

Modelación matemática para zapatas combinadas de correa en esquina apoyadas sobre el terreno: Parte 2

Marina Lourdes Garcia Graciano, Arnulfo Luévanos Rojas,
Sandra López Chavarría, Manuel Medina Elizondo

Universidad Autónoma de Coahuila,
Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria,
México

{marina_gagra, arnulfol_2007, sandylopez5}@hotmail.com,
drmanuelmedina@yahoo.com.mx

Resumen. Este trabajo de investigación muestra un modelo matemático para diseño de zapatas combinadas de correa en esquina apoyadas sobre el terreno que soportan una carga concentrada y dos momentos ortogonales en cada columna, y la presión se considera que varía linealmente. La primera parte de esta investigación muestra un modelo para obtener la superficie mínima o área óptima en planta. La metodología se basa en el concepto de que la integral del cortante por flexión es el momento. El modelo tradicional considera una presión uniforme (presión máxima) del suelo sobre la zapata de esquina y las dos zapatas de borde, porque la reacción del suelo sobre cada zapata se aplica en el centro de cada zapata. Cuatro ejemplos numéricos se muestran para el diseño de zapatas combinadas de correa en esquina. Este modelo es más general porque se puede aplicar a zapatas combinadas de esquina, simplemente considerando los lados en dirección X de las zapatas 1 y 3 iguales, y los lados en dirección Y de las zapatas 1 y 2 iguales.

Palabras clave. Modelación matemática, zapatas combinadas de correa en esquina, modelo para diseño.

Mathematical Modeling for Corner Strap Combined Footings Resting on the Ground: Part 2

Abstract. This research work shows a mathematical model for the design of corner strap combined footings supported on the ground that supports a concentrated load and two orthogonal moments in each column and it is considered that the pressure on the ground varies linearly. The first part of this investigation shows a model to obtain the minimum surface or optimal area in plan. The methodology is based on the concept that the

integral of the bending shear is the moment. The traditional model considers a uniform pressure (maximum pressure) of the soil on the corner footing and the two edge footings, because the reaction of the soil on each footing is applied in the center of each footing. Four numerical examples are shown for the design of corner strap combined footings. This model is more general because it can be applied to corner combined footings, simply considering the sides in the X direction of the footings 1 and 3 equal, and the sides in the Y direction of the footings 1 and 2 equal.

Keywords. Mathematical modeling, corner strap combined footings, model for design.

1. Introducción

La cimentación es una parte estructural que se localiza por debajo de la superficie del suelo y que transmite las cargas de la estructura al suelo o roca subyacentes.

Todos los suelos, al someterlos a las cargas, se comprimen y causan asentamientos en la estructura soportada.

Los dos requisitos principales en el diseño de cimentaciones son: 1) que el asentamiento total de la estructura esté restringida a una cantidad tolerablemente pequeña; 2) que el asentamiento diferencial de las distintas partes de la estructura se elimine.

La presión del suelo debajo de una zapata depende del tipo de suelo, la rigidez relativa del suelo y la zapata, y la profundidad de la cimentación al nivel de contacto entre la zapata y el suelo.

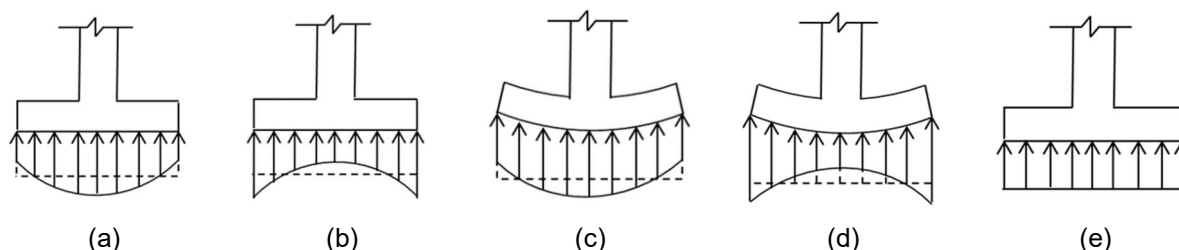


Fig. 1. Diagrama de presiones debajo de una zapata. (a) Zapata rígida sobre suelo arenoso; (b) Zapata rígida sobre suelo arcilloso; (c) Zapata flexible sobre suelo arenoso; (d) Zapata flexible sobre suelo arcilloso; (e) Distribución uniforme usada en el diseño

La Figura 1 muestra la distribución de presión del suelo debajo de la zapata según el tipo de suelo y la rigidez de la zapata.

Los modelos matemáticos para diseño de zapatas aisladas rectangulares, cuadradas y circulares (cimentaciones poco profundas o superficiales) han despertado gran interés en diversos investigadores para obtener soluciones más simplificadas [1-13].

Los modelos matemáticos para diseño de zapatas combinadas como las rectangulares, trapezoidales, en forma de T y de esquina apoyadas sobre el terreno han ofrecido grandes beneficios en la ingeniería estructural e ingeniería geotécnica por el ahorro de tiempo en los cálculos estructurales [14-24].

Los trabajos más cercanos al tema de diseño para zapatas combinadas de correa en esquina son: Yáñez-Palafox *et al.* [21] desarrollaron un modelo matemático para diseño de zapatas combinadas de correa para dos columnas (una columna de frontera y la otra interior), por lo tanto, no se puede usar para obtener el diseño para zapatas de esquina.

Luévanos-Rojas *et al.* [23] propusieron un modelo matemático para diseño de zapatas combinadas de esquina para obtener el espesor y las áreas de acero de refuerzo de la zapata, esta contribución puede ser útil cuando las zapatas tienden a traslaparse una sobre otra, pero cuando las zapatas no se traslapan se deben de usar vigas de correa o de liga (zapatas combinadas de correa en esquina), es decir, las zapatas se unen mediante vigas.

Este trabajo de investigación presenta un modelo para diseño de zapatas combinadas de correa en esquina que soporta una carga

concentrada y momentos alrededor de los ejes "X" e "Y" en cada columna, y la presión del suelo se considera que varía linealmente.

La primera parte de esta investigación muestra un modelo para obtener la superficie mínima o área óptima en planta. La metodología se basa en el concepto de que la integral del cortante por flexión es el momento.

El modelo tradicional considera una presión uniforme (presión máxima) del suelo sobre la zapata de esquina y las dos zapatas de borde, porque la reacción del suelo sobre cada zapata se aplica en el centro de cada zapata.

Cuatro ejemplos completos para diseño se muestran para zapatas combinadas de correa en esquina: Ejemplo 1: Lados libres en las direcciones X e Y. Ejemplo 2: Lado restringido en la dirección X y libre en la dirección Y. Ejemplo 3: Lado restringido en la dirección Y y libre en la dirección X. Ejemplo 4: Lado restringido en las direcciones X e Y.

2. Formulación matemática del modelo

Los esfuerzos en las dos direcciones ortogonales (ejes principales X e Y) son:

$$\sigma(x, y) = \frac{R}{A} + \frac{M_{xT}y}{I_x} + \frac{M_{yT}x}{I_y}, \quad (1)$$

dónde: R , M_{xT} , M_{yT} , A , I_x e I_y se presentan en las ecuaciones (22) a (25), y en las ecuaciones (30) y (31) de la parte 1.

2.1. Cortantes por flexión y momentos

Los momentos de acuerdo al reglamento [25] se presentan en las secciones a-a, b-b, c-c, d-d, e-e, f-f y g-g (ejes paralelos al eje X), y en las secciones h-h, i-i, j-j, k-k, l-l, m-m y n-n (ejes paralelos al eje Y) (ver. Figura 2).

Los cortantes por flexión de acuerdo al reglamento [25] se presentan en las secciones o-o, b-b, d-d, p-p, q-q y r-r (ejes paralelos al eje X), y en las secciones s-s, i-i, k-k, t-t, u-u y v-v (ejes paralelos al eje Y) (ver. Figura 3).

Los pasos para obtener las ecuaciones son los siguientes:

Paso 1: El cortante por flexión “V_x” sobre el eje X se obtiene por integración cerrada del volumen de presión del área formada partir del lado inferior de la zapata hasta el eje de estudio paralelo al eje “X” (el límite superior en dirección de “Y” se toma como la variable y).

Paso 2: El momento “M_x” sobre el eje X se obtiene por integración y tomando una condición conocida para evaluar las constantes de integración, por ejemplo: para el primer tramo de “y_s - b ≤ y ≤ y_s - b + z_{3b}/2”, la condición conocida es “y = y_s - b” y “M_x = 0”, en este intervalo se obtiene M_{CentroC3} (momento en el centro de la columna 3); para el segundo tramo de “y_s - b + z_{3b}/2 ≤ y ≤ y_s - b + z_{3b}”, la condición conocida es “y = y_s - b + ξ/2” (ξ = z_{3b} para columna sin frontera y ξ = c_y para columna con frontera), y “M_x = M_{CentroC3} + M_{x3}”, en este intervalo se obtiene M_d (momento en el límite de la zapata 3); para el tercer tramo de “y_s - b + z_{3b} ≤ y ≤ y_s - z_{1b}”, la condición conocida es “y = y_s - b + z_{3b}”, y “M_x = M_d”, en este intervalo se obtiene M_b (momento en el límite de la zapata 1); para el cuarto tramo de “y_s - z_{1b} ≤ y ≤ y_s - c_y/2”, la condición conocida es “y = y_s - z_{1b}”, y “M_x = M_b”; para el tramo de “y_s - z_{2b} ≤ y ≤ y_s - c_y/2”, la condición conocida es “y = y_s - z_{2b}”, y “M_x = 0”.

Paso 3: Los pasos 1 y 2 se desarrollan de manera similar para obtener el cortante por flexión “V_y” y el momento “M_y” sobre el eje Y, siendo λ = z_{2a} para columna sin frontera y λ = c_x para columna con frontera.

Las ecuaciones finales para el cortante por flexión y momento se muestran s continuación:

Para el tramo sobre el eje x-x en la zapata 3 de y_s - b ≤ y ≤ y_s - b + z_{3b}/2.

Para el tramo sobre el eje x-x en la zapata 3 de:

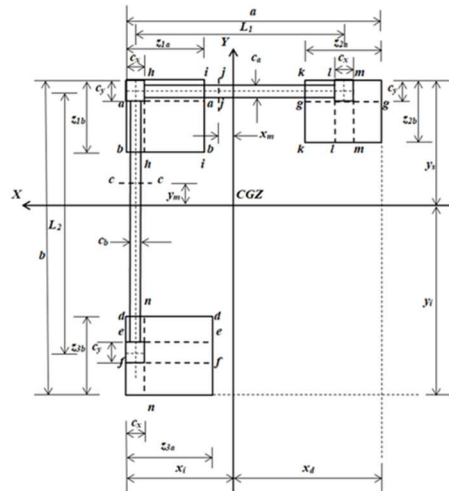


Fig. 2. Momentos críticos de acuerdo al reglamento [25]

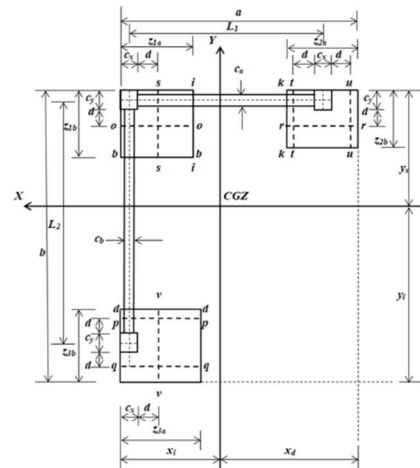


Fig. 3. Cortantes por flexión críticos de acuerdo al reglamento [25]

$$y_s - b \leq y \leq y_s - b + z_{3b}/2: V_x = -\frac{Rz_{3a}(y_s - b - y)}{A} - \frac{M_{xTz_{3a}}[(y_s - b)^2 - y^2]}{2I_x} - \frac{M_{yTz_{3a}}(2x_i - z_{3a})(y_s - b - y)}{2I_y} \tag{2}$$

$$M_x = \frac{Rz_{3a}(y_s - b - y)^2}{2A} + \frac{M_{xTz_{3a}}[2(y_s - b)^3 - 3(y_s - b)^2 y + y^3]}{6I_x} \tag{3}$$

Para el tramo sobre el eje x-x en la zapata 3 de y_s - b + z_{3b}/2 ≤ y ≤ y_s - b + z_{3b}:

$$V_x = -P_3 - \frac{Rz_{3a}(y_s - b - y)}{A} - \frac{M_{xTz_{3a}}[(y_s - b)^2 - y^2]}{2I_x} - \frac{M_{yTz_{3a}}(2x_i - z_{3a})(y_s - b - y)}{2I_y} \tag{4}$$

$$M_x = \frac{Rz_{3a}(y_s - b - y)^2}{2A} + \frac{M_{xT}z_{3a}[2(y_s - b)^3 - 3(y_s - b)^2y + 6I_x]}{6I_x} + M_{x3} + P_3 \left(y_s - y - b + \frac{\xi}{2} \right). \quad (5)$$

Para el tramo sobre el eje x-x en la viga entre la zapata 3 y la zapata 1 de $y_s - b + z_{3b} \leq y \leq y_s - z_{1b}$:

$$V_x = \frac{R[c_b(y - y_s + b - z_{3b}) + z_{3a}z_{3b}]}{A} + \frac{M_{xT}\{c_b[y^2 - (y_s - b + z_{3b})^2] + z_{3a}z_{3b}(2y_s - 2b + z_{3b})\}}{2I_x} + \frac{M_{yT}\{c_b(2x_i - c_x)(y - y_s + b - z_{3b}) + z_{3a}z_{3b}(2x_i - z_{3a})\}}{2I_y} - P_3, \quad (6)$$

$$M_x = +P_3 \left(y_s - y - b + \frac{\xi}{2} \right) + \frac{R[c_b(y_s - y - b + z_{3b})^2 - z_{3a}z_{3b}(2y_s - 2y - 2b + z_{3b})]}{2A} + \frac{M_{xT}z_{3a}z_{3b}[6(y_s - b)(y - y_s + b - z_{3b}) + z_{3b}(3y - 2z_{3b})]}{6I_x} + \frac{M_{xT}c_b[y^3 - 3y(y_s - b + z_{3b})^2 + 2(y_s - b + z_{3b})^3]}{6I_x} + M_{x3}. \quad (7)$$

Para el tramo sobre el eje x-x en la zapata 1 de $y_s - z_{1b} \leq y \leq y_s - c_y/2$:

$$V_x = \frac{R[z_{1a}(y - y_s + z_{1b}) + c_b(b - z_{1b} - z_{3b}) + z_{3a}z_{3b}]}{A} + \frac{M_{xT}[z_{1a}y^2 - (z_{1a} - c_b)(y_s - z_{1b})^2]}{2I_x} - \frac{M_{xT}\{c_b(y_s - b + z_{3b})^2 - z_{3a}z_{3b}(2y_s - 2b + z_{3b})\}}{2I_x} + \frac{M_{yT}z_{1a}(2x_i - z_{1a})(y - y_s + z_{1b})}{2I_y} + \frac{M_{yT}\{c_b(2x_i - c_x)(b - z_{1b} - z_{3b}) + z_{3a}z_{3b}(2x_i - z_{3a})\}}{2I_y} - P_3, \quad (8)$$

$$M_x = \frac{Rz_{3a}z_{3b}(2b - 2y_s + 2y - z_{3b})}{2A} + \frac{Rc_b(b - z_{1b} - z_{3b})(b - 2y_s + 2y + z_{1b} - z_{3b})}{2A} + \frac{Rz_{1a}(y_s - y - z_{1b})^2}{2A} + \frac{M_{xT}z_{3a}z_{3b}[6(b - y_s)(z_{3b} + y) + z_{3b}(3y - 2z_{3b}) - 6(y_s - b)^2]}{6I_x} + \frac{M_{xT}[z_{1a}y^3 + (z_{1a} - c_b)(y_s - z_{1b})^2(2y_s - 3y - 2z_{1b})]}{6I_x} + \frac{M_{xT}c_b(y_s - b + z_{3b})^2(2y_s - 2b - 3y + 2z_{3b})}{6I_x} + M_{x3} + P_3 \left(y_s - y - b + \frac{\xi}{2} \right). \quad (9)$$

Para el tramo sobre el eje x-x en la zapata 2 de $y_s - z_{2b} \leq y \leq y_s - c_y/2$:

$$V_x = -\frac{Rz_{2a}(y_s - y - z_{2b})}{A} - \frac{M_{xT}z_{2a}[(y_s - z_{2b})^2 - y^2]}{2I_x} - \frac{M_{yT}z_{2a}(2x_i - 2a + z_{2a})(y_s - y - z_{2b})}{2I_y}, \quad (10)$$

$$M_x = \frac{Rz_{2a}(y_s - z_{2b} - y)^2}{2A} + \frac{M_{xT}z_{2a}[(y_s - z_{2b})^2(2y_s - 2z_{2b} - 3y) + y^3]}{6I_x}. \quad (11)$$

Para el tramo sobre el eje y-y en la zapata 2 de $x_i - a \leq x \leq x_i - a + z_{2a}/2$:

$$V_y = -\frac{Rz_{2b}(x_i - a - x)}{A} - \frac{M_{xT}z_{2b}(2y_s - z_{2b})(x_i - a - x)}{2I_x} - \frac{M_{yT}z_{2b}[(x_i - a)^2 - x^2]}{2I_y}, \quad (12)$$

$$M_y = \frac{Rz_{2b}(x_i - a - x)^2}{2A} + \frac{M_{yT}z_{2b}[2(x_i - a)^3 - 3(x_i - a)^2x + x^3]}{6I_y}. \quad (13)$$

Para el tramo sobre el eje y-y en la zapata 2 de $x_i - a + z_{2a}/2 \leq x \leq x_i - a + z_{2a}$:

$$V_y = -P_2 - \frac{Rz_{2b}(x_i - a - x)}{A} - \frac{M_{xT}z_{2b}(2y_s - z_{2b})(x_i - a - x)}{2I_x} - \frac{M_{yT}z_{2b}[(x_i - a)^2 - x^2]}{2I_y}, \quad (14)$$

$$M_y = \frac{Rz_{2b}(x_i - a - x)^2}{2A} + \frac{M_{yT}z_{2b}[2(x_i - a)^3 - 3(x_i - a)^2x + x^3]}{6I_y} + M_{y2} + P_2 \left(x_i - x - a + \frac{\lambda}{2} \right). \quad (15)$$

Para el tramo sobre el eje y-y en la viga entre la zapata 2 y la zapata 1 de $x_i - a + z_{2a} \leq x \leq x_i - z_{1a}$:

$$V_y = \frac{R[c_a(x - x_i + a - z_{2a}) + z_{2a}z_{2b}]}{A} + \frac{M_{xT}\{c_a(2y_s - c_y)(x - x_i + a - z_{2a}) + z_{2a}z_{2b}(2y_s - z_{2b})\}}{2I_x} + \frac{M_{yT}\{c_a[x^2 - (x_i - a + z_{2a})^2] + z_{2a}z_{2b}(2x_i - 2a + z_{2a})\}}{2I_y} - P_2, \quad (16)$$

$$M_y = P_2 \left(x_i - x - a + \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{R[c_a(x_i - x - a + z_{2a})^2 - z_{2a}z_{2b}(2x_i - 2x - 2a + z_{2a})]}{2A} + \frac{M_{yT}z_{2a}z_{2b}[6(x_i - a)(x - x_i + a - z_{2a}) + z_{2a}(3x - 2z_{2a})]}{6I_y} + \frac{M_{yT}c_a[x^3 - 3x(x_i - a + z_{2a})^2 + 2(x_i - a + z_{2a})^3]}{6I_y} + M_{y2}. \quad (17)$$

Para el tramo sobre el eje y-y en la zapata 1 de $x_i - z_{1a} \leq x \leq x_i - c_x/2$:

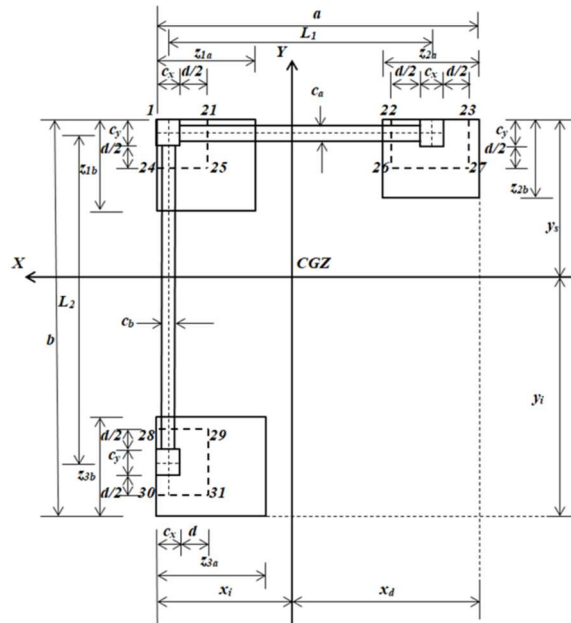


Fig. 4. Cortantes por penetración críticos de acuerdo al reglamento [25]

$$\begin{aligned}
 V_y &= -P_2 + \frac{R[z_{1b}(x - x_i + z_{1a}) + c_a(a - z_{1a} - z_{2a}) + z_{2a}z_{2b}]}{A} \\
 &+ \frac{M_{xT}z_{1b}(2y_s - z_{1b})(x - x_i + z_{1a})}{2I_x} \\
 &+ \frac{M_{xT}[c_a(2y_s - c_y)(a - z_{1a} - z_{2a}) + z_{2a}z_{2b}(2y_s - z_{2b})]}{2I_x} \\
 &+ \frac{M_{yT}[z_{1b}x^2 - (z_{1b} - c_a)(x_i - z_{1a})^2]}{2I_y} \\
 &- \frac{M_{yT}[c_a(x_i - a + z_{2a})^2 - z_{2a}z_{2b}(2x_i - 2a + z_{2a})]}{2I_y},
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \frac{Rz_{2a}z_{2b}(2a - 2x_i + 2x - z_{2a})}{2A} + \\
 &\frac{Rc_a(a - z_{1a} - z_{2a})(a - 2x_i + 2x + z_{1a} - z_{2a})}{2A} + \frac{Rz_{1b}(x_i - x - z_{1a})^2}{2A} + \\
 &\frac{M_{yT}c_a(x_i - a + z_{2a})^2(2x_i - 2a - 3x + 2z_{2a})}{6I_y} + \\
 &\frac{M_{yT}[z_{2a}z_{2b}[6(a - x_i)(z_{2a} - x) + z_{2a}(3x - 2z_{2a}) - 6(x_i - a)^2]}{6I_y} + \\
 &\frac{M_{yT}[z_{1b}x^3 + (z_{1b} - c_a)(x_i - z_{1a})^2(2x_i - 3x - 2z_{1a})]}{6I_y} + M_{y2} + \\
 &P_2 \left(x_i - x - a + \frac{\lambda}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Para el tramo sobre el eje y-y en la zapata 3 de $x_i - z_{3a} \leq x \leq x_i - c_x/2$:

$$\begin{aligned}
 V_y &= -\frac{Rz_{3b}(x_i - x - z_{3a})}{A} - \frac{M_{xT}z_{3b}(2y_s - 2b + z_{3b})(x_i - x - z_{3a})}{2I_x} - \\
 &\frac{M_{yT}z_{3b}[(x_i - z_{3a})^2 - x^2]}{2I_y},
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \frac{Rz_{3b}(x_i - z_{3a} - x)^2}{2A} + \\
 &\frac{M_{yT}z_{3b}[(x_i - z_{3a})^2(2x_i - 2z_{3a} - 3x) + x^3]}{6I_y}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

2.2. Cortantes por penetración o cortantes por punzonamiento

Los cortantes por penetración de acuerdo al reglamento [25] se presentan en un perímetro localizado a una distancia de $d/2$ a partir de la cara de la columna. Para la columna 1 el perímetro crítico está formado por los puntos 1, 21, 24 y 25.

Para la columna 2 el perímetro crítico está formado por los puntos 22, 23, 26 y 27. Para la columna 3 el perímetro crítico está formado por los puntos 28, 29, 30 y 31 (ver. Figura 4).

Los cortantes por penetración de acuerdo al reglamento [25] se obtienen de la diferencia de la carga axial y el volumen de presión del área delimitada por el perímetro de la sección crítica.

Para la columna 1 es:

$$\begin{aligned}
 V_{p1} &= P_1 - \frac{R(2c_x + d)(2c_y + d)}{4A} - \\
 &\frac{M_{xT}(2c_x + d)(2c_y + d)(4y_s - 2c_y - d)}{16I_x} - \\
 &\frac{M_{yT}(2c_x + d)(2c_y + d)(4x_i - 2c_x - d)}{16I_y}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Tabla 1. Áreas mínimas de los 4 ejemplos

Concepto	Ejemplo							
	1		2		3		4	
	Primera solución	Solución propuesta	Primera solución	Solución propuesta	Primera solución	Solución propuesta	Primera solución	Solución propuesta
σ_a	250							
σ_{ad}	214.15		212.35		212.80		212.35	
l_x	111.70	116.01	108.81	114.28	96.94	98.86	94.11	97.16
l_y	169.90	180.02	143.63	146.89	168.37	179.08	141.50	145.94
M_{xT}	0	58.69	0	201.42	0	-70.29	0	71.15
M_{yT}	0	267.31	0	34.27	0	267.43	0	31.37
R	3200	3200	3200	3200	3200	3200	3200	3200
a	9.25	9.30	8.40	8.40	9.25	9.30	8.40	8.40
b	8.13	8.15	8.12	8.15	7.40	7.40	7.40	7.40
x_i	3.43	3.52	3.43	3.45	3.43	3.52	3.43	3.44
x_d	5.82	5.78	4.97	4.95	5.82	5.78	4.97	4.96
y_s	2.64	2.66	2.64	2.70	2.64	2.62	2.64	2.66
y_i	5.49	5.49	5.48	5.45	4.76	4.78	4.76	4.74
$Z_{1a} = Z_{1b}$	2.07	2.10	1.90	1.90	1.93	2.00	1.75	1.80
$Z_{2a} = Z_{2b}$	2.11	2.20	2.35	2.40	2.10	2.20	2.34	2.40
$Z_{3a} = Z_{3b}$	1.85	1.90	1.83	1.90	2.08	2.10	2.04	2.10
σ_1	214.15	211.63	212.35	211.82	212.80	206.31	212.35	206.25
σ_2	214.15	208.51	212.35	211.37	212.80	203.32	212.35	205.86
σ_3	214.15	201.09	212.35	210.42	212.80	195.71	212.35	204.96
σ_4	214.15	197.82	212.35	209.86	212.80	192.42	212.35	204.44
σ_5	214.15	208.49	212.35	211.28	212.80	203.36	212.35	205.83
σ_6	214.15	201.06	212.35	210.33	212.80	195.74	212.35	204.92
σ_7	214.15	208.33	212.35	210.76	212.80	203.57	212.35	205.61
σ_8	214.15	200.91	212.35	209.80	212.80	195.96	212.35	204.70
σ_9	214.15	210.57	212.35	208.47	212.80	207.73	212.35	204.93
σ_{10}	214.15	210.49	212.35	208.46	212.80	207.66	212.35	204.92
σ_{11}	214.15	210.05	212.35	208.39	212.80	207.21	212.35	204.86
σ_{12}	214.15	207.45	212.35	208.02	212.80	204.75	212.35	204.55
σ_{13}	214.15	199.97	212.35	206.19	212.80	197.27	212.35	203.20
σ_{14}	214.15	196.71	212.35	205.63	212.80	193.99	212.35	202.69
σ_{15}	214.15	208.39	212.35	200.79	212.80	210.00	212.35	202.36
σ_{16}	214.15	207.95	212.35	200.72	212.80	209.56	212.35	202.29
σ_{17}	214.15	205.65	212.35	200.36	212.80	206.94	212.35	201.92
σ_{18}	214.15	208.47	212.35	200.80	212.80	210.08	212.35	202.37
σ_{19}	214.15	207.51	212.35	197.45	212.80	211.57	212.35	200.83
σ_{20}	214.15	204.69	212.35	197.01	212.80	208.44	212.35	200.38
A_{min}	14.94	15.61	15.07	15.51	15.04	15.77	15.07	15.72

Para la columna 2 no limitada en la dirección X (columna de borde):

$$V_{p2} = P_2 - \frac{R(c_x + d)(2c_y + d)}{2A} - \frac{M_{xT}(c_x + d)(2c_y + d)(4y_s - 2c_y - d)}{8I_x} - \frac{M_{yT}(c_x + d)(2c_y + d)(2x_i - 2a + z_{2a})}{4I_y} \quad (23)$$

Para la columna 2 limitada en la dirección X (columna en esquina):

$$V_{p2} = P_2 - \frac{R(2c_x + d)(2c_y + d)}{4A} - \frac{M_{xT}(2c_x + d)(2c_y + d)(4y_s - 2c_y - d)}{16I_x} - \frac{M_{yT}(2c_x + d)(2c_y + d)(4x_i - 4a + 2c_x + d)}{16I_y} \quad (24)$$

Para la columna 3 no limitada en la dirección Y (columna de borde):

$$V_{p3} = P_3 - \frac{R(2c_x + d)(c_y + d)}{2A} - \frac{M_{xT}(2c_x + d)(c_y + d)(2y_s - 2b + z_{3b})}{4I_x} - \frac{M_{yT}(2c_x + d)(c_y + d)(4x_i - 2c_x - d)}{8I_y} \quad (25)$$

Para la columna 3 limitada en la dirección Y (columna en esquina):

$$V_{p3} = P_3 - \frac{R(2c_x + d)(2c_y + d)}{4A} - \frac{M_{xT}(2c_x + d)(2c_y + d)(4x_i - 2c_x - d)}{16I_x} - \frac{M_{yT}(2c_x + d)(2c_y + d)(4y_s - 4b + 2c_y + d)}{16I_y} \quad (26)$$

3. Aplicación numérica

En este apartado se presentan cuatro ejemplos numéricos para obtener el costo mínimo de diseño para zapatas combinadas de correa en esquina que soportan tres columnas, el diseño incluye las tres zapatas y las dos vigas que unen las zapatas como se muestra en la Figura 2 de la parte 1.

Ejemplo 1: Lados libres en las direcciones X e Y, es decir, $c_x/2 + L_1 + z_{2a}/2 = a$ y $c_y/2 + L_2 + z_{3b}/2 = b$. Ejemplo 2: Lado restringido en la dirección X y libre en la dirección Y, es decir, $c_x/2 + L_1 + c_x/2 = a$ y $c_y/2 + L_2 + z_{3b}/2 = b$. Ejemplo 3: Lado libre en la dirección X y restringido en la dirección Y, es

decir, $c_x/2 + L_1 + z_{2a}/2 = a$ y $c_y/2 + L_2 + c_y/2 = b$. Ejemplo 4: Lados restringidos en las direcciones X e Y, es decir, $c_x/2 + L_1 + c_x/2 = a$ y $c_y/2 + L_2 + c_y/2 = b$. Para todos los casos se consideran: las mismas cargas y momentos, y las zapatas de diferentes dimensiones y cuadradas.

Los datos a considerar para costo mínimo de las zapatas combinadas de correa en esquina son: $c_x = c_y = 40$ cm; $c_a = c_b = 30$ cm; $L_1 = 8.00$ m; $L_2 = 7.00$ m; H (profundidad a la que se desplanta la zapata) = 2.0 m; $P_{D1} = 250$ kN; $P_{L1} = 350$ kN; $M_{Dx1} = 70$ kN-m; $M_{Lx1} = 80$ kN-m; $M_{Dy1} = 90$ kN-m; $M_{Ly1} = 110$ kN-m; $P_{D2} = 550$ kN; $P_{L2} = 850$ kN; $M_{Dx2} = 110$ kN-m; $M_{Lx2} = 140$ kN-m; $M_{Dy2} = 150$ kN-m; $M_{Ly2} = 200$ kN-m; $P_{D3} = 500$ kN; $P_{L3} = 700$ kN; $M_{Dx3} = 90$ kN-m; $M_{Lx3} = 110$ kN-m; $M_{Dy3} = 130$ kN-m; $M_{Ly3} = 170$ kN-m; f'_c (resistencia del concreto) = 28 MPa; f_y (resistencia del acero) = 420 MPa; σ_a (capacidad de carga admisible del suelo) = 250 kN/m²; γ_{pez} (peso específico de la zapata) = 24 kN/m³; γ_{pes} (peso específico del suelo de relleno) = 15 kN/m³.

La capacidad de carga admisible disponible del suelo " σ_{ad} " se obtiene por: la capacidad de carga del suelo " σ_a " se le resta el peso específico de la zapata " γ_{pez} " por el espesor de la zapata, y también el peso específico del suelo de relleno " γ_{pes} " por el espesor del suelo de relleno.

Las cargas y momentos que actúan sobre cada una de las zapatas son: $P_1 = 600$ kN, $M_{x1} = 150$ kN-m, $M_{y1} = 200$ kN-m, $P_2 = 1400$ kN, $M_{x2} = 250$ kN-m, $M_{y2} = 350$ kN-m, $P_3 = 1200$ kN, $M_{x3} = 200$ kN-m, $M_{y3} = 300$ kN-m.

La función objetivo para la superficie mínima (parte 1) se obtiene por la ecuación (25), y las funciones de restricción se obtienen: por las ecuaciones (2) a (24) y (26) a (33) para el ejemplo 1, por las ecuaciones (2) a (24), (26) a (31), (34) y (35) para el ejemplo 2, por las ecuaciones (2) a (24), (26) a (31), (36) y (37) para el ejemplo 3, por las ecuaciones (2) a (24), (26) a (31), (38) y (39) para el ejemplo 4.

Las superficies mínimas para las zapatas combinadas de correa en esquina se obtienen usando el software MAPLE-15.

La Tabla 1 muestra la primera solución y la solución final para el área mínima de los cuatro ejemplos.

Para el diseño de elementos estructurales se deben de factorizar las cargas y momentos que actúan, según el código ACI [25].

Tabla 2. Elementos mecánicos de los 4 ejemplos

Concepto	Ejemplo							
	1		2		3		4	
	Permitidos	Actuantes	Permitidos	Actuantes	Permitidos	Actuantes	Permitidos	Actuantes
d_z	57		77		72		77	
d_v	117		117		117		117	
M_{uxT}		128.00		312.00		-56.00		128.00
M_{uyT}		324.00		2.00		324.00		-44.00
R_u		4600.00		4600.00		4600.00		4600.00
M_{uxa}		-2029.16		-2395.75		-2015.79		-2381.65
M_{uxb}		-2401.03		-2569.97		-2544.91		-2697.97
M_{uxc}		-2478.20		-2655.30		-2560.54		-2717.83
$y_c = y_{max}$		1.06		1.34		0.85		1.13
M_{uxd}		-357.76		-377.97		-1622.61		-1653.66
M_{uxe}		303.15		295.24		-10.55		-11.86
M_{uxf}		154.38		150.90		0		0
M_{uxg}		1054.42		1436.27		1037.53		1410.44
M_{uyh}		-1858.93		-1862.50		-2126.67		-2092.70
M_{uyi}		-2431.83		-2575.72		-2553.72		-2665.03
M_{uyj}		-2462.39		-2591.39		-2589.64		-2674.57
$x_j = x_{max}$		1.73		0.95		1.87		1.64
M_{uyk}		-351.47		-2044.41		-367.64		-2062.74
M_{uyl}		475.93		2.93		470.27		2.46
M_{uym}		253.77		0		251.06		0
M_{uyn}		638.04		634.01		896.05		886.21
V_{uxo}	915.25	427.44	1118.64	104.45	1101.06	411.04	1059.77	183.56
V_{uxb}	268.38	-285.34	268.38	-311.36	268.38	-109.31	268.38	-149.16
V_{uxd}	268.38	-657.58	268.38	-693.56	268.38	-404.61	268.38	-454.16
V_{uxp}	828.09	-758.55	1118.64	-682.66	1156.11	-485.88	1236.39	-1016.25
V_{uxq}	828.09	100.33	1118.64	0	1156.11	0	1236.39	0
V_{uxr}	958.84	777.83	1413.02	882.74	1211.16	671.65	1413.02	870.57
V_{uys}	915.25	529.07	1118.64	502.99	1101.06	305.95	1059.77	389.94
V_{uyi}	268.38	-182.91	268.38	84.96	268.38	-212.06	268.38	56.15
V_{uyk}	268.38	-626.17	268.38	-288.39	268.38	-653.35	268.38	-316.90
V_{uyt}	958.84	-836.47	1413.02	-1175.86	1211.16	-765.89	1413.02	-1189.22
V_{uyu}	958.84	207.85	1413.02	0	1211.16	111.09	1413.02	0
V_{uyv}	828.09	518.48	1118.64	394.36	1156.11	611.76	1236.39	560.93
	1791.28		2773.06		2510.41		2773.06	
V_{up1}	3008.85	717.84	5329.38	673.33	4687.65	688.97	5329.38	678.41
	1159.06		1794.33		1624.38		1794.33	
	3059.56		2773.06		4360.18		2773.06	
V_{up2}	4634.56	1828.10	5329.38	1650.63	7225.00	1780.00	5329.38	1656.67
	1979.71		1794.33		2821.29		1794.33	
	3059.56		4839.60		2510.41		2773.06	
V_{up3}	4634.56	1523.73	8215.41	1458.85	4687.65	1548.97	5329.38	1456.55
	1979.71		3131.51		1624.38		1794.33	

Las cargas y momentos factorizados que actúan sobre cada una de las zapatas son: $P_{u1} = 860$ kN, $M_{ux1} = 212$ kN-m, $M_{uy1} = 284$ kN-m, $P_{u2} = 2020$ kN, $M_{ux2} = 356$ kN-m, $M_{uy2} = 500$ kN-m, $P_{u3} = 1720$ kN, $M_{ux3} = 284$ kN-m, $M_{uy3} = 428$ kN-m. Las cargas y momentos factorizados resultantes se obtienen por las ecuaciones (22) a (24) de la parte 1.

Los momentos que actúan sobre cada eje se obtienen según sea el caso: Sustituyendo $y = y_s - c_y$ en la ecuación (9) se obtiene M_a . Sustituyendo $y = y_s - z_{1b}$ en la ecuación (9) o en la ecuación (7) se obtiene M_b .

Sustituyendo $y = y_c$ en la ecuación (7) (intervalo $y_s - b + z_{3b} \leq y \leq y_s - z_{1b}$) o en la ecuación (9) (intervalo $y_s - z_{1b} \leq y \leq y_s - c_y/2$) se obtiene M_c (y_c es el punto donde se ubica el momento máximo, y se obtiene derivando las dos ecuaciones e igualándolas a cero).

Sustituyendo $y = y_s - b + z_{3b}$ en la ecuación (7) o en la ecuación (5) se obtiene M_d . Sustituyendo $y = y_s - b + z_{3b}/2 + c_y/2$ (columna sin frontera) o $y = y_s - b + c_y$ (columna con frontera) en la ecuación (5) se obtiene M_e .

Sustituyendo $y = y_s - b + z_{3b}/2 - c_y/2$ (columna sin frontera) o $y = y_s - b$ (columna con frontera) en la ecuación (3) se obtiene M_f . Sustituyendo $y = y_s - c_y$ en la ecuación (11) se obtiene M_g . Sustituyendo $x = x_i - c_x$ en la ecuación (19) se obtiene M_h .

Sustituyendo $x = x_i - z_{1a}$ en la ecuación (19) o en la ecuación (17) se obtiene M_i . Sustituyendo $x = x_j$ en la ecuación (17) (intervalo $x_i - a + z_{2a} \leq x \leq x_i - z_{1a}$) o en la ecuación (19) (intervalo $x_i - z_{1a} \leq x \leq x_i - c_x/2$) se obtiene M_j (x_j es el punto donde se ubica el momento máximo, y se obtiene derivando las dos ecuaciones e igualándolas a cero).

Sustituyendo $x = x_i - a + z_{2a}$ en la ecuación (17) o en la ecuación (15) se obtiene M_k . Sustituyendo $x = x_i - a + z_{2a}/2 + c_x/2$ (columna sin frontera) o $x = x_i - a + c_x$ (columna con frontera) en la ecuación (15) se obtiene M_l . Sustituyendo $x = x_i - a + z_{2a}/2 - c_x/2$ (columna sin frontera) o $x = x_i - a$ (columna con frontera) en la ecuación (13) se obtiene M_m . Sustituyendo $x = x_i - c_x$ en la ecuación (21) se obtiene M_n .

Los cortantes por flexión que actúan sobre cada eje se obtienen según sea el caso: Sustituyendo $y = y_s - c_y - d$ en la ecuación (8) se

obtiene V_o . Sustituyendo $y = y_s - z_{1b}$ en la ecuación (8) o en la ecuación (6) se obtiene V_b .

Sustituyendo $y = y_s - b + z_{3b}$ en la ecuación (6) o en la ecuación (4) se obtiene V_d . Sustituyendo $y = y_s - b + z_{3b}/2 + c_y/2 + d$ (columna sin frontera) o $y = y_s - b + c_y + d$ (columna con frontera) en la ecuación (4) se obtiene V_p . Sustituyendo $y = y_s - b + z_{3b}/2 - c_y/2 - d$ (columna sin frontera) o $y = y_s - b$ (columna con frontera) en la ecuación (2) se obtiene V_q . Sustituyendo $y = y_s - c_y - d$ en la ecuación (10) se obtiene V_r .

Sustituyendo $x = x_i - c_x - d$ en la ecuación (18) se obtiene V_s . Sustituyendo $x = x_i - z_{1a}$ en la ecuación (18) o en la ecuación (16) se obtiene V_i . Sustituyendo $x = x_i - a + z_{2a}$ en la ecuación (16) o en la ecuación (14) se obtiene V_k .

Sustituyendo $x = x_i - a + z_{2a}/2 + c_x/2 + d$ (columna sin frontera) o $x = x_i - a + c_x + d$ (columna con frontera) en la ecuación (14) se obtiene V_t . Sustituyendo $x = x_i - a + z_{2a}/2 - c_x/2 - d$ (columna sin frontera) o $x = x_i - a$ (columna con frontera) en la ecuación (12) se obtiene V_u . Sustituyendo $x = x_i - c_x - d$ en la ecuación (20) se obtiene V_v .

Los cortantes por penetración que actúan sobre cada zapata se obtienen según sea el caso: Por la ecuación (22) para la zapata 1. Por la ecuación (23) para la columna no limitada en la dirección X, y por la ecuación (24) para la columna limitada en la dirección X para la zapata 2.

Por la ecuación (25) para la columna no limitada en la dirección Y, y por la ecuación (26) para la columna limitada en la dirección Y para la zapata 3.

La Tabla 2 muestra el peralte efectivo o profundidad efectiva de las zapatas "d_z", el peralte efectivo o profundidad efectiva de las vigas "d_v", los momentos, los cortantes por flexión y los cortantes por penetración que actúan sobre las tres zapatas, y los cortantes por flexión y los cortantes por penetración que resistente el concreto para los cuatro ejemplos.

La Tabla 2 muestra lo siguiente:

El peralte efectivo o profundidad efectiva mayor de las zapatas se presenta en los ejemplos 2 y 4, y el menor aparece en el ejemplo 1. El peralte efectivo o profundidad efectiva de las vigas son iguales en los cuatro ejemplos.

El momento resultante alrededor del eje X "M_{uxT}" mayor se presenta en el ejemplo 2, y el

Tabla 3. Áreas de acero de los 4 ejemplos

Concepto	Ejemplo							
	1		2		3		4	
	Necesario	Propuesto	Necesario	Propuesto	Necesario	Propuesto	Necesario	Propuesto
Viga 1								
A_{sxsp}	66.93	70.98	71.40	76.05	71.34	76.05	74.37	76.05
$A_{sxsmín}$	11.70	(14Ø1")	11.70	(15Ø1")	11.70	(15Ø1")	11.70	(15Ø1")
A_{sxip}	0	15.21	0	15.21	0	15.21	0	15.21
$A_{sximín}$	11.70	(3Ø1")	11.70	(3Ø1")	11.70	(3Ø1")	11.70	(3Ø1")
A_{vc}	1.98 (1Ø5/8") @ 23.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 21.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm	
A_{ve}	1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm	
Viga 2								
A_{sysp}	67.47	70.98	73.68	76.05	70.32	70.98	75.94	76.05
$A_{sysmín}$	11.70	(14Ø1")	11.70	(15Ø1")	11.70	(14Ø1")	11.70	(15Ø1")
A_{syip}	0	15.21	0	15.21	0	15.21	0	15.21
$A_{symín}$	11.70	(3Ø1")	11.70	(3Ø1")	11.70	(3Ø1")	11.70	(3Ø1")
A_{vc}	1.98 (1Ø5/8") @ 21.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 19.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 44.00 cm	
A_{ve}	1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm		1.98 (1Ø5/8") @ 58.00 cm	
Zapata 1								
A_{sx}	0	40.56	0	50.70	0	50.70	0	50.70
$A_{sxmín}$	39.90	(8Ø1")	48.77	(10Ø1")	48.00	(10Ø1")	46.20	(10Ø1")
A_{sy}	0	40.56	0	50.70	0	50.70	0	50.70
$A_{symín}$	39.90	(8Ø1")	48.77	(10Ø1")	48.00	(10Ø1")	46.20	(10Ø1")
Zapata 2								
A_{sx}	22.44	45.63	0.10	65.91	17.45	55.77	0.08	65.91
$A_{sxmín}$	41.80	(9Ø1")	61.60	(13Ø1")	52.80	(11Ø1")	61.60	(13Ø1")
A_{sy}	50.75	55.77	50.57	65.91	14.23	55.77	49.63	65.91
$A_{symín}$	41.80	(11Ø1")	61.60	(13Ø1")	52.80	(11Ø1")	61.60	(13Ø1")
Zapata 3								
A_{sx}	30.36	40.56	22.08	50.70	0	50.70	0	55.77
$A_{sxmín}$	36.10	(8Ø1")	48.77	(10Ø1")	50.40	(10Ø1")	53.90	(11Ø1")
A_{sy}	14.23	40.56	10.21	50.70	33.58	50.70	30.97	55.77
$A_{symín}$	36.10	(8Ø1")	48.77	(10Ø1")	50.40	(10Ø1")	53.90	(11Ø1")

menor aparece en el ejemplo 3 (valor absoluto). El momento resultante alrededor del eje Y " M_{uyT} " mayor se presenta en los ejemplos 1 y 3, y el menor aparece en el ejemplo 2 (valor absoluto).

Las áreas de acero de refuerzo sobre las zapatas combinadas de correa en esquina se obtienen como sigue:

1. Viga 1 (viga que une la zapata 1 y la zapata 2): Acero longitudinal superior principal " A_{sxsp} " se diseña por el momento M_{uyj} . Acero longitudinal inferior principal " A_{sxip} " se diseña con el momento positivo mayor de los momentos M_{uyj} y M_{uyk} , pero en ningún caso debe ser inferior al acero mínimo " A_{smin} " [25]. Acero transversal

se diseña por el cortante V_{uyi} o V_{uyk} el que resulte mayor, estos estribos se colocan entre los ejes i y j , y en los extremos de la viga se coloca acero mínimo por cortante " A_{vmin} " [25].

2. Viga 2 (viga que une la zapata 1 y la zapata 3): Acero longitudinal superior principal " A_{sysp} " se diseña por el momento M_{uxc} . Acero longitudinal inferior principal " A_{syip} " se diseña con el momento positivo mayor de los momentos M_{uxb} y M_{uxd} , pero en ningún caso debe ser inferior al acero mínimo " A_{smin} " [25]. Acero transversal se diseña por el cortante V_{uxb} o V_{uxd} el que resulte mayor, estos estribos se colocan entre los ejes b y d , y en los extremos de la viga se coloca acero mínimo por cortante " A_{vmin} " [25].
3. Zapata 1: Acero inferior en la dirección X " A_{sx} " se diseña por los momentos M_{uyh} y M_{uyi} el que resulte mayor. Acero inferior en la dirección Y " A_{sy} " se diseña por los momentos M_{uxa} y M_{uxb} el que resulte mayor. Si los momentos son negativos se consideran en las vigas, y se propone acero mínimo " A_{smin} " [25].
4. Zapata 2: Acero inferior en la dirección X " A_{sx} " se diseña por los momentos M_{uyj} y M_{uym} el que resulte mayor. Acero inferior en la dirección Y " A_{sy} " se diseña por el momento M_{uxg} . Si los momentos son negativos se consideran en las vigas, y se propone acero mínimo " A_{smin} " [25].
5. Zapata 3: Acero inferior en la dirección X " A_{sx} " se diseña por el momento M_{uyn} . Acero inferior en la dirección Y " A_{sy} " por los momentos M_{uxe} y M_{uxf} el que resulte mayor. Si los momentos son negativos se consideran en las vigas, y se propone acero mínimo " A_{smin} " [25].

La Tabla 3 muestra las áreas de acero finales para las tres zapatas y las dos vigas para los cuatro ejemplos.

4. Resultados

La Tabla 1 muestra lo siguiente:

El momento de inercia sobre el eje X mayor se presenta en el ejemplo 1, y el menor aparece en el ejemplo 4. El momento de inercia sobre el eje Y mayor se presenta en el ejemplo 1, y el menor aparece en el ejemplo 4.

El momento resultante sobre el eje X mayor aparece en el ejemplo 2, y el menor se presenta en el ejemplo 1 (valor absoluto).

El momento resultante sobre el eje Y mayor aparece en el ejemplo 3, y el menor se presenta en el ejemplo 4. La distancia " a " mayor se presenta en los ejemplos 1 y 3, y el menor aparece en los ejemplos 2 y 4.

La distancia " b " mayor aparece en los ejemplos 1 y 2, y el menor se presenta en los ejemplos 3 y 4.

La distancia X del centro de gravedad del lado izquierdo " x_i " mayor se presenta en los ejemplos 1 y 3, y el menor aparece en el ejemplo 4.

La distancia X del centro de gravedad del lado derecho " x_d " mayor aparece en los ejemplos 1 y 3, y el menor aparece en el ejemplo 2.

La distancia Y del centro de gravedad del lado superior " y_s " mayor se presenta en el ejemplo 2, y el menor aparece en el ejemplo 3.

La distancia Y del centro de gravedad del lado inferior " y_i " mayor aparece en el ejemplo 1, y el menor aparece en el ejemplo 4.

La dimensión " $z_{1a} = z_{1b}$ " mayor de la zapata 1 se presenta en el ejemplo 1, y la menor aparece en el ejemplo 4. La dimensión " $z_{2a} = z_{2b}$ " mayor de la zapata 2 se presenta en los ejemplos 2 y 4, y la menor aparece en los ejemplos 1 y 3.

La dimensión " $z_{3a} = z_{3b}$ " mayor de la zapata 3 se presenta en los ejemplos 3 y 4, y la menor aparece en los ejemplos 1 y 2.

El esfuerzo máximo y el esfuerzo mínimo se presenta en $\sigma_{max} = \sigma_1$ y $\sigma_{min} = \sigma_{14}$ (ejemplo 1), $\sigma_{max} = \sigma_1$ y $\sigma_{min} = \sigma_{20}$ (ejemplo 2), $\sigma_{max} = \sigma_{19}$ y $\sigma_{min} = \sigma_4$ (ejemplo 3), $\sigma_{max} = \sigma_1$ y $\sigma_{min} = \sigma_{20}$ (ejemplo 4). El área mínima " A_{min} " mayor se presenta en el ejemplo 3, y la menor aparece en el ejemplo 2.

La Tabla 2 muestra lo siguiente:

El peralte efectivo o profundidad efectiva mayor de las zapatas se presenta en los ejemplos 2 y 4, y el menor aparece en el ejemplo 1.

El peralte efectivo o profundidad efectiva de las vigas son iguales en los cuatro ejemplos.

El momento resultante alrededor del eje X " M_{uxT} " mayor se presenta en el ejemplo 2, y el menor aparece en el ejemplo 3 (valor absoluto).

El momento resultante alrededor del eje Y " M_{uyT} " mayor se presenta en los ejemplos 1 y 3, y el menor aparece en el ejemplo 2 (valor absoluto).

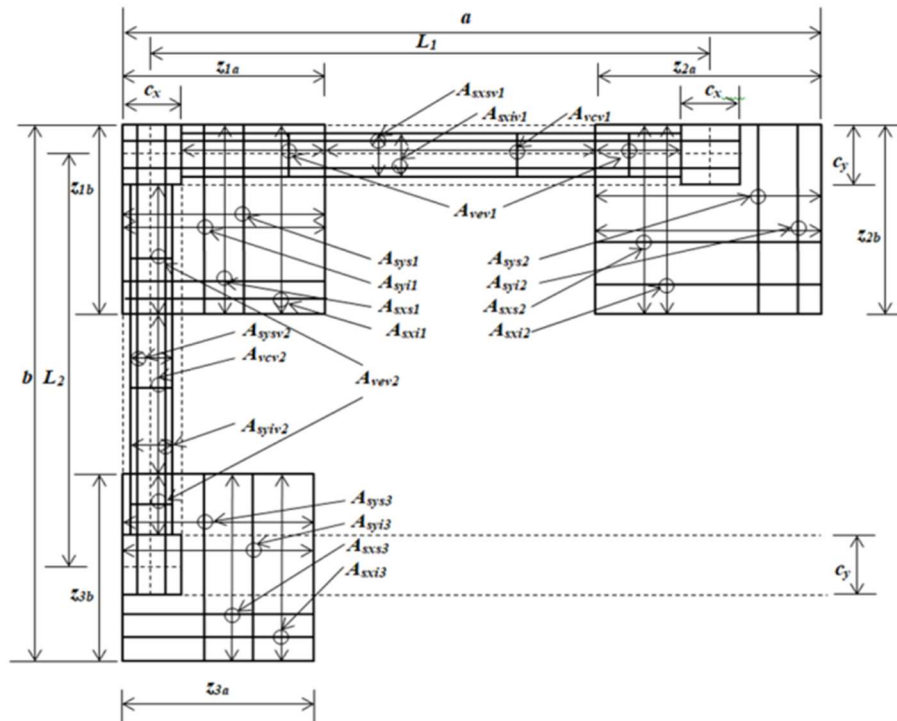


Fig. 5. Acero de refuerzo de la zapata combinada de correa en esquina (las tres zapatas y las dos vigas)

El momento máximo sobre el eje X " M_{uxc} " mayor (valor absoluto) se presenta en el ejemplo 4, y el menor aparece en el ejemplo 1 (valor absoluto).

El momento máximo sobre el eje Y " M_{uyj} " mayor (valor absoluto) se presenta en el ejemplo 4, y el menor aparece en el ejemplo 1 (valor absoluto).

Los cortantes por flexión que actúan cumplen para todos los ejemplos con los permitidos por el concreto, con excepción de los cortantes por flexión " V_{uxb} y V_{uxd} " (viga 2), y " V_{uyi} y V_{uyj} " (viga 1), porque las vigas admiten acero de refuerzo para soportar el cortante excedente por el concreto.

Los cortantes por penetración que actúan cumplen para todos los ejemplos con los permitidos por el concreto, también se observa que el cortante por penetración que rige para el ejemplo 1 es " V_{up2} ", para el ejemplo 2 es " V_{up2} ", para el ejemplo 3 es " V_{up3} ", y para el ejemplo 4 es " V_{up2} ".

La Tabla 3 muestra lo siguiente:

1. Viga 1 (viga que une la zapata 1 y la zapata 2): Acero longitudinal superior principal " A_{sxsp} "

mayor se presenta en los ejemplos 2, 3 y 4, y el menor aparece en el ejemplo 1. Acero longitudinal inferior principal " A_{sxip} " se presenta el mismo para los cuatro ejemplos y se diseña con el mínimo ya que no hay momentos positivos. Acero transversal en la parte central " A_{vc} " mayor se presenta en el ejemplo 3 (separación mínima), y el menor aparece en los ejemplos 2 y 4 (separación máxima). Acero transversal en los extremos " A_{ve} " se propone acero mínimo " A_{vmin} " [25], porque el cortante por flexión lo soporta el concreto.

2. Viga 2 (viga que une la zapata 1 y la zapata 3): Acero longitudinal superior principal " A_{sysp} " mayor se presenta en los ejemplos 2 y 4, y el menor aparece en los ejemplos 1 y 3. Acero longitudinal inferior principal " A_{syip} " se presenta el mismo para los cuatro ejemplos y se diseña con el mínimo ya que no hay momentos positivos. Acero transversal en la parte central " A_{vc} " mayor se presenta en el ejemplo 2 (separación mínima), y el menor aparece en el ejemplo 3 (separación máxima). Acero

transversal en los extremos " A_{ve} " se propone acero mínimo " A_{vmin} " [25], porque el cortante por flexión lo soporta el concreto.

3. Zapata 1: Acero inferior en la dirección X " A_{sx} " mayor se presenta en los ejemplos 2, 3 y 4, y el menor aparece en el ejemplo 1. Para los cuatro ejemplos rige el acero mínimo " A_{smin} " [25], porque no hay momentos positivos. Acero inferior en la dirección Y " A_{sy} " ocurre lo mismo que en la dirección X. Acero superior en las direcciones X e Y se proporciona acero mínimo " A_{smin} " [25].
4. Zapata 2: Acero inferior en la dirección X " A_{sx} " mayor se presenta en los ejemplos 2 y 4, y el menor aparece en el ejemplo 1. Para los cuatro ejemplos rige el acero mínimo " A_{smin} " [25]. Acero inferior en la dirección Y " A_{sy} " mayor se presenta en los ejemplos 2 y 4, y el menor aparece en los ejemplos 1 y 3. Acero superior en las direcciones X e Y se proporciona acero mínimo " A_{smin} " [25].
5. Zapata 3: Acero inferior en la dirección X " A_{sx} " mayor se presenta en el ejemplo 4, y el menor aparece en el ejemplo 1. Para los cuatro ejemplos rige el acero mínimo " A_{smin} " [25]. Acero inferior en la dirección Y " A_{sy} " mayor se presenta en el ejemplo 4, y el menor aparece en el ejemplo 1. Para los cuatro ejemplos rige el acero mínimo " A_{smin} " [25]. Acero superior en las direcciones X e Y se proporciona acero mínimo " A_{smin} " [25].

La Figura 5 muestra en detalle el acero de refuerzo de una manera general para la zapata combinada de correa en esquina.

5. Conclusiones

La cimentación de una construcción o edificación es la parte principal para transmitir las cargas de columna o pared al terreno debajo de la estructura. El modelo propuesto presentado en este trabajo de investigación para el diseño de zapatas combinadas de correa en esquina asume que el suelo de soporte es elástico y las zapatas son perfectamente rígidas, que cumplen con las ecuaciones de la flexión biaxial, es decir, la presión del suelo sobre la zapata varía linealmente.

El modelo propuesto presentado en este trabajo para diseño estructural de zapatas combinadas de correa en esquina bajo una carga concéntrica y dos momentos ortogonales en cada columna, también se puede usar para los otros casos: 1) Zapatas bajo una carga concéntrica en cada columna, es decir, todos los momentos son cero; 2) Zapatas bajo una carga concéntrica y un momento en una dirección en cada columna, es decir, los momentos alrededor del eje X o Y son cero.

Las ventajas de las zapatas combinadas de correa son:

1. Ayuda a distribuir la carga de manera más uniforme y transfiere el momento a la zapata adyacente.
2. El empleo de zapatas combinadas de correa puede ser usadas cuando el espacio entre columnas es largo y la zapata combinada regular como la rectangular, trapezoidal o en forma de T no es práctica debido a las excavaciones a gran escala necesarias.

Las principales conclusiones son:

1. El espesor para las zapatas combinadas de correa en esquina es gobernado por el cortante por penetración, y las zapatas combinadas de esquina se rigen por el cortante por flexión.
2. El modelo propuesto para obtener el diseño de zapatas combinadas de correa en esquina se puede usar para el diseño de zapatas combinadas de esquina propuesto por Luévanos-Rojas *et al.* [23].
3. El modelo propuesto se puede utilizar para obtener el diseño de zapatas combinadas de correa en esquina para dos, tres y cuatro líneas de propiedad de lados restringidos (ver Tablas 1).
4. El modelo propuesto se apega más a las condiciones reales con respecto al diseño tradicional, porque el modelo propuesto considera la presión lineal del suelo y el diseño tradicional toma en cuenta una presión uniforme y esta es la máxima en toda la superficie.
5. El modelo propuesto no se limita, mientras que el diseño tradicional toma en cuenta que la fuerza resultante de todas las cargas y

momentos aplicados coincide con la posición del centro geométrico de la zapata, es decir, la presión es uniforme (presión máxima) en todos los puntos de contacto.

Por lo tanto, el modelo propuesto en este trabajo de investigación para obtener el diseño de zapatas combinadas de correa en esquina se puede aplicar a zapatas combinadas de esquina, simplemente considerando los anchos en dirección X de las zapatas 1 y 3 iguales, y los anchos en dirección Y de las zapatas 1 y 2 iguales.

Las sugerencias para los siguientes trabajos de investigación pueden ser:

1. Diseño de unas zapatas combinadas de correa en esquina apoyadas sobre suelos totalmente arcillosos (suelos cohesivos) o suelos totalmente arenosos (suelos granulares), es decir, el diagrama de presión del suelo sobre la zapata es parabólico.
2. Diseño de una cimentación completa para una edificación usando zapatas combinadas de correa.
3. Diseño de una cimentación completa para una edificación usando una losa de cimentación.

Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias de la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila. Los autores también agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. El estudiante de doctorado Marina Lourdes Garcia Graciano (CVU: 567040) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico.

Referencias

1. **Amornfa, K., Phienwej, N., Kitpayuck, P. (2012).** Current practice on foundation design of high-rise buildings in Bangkok, Thailand. *Lowland Technology International*, Vol. 14, No. 2, pp. 70–83.
2. **Luévanos-Rojas, A., Faudoa-Herrera, J. G., Andrade-Vallejo, R. A., Cano-Alvarez M. A. (2013).** Design of isolated footings of rectangular form using a new model. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 9, No. 10, pp. 4001–4022.
3. **Luévanos-Rojas, A. (2014).** Design of isolated footings of circular form using a new model. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 52, No. 4, pp. 767–786. DOI: 10.12989/sem.2014.52.4.767.
4. **Luévanos-Rojas, A. (2016).** A comparative study for the design of rectangular and circular isolated footings using new models. *Dyna-Colombia*, Vol. 83, No. 196, No. 149–158. DOI: 10.15446/dyna.v83n196.51056.
5. **Abdrabbo, F., Mahmoud, Z. I., Ebrahim, M. (2016).** Structural design of isolated column footings. *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 55, No. 3, pp. 2665–2678. DOI: 10.1016/j.aej.2016.06.016.
6. **Kammari, S., Venkatarathnam, G. (2016).** Analysis and design of isolated and combined footing. *International Journal & Magazine of Engineering, Technology, Management and Research*, Vol. 3, No. 5, pp. 540–546.
7. **Balachandar, S., Narendra Prasad, D. (2017).** Analysis and design of various types of isolated footings. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, Vol. 6, No. 3, pp. 3980–3986.
8. **El-kady, M. S., Badrawi, E. F. (2017).** Performance of isolated and folded footings. *Journal of Computational Design and Engineering*, Vol. 4, pp. 150–157. DOI: 10.1016/j.jcde.2016.09.001.
9. **López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A., Medina-Elizondo, M. (2017).** A new mathematical model for design of square isolated footings for general case. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 13, No. 4 pp. 1149–1168.
10. **Magade, S. B., Ingle, R. K. (2019).** Numerical method for analysis and design of isolated square footing under concentric loading. *International Journal of Advanced Structural*

- Engineering, Vol. 11, pp. 9–20. DOI: 10.1007/s40091-018-0211-3.
11. **Tiwari, R. K., Dhapekar, N. K. (2020).** Design and analysis of isolated footings using RCF Software. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, Vol. 7, No. 8, pp. 1349–1352.
 12. **Rawat, S., Mittal, R. K., Muthukumar, G. (2020).** Isolated rectangular footings under biaxial bending: a critical appraisal and simplified analysis methodology. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, Vol. 25, No. 3. DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000471.
 13. **Al-Ansari, M. S., Afzal, M. S. (2021).** Structural analysis and design of irregular shaped footings subjected to eccentric loading. *Engineering Reports*, Vol. 3, No. 1. pp. e12283. DOI:10.1002/eng2.12283.
 14. **Kramrisch, F., Rogers, P. (1961).** Simplified design of combined footings. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol. 87, No. 5.
 15. **Luévanos-Rojas, A. (2014).** Design of boundary combined footings of rectangular shape using a new model. *Dyna-Colombia*, Vol. 81, No. 188, pp. 199–208. DOI: 10.15446/dyna.v81n188.41800.
 16. **Luévanos-Rojas, A. (2015).** Design of boundary combined footings of trapezoidal form using a new model. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 56, No. 5, pp. 745–765. DOI: 10.12989/sem.2015.56.5.745.
 17. **Luévanos-Rojas, A. (2016).** A new model for the design of rectangular combined boundary footings with two restricted opposite sides. *Revista ALCONPAT*, Vol. 6, No. 2, pp. 172–187. DOI: 10.21041/ra.v6i2.137.
 18. **Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J. D., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2017).** A comparative study for design of boundary combined footings of trapezoidal and rectangular forms using new models. *Coupled Systems Mechanics*, Vol. 6, No. 4, pp. 417–437. DOI: 10.12989/csm.2017.6.4.417.
 19. **Maheshwari, P. (2017).** Analysis of combined footings on extensible geosynthetic-stone column improved ground. *Journal of Civil Engineering, Science and Technology*, Vol. 8, No. 2, pp. 57–71. DOI: 10.33736/jcest.439.2017.
 20. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2018).** A new model for T-shaped combined footings Part II: Mathematical model for design. *Geomechanics and Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 61–69. DOI: 10.12989/gae.2018.14.1.061.
 21. **Yáñez-Palafox, J. A., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M. (2019).** Modeling for the strap combined footings Part II: Mathematical model for design. *Steel and Composite Structures*, Vol. 30, No. 2, pp. 109–121. DOI: 10.12989/scs.2019.30.2.109.
 22. **Pandey, S., Rai, A. (2020).** Comparative study of different types of combined footing for small residential building. *Journal of Civil Engineering and Environmental Technology*, Vol. 7, No. 2, pp. 221–225.
 23. **Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., Farías Montemayor, O. M. (2020).** Un modelo analítico para el diseño de zapatas combinadas de esquina. *Revista ALCONPAT*, Vol. 10, No. 3, pp. 317–335. DOI: 10.21041/ra.v10i3.432.
 24. **Naik, B., Nighojkar, S., Pendharkar, U. (2020).** Design of skirted rectangular combined footing with vertical skirt all around the four edges. *International Journal of Creative Research Thoughts (IJCRT)*, Vol. 8, No. 10, pp. 674–680.
 25. **American Concrete Institute (ACI). (2019).** Building code requirements for structural concrete and commentary. New York, U.S.A.

*Article received on 17/11/2021; accepted on 25/07/2022.
Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.*