2}R(\theta_{1i}^2\sigma_1^2 + \theta_{2i}^2\sigma_2^2 + 2\theta_{1i}\theta_{2i}\sigma_1\sigma_2\rho)\right]$ $C_i^* = \left[ \varepsilon\rho + (1-\varepsilon)(r + \theta_{1i}(\mu_1 - r) + \theta_{2i}(\mu_2 - r) - \frac{1}{2}R(\theta_{1i}^2\sigma_1^2 + \theta_{2i}^2\sigma_2^2 + 2\theta_{1i}\theta_{2i}\sigma_1\sigma_2\rho)) \right] a_i$ |

■ *Implicaciones teóricas de los modelos desarrollados con UDRE y su contraste con Hamilton-Jacobi-Bellman*

En el análisis anterior, el concepto UDRE permitió separar la elasticidad de sustitución intertemporal de consumo y la aversión relativa al riesgo, en la solución del problema de toma de decisiones de consumo y elección de las proporciones de la riqueza que se destinarán a la compra de activos en un portafolio (con bonos, activos riesgosos, saldos reales y derivados).<sup>7</sup>

En un problema de optimización con UDRE, las decisiones de consumo y portafolio, en general, son de la forma:

$$\theta = \frac{\lambda}{\sigma R},$$

$$C_i^* = \left[ \varepsilon\rho + (1-\varepsilon)\left(g(\bar{\theta}_i) - \frac{1}{2}R\sigma_a^2\right) \right] a_i.$$

Las expresiones del Cuadro 5 contienen la tasa de sustitución intertemporal del consumo ( $\varepsilon$ ), la cual pondera a la tasa subjetiva de descuento del individuo ( $\rho$ ); mientras que,  $(1 - \varepsilon)$  pondera al componente de la varianza donde se encuentra el coeficiente de aversión al riesgo ( $R$ ). Intuitivamente se observa que el individuo consume una parte constante de su riqueza en cada periodo que depende de: la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo ( $\varepsilon$ ), el complemento de la tasa de sustitución intertemporal ( $1 - \varepsilon$ ), la tasa subjetiva de descuento del individuo ( $\rho$ ), el coeficiente de aversión al riesgo ( $R$ ) y las proporciones de la riqueza que se asignan a los diferentes activos,  $g(\bar{\theta}_i)$ . Mientras que, en general, las soluciones con Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) son de la forma (véase Venegas-Martínez, 2008):

$$\theta = \frac{\lambda\varepsilon}{\sigma},$$

$$c_i = \left[ \varepsilon\rho + (1-\varepsilon)\left(r + \frac{1}{2}\varepsilon\lambda^2\right) \right] a_i.$$

<sup>7</sup> Otros modelos sobre la determinación óptima de saldos reales se encuentran en Venegas-Martínez (1999).

De esta manera, con el enfoque UDRE, el parámetro de aversión al riesgo es parte del divisor de la proporción de la riqueza que el agente asigna a la tenencia del activo riesgoso y, cuando este divisor aumenta, se reduce la proporción de la riqueza que se destina a la tenencia del activo riesgoso; esto no se puede observar de la solución del problema del consumidor racional con HJB. UDRE sí permite incluir efectos negativos de la aversión al riesgo en la integración del portafolio.

### ■ *Estática comparativa*

Los ejercicios de estática comparativa que a continuación se muestran, a través de gráficas, permiten describir la dinámica de la variable de decisión ante cambios en las variables independientes.<sup>8</sup> Para ello se emplearon datos del consumo, precios de bonos, la base monetaria deflactada (como proxy de los saldos reales), el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), para simular el comportamiento de los activos, y precios de opciones sobre futuros del IPC en México. Se deflactaron las variables nominales, la información fue consultada en INEGI y Banxico. Con la finalidad de contar con unidades parsimoniosas se realizó el análisis con el índice 2010=100, de esta forma, los ejes representan el valor relativo de cada variable expresado como porcentaje. La estimación de la tasa subjetiva de descuento se obtuvo de Rivera-Hernández y Venegas-Martínez (2014).

En la Gráfica 1 se puede observar que, con base en los modelos desarrollados, el agente representativo en México prefiere consumir y adquirir bonos respecto a sus opciones para invertir (si se considera un portafolio compuesto por bonos y activos), en el corto plazo. También se observa que el agente consume una proporción constante de su riqueza en cada periodo; esta depende de su tasa de sustitución intertemporal del consumo,  $\varepsilon$ . En el mediano plazo se observa una tendencia a la adquisición de bonos; sin embargo, en el largo plazo, los inversionistas tienden a equilibrar su portafolio, lo cual indica que el agente representativo en México es adverso al riesgo en el corto y mediano plazo.

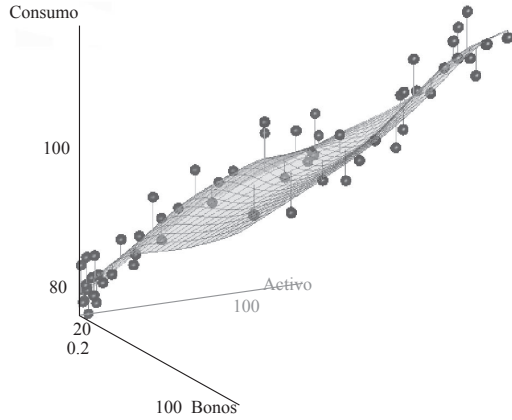
Asimismo, se observa que las elecciones del consumidor en el tiempo permiten una trayectoria de consumo creciente. Es importante subrayar que en México se estabiliza la aversión al riesgo en el largo plazo y los inversionistas ponderan más la tenencia de bonos en sus portafolios en el corto y mediano plazo (si el portafolio considera bonos y activos).

Ya que, en el corto plazo y mediano plazo, con un portafolio que contiene saldos reales y bonos, se encuentra preferencia por la liquidez y el consumo, véase la Gráfica 2. Esto posiblemente puede explicarse por el nivel de profundización finan-

<sup>8</sup> Cada diagrama de dispersión muestra las correlaciones entre las variables con un intervalo de confianza. Si los puntos descienden desde la parte inferior izquierda a la superior derecha, la gráfica indica una correlación positiva entre las variables en estudio; mientras que, un patrón de puntos que van desde la parte superior izquierda a la inferior derecha, sugiere una correlación negativa. La ventaja de analizar los datos con las gráficas de dispersión empleadas es la posibilidad de observar también las relaciones no lineales entre las variables. Con la finalidad de observar mejor el ajuste se estima una ecuación para determinar la correlación entre las variables; se estimó una *smoothed regression* que garantiza una solución cerrada en tiempo finito. De esta forma, la superficie con rejilla permite observar el ajuste de las relaciones entre los datos.

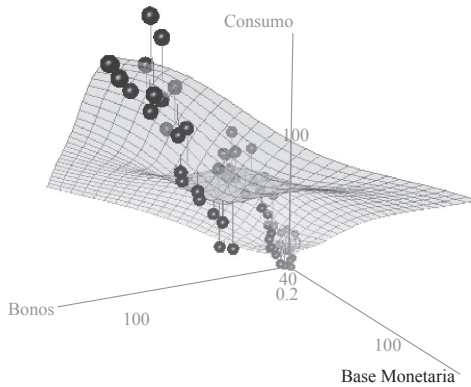
ciera en México. Sin embargo, en el largo plazo, las proporciones que se destinan a invertir en bonos crecen generando que las proporciones de riqueza destinadas al consumo, bonos y a los saldos reales sean similares, lo que muestra una dinámica constante y creciente entre las referidas variables, que convergen en un equilibrio.

Gráfica 1  
Dinámica del consumo explicada por un portafolio\* (Porcentaje)



\*Portafolio compuesto por bonos a tasa fija y una acción riesgosa (Activo).  
Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

Gráfica 2  
Dinámica del consumo explicada por un portafolio\* (Porcentaje)

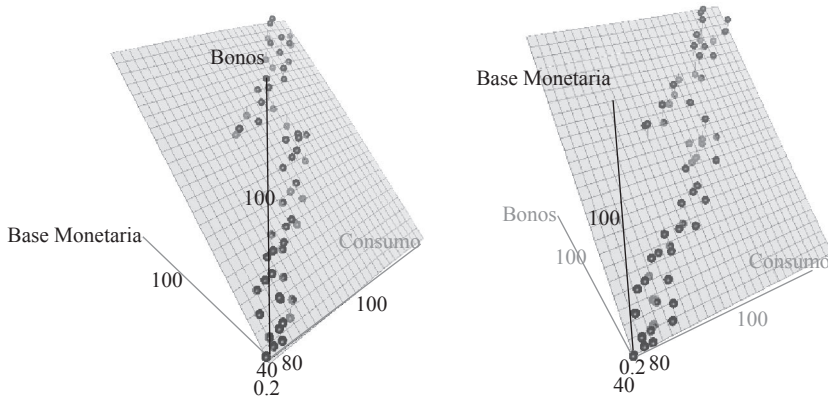


\*Portafolio compuesto por bonos y saldos reales (Base Monetaria).  
Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.



Un ejercicio gráfico de estática comparativa que muestra la dinámica de los bonos a tasa fija y los saldos reales, de un agente representativo en México, es explicada ahora por las elecciones de consumo, véanse las Gráficas 3 y 4.

Gráficas 3 y 4  
Dinámica de los bonos a tasa fija y los saldos reales de un agente representativo



Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

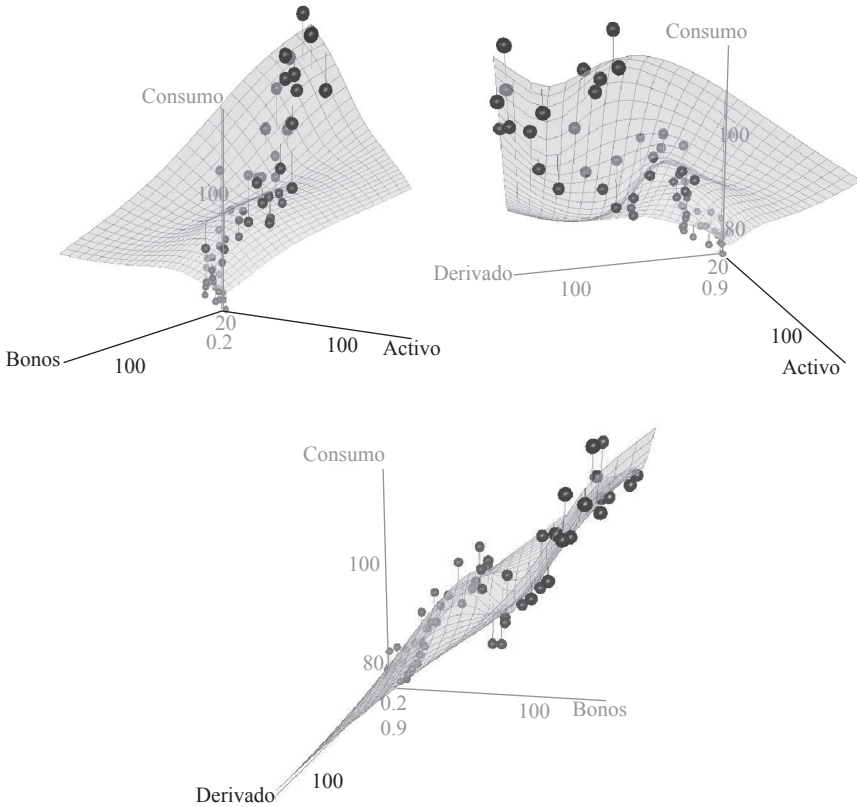
Los bonos y saldos reales muestran una dinámica creciente con una marcada correlación con el consumo. El agente representativo prefiere consumir en el corto plazo y mantener un ahorro en forma de bonos para el consumo futuro; no obstante, se observa que existe preferencia por la liquidez.

Las Gráficas 5, 6 y 7 presentan la dinámica del consumo ante la elección de un bono, un activo riesgoso y un derivado. Se observa el efecto de la volatilidad en las proporciones de riqueza que se destina al activo riesgoso y al derivado. Se nota también que, en este caso, el agente representativo tiende a la aversión al riesgo en el corto y en el mediano plazo, dicho inversionista equilibra su portafolio. En resumen, el agente representativo prefiere consumir e invertir en bonos en el presente, si su portafolio está compuesto por bonos y activos, lo cual se observa en la Gráfica 5.

Sin embargo, si el portafolio está formado por un activo y un derivado, el inversionista prefiere invertir en el corto plazo en el derivado, aunque en el mediano plazo tiene preferencia por el activo y en el largo plazo diversifica y asigna proporciones de riqueza similares a los referidos instrumentos, véase la Gráfica 6.

En la Gráfica 7 podemos observar que la trayectoria del consumo es casi constante debido a que el portafolio (compuesto por un bono y un derivado) está equilibrado; no obstante, en el largo plazo, si bien el consumo es creciente, la composición del portafolio se inclina a la adquisición de bonos.

Gráficas 5, 6 y 7  
 Dinámica del consumo explicada por un portafolio\*

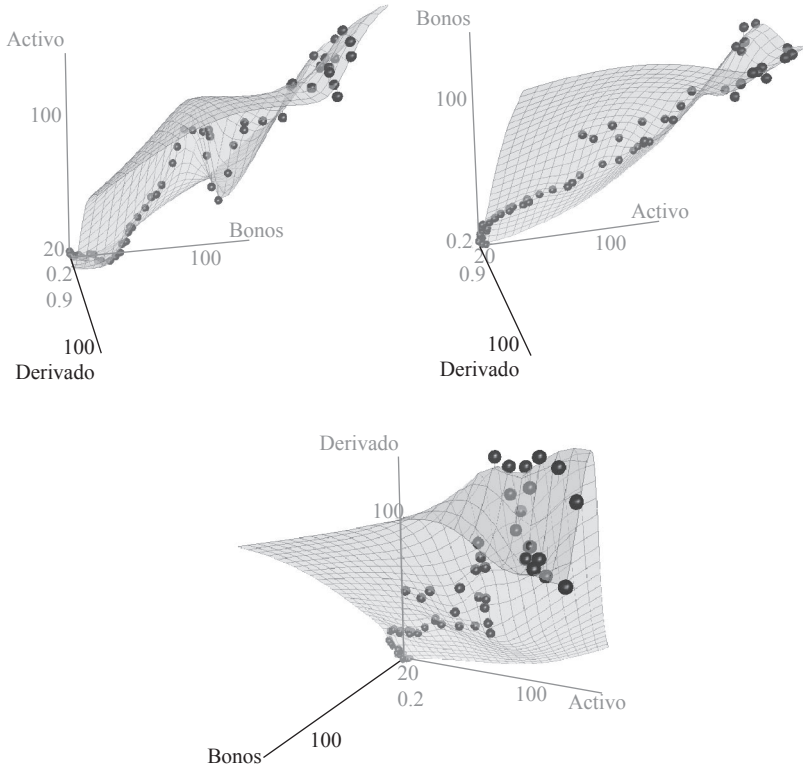


\* En la Gráfica 5 el portafolio está compuesto por bonos y un activo. En la Gráfica 6 el portafolio se compone de un activo riesgoso y un derivado. En la Gráfica 7 el portafolio contiene bonos y un derivado.  
 Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

Para observar la dinámica de un instrumento financiero (un activo riesgoso, bonos a tasa fija y un derivado) respecto a otros, vea las Gráficas 8, 9 y 10. Éstas muestran la diversificación de un portafolio representativo y la aversión al riesgo de un agente representativo ante los instrumentos analizados.

La trayectoria de un activo riesgoso hacia el futuro presenta un incremento de la volatilidad en la proporción de riqueza que se destina a la adquisición de este, véase la Gráfica 8. La dinámica del bono respecto al activo y al derivado cambia dependiendo del plazo, una correlación mayor entre el bono y el derivado es observada en el corto plazo (véase la Gráfica 9 y 10), en el mediano la correlación más fuerte se da entre el

Gráficas 8, 9 y 10  
Dinámica de un activo riesgoso, un bono y un derivado

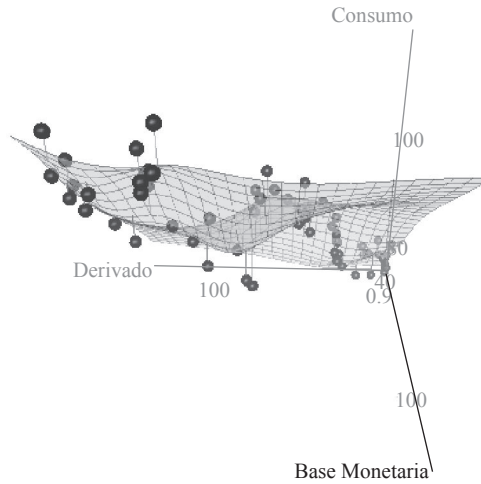


Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

bono y el activo (Gráfica 9), mientras que en el largo plazo, el portafolio se diversifica entre los tres instrumentos. Con esto se infiere que el agente representativo en México protege su portafolio al diversificar el riesgo con una combinación de instrumentos específica para cada horizonte de tiempo, la cual se detalló anteriormente.

Para analizar la dinámica del consumo explicada por un portafolio que contiene saldos reales y un derivado, véase la Gráfica 11. En este caso, solo en el largo plazo, los agentes invierten en derivados por un momento; mientras que, en el corto y mediano plazo mantienen un consumo constante y creciente con una elección de proporciones de riqueza destinadas al derivado y a los saldos reales estable.

Gráfica 11  
Dinámica del consumo explicada por un portafolio\*



\* Portafolio compuesto por saldos reales y un derivado.

Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

Las Gráficas 12, 13 y 14 presentan la dinámica de los saldos reales, el derivado y el activo riesgoso frente al consumo y a los otros instrumentos financieros que se analizan en esta parte. Se observa que el agente representativo mantiene preferencia por la liquidez en el corto y el mediano plazo, después diversifica el portafolio, si bien mantiene un consumo creciente, véase la Gráfica 12. Solo en el largo plazo, los agentes invierten una mayor proporción de su riqueza en derivados, frente a los bonos y los saldos reales, vea la Gráfica 13. El Activo presenta una fuerte correlación con los bonos, el portafolio con este tipo de activos presenta una trayectoria estable en el corto, después en el mediano y largo plazo existe diversificación del portafolio con los saldos reales y los bonos, véase la Gráfica 14.

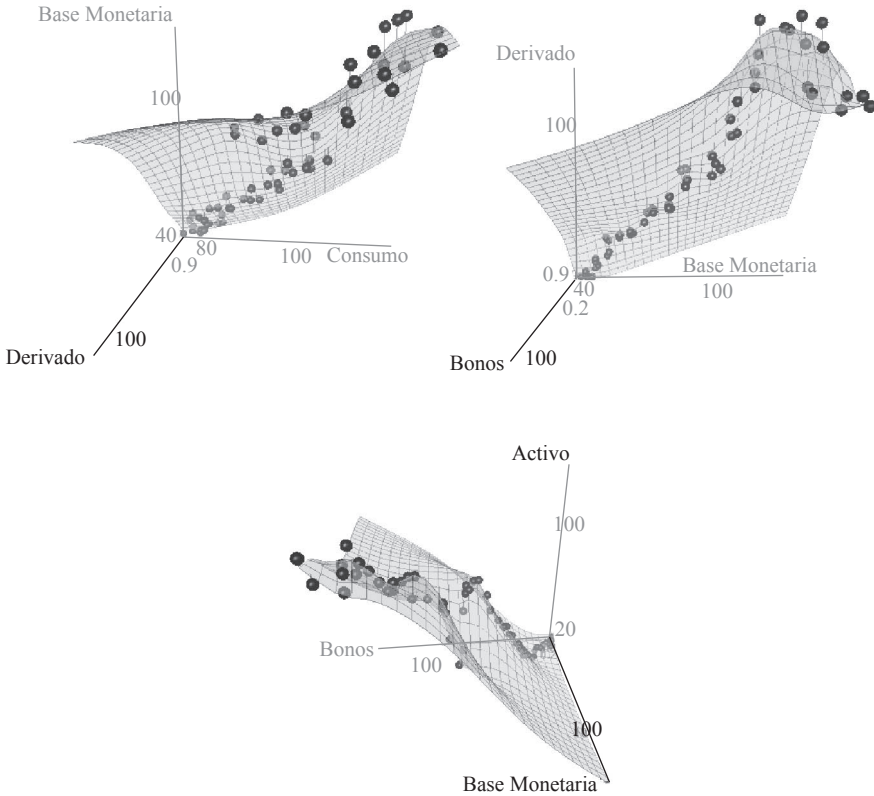
La Gráfica 15 muestra la dinámica del consumo explicada por la elección de dos activos riesgosos en el portafolio, se observa que los inversionistas diversifican riesgo y consumen una proporción constante.

Por último, las Gráficas 16 y 17 presentan la dinámica de los activos riesgosos respecto al consumo y al otro activo destacando el comportamiento de la volatilidad en ambos activos.

De acuerdo con el análisis de estática comparativa y con base en las soluciones analíticas de los modelos propuestos,<sup>9</sup> se obtienen resultados importantes sobre las trayec-

<sup>9</sup> Modelos de toma de decisiones para un agente representativo con UDRE que enfrenta una restricción presupuestal, que incorpora un portafolio. Así, este consumidor representativo, para optimizar su trayectoria de consumo, también enfrenta el problema de optimización de un portafolio con diferentes instrumentos

Gráficas 12, 13 y 14  
Dinámica de los saldos reales, un derivado y un activo riesgoso

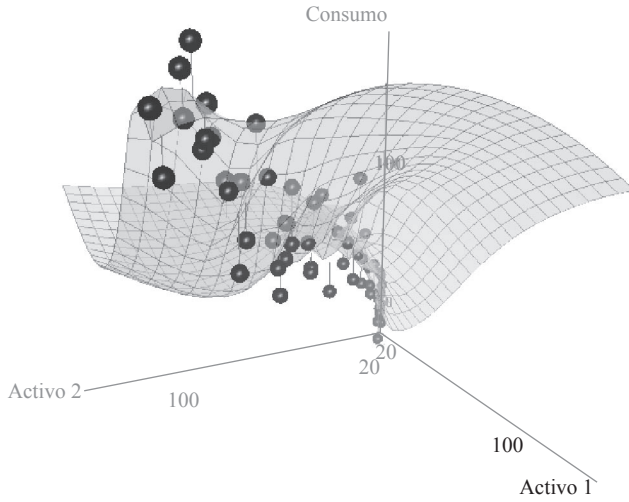


Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

torias óptimas simuladas con datos de la economía mexicana. En general, estas indican que un agente representativo es adverso al riesgo en el corto plazo, por ello dedica proporciones de riqueza a la adquisición de bonos a tasa fija y al consumo; mientras que, en el largo plazo diversifica con activos riesgosos, pero se cubre con productos derivados. El inversionista diversifica porque busca maximizar los rendimientos que ofrecen diferentes instrumentos financieros, sin incurrir en un exceso de riesgo. Con esto, el consumidor incrementará su consumo futuro. Por último, el agente representativo mantiene saldos reales por sus servicios de liquidez y esto posiblemente puede explicarse por el bajo nivel de profundización financiera en México.

financieros y saldos reales, lo cual es una forma realista de modelar la toma de decisiones para un agente económico.

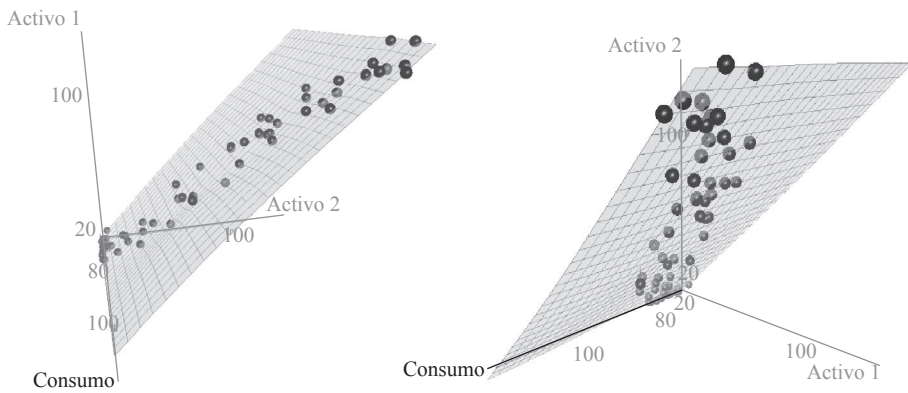
Gráfica 15  
Dinámica del consumo explicada por un portafolio\*



---

\*Portafolio compuesto por dos activos riesgosos.  
Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

Gráficas 16 y 17  
Dinámica de dos activos riesgosos



---

Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI y Banxico.

## ■ Conclusiones

En economía financiera, la elasticidad de sustitución intertemporal y el coeficiente de aversión al riesgo son dos magnitudes relevantes que tienen incidencia directa en las decisiones de los agentes económicos o en las medidas de política económica aplicadas a sus decisiones. El principal hallazgo de esta investigación es que la tasa de sustitución intertemporal del consumo ( $\varepsilon$ ) pondera la tasa subjetiva de descuento del individuo ( $\rho$ ) y  $(1 - \varepsilon)$  pondera el componente de la varianza, donde se encuentra el coeficiente de aversión al riesgo y el complemento de la tasa de sustitución intertemporal del consumo por  $g(\theta_t)$ . Siendo, esta última, la parte de la restricción presupuestal que tiene que ver con las proporciones de la riqueza que se asignan a los diferentes activos, la cual ya es una decisión óptima. Los ejercicios de estática comparativa permitieron observar la dinámica de las variables de decisión ante cambios en las variables explicativas. Con datos de México, se observa que en el corto plazo existe una tendencia a la aversión al riesgo, el agente representativo destina una mayor proporción de su riqueza a la adquisición de bonos a tasa fija. Sin embargo, en el mediano y largo plazos, el inversionista diversifica su portafolio con bonos, activos riesgosos, derivados y saldos reales (por servicio de liquidez), esto con la finalidad de incrementar su consumo futuro.

Por último es importante mencionar que esta investigación puede ser extendida en las siguientes direcciones: por ejemplo, incluir procesos de salto en la dinámica de los precios de los activos, incorporar tendencias moduladas por cadenas de Markov en la tendencia del proceso que conduce el precio de los activos y el modelado puede moverse del ambiente con Martingalas (movimiento browniano, saltos de Poisson y mezclas de estos) hacia los procesos de Lévy, incluso a vuelos de Lévy.

## ■ Bibliografía

- Arrow, K. J. (1965). La teoría de la aversión al riesgo, en *Ensayos en la Teoría de la asunción de riesgos*, Markham Publ. Co., Chicago, pp. 90-109.
- Breeden, D. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, *Journal of Financial Economics*, 7(2): 265-296.
- Breeden, D., Gibbons, M. y Litzenberger, R. (1989). Empirical tests of the consumption oriented CAPM. *Journal of Finance*, 44(2): 231-262.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654
- Constantinides, G. (1990). Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle, *Journal of Political Economy*, 98(3): 519-543.
- Cox, J., Ingersoll, J. y Ross, S. (1985). An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, 53(2): 363-384.
- Detemple, J. y Zapatero, F. (1991). Optimal consumption portfolio policies with habit formation. *Econometrica*, 59(6): 1633-1657.
- Duffie, D. y Epstein, L. (1992). Stochastic differential utility. *Econometrica*, 60(2): 353-394.

- Epstein, L. y Zin, S. (1989). Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework, *Econometrica*, 57(4): 937-969.
- Epstein, L. y Zin, S. (1991a). Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical analysis, *Journal of Political Economy*, 99(2): 263-286.
- Epstein, L. y Zin, S. (1991b). The independence axiom and asset returns. *Working Paper* 109. National Bureau of Economic Research.
- Epstein, L. (1992). Behavior under risk: Recent developments in theory and applications. In J. J. Laffont (ed.), *Advances in economic theory*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Heaton, J. (1991). An empirical investigation of asset pricing with temporally dependent preference specifications. *Working Paper* 3245.91, Sloan School of Management, MIT.
- Hindy, A. y Huang, C. F. (1990). Optimal consumption and portfolio rules with local substitution, *Working Paper* 89, revised, Alfred P. Sloan School of Management, MIT.
- Huang, C. F. (1987). An intertemporal general equilibrium asset pricing model. *Econometrica*, 55(2): 117-142.
- Lucas, R. (1978). Asset prices in an exchange economy, *Econometrica*, 46(6): 1429-1446.
- Merton, R. C. (1973). An intertemporal asset pricing model. *Econometrica*, 41(5): 867-887.
- Maenhout, P. J. (2004). Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, 17(4): 951-983.
- Mehra, R. y Prescott, E. (1985). The equity premium: A puzzle, *Journal of Monetary Economics*, 15(6): 145-161.
- Rivera-Hernández, E. C. y Venegas-Martínez, F. (2014). Análisis empírico de la tasa subjetiva de descuento para el consumidor mexicano. *Eseconomía, Revista de Estudios Económicos, Tecnológicos y Sociales*, 9(40): 115-132.
- Roll, R. (1977). A critique of the asset pricing theory's tests: Part I: On past and potential testability of the theory, *Journal of Financial Economics*, 4(2): 129-176.
- Sundaresan, S. M. (1989). Intertemporally dependent preferences and the volatility of consumption and wealth. *Review of Financial Studies*, 2(1): 73-89.
- Chatterjee, S., Giuliano, P. y Turnovsky, S. J. (2004). Capital income taxes and growth in a stochastic economy: A numerical analysis of the role of risk aversion and intertemporal substitution. *Journal of Public Economic Theory*, 6(2): 277-310.
- Venegas-Martínez, F., Téllez-León, I. E. y Ortiz-Arango, F. (2013). Utilidad Diferencial Recursiva Estocástica (UDRE) vs. Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En Francisco Ortiz Arango, Francisco López Herrera y Francisco Venegas Martínez (Coords.). *Avances recientes en valuación de activos y administración de riesgos*, Vol. 4. Universidad Panamericana, Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto Politécnico Nacional, México. pp. 293-310.



- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. 2da. edición, Cengage, México.
- Venegas-Martínez, F. (1999). Crecimiento endógeno, dinero, impuestos y deuda externa. *Investigación Económica*, 59(229): 15-36.
- Venegas-Martínez, F. y González-Aréchiga, B. (2000). Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano. *Momento Económico*, 111: 20-27.
- Weil, P. (1990). Non-expected utility in macroeconomics, *Quarterly Journal of Economics*, 105(1): 29-42.