

Un Nuevo Algoritmo para el Cálculo de Flujo Óptico y su Aplicación al Registro de Imágenes

A New Algorithm for Computing Optical Flow and His Application to Image Registration

Félix Calderón Solorio¹ y José Luis Marroquín Zaleta²

¹División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería Eléctrica

Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Santiago Tapia 403, Col. Centro

²Centro de Investigación en Matemáticas

Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valenciana, Guanajuato, México

E-mails: calderon@zeus.umich.mx, jlm@cimat.mx

Artículo recibido en Agosto 22, 2001; aceptado en Marzo 15, 2003

Resumen

Presentamos un algoritmo novedoso para el cálculo de flujo óptico basado en la suma de diferencias al cuadrado de puntos correspondientes, con un término de relajación que permite eliminar observaciones erróneas. Este algoritmo solamente necesita información de un par de cuadros y es robusto en presencia de ruido. Se presenta también su aplicación en registro de imágenes cerebrales de resonancia magnética, con información de atlas cerebrales para realizar la segmentación cerebro / no-cerebro de un espécimen dado.

Palabras Clave: Flujo Óptico FO, Registro de Imágenes RI e Imágenes de Resonancia Magnética IRM.

Abstract

We present a new algorithm for computing the optical Flow which is based in the sum of squared difference between two points and we add a rest condition in order to eliminate outliers. This algorithm only needs a couple of frames and is very robust in presence of noise. We present his application in the register task of Magnetic Resonance Images of human heads with brain atlas in order to do the head segmentation in brain and no brain.

Keywords: Optical Flow OF, Image Registration IR and Magnetic Resonance Images MRI.

Introducción

El campo de movimiento representa el movimiento real de un objeto que se desplaza en un escenario tridimensional. Proyectado sobre un plano, obtenemos un conjunto de vectores de velocidad para cada punto, correspondiente al movimiento de la imagen que se observa. Esta es la cantidad que nos interesa determinar en una secuencia de imágenes. El flujo óptico (FO) se define como el movimiento aparente de un patrón de brillo; esto es lo que realmente observamos cuando un objeto se desplaza, pero también se puede deber al cambio en la condiciones de iluminación del escenario, por lo que el flujo óptico y el campo de movimiento son iguales solo si el objeto no cambia su irradiancia en el plano de la imagen, mientras se mueve sobre la escena.

El flujo óptico es un campo vectorial bidimensional, que calcularemos para una secuencia de imágenes (por ejemplo una secuencia de video). En la literatura existen muchos métodos para calcular el flujo óptico, los cuales pueden ser clasificadas en tres grupos principalmente: aquellos basados en derivadas; aquellos basados en energía espaciotemporal y finalmente los basados en suma de diferencias al cuadrado (SSD Sum of Squared Differences). En este artículo revisaremos algunos de estos métodos para finalmente hacer nuestra propuesta para calcular el flujo óptico. Una revisión mas completa de métodos para calculo de FO puede encontrarse en [Barron et al., 1994].

Métodos Basados en Derivadas

En la literatura tenemos algunos métodos basados en primeras derivadas ([Fennema & Thompson, 1979], [Nagel, 1983], y [Horn, 1986]) y otros basados en segundas derivadas ([Nagel, 1987], [Tretiak & Pastor, 1984] y [Uras et al., 1988]). Ambos intentan dar un modelo para el calculo del FO y en general utilizan la serie de Taylor; el planteamiento es: Dada una secuencia de imágenes $g = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ definiremos a $g_n(x_i, y_i)$ como el valor de tono de gris del i -ésimo punto $ri = [x_i, y_i]^T$ dentro del dominio L , a tiempo $t=n$. La hipótesis es considerar que la iluminación del escenario permanece constante y que el cambio del tono de gris se debe al movimiento aparente de los objetos, por lo cual, permanece constante para

el punto r_i desplazado por un vector $V_i = [u_i, v_i]^T$.

$$g_n(r_i + V_i) = g_{n+1}(r_i)$$

Consideramos que las imágenes fueron muestreadas con periodo T ; en una secuencia de video el valor típico del periodo de muestreo es de 1/30 seg., por lo que, considerar que el desplazamiento de los objetos es pequeño es una hipótesis válida. Bajo estas consideraciones aplicar la expansión en serie de Taylor para linearizar g_n es viable y así obtener una ecuación dada por

$$\begin{aligned} g_n(r_i) + D_x g_n(r_i) u_i + D_y g_n(r_i) v_i + e_i \\ = g_{n+1}(r_i) \end{aligned}$$

donde e_i representa el error de truncamiento el cual despreciaremos y D_x , D_y y D_t son los operadores de derivación con respecto a x , y y t . Reduciendo obtenemos una ecuación lineal dada por.

$$D_x g_n(r_i) u_i + D_y g_n(r_i) v_i + D_t g_n(r_i) = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación es llamada la ecuación restrictiva para flujo óptico, ya que impone una restricción a las componentes u_i y v_i de dicho vector. Si trazamos la ecuación (1) en un espacio con ejes u_i y v_i , existe un número infinito de soluciones para el flujo óptico del i -ésimo punto, sobre la línea recta correspondiente a la ecuación restrictiva, es decir tenemos un sistema de ecuaciones mal planteado ya que tenemos una ecuación y dos variables a determinar para cada punto de la imagen.

Restricción de suavidad de Horn.

En [Horn, 1986] se propone un término que penaliza la magnitud del gradiente del vector de desplazamiento $|\nabla V_i|$, restricción de suavidad que permite tener un sistema bien planteado y dar una solución única, a la ecuación restrictiva (1). Utiliza la ecuación restrictiva como criterio de error; si un punto cumple con esta ecuación su contribución al error global será nula y el problema del cálculo del FO, lo traduce en minimizar una ecuación de energía dada como la suma de los errores al cuadrado para todos los puntos de la imagen más un término de suavidad:

$$\begin{aligned} U(V) = \lambda \sum_{i \in L} (\nabla g_n(r_i) \cdot V_i + D_t g_n(r_i))^2 \\ + \frac{1}{4} \sum_{i \in L} |\nabla V_i|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

donde ∇g_n es el gradiente espacial de la imagen y λ es el parámetro de regularización que permite cambiar

las condiciones de suavidad del campo vectorial dado por u y v , así pues si $\lambda = 0$ tendremos un campo extremadamente suave (una constante) y por el contrario si $\lambda \gg 0$ el FO será consistente con la ecuación restrictiva. La ecuación de energía dada por (2), es una función unimodal, ya que, nuestro criterio de error es cuadrático.

El sistema de ecuaciones a resolver, será del doble del tamaño de la imagen. La solución directa es imposible para las dimensiones de una imagen tipo y en su lugar se propone solucionar utilizando un esquema iterativo como es el método de Gauss-Seidel [Kelley, 1995];

$$\begin{aligned} u_i^{(k+1)} &= \bar{u}_i^{(k)} \\ &- \frac{D_x g_n(r_i) \bar{u}_i^{(k)} + D_y g_n(r_i) \bar{v}_i^{(k)} + D_t g_n(r_i)}{1 + \lambda [(D_x g_n(r_i))^2 + (D_y g_n(r_i))^2]} D_x g_n(r_i) \\ v_i^{(k+1)} &= \bar{v}_i^{(k)} \\ &- \frac{D_x g_n(r_i) \bar{u}_i^{(k)} + D_y g_n(r_i) \bar{v}_i^{(k)} + D_t g_n(r_i)}{1 + \lambda [(D_x g_n(r_i))^2 + (D_y g_n(r_i))^2]} D_y g_n(r_i) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\bar{u}_i^{(k)}$ y $\bar{v}_i^{(k)}$ son el promedio de los 4 vecinos del i -ésimo punto en la iteración k .

Algoritmos basados en agrupamiento.

Considerando que todas las partículas de un objeto se mueven con el mismo patrón de velocidad (condición de cuerpo rígido), podemos verificar que más de un píxel de nuestra imagen cumplirá con la misma ecuación restrictiva ([Fennema & Thompson, 1979], [Schunck, 1989] y [Nesi et al., 1995]). Nuestra tarea consiste en graficar la ecuación restrictiva sobre un plano cuyos ejes son las componentes del vector de flujo óptico u y v . Los grupos (cluster) los encontraremos contando para cada punto $[u_i, v_i]$ del plano de velocidad el número de ecuaciones que lo intersectan. Los grupos que escogemos son aquellos con el mayor número de intersecciones. La solución para estos métodos estará limitada a translaciones y dependerá de la discretización que se haga del espacio de velocidades.

Métodos basados en Energía espacio-temporal.

Introduciendo el dominio espacio tiempo, tenemos la ventaja de analizar el movimiento usando la transformada de Fourier, en un espacio de frecuencia k, w . Como ejemplo consideremos una secuencia de imágenes en la cual todo se mueve a velocidad constante, de modo que una secuencia $f(r, t)$ puede ser escrita como

$$f(r, t) = g_n(r + Vt)$$

la transformada de Fourier para esta ecuación es

$$F(k, w) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_t \int_r g_n(r + Vt) e^{-kr} e^{-wt} dr dt$$

haciendo el cambio de variable $\hat{r} = r + Vt$

$$\begin{aligned} F(k, w) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_t \left[\int_r g_n(\hat{r}) e^{-k\hat{r}} d\hat{r} \right] e^{kVt} e^{-wt} dt \\ &= \frac{G_n(k)}{(2\pi)^3} \int_t e^{kVt} e^{-wt} dt \end{aligned}$$

donde $G_n(k)$ es la transformada de Fourier de $g_n(\hat{r})$ y el término e^{kVt} tiene como transformada de Fourier $\delta(kV - w)$. Así que

$$F(k, w) = G_n(k) \delta(kV - w) \quad (4)$$

De la ecuación 4 podemos concluir que el espectro de energía de una secuencia de imágenes que se desplaza con una velocidad constante, se concentra en una línea recta dada por $kV - w$.

En trabajos como [Adelson & Bergen, 1986], [Barman et al., 1991], [Bigun et al., 1991], [Haglund, 1992], [Heeger, 1987] y [Jahne, 1987], se hace uso de una familia de filtros de energía espaciotemporales para determinar patrones de movimiento en secuencias de imágenes basados en esta idea. En particular [Heeger, 1987] utiliza un conjunto de 12 filtros de Gabor entonados en diferentes frecuencias con el propósito de cubrir todo el espectro de frecuencias. Estos métodos no pueden utilizar un número reducido de marcos, ya que limita la discretización del dominio de la frecuencia.

Sistema basado en SSD.

La Suma de diferencias al cuadrado (SSD), la podemos definir como una medida de proximidad entre dos imágenes consecutivas de una secuencia de video, en una expresión de la forma:

$$SSD(u, v) = \sum_{i \in L} [g_1(r_i + V_i) - g_2(r_i)]^2 \quad (5)$$

En la siguientes subsecciones daremos detalles de algunos algoritmos del estado del arte basados en esta ecuación y en la sección presentaremos nuestro algoritmo, basado también en SSD.

Métodos basados en correspondencia de regiones.

Los métodos basados en correspondencia [Anadan, 1989], [Burt et al., 1983], [Glazer et al., 1983], [Little et al., 1988] y [Little & Verri, 1989], localmente encuentran el vector de desplazamiento $V = [u, v]$ entre dos

imágenes g_1 y g_2 para una cierta posición $r = [x, y]$ minimizando la función SSD

$$SSD(V) = \sum_{s \in W} w(s) \times [g_1(r + s) - g_2(r + s + V)]^2$$

donde $w(s)$ es la función de pesos. En esta función SSD, la suma es llevada a cabo es una ventana de tamaño $(2k + 1)^2$ centrada en $r = [x, y]$ y s son los puntos dentro de w .

Muchos métodos basados en correspondencia realizan una búsqueda de un vector de desplazamiento $[u, v]$ en un conjunto finito de pares y seleccionan aquel par que minimice la función SSD. Este método no tendrá problemas con derivadas pero la exactitud del método esta limitada por la discretización del espacio de búsqueda.

Mínimos cuadrados

Este método es aplicado por [Lucas & Kanade, 1981] y [Tomasi & Kanade, 1991]. El problema consiste en encontrar el desplazamiento $\hat{V} = [\hat{u}, \hat{v}]$ que minimiza el residuo

$$\sum_{i \in W} [g_n(r_i + \hat{V}) - g_{n+1}(r_i)]^2$$

donde W , ($W \subset L$) es una pequeña ventana de la imagen, centrada en el punto para el cual deseamos calcular el FO. Aplican expansión en serie de Taylor y obtienen un sistema sobredeterminado

$$\begin{bmatrix} D_x g_n(r_1) & D_y g_n(r_1) \\ D_x g_n(r_2) & D_y g_n(r_2) \\ \vdots & \vdots \\ D_x g_n(r_m) & D_y g_n(r_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_t g_n(r_1) \\ -D_t g_n(r_2) \\ \vdots \\ -D_t g_n(r_m) \end{bmatrix}$$

en forma matricial

$$G\hat{V} = e$$

cuya solución es la solución de mínimos cuadrados dado por

$$\hat{V} = [G^T G]^{-1} G^T e \quad (6)$$

Debido al problema de la apertura, cuando se quiere realizar el seguimiento de un objeto (Traking), no todos los puntos son buenos candidatos. En [Shi & Tomasi, 1994] proponen utilizar la información de la matriz $[G^T G]$, conocida también como tensor de estructura para determinar los mejores puntos para realizar seguimiento. Llamamos a λ_1 y λ_2 los eigenvalores de $[G^T G]$ y consideran que un punto es candidato a representar una característica para seguimiento si $\min[\lambda_1, \lambda_2] > \lambda_\epsilon$, donde λ_ϵ es un umbral, de acuerdo con esto, las esquinas de los objetos en movimiento son buenos puntos para realizar seguimiento.

Existirán algunos casos donde la hipótesis de traslación pura no es suficiente. En tal caso plantean una transformación afín que tiene la capacidad de manejar escalamiento, cizallamiento, rotación, etc. modificando los parámetros de una matriz A y traslación en un vector V en un sistema de la forma

$$\sum_{i \in W} [g_n(Ar_i + V) - g_{n+1}(r_i)]^2$$

como se presenta en [Tommasini et al., 1998].

La solución de mínimos cuadrados tiene el inconveniente de ser sensible a los datos atípicos (outlier). Una manera de resolver el sistema planteado por (6) sin tener problemas con datos atípicos es utilizar métodos como "El mínimo de la mediana de los cuadrados" (Least Median of Squares Regression ver [Rousseeuw, 1984]) como propone [Bab-Hadiashar & Suter, 1996].

SSD-Spline

En [Szeliski & Coughlan, 1994] utilizan la función SSD y un modelo bidimensional de interpolación (spline) para representar el flujo óptico, la función resultante la minimizan utilizando el algoritmo de Levenberg-Marquardt [Scales, 1984]. En este esquema solo es necesario resolver para un subconjunto de pixeles a los que denominan puntos de control y la solución sobre los demás puntos se calcula utilizando funciones de interpolación.

SSD-BR

En [Lai & Vemuri, 1998] adicionan un término de regularización, a la ecuación (5), sobre la magnitud del gradiente del vector de velocidad $|\nabla V_i|$ (como en [Horn, 1986]) y una heurística para normalizar las derivadas de la imagen respecto al vector de velocidad, dada por:

$$\frac{1}{(G_{x,i}^2 + G_{y,i}^2 + c)} \quad (7)$$

donde

$$G_{x,i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_1(r_i + V_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial g_2(r_i)}{\partial x_i} \right]$$

$$G_{y,i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_1(r_i + V_i)}{\partial y_i} + \frac{\partial g_2(r_i)}{\partial y_i} \right]$$

y c es una constante para evitar gradientes inconsistentes. Consideran que el factor de normalización (7) es constante en cada iteración y lo actualizan con los valores de (u_i, v_i) de la iteración anterior. Finalmente llegan a un sistema de ecuaciones dado por

$$u_i = \bar{u}_i - \frac{1}{4\lambda} \frac{g_1(r_i + V_i) - g_2(r_i)}{G_{x,i}^2 + G_{y,i}^2 + c} D_u g_1(r_i + V_i) \quad (8)$$

$$v_i = \bar{v}_i - \frac{1}{4\lambda} \frac{g_1(r_i + V_i) - g_2(r_i)}{G_{x,i}^2 + G_{y,i}^2 + c} D_v g_1(r_i + V_i)$$

donde $D_u = \frac{\partial}{\partial u_i}$ y $D_v = \frac{\partial}{\partial v_i}$. Dicho sistema lo resuelven utilizando Gradiente Conjugado no-lineal [Gill et al., 1981]. En [Lai & Vemuri, 1998] muestran experimentalmente, que este algoritmo supera a todos los algoritmos analizados en [Barron et al., 1994].

Algoritmo SSD-ARC.

Tener precisión en el calculo de las derivadas numéricas resulta imposible debido al ruido o porque se tiene un pequeño número de marcos, y utilizar la expansión en serie de Taylor limita a resolver desplazamientos pequeños. En estos casos los métodos basados en derivadas son inapropiados y es natural pensar en un método basado en correspondencia de regiones. Pero si lo que queremos es un método que calcule el flujo óptico en toda la imagen, resulta impráctico limitar a una ventana y a un conjunto finito de valores.

Por otro lado los algoritmos basados en Agrupamiento resuelven únicamente translaciones y su precisión esta limitada por la discretización del espacio de búsqueda, al igual que los algoritmos basados en Energía espaciotemporal requieran de más de dos marcos de la secuencia.

En general los algoritmos SSD son sensibles a ruido; el método de [Lai & Vemuri, 1998] es el estado del arte en algoritmos de FO, ya que la heurística que propone lo hace robusto, sin embargo, esta heurística dificulta su interpretación y no esta basado en la minimización de una función de energía.

En este trabajo proponemos un nuevo algoritmo robusto al ruido, que resuelve grandes desplazamiento, utiliza información de solo un par de marcos y está basado en la minimización de una función de energía.

En nuestro enfoque hacemos una analogía física de la ecuación (5), suponiendo que representa la energía potencial almacenada en un conjunto de resortes, donde la longitud del resorte representa el error entre dos imágenes $g_1(r_i + V_i)$ y $g_2(r_i)$ para un desplazamiento $V_i = [u_i, v_i]$, y una constante del resorte igual a dos. Nuestro propósito es minimizar la energía total del sistema dada como la suma de la energía de cada resorte. Cuando tenemos ruido, la contribución de un solo punto a la energía global puede ser muy grande, así que, nos interesa tener un indicador para relajar la condición del resorte y/o eliminar su contribución al error global. Para determinar qué puntos queremos eliminar proponemos usar como criterio una función basada en la magnitud del gradiente de las imágenes, ya que esta actúa como detector de bordes y ruido.

Así pues para el calculo del FO, proponemos utilizar una función de energía basada en un sistema de

resortes con condición de reposo adaptable (ARC por la siglas en inglés Adaptive Rest Condition), esta idea esta basada en [Rivera & Marroquin, 2000].

La forma mas general de la función de energía SSD-ARC es:

$$U_{SSD-ARC}(V, l) = \sum_{i \in L} [E(V_i) - l_i H(V_i)]^2 \quad (9)$$

$$+ \frac{\lambda \mu}{4} \sum_{i \in L} |\nabla V_i|^2 + \mu \sum_{i \in L} l_i^2$$

con

$$H(V_i) = |\nabla g_1(r_i + V_i)|$$

y

$$E(V_i) = g_1(r_i + V_i) - g_2(r_i)$$

donde $E(V_i)$ es el término de error y depende del vector de desplazamiento V_i y el producto de las funciones $H(V_i)$ y l_i es la condición de reposo del resorte, y es puesta de esta manera (como el producto $l_i H$) para tener la posibilidad de controlarla con un parámetro de regularización μ . La constante de regularización del gradiente $\frac{\lambda \mu}{4}$, es puesta así para simplificar la formulación final.

Nos interesa encontrar los valores de V_i y l_i que minimicen la función de energía $U_{SSD-ARC}(V, l)$. Comencemos por minimizarla con respecto a l_i . Derivando e igualando a cero obtenemos:

$$[E(V_i) - l_i H(V_i)] [-H(V_i)] + \mu l_i = 0$$

despejando obtenemos una formula cerrada para l_i dada por

$$l_i = \frac{E(V_i) H(V_i)}{\mu + H^2(V_i)}$$

Ahora minimizamos con respecto a V_i . Derivando e igualando a cero obtenemos:

$$[E(V_i) - l_i H(V_i)] [\nabla E(V_i) - l_i \nabla H(V_i)]$$

$$= -\frac{\lambda \mu}{4} \sum_{j \in N_i} [V_i - V_j]$$

sustituyendo el valor de l_i en la expresión anterior

$$\left[E(V_i) \left(1 - \frac{H^2(V_i)}{\mu + H^2(V_i)} \right) \right] \quad (10)$$

$$\left[\nabla E(V_i) - \left(\frac{E(V_i) H(V_i)}{\mu + H^2(V_i)} \right) \nabla H(V_i) \right]$$

$$= -\lambda \mu V_i + \lambda \mu \bar{V}_i$$

donde \bar{V}_i es el promedio de los V_j para todos los j en la vecindad de i .

Es importante notar en este momento que el primer término de la ecuación (10), puede ser minimizado cuando encontramos los valores de V_i que hacen pequeño a $E(V_i)$ pero si existe ruido en la imágenes g , no será posible lograrlo. Note que la función $\left(1 - \frac{H^2(V_i)}{\mu + H^2(V_i)} \right)$ toma valores dentro del intervalo $[0, 1]$ lo cual la convierte en una aproximación a una función indicadora, que por supuesto debe tener información de los lugares con alto error. Tendremos error en lugares con ruido y bordes ocluidos por lo que proponemos una función $H(V_i)$ basada en la magnitud del gradiente. No es deseable que todas las observaciones sean eliminadas en puntos con gradiente alto por lo que será importante el parámetro de regularización μ para controlar las observaciones que deseamos descartar. Para solucionar el sistema de ecuaciones utilizamos la iteración de Richardson (ver [Kelley, 1995]) para finalmente tener un esquema iterativo dado por:

$$V_i^{(k+1)} = \bar{V}_i^{(k)} - \frac{1}{\lambda} \frac{E(V_i^{(k)})}{\mu + H^2(V_i^{(k)})} \nabla E(V_i^{(k)}) \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \frac{[E(V_i^{(k)})]^2 H(V_i^{(k)})}{[\mu + H^2(V_i^{(k)})]^2} \nabla H(V_i^{(k)})$$

Note que las ecuaciones (8) y (11) son muy similares, pero a diferencia de método de [Lai & Vemuri, 1998] nuestras ecuaciones tienen un término que corrige el campo vectorial utilizando información de la magnitud del gradiente de la imagen $H(V_i)$.

Convergencia

Para mejorar la convergencia del SSD-ARC, proponemos dos estrategias, una basada en el conocido espacio de escalas y otra que proponemos y denominamos espacio de escalas paramétrico.

Espacio de Escalas.

Dado la no linealidad de la función SSD se hizo una modificación al algoritmo SSD-ARC para trabajar en el espacio de escalas (ver [Romeny, 1994], [Jahne, 1997]). Para ilustrar como funciona el espacio de escalas imaginemos que el tamaño de una imagen es $2^K \times 2^K$ y definamos $f^{(K)} = g_n$. La representación de $f^{(K)}$ en un nivel grueso $f^{(K-1)}$ es definido por un operador de reducción el cual submuestra la imagen suavizada con un filtro pasa bajas en la escala K . Tendremos que en la escala $K-1$ la magnitud de los desplazamientos es la mitad de la magnitud de los desplazamientos en la escala K , condición que nos permite mejorar el desempeño del algoritmo SSD-ARC ya que en cierto nivel $K-m$ los desplazamientos serán pequeños y cercanos al valor inicial de "no movimiento". En la figura

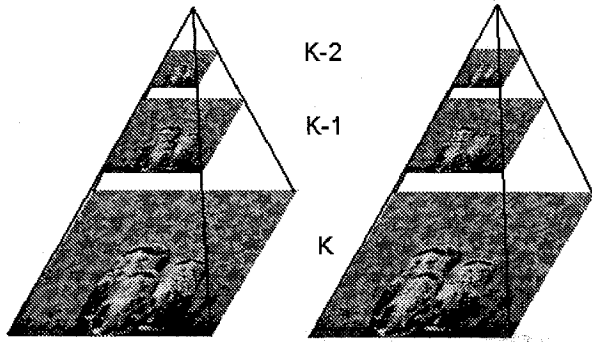


Figura 1: Pirámides Gaussianas de las dos imágenes que se desean registrar.

1 ilustramos como se lleva a cabo el submuestreo de la imagen de fino a grueso, lo que en la literatura se conoce como pirámide gaussiana.

Los pasos a seguir para aplicar este esquema son:

- 1.- Damos un valor inicial para el FO $V^{(K-m)} = 0$ y submuestreamos la imagen en una cierta escala m .
- 2.- Calculamos el FO en la escala m utilizando SSD-ARC
- 3.- Calculamos el valor inicial de FO en la escala $m - 1$ utilizando funciones de interpolación $N_{i,j}$ (p. e. funciones bilineales)

$$u_i^{(K-m+1)} = 2 \sum_j N_{i,j} u_j^{(K-m)}$$

$$v_i^{(K-m+1)} = 2 \sum_j N_{i,j} v_j^{(K-m)}$$

$$\forall i \in L^{(K-m+1)} \text{ y } \forall j \in L^{(K-m)}$$

- 4.- Hacemos $m = m - 1$ y submuestreamos la imagen en esta escala.
- 5.- Si $m = 0$ terminamos, si no regresamos a 2.

Espacio de escalas paramétrico.

Otra posibilidad para calcular el FO es determinar un modelo de baja complejidad, por ejemplo una transformación afín [Hearn & Baker, 1997]. El modelo afín permite modelar translaciones, rotaciones, escalamientos, cizallamiento y combinaciones de estos para dar modelos de movimiento mas complejos. El objetivo de utilizar una transformación afín es modelar el FO

en toda la imagen. Para encontrar el modelo afín, replantemos la suma de diferencias al cuadrado en una ecuación de energía dada por:

$$U_{MP}(\theta) = \sum_{i \in L} [g_1(M_i \theta) - g_2(r_i)]^2 \quad (12)$$

donde θ es el vector de parámetros del modelo afín (seis variables) y M_i la matriz de coordenadas la cual esta dada por

$$M_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular el valor de θ que minimiza la ecuación (12) utilizamos el algoritmo de Gauss-Newton [Dennis & Schnabel, 1996] para el cual necesitamos dar las expresiones del gradiente y del Hessiano

$$\nabla U_i(\theta) = [g_1(M_i \theta) - g_2(r_i)] [M_i^T \nabla g_1(M_i \theta)]$$

$$\nabla^2 U_i(\theta) \approx [\nabla g_1(M_i \theta)]^T M_i M_i^T \nabla g_1(M_i \theta)$$

y la solución se realiza en un esquema iterativo dado por

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - \left[\sum_{i \in L} \nabla^2 U_i(\theta^{(k)}) \right]^{-1} \sum_{i \in L} \nabla U_i(\theta^{(k)})$$

De pruebas numéricas, concluimos que el cálculo del FO utilizando un Modelo Paramétrico (MP) es mas robusto ante la presencia de ruido que el SSD-ARC. Esto sugiere replantear el esquema multiescala planteado en la sección, para pasar a un nuevo esquema donde vayamos de pocos parámetros a muchos parámetros, lo cual definimos como espacio de escalas paramétrico. El esquema es muy sencillo: primero calculamos el FO utilizando un modelo afín reducido (translación pura), luego calculamos el FO con modelo afín, para finalmente refinar con el algoritmo SSD-ARC. El propósito es aprovechar lo robusto del MP y acelerar la convergencia ya que el MP consume menos tiempo que el SSD-ARC.

El esquema multiescala seguirá siendo valido en el caso particular de FO, pero en un trabajo de registro resulta mas inteligente aplicar esta nueva propuesta a la cual llamaremos SSD-ARC*. En la sección, daremos algunos ejemplos de aplicación de este algoritmo y en concreto los pasos son:

- 1.- Determinamos los parámetros de translación (θ_u, θ_v) del modelo afín.
- 2.- Damos como valores iniciales a un modelo afín, un vector $[1, 0, \theta_u, 0, 1, \theta_v]$ y calculamos el modelo afín completo $[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]$.

3.- Finalmente refinamos con SSD-ARC inicializando el algoritmo utilizando el vector de parámetros del modelo afín para calcular un campo vectorial $V^{(0)}$

$$\begin{bmatrix} u_i^{(0)} \\ v_i^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \theta_0 & \theta_1 \\ \theta_3 & 1 - \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_5 \end{bmatrix}$$

Aplicación del SSD-ARC* al cálculo de FO.

Para probar el desempeño del SSD-ARC, creamos un par sintético a partir de una imagen con una textura y en una pequeña área de 30×30 pixeles se aplico un desplazamiento de $[0.3, 0.3]$ (figura 2a). Los métodos que comparamos son SSD-ARC (propuesto), SSD-BR por ser el que da los mejores resultados hasta la fecha, y Horn que es uno de los métodos clásicos. Los parámetros utilizados son

Horn	SSD-ARC*	SSD-BR
$\lambda = 100$	$\lambda = 12$	$\lambda = 12$
	$\mu = 300$	$c = 300$

los cuales fueron estimados empíricamente para obtener el mejor desempeño posible en cada caso.

La solución para el flujo óptico, utilizando el método de Horn, SSD-ARC y SSD-BR lo podemos ver en la figura 2 (b), (c) y (d) respectivamente. El cuadro que se ve en las figuras corresponde al área donde se aplico el desplazamiento, fuera de el no hay desplazamiento alguno. Note que la solución de Horn no se limita al área desplazada, mientras que las soluciones del SSD-ARC y SSD-BR si están limitadas al cuadro de movimiento y son muy similares.

En la tabla 1 podemos ver el promedio del error angular (ver [Fleet, 1992], [Barron et al., 1994] y [Lai & Vemuri, 1998]), para los métodos motivo de análisis, note que el algoritmo SSD-ARC* presenta el valor más bajo de error angular. En [Lai & Vemuri, 1998] describen el algoritmo SSD-BR y lo comparan contra los métodos del estado del arte citados en el trabajo de [Barron et al., 1994], ahí mismo, hacen notar que este tiene el mejor desempeño. Consideramos que al comparar contra el método SSD-BR y ver que tenemos resultados similares la comparación contra todos los algoritmos es innecesaria.

Un ejemplo con secuencias reales es el de la secuencia estándar del Taxi de Hamburgo, de la cual tomamos los marcos el 14 y el 15, ya que la solución es calculada sobre un par de imágenes. Los parámetros utilizados fueron $\lambda = 12$, $\mu = 300$ y 2 escalas. En la figura 3 tenemos en (a) y (b) los marcos 14 y 15 de la secuencia, en (c) el FO obtenido con el algoritmo SSD-ARC y en (d) la magnitud del FO.

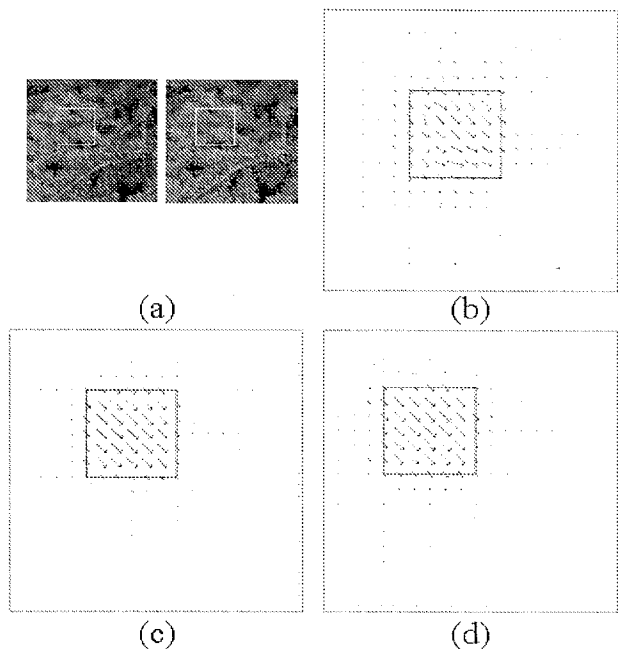


Figura 2: (a) Par sintético, (b) Solución utilizando Horn, (c) Solución con SSD-ARC y (d) Solución utilizando SSD-BR.

Método	error promedio	desviación estandar
Horn	1.708005°	3.723422°
SSD-BR	0.758651°	2.004121°
SSD-ARC*	0.731253°	1.832659°

Tabla 1: Error promedio para los métodos de Horn, SSD-BR y SSD-ARC*

Algoritmo	Error angular	Desviación Estándar
SSD-BR	2.381517	2.667920
SSD-ARC	2.740798	2.985091
SSD_ARC*	2.544793	2.966862

Tabla 2: Error angular promedio para la secuencia del arbol divergente

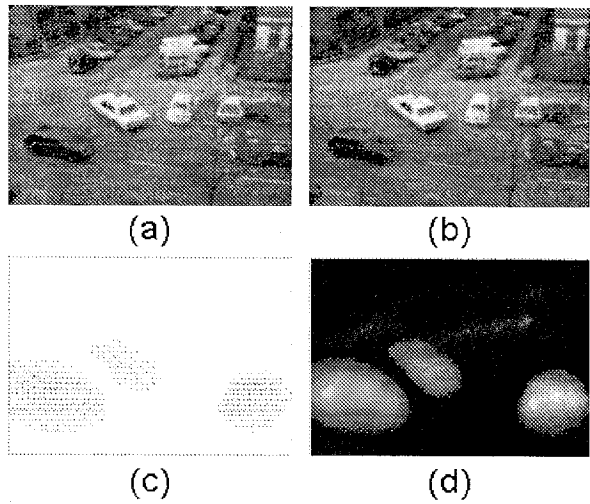


Figura 3: Taxi de Hamburg. (a y b) Marcos 14 y 15 de la secuencia, (c) campo vectorial de Flujo Óptico y (d) Magnitud del FO.

Otras secuencia estándares con las que probamos nuestro algoritmo fueron: la del Arbol divergente (figura 4), Parque Yosemite (figura 5,) y el jardin de la Flores (figura 6) (la dos primeras secuencias son sintéticas y la última es real). Para cada una de ellas tenemos en en las figuras (a) y (b) dos cuadros de la secuencia motivo del análisis análisis a los que llamamos origen y destino respectivamente, en (c) la reconstrucción utilizando la imagen origen y el campo vectorial de FO y en (d) la dirección del campo vectorial FO y/o la magnitud de este. En todas estas secuencias se utilizaron los siguientes parámetros $\lambda = 20$, $\mu = 300$ y 3 escalas. Note que todas las reconstrucciones (figuras 4-(c), 5-(c) y 6-(c)) utilizando las imágenes origen y el campo vectorial de FO son de muy buena calidad.

Para la secuencia del arbol divergente, dado que tenemos el campo vectorial de flujo óptico, calculamos el error angular promedio y la desviación estándar para el algoritmo SSD-BR, SSD-ARC y SSD-ARC* los cuales se presentan en la tabla 2.

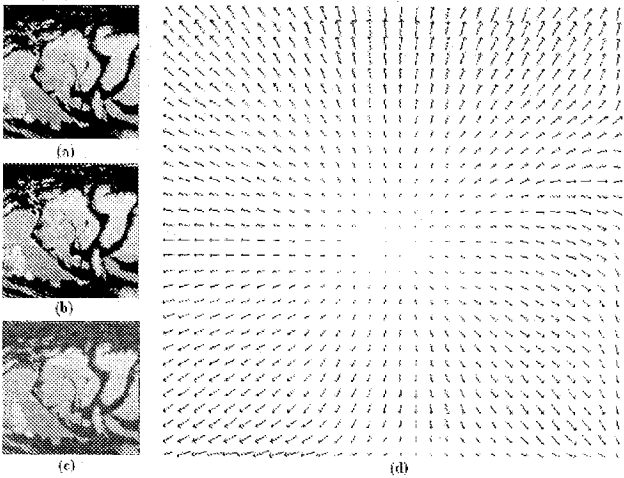


Figura 4: Arbol divergente. (a y b) Marcos 20 y 21 de la secuencia, (c) Reconstruccion del Marco 21 utilizando la información del marco 20 y el campo de FO calculado con SSD-ARC y (d) Campo Vectorial de FO calculado.

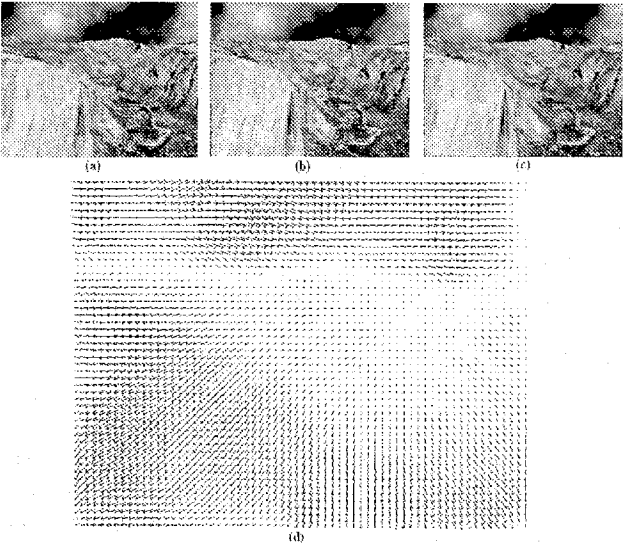
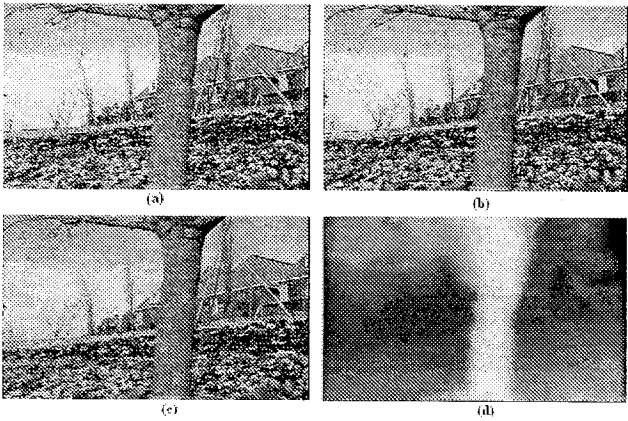


Figura 5: Secuencia del Parque Yosemite. (a y b) Marcos 9 y 10 de la secuencia, (c) Reconstruccion del Marco 10 utilizando la información del marco 9 y el campo de FO calculado con SSD-ARC y (d) Campo Vectorial de FO calculado.



Figura~6: Secuencia del Jardin de Flores. (a y b) Marcos 5 y 6 de la secuencia, (c) Reconstruccion del Marco 6 utilizando la información del marco 5 y el campo de FO calculado con SSD-ARC y (d) Magnitud del Campo Vectorial de FO.

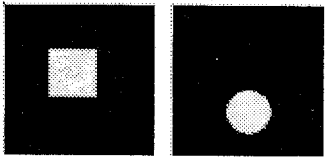
Aplicación del SSD-ARC* a Registro de Imágenes.

El problema del registro es similar al problema de flujo óptico cuando se dispone de un solo par de marcos de la secuencia, pero a diferencia de este, cuando se registran imágenes las deformaciones son más grandes. Las imágenes que nos interesan corresponden a tejidos humanos y son obtenidas con equipos de Resonancia Magnética (RM). La captura del par de imágenes se realiza a intervalos de tiempo que son mucho mayores que el tiempo entre pares de marcos de una secuencia de video; incluso, en muchas ocasiones se trata de registrar imágenes de cerebros de diferentes individuos. Por lo tanto, necesitamos un algoritmo que sea robusto al ruido e inhomogeneidades producidas por el equipo de RM, que estime deformaciones grandes y que maneje solo pares de imágenes.

El problema de registro consiste en encontrar una transformación punto a punto, que nos permita superponer óptimamente la imagen origen en la imagen destino. Implícitamente esta transformación nos da el FO entre ambas imágenes, de ahí que consideremos que ambos problemas son similares. Dado lo robusto del algoritmo SSD-ARC* y que es capaz de trabajar únicamente con un par de cuadros, utilizaremos este para realizar la tarea de registro.

Ejemplo con imagen sintética.

Para evaluar el desempeño de los algoritmos de registro SSD-ARC*, SSD-BR y SSD-Spline, y los algoritmos de registro paramétrico con modelo afín (RP-A) y trans-



Figura~7: Par sintético. A la izquierda tenemos la imagen origen (cuadro) y a la derecha la imagen destino (circulo).

Algoritmo	Tiempo por iteración	iteraciones
SSD-Spline	51.3 mseg.	400
SSD-BR	19.2 mseg.	1200
SSD-ARC	19.1 mseg.	1200
RP-A	17.6 mseg.	50
RP-T	11.7 mseg.	50

Tabla 3: Tiempos de ejecución comparativos para diferentes algoritmos de registro

lación (RP-T), creamos un par sintético que podemos ver en la figura 7.

Dado que se trata de una imagen binaria, como medida de comparación no utilizaremos la suma de las diferencias al cuadrado sino una medida de calidad de puntos registrados, la formula para dicho cálculo es

$$I = \frac{|R \cap S|}{|R \cup S|}$$

$$R = \{r_i \mid g_2(r_i) = C\} \text{ y } S = \{s_i \mid g_m(r_i) = C\}$$

donde g_2 es la imagen destino, g_m es la imagen calculada (a partir de g_1 y V) y C es un atributo (en este caso, nivel de gris). Note que el índice toma valores entre cero y uno, cero cuando los conjuntos son disjuntos y uno cuando son iguales.

Comparamos el desempeño de los algoritmos mencionados cuando se adiciona ruido Gaussiano con media cero y desviación estándar variable $N(0, \sigma)$. En la figura 8 podemos ver la gráfica del índice de puntos registrados contra el nivel de ruido representado por la desviación estándar σ ($\sigma = 0$ significa imágenes sin ruido). Note que el algoritmo SSD-ARC* tiene un mejor comportamiento que los métodos motivo de la comparación especialmente en presencia de ruido. Los tiempos de ejecución para estos algoritmos, en una computadora Pentium III a 760 MHz los podemos ver en la tabla 3.

Ejemplo con imágenes reales.

Tenemos un par de imágenes correspondientes a un corte de una imagen de resonancia magnética, del cerebro de una rata con hidrocefalia. En la figura 9-(a)

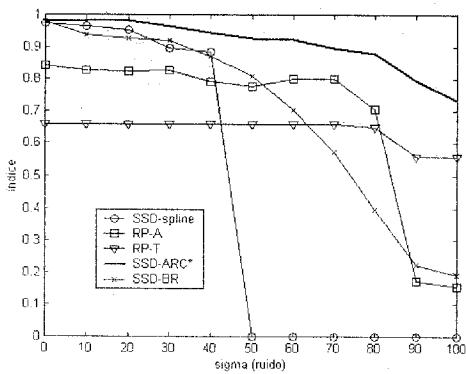


Figura 8: Índice comparativo de segmentación contra nivel de ruido.

(imagen origen) vemos el cerebro inflamado y en la figura 9-(c) (imagen destino) la imagen del cerebro en condición normal para el mismo animal. El experimento consistió en realizar el registro de estas dos imágenes (figs. a y c) utilizando el algoritmo SSD-ARC* con los siguientes parámetros $\lambda = 1$ y $\mu = 3000$.

En la figura 9-(b) vemos la imagen origen deformada con el FO calculado con SSD-ARC* y en la figura 9-(f) el error de registro, el cual resulta de sumar las diferencias al cuadrado entre las figuras 9-(b) y 9-(c). El campo de deformaciones puede utilizarse para estudiar el patrón de inflamación del cerebro de la rata, por lo cual, decidimos presentarlo en forma de retícula para mayor comprensión. En las figuras 9-(d) y 9-(e) tenemos una retícula de referencia y esta misma retícula deformada con el FO calculado.

Este experimento de registro se repitió pero adicionando ruido Gaussiano con media cero y desviación estándar 50. Los resultados del registro los podemos ver en la figura 10 y la descripción de la imágenes es similar a la figura 9.

También realizamos un experimento de registro de una imagen de resonancia magnética (MRI) de una cabeza humana (a la que denominamos espécimen) y una imagen estándar (atlas o patrón), la cual, esta disponible en [http://www.fil.ion.ucl.ac.uk/spm]. En la figura 11 podemos ver un corte axial de la cabeza con los resultados del registro (los parámetros utilizados son $\lambda = 1$ y $\mu = 3000$). En la figura 11-(a) tenemos la imagen patrón, en la figura 11-(b) la imagen patrón deformado, en 11-(c) la cabeza del espécimen destino, en las imágenes 11-(d) y (e) la retícula de referencia y el campo de deformaciones aplicado a esta, y finalmente en 11-(f) el error de registro.

Podemos utilizar el campo vectorial de deformaciones para realizar el “pelado” automático del cerebro,

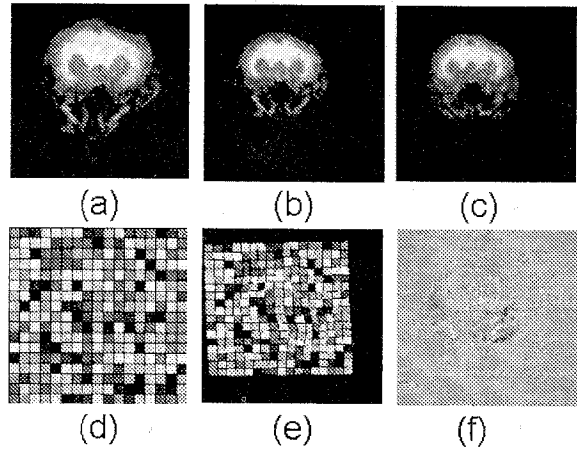


Figura 9: Ejemplo con cerebro de rata. (a) Imagen origen, (b) imagen destino, (c) reconstrucción utilizando la imagen origen y el campo de FO calculado con SSD-ARC*, (d) retícula de referencia, (e) retícula deformada utilizando el FO calculado y (f) error al restar las imágenes (a) y (c)

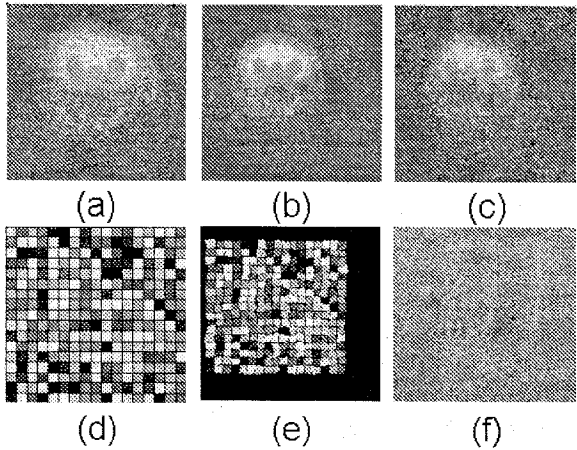


Figura 10: Ejemplo con cerebro de rata, adicionando ruido con media cero y desviación estándar 50. (a) Imagen origen, (b) imagen destino, (c) reconstrucción utilizando la imagen origen y el campo de FO calculado con SSD-ARC*, (d) retícula de referencia, (e) retícula deformada utilizando el FO calculado y (f) error al restar las imágenes (a) y (c).

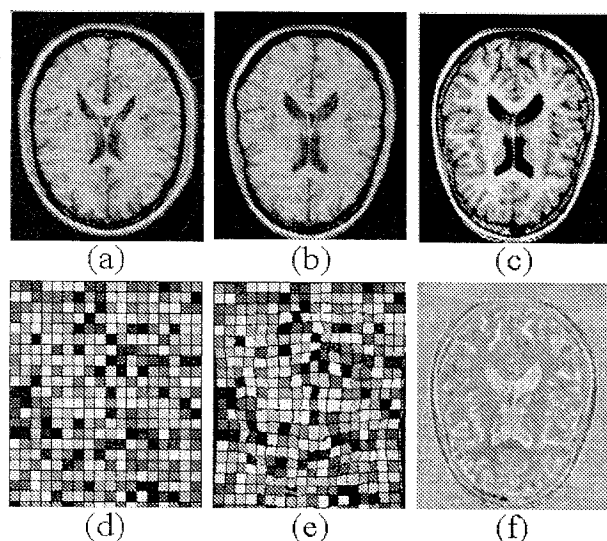


Figura 11: Ejemplo con cerebro humano. (a) Imagen atlas cerebral (origen), (b) atlas cerebral deformado, (c) espécimen a registrar (destino) (d) retícula de referencia, (e) retícula deformada utilizando el FO calculado y (f) error al restar las imágenes (b) y (c).

es decir, separar el cerebro de la estructura ósea, piel, grasa, etc. En la figura 12-(a) tenemos la cabeza patrón donde se marcaron manualmente las fronteras de la máscara (fig. 12-(c)) que indica la posición del cerebro. La máscara para el espécimen (fig. 12-(d)) es calculada a partir del campo de deformaciones obtenido del registro entre las dos cabezas. Finalmente en la figura (b) podemos ver las fronteras de esta máscara sobre el espécimen; note como los bordes de la máscara empatan muy bien con los detalles del cerebro.

Las ecuaciones (11) correspondientes al algoritmo SSD-ARC, fueron puestas en forma vectorial para mejor comprensión y facilitar la implementación de éste en cualquier espacio n-dimensional. En el caso particular de registro de MRI de cabezas humanas se implementó el algoritmo en tres dimensiones y en las figuras solo se muestra un corte axial.

Conclusiones.

Hemos presentado un nuevo algoritmo para el cálculo del flujo Óptico basado en SSD con una condición de reposo adaptable. De las pruebas numéricas realizadas con imágenes sintéticas e imágenes reales se puede ver lo robusto del método ya que se utilizaron los mismos parámetros λ y μ en presencia de ruido.

En las pruebas lo comparamos con los algoritmos SSD-BR y SSD-spline, los cuales son considerados los mejores del estado del arte para el cálculo de FO.

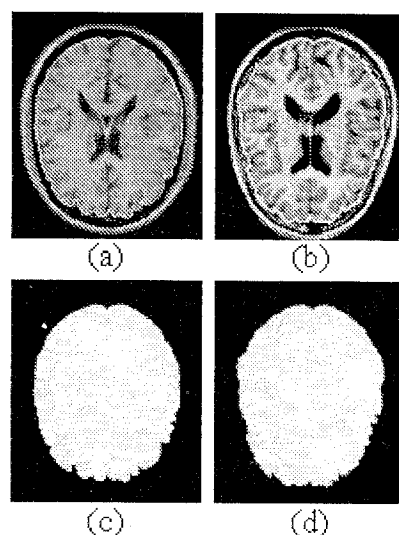


Figura 12: Segmentación del cerebro utilizando la máscara del cerebro patrón. (a) Frontera entre cerebro y no cerebro para el atlas, (b) Frontera entre cerebro y no cerebro calculada para el espécimen, (c) máscara para indicar la posición del cerebro en el atlas, y (d) Máscara obtenida a partir de (c) y el campo de FO calculado con SSD-ARC*.

Propusimos al SSD-ARC como algoritmo de registro y la introducción del espacio de escalas espacial y paramétrico dieron finalmente un algoritmo muy robusto al que llamamos SSD-ARC*.

Es importante hacer notar que el algoritmo SSD-BR es similar al SSD-ARC, sin embargo, el SSD-BR está basado en una heurística mientras el SSD-ARC está basado totalmente en la minimización de una función de energía, lo cual permite en principio, utilizar algoritmos de minimización más eficientes computacionalmente.

Estamos satisfechos con los resultados obtenidos pero la restricción de suavidad únicamente nos permite calcular campos vectoriales suaves, condición que limita el tipo de flujos ópticos que podemos analizar. En investigaciones futuras trataremos de encontrar un nuevo enfoque y/o restricción que nos permita resolver campos de deformaciones que no sean necesariamente suaves.

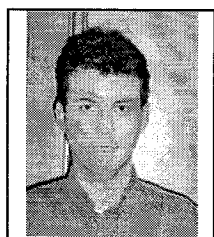
Agradecimientos.

Este trabajo fué financiado en parte por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT, México), Felix Calderón fue financiado por la beca 119039 y José Luis Marroquín por el proyecto 34575-A Las imágenes de la figura 9 fueron proporcionadas por el Dr. B. C. Vemuri.

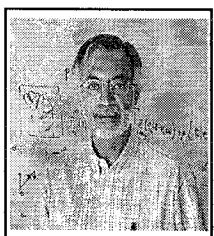
Bibliografía

- Adelson, E. H. & Bergen, J. R.**, 1986. The extraction of spatiotemporal energy in human and machine vision. *Proc. IEEE Workshop on Visual Motion, Charleston*, pp.151—156.
- Anadan, P.**, 1989. A computational framework and an algorithm for the measurement of visual motion. *Intern. J. Comput.*, 2, 283—310.
- Bab-Hadiashar, A. & Suter, D.**, 1996. Robust optic flow estimation using least median of squares. *IEEE International Conference on Image Processing ICIP96*.
- Barman, H., Haglund, L., Knutsson, H., & Granlund, G.**, 1991. Estimation of velocity, acceleration and disparity in time sequences. *Proc. IEEE Workshop on Visual Motion, Princeton*, pp.44—51.
- Barron, J. L., Fleet, D. J., & Beauchemin, S. S.**, 1994. Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, 12:1, 43—77.
- Bigun, J., Grandlund, G., & Wiklund, J.**, 1991. Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow. *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach.* 13, 775—790.
- Burt, P. J., Yen, C., & Xu, X.**, 1983. Multiresolution flow-through motion analysis. *Proc. Conf. Comput. Vis. Patt. Recog.*, pp. 246—252.
- Dennis, J.E. & Schnabel, R.B.**, (1996). Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. *siam. Metodos de Newton en gral.*
- Fennema, C. & Thompson, W.**, 1979. Velocity determination in scenes containing several moving objects. *Comput. Graph. Image Process*, 9, 301—315.
- Fleet, D.J.**, 1992 Measurement of image velocity. *Kluwer Academic Publishers: Norwell, MA.*
- Gill, P. E., Murray, W., & Wright, M. H.**, 1981. Practical Optimization. *London, New York: Academic Press.*
- Glazer, F., Reynolds, G., & Anadan, P.**, 1983. Scene matching through hierarchical correlation. *Proc. Conf. Comput. Vis. Patt. Recog.*, pp.432—411.
- Haglund, L.**, 1992. Adaptive Multidimensional Filtering. *PhD thesis, Dept. Electrical Engineering Univ. of Linkoping.*
- Hearn, D. & Baker, M. P.**, 1997. *Computer Graphics C Version*. Simon and Schuster / A Viacom Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice Hall, Inc., second edition.
- Heeger, D.J.**, 1987. Model for the extraction of image flow. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4, 1455—1471.
- Horn, B. K. P.**, 1986. *Robot Vision*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, second edition. Chapter 12.
- Jahne, B.**, 1987. Image sequence analysis of complex physical objects: Nonlinear small water surface waves. *Proc. 1st Intern. Conf. Comput. Vis. London*, pp. 191—200.
- Jahne, B.**, 1997. *Digital Image Processing. Concepts, Algorithms and Scientific Applications*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlang.
- Kelley, C. T.**, 1995. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, volume 16. Philadelphia. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM. Iteracion de Richarson.
- Lai, S.-H. & Vemuri, B.C.**, 1998. Reliable and efficient computation of optical flow. *International Journal of Computer Vision*, 29(2), 87—105.
- Little, J. J., Bulthoff, H. H., & Poggio, T.A.**, (1988). Parallel optical flow using local voting. *Proc. 2nd Inter. Conf. Vis.*, pp. 454—459.
- Little, J. J. & Verri, A.**, 1989. Analysis of differential and matching methods for optical flow. *IEEE Workshop on Visual Motion*, pp. 173—180.
- Lucas, B. & Kanade, T.**, 1981. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *Proc. DARPA Image Understanding Workshop*, pp. 121—130.
- Nagel, H. H.**, 1983. Displacement vectors derived from second-order intensity variations in image sequences. *Comput. Graph. Image Process*, 21, 85—117.
- Nagel, H. H.**, 1987. On the estimation of optical flow: Relations between different approaches and some new results. *Artificial Intelligence*, 33, 299—324.

- Nesi, P., Bimbo, A. D., & Ben-Tzvi, D., 1995. A robust algorithm for optical flow estimation. *Computer Vision and Image Understanding*, 62, 51—60.
- Rivera, M. & Marroquín, J. L., 2000. The adaptive rest-condition spring system: An edge-preserving regularization technique. *IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP-2000)*, *IEEE Signal Processing Society, Vancouver, BC, Canada*, II, 805—807.
- Romeny, B. M. T. H., 1994. *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Rousseeuw, P. J., 1984. Least median of squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 871—880.
- Scales, L. E., 1984, *Introduction to Non-Linear Optimization*. Liverpool. UK: Department of Computer Science University of Liverpool.
- Schunck, B. G., 1989. Image flow segmentation and estimation by constraint line clustering. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 11, 1010—1027.
- Shi, J. & Tomasi, C., 1994. Good features to track. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR94*, pp 593—600.
- Szeliski, R. & Coughlan, J., 1994. *Spline-Based Image Registration*. Technical Report 94/1, Harvard University, Department of Physics, Cambridge, Ma 02138.
- Tomasi, C. & Kanade, T., 1991. *Detection and Tracking of Point Features*. Technical Report CMUS-CS-91-132, Carnegie Mellon University.
- Tommasini, T., Fuiello, A., Trucco, E., & Roberto, V., 1998. Making good features track better. *Computer Vision and Pattern Recognition CVPR*, pp. 178—182.
- Tretiak, O. & Pastor, L., 1984. Velocity estimation from image sequences with second order differential operators. *Proc. 7th Intern. Conf. Patt. Recog. Montreal*, pp. 20—22.
- Uras, S., Giroso, F., Verri, A., & Torre, V., 1988. A computational approach to motion perception. *Biol. Cybern.*, 60, 79—97.



Félix Calderón Solorio, es profesor e investigador de la División de Estudios de Postgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Es profesor de las materias de programación de computadoras, Procesamiento de Señales y Reconocimiento de Formas. Sus áreas de Interés son: Procesamiento Digital de Imágenes, Cálculo de Flujo Óptico y Elementos Finitos.



José Luis Marroquín Zaleta, es profesor-investigador y coordinador del Área de Ciencias de la Computación del CIMAT. Sus áreas de interés son: Procesamiento de Imágenes y Visión Computacional, Optimización, Diseño asistido por computadora. Trabajo en: Análisis de Patrones de Franjas; Restauración y Segmentación de imágenes; profundidad a partir de imágenes estereoscópicas; regularización preservando bordes; registro de imágenes; técnicas de Monte Carlo con cadenas de Markov y Sistemas entre otras.

