

# Costo mínimo para trabes rectangulares de concreto reforzado con cartelas parabólicas

Edith García Canales, Arnulfo Luévanos Rojas,  
Sandra López Chavarría, Manuel Medina Elizondo

Universidad Autónoma de Coahuila,  
Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria,  
México

{gc\_edith, arnulfol\_2007, sandylopez5}@hotmail.com,  
drmanuelmedina@yahoo.com.mx

**Resumen.** El objetivo de esta investigación es presentar un modelo matemático para el diseño óptimo de trabes de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas bajo el criterio de costo mínimo tomando en cuenta el costo del concreto y costo de acero de refuerzo, y considerando las ecuaciones del reglamento (ACI 318S-19). Este modelo presenta las ecuaciones para dos tipos de cargas: Carga uniformemente distribuida y Carga concentrada localizada en cualquier parte de la trabe. Dos ejemplos han sido desarrollados por el modelo propuesto para ambos casos. Los resultados muestran que las trabes prismáticas para los dos casos tienen un costo total, un volumen total y un peso total mayor con respecto a las trabes no prismáticas. Por lo tanto, las trabes no prismáticas son más económicas, tienen menos volumen y también tienen menos peso con respecto a las trabes prismáticas.

**Palabras clave.** Diseño óptimo, cartelas parabólicas, costo mínimo, trabes de sección transversal rectangular, carga uniformemente distribuida y carga concentrada.

## Minimum Cost for Reinforced Concrete Rectangular Beams with Parabolic Haunches

**Abstract.** Objective of this research is to present a mathematical model for optimal design of rectangular cross-section beams with parabolic haunches under the criterion of minimum cost taking into account the concrete cost and reinforcing steel cost, and considering the equations of the code (ACI 318S-19). This model presents the equations for two types of loads: uniformly distributed load and concentrated load

located anywhere on the beam. Two examples have been developed by the proposed model for both cases. The results show that the prismatic beams for the two cases have a total cost, a total volume and total weight greater with respect to the non-prismatic beams. Then, the non-prismatic beams are more economic, have less volume and also have less weight with respect to prismatic beams.

**Keywords.** Optimal design, parabolic haunches, minimum cost, rectangular cross-section beams, uniformly distributed load and concentrated load.

## 1. Introducción

Las trabes con cartelas parabólicas o rectas de concreto reforzado se han empleado en diferentes tipos de estructuras como edificios y puentes. Las trabes con cartelas (vigas no prismáticas) cuentan con las siguientes ventajas sobre las vigas prismáticas: a) La rigidez aumenta, b) Los desplazamientos relativos se reducen, c) El concreto y el acero de refuerzo se usan de manera más eficiente, d) Reducen el peso, optimizan la resistencia y la estabilidad, e) Las formas arquitectónicas son más atractivas, f) Facilitan la colocación de instalaciones eléctricas, hidráulicas, aire acondicionado y sanitarias en el edificio.

La práctica común de diseño es proporcionar el refuerzo necesario por flexión en los extremos de las trabes con cartelas (parte superior), extendiéndolo a una distancia igual a la longitud de anclaje y desarrollo requerida para garantizar su momento resistente nominal en los extremos.

Por lo tanto, el refuerzo longitudinal es cortado usualmente en la zona de la cartela, dejando a la zona de transición entre la cartela y la sección prismática intermedia con un refuerzo muy inferior. Esta práctica se basa en los diagramas de momentos flexionantes de traveses con cartelas doblemente empotradas ante cargas gravitacionales y vivas, donde los momentos flexionantes se incrementan en los extremos y disminuyen a lo largo del eje longitudinal de la viga [1]. Esta solución es bien conocida desde hace bastante tiempo.

Los modelos matemáticos de traveses con cartelas han despertado gran interés entre los investigadores de análisis estructural [1-15]. Pero estos documentos presentan solamente los factores para momentos de empotramiento, y los factores de transporte y de rigidez empleados en los métodos matriciales de análisis estructural.

Los artículos más importantes para diseño óptimo de traveses rectangulares de concreto reforzado son: Optimización de la forma de los miembros a flexión de concreto reforzado [16]; Análisis de sensibilidad y curvas de diseño óptimas para el diseño de costo mínimo de traveses de concreto simple y doblemente reforzadas [17]; Optimización de costos de traveses de concreto simple y doblemente reforzadas con EC2-2001 [18]; Optimización de costos en edificios de losas planas de concreto reforzado [19]; Diseño de secciones de trabe, columna y muro de concreto reforzadas óptimamente [20].

Optimización de secciones transversales de pórticos de concreto armado mediante uso de la técnica de programación cuadrática secuencial SQP [21]; Optimización de costos de la sección de trabe rectangular doblemente reforzada [22]; Diseño óptimo de traveses continuos de concreto armado usando redes neuronales [23]; Experimentación numérica para el diseño óptimo de traveses rectangulares de concreto reforzado para secciones simplemente reforzadas [24]; Diseño óptimo para las traveses de concreto reforzado sometidas a flexión, costo de diseño integral vs resistencia [25]; Optimización para el diseño de traveses de concreto reforzado [26]; Optimización para traveses rectangulares de concreto simplemente reforzadas [27];

Un estudio sobre el diseño estructural de costo optimizado de traveses de concreto reforzado

[28]; Optimización para traveses de concreto reforzado rectangulares con ejemplos numéricos [29].

Por lo tanto, la revisión de la literatura muestra claramente que no existe una relación cercana con el tema para el diseño óptimo de traveses de concreto reforzado para secciones rectangulares con cartelas parabólicas que se aborda en este documento.

Este documento muestra un modelo para el diseño óptimo de traveses de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas (Caso general) empleando el criterio de costo mínimo considerando el costo del concreto y el costo del acero de refuerzo, y tomando en cuenta las ecuaciones del reglamento [30] que es la aportación de esta investigación. Dos ejemplos se desarrollan por el modelo propuesto, uno para carga uniformemente distribuida y otro para carga concentrada mostrando la mejor solución para cada caso, y las ventajas de las traveses no prismáticas se presentan sobre las traveses prismáticas, y los dos ejemplos se muestran por medio de experimentos numéricos.

## 2 Materiales y métodos

La Figura 1 muestra una trabe de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas sometida a dos tipos diferentes de cargas y momentos en sus extremos que resultan del análisis estructural.

Las ecuaciones para obtener las fuerzas cortantes " $V_A$  y  $V_B$ ", el momento máximo positivo " $M_m$ ", el momento a una distancia  $x$  a partir del apoyo A " $M_x$ ", la distancia de la cartela " $L_1$ ", la distancia de la cartela " $L_2$ ", la distancia donde se presenta  $M_m$  " $x_m$ " de los dos tipos de traveses se muestran a continuación:

Carga uniformemente distribuida:

$$V_A = \frac{wL}{2} + \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L}, \quad (1)$$

$$V_B = \frac{wL}{2} - \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L}, \quad (2)$$

$$M_m = \frac{V_A^2}{2w} - M_{AB}, \quad (3)$$

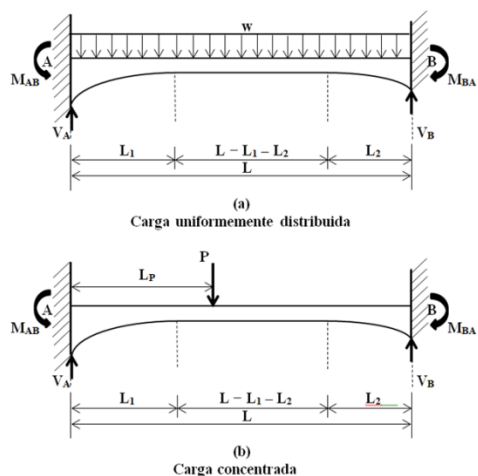


Fig. 1. Trabe rectangular con cartelas parabólicas

$$M_x = V_A x - M_{AB} - \frac{w x^2}{2}, \quad (4)$$

$$L_1 = \frac{V_A - \sqrt{V_A^2 - 2wM_{AB}}}{w}, \quad (5)$$

$$L_2 = L - \frac{V_A + \sqrt{V_A^2 - 2wM_{AB}}}{w}, \quad (6)$$

$$x_m = \frac{V_A}{w}. \quad (7)$$

Carga concentrada localizada en cualquier punto de la trabe:

$$V_A = \frac{P(L - L_P)}{L} + \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L}, \quad (8)$$

$$V_B = \frac{PL_P}{L} - \frac{M_{AB} - M_{BA}}{L}, \quad (9)$$

$$M_m = V_A L_P - M_{AB}, \quad (10)$$

$$\text{Para } 0 \leq x \leq L_P \\ M_x = V_A x - M_{AB}, \quad (11)$$

$$\text{Para } L_P \leq x \leq L \\ M_x = PL_P - (P - V_A)x - M_{AB}, \quad (12)$$

$$L_1 = \frac{M_{AB}}{V_A}, \quad (13)$$

$$L_2 = L - \frac{PL_P - M_{AB}}{P - V_A}, \quad (14)$$

$$x_m = L_P. \quad (15)$$

Las ecuaciones presentadas por el reglamento son [30]:

$$M_u = \phi_f b d^2 \rho f_y \left( 1 - \frac{0.59 \rho f_y}{f'_c} \right), \quad (16)$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd}, \quad (17)$$

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left( \frac{600}{600 + f_y} \right), \quad (18)$$

$$0.65 \leq \beta_1 = \left( 1.05 - \frac{f'_c}{140} \right) \leq 0.85, \quad (19)$$

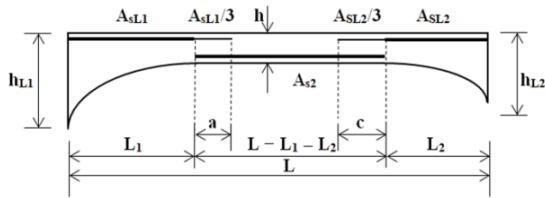
$$\rho_{max} = 0.75 \rho_b, \quad (20)$$

$$\rho_{min} = \begin{cases} \frac{0.25 \sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{1.4}{f_y} \end{cases} \text{ (el mayor de los dos)}, \quad (21)$$

$$A_{st} - A_{sc} = \rho b d, \quad (22)$$

donde:  $M_u$  es el momento último factorizado,  $\phi_f$  es el factor de reducción de resistencia por flexión y su valor es 0.90,  $b$  es la base de la sección rectangular,  $d$  es el peralte efectivo,  $A_s$  es el área de acero en tensión,  $\rho$  es el porcentaje de acero de refuerzo y se obtiene  $A_s/bd$ ,  $\beta_1$  es el factor que relaciona la profundidad del bloque de esfuerzo rectangular equivalente de compresión a la profundidad del eje neutro,  $f_y$  es el límite de elasticidad especificado del acero de refuerzo,  $f'_c$  es la resistencia a compresión especificada a los 28 días,  $M_n$  es el momento flexionante nominal.

Algunas especificaciones del reglamento mencionan lo siguiente [30]: Por lo menos 1/3 del refuerzo total por tracción en el apoyo proporcionado para resistir momento negativo debe tener una longitud embebida más allá del punto de inflexión, no menor que  $d$ ,  $12d$  o  $L/16$ , la que sea mayor.



**Fig. 2.** Acero de refuerzo para trabe con cartelas parabólicas

La Figura 2 muestra el perfil de la trabe para observar las dimensiones y el acero de refuerzo en forma general.

La ecuación del costo total de la trabe con cartelas parabólicas  $C_t$  se presenta en función del costo del concreto por unidad de volumen  $C_c$  más el costo del acero de refuerzo por unidad de volumen  $C_s$ . El costo total de la trabe es:

$$C_t = C_c V_c + C_s V_s, \quad (23)$$

dónde  $V_c$  y  $V_s$  son los volúmenes de concreto y acero de refuerzo, respectivamente.

El volumen del acero de refuerzo es:

$$V_s = \frac{A_{sL1}(3L_1 + a)}{3} + A_{s2}(L - L_1 - L_2) + \frac{A_{sL2}(3L_2 + c)}{3}, \quad (24)$$

El volumen de concreto es:

$$V_c = b \left[ hL + \frac{L_1(h_{L1} - h)}{3} + \frac{L_2(h_{L2} - h)}{3} \right] - V_s, \quad (25)$$

dónde:  $A_{sL1}$  es el área de acero de refuerzo en la cartela del apoyo A,  $A_{s2}$  es el área de acero de refuerzo en la parte central,  $A_{sL2}$  es el área de acero de refuerzo en la cartela del apoyo B,  $h_{L1}$  es la altura de la trabe en el apoyo A,  $h$  es la altura de la trabe en la parte central,  $h_{L2}$  es la altura de la trabe en el apoyo B,  $a$  es la distancia proporcionada por el reglamento [30] ( $d$ ,  $12d_b$  o  $L/16$ , la que sea mayor) para el apoyo A,  $c$  es la distancia proporcionada por el reglamento [30] ( $d$ ,  $12d_b$  o  $L/16$ , la que sea mayor) para el apoyo B.

Las alturas de la trabe en los tres tramos en función de sus peraltes efectivos " $d_{L1}$ ,  $d$  y  $d_{L2}$ ", y el recubrimiento " $r$ " se obtienen como sigue:

$$h_{L1} = d_{L1} + r, \quad (26)$$

$$h = d + r, \quad (27)$$

$$h_{L2} = d_{L2} + r. \quad (28)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (26, 27) y (28) en la ecuación (25) se obtiene:

$$V_c = b \left[ (d + r)L + \frac{L_1(d_{L1} - d)}{3} + \frac{L_2(d_{L2} - d)}{3} \right] - V_s. \quad (29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (24, 29) en la ecuación (23) se obtiene la ecuación general del costo total:

$$C_t = C_c \left\{ b \left[ (d + r)L + \frac{L_1(d_{L1} - d)}{3} + \frac{L_2(d_{L2} - d)}{3} \right] - V_s \right\} + C_s V_s. \quad (30)$$

Sustituyendo  $\alpha = C_s/C_c \rightarrow C_s = \alpha C_c$  en la ecuación (30) y la función objetivo se obtiene como sigue:

$$C_t = C_c \left\{ b \left[ (d + r)L + \frac{L_1(d_{L1} - d)}{3} + \frac{L_2(d_{L2} - d)}{3} \right] + (\alpha - 1)V_s \right\}. \quad (31)$$

Las funciones de restricciones se presentan en forma general como sigue:

$$\frac{M_{AB}}{\phi_f f_y} = d_{L1} A_{sL1} \left( 1 - \frac{0.59 \rho_{L1} f_y}{f'_c} \right), \quad (32)$$

$$\frac{M_m}{\phi_f f_y} = d A_{s2} \left( 1 - \frac{0.59 \rho f_y}{f'_c} \right), \quad (33)$$

$$\frac{M_{BA}}{\phi_f f_y} = d_{L2} A_{sL2} \left( 1 - \frac{0.59 \rho_{L2} f_y}{f'_c} \right), \quad (34)$$

$$\rho_{L1}, \rho, \rho_{L2} \leq 0.75 \left[ \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left( \frac{600}{600 + f_y} \right) \right], \quad (35)$$

$$\rho_{L1}, \rho, \rho_{L2} \geq \begin{cases} \frac{0.25 \sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{1.4}{f_y} \end{cases}, \quad (36)$$

$$A_{sL1} = \rho_{L1} b d_{L1}, \quad (37)$$

$$A_{s2} = \rho b d, \quad (38)$$

$$A_{sL2} = \rho_{L2} b d_{L2}. \quad (39)$$

Los resultados deben ser no negativos.

El volumen total de la viga  $V_t$  se obtiene como sigue:

$$V_t = b \left[ (d+r)L + \frac{L_1(d_{L1}-d)}{3} + \frac{L_2(d_{L2}-d)}{3} \right]. \quad (40)$$

El peso total de la viga  $W_t$  se encuentra de la siguiente manera:

$$W_t = W_s V_s + W_c V_c, \quad (41)$$

dónde  $W_s$  es el peso del acero de refuerzo por unidad de volumen,  $W_c$  es el peso del concreto por unidad de volumen.

Sustituyendo  $\kappa = W_s/W_c$  en la ecuación (41), y el peso total de la viga se presenta como sigue:

$$W_t = \kappa W_c V_s + W_c V_c. \quad (42)$$

### 3 Experimentos numéricos

En esta sección se presentan dos ejemplos numéricos para validar el modelo propuesto. El ejemplo 1 muestra el diseño de una trabe sometida a una carga uniformemente distribuida. El ejemplo 2 presenta el diseño de una trabe sometida a una carga concentrada. Para ambos ejemplos se usa el software MAPLE-15 para obtener la solución óptima, y también se presentan experimentos numéricos para cada ejemplo fijando ciertos parámetros.

**Ejemplo 1.** Diseñar una trabe sometida a una carga uniformemente distribuida con cartelas parabólicas. Los datos básicos son:  $L = 10.00$  m,  $w = 100$  kN/m,  $M_{AB} = 800$  kN-m,  $M_{BA} = 1000$  kN-m,  $f'_c = 28$  MPa,  $f_y = 420$  MPa y  $\alpha = 85$ . De acuerdo con el reglamento se considera  $r = 4$  cm,  $a = d_{L1}$ ,  $c = d_{L2}$ .

Sustituyendo  $L = 10.00$  m,  $w = 100$  kN/m,  $M_{AB} = 800$  kN-m,  $M_{BA} = 1000$  kN-m para una carga uniformemente distribuida en las ecuaciones (1) a (7) se obtienen:  $V_A = 480.00$  kN,  $V_B = 520.00$

kN,  $M_x = 480x - 800 - 50x^2$ ,  $L_1 = 2.15$  m,  $L_2 = 2.55$  m,  $x_m = 4.80$  m,  $M_m = 352.00$  kN-m.

Ahora sustituyendo esta información en las ecuaciones (31) a (39) se obtiene la función objetivo y las funciones de restricciones.

Función objetivo:

$$C_t = C_c [b(0.72d_{L1} + 8.43d + 0.85d_{L2} + 0.40) + 28A_{sL1}d_{L1} + 28A_{sL2}d_{L2} + 180.60A_{sL1} + 445.20A_s + 214.20A_{sL2}].$$

Sujeto a:

$$\frac{2}{945} = d_{L1} A_{sL1} \left( 1 - \frac{177\rho_{L1}}{20} \right),$$

$$\frac{22}{23625} = d A_{s2} \left( 1 - \frac{177\rho}{20} \right),$$

$$\frac{1}{378} = d_{L2} A_{sL2} \left( 1 - \frac{177\rho_{L2}}{20} \right),$$

$$\rho_{L1}, \rho, \rho_{L2} \leq 0.02125,$$

$$\rho_{L1}, \rho, \rho_{L2} \geq 0.00333,$$

$$A_{sL1} = \rho_{L1} b d_{L1},$$

$$A_{s2} = \rho b d,$$

$$A_{sL2} = \rho_{L2} b d_{L2}.$$

Los resultados se consideran no negativos. La Tabla 1 muestra los resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y los parámetros libres son:  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ ,  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ ,  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ .

La Tabla 2 muestra los resultados fijando  $b = 30$  cm, y  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2} = 0.02125, 0.01500, 0.01000, 0.00500, 0.00333$ , y los parámetros libres son:  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ ,  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ . La Tabla 3 muestra los resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y  $d_{L1} = d = d_{L2}$ , y los parámetros libres son:  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ ,  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ .

**Ejemplo 2.** Diseñar una trabe sometida a una carga concentrada con cartelas rectas. Los datos básicos son:  $L = 10.00$  m,  $P = 600$  kN,  $L_P = 4.00$  m,  $M_{AB} = 800$  kN-m,  $M_{BA} = 1000$  kN-m,  $f'_c = 28$  MPa,  $f_y = 420$  MPa y  $\alpha = 85$ . De acuerdo con el reglamento se considera  $r = 4$  cm,  $a = d_{L1}$ ,  $c = d_{L2}$ .

Tabla 1. Fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm

$b$ (cm)	$A_{sL1}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s2}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sL2}$ (cm <sup>2</sup> )	$d_{L1}$ (cm)	$d$ (cm)	$d_{L2}$ (cm)	$\rho_{L1}$	$\rho$	$\rho_{L2}$	$C_t$
30	15.53	21.29	17.33	140.86	50.03	157.76	0.00368	0.01418	0.00366	3.83889C <sub>c</sub>
40	17.95	24.58	20.03	121.88	43.33	136.51	0.00368	0.01418	0.00367	4.42134C <sub>c</sub>
50	20.08	27.48	22.41	108.95	38.75	122.03	0.00369	0.01418	0.00367	4.94805C <sub>c</sub>
60	22.01	30.10	24.56	99.42	35.38	111.36	0.00369	0.01418	0.00368	5.42808C <sub>c</sub>
70	23.78	32.51	26.53	92.01	32.75	103.06	0.00369	0.01418	0.00368	5.87272C <sub>c</sub>

Tabla 2. Fijando  $b = 30$  cm, y  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$  y  $\rho_{L2} = 0.02125, 0.01500, 0.01000, 0.00500, 0.00333$ 

$b$ (cm)	$A_{sL1}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s2}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sL2}$ (cm <sup>2</sup> )	$d_{L1}$ (cm)	$d$ (cm)	$d_{L2}$ (cm)	$\rho_{L1}$	$\rho$	$\rho_{L2}$	$C_t$
30	40.76	27.04	45.58	63.94	42.42	71.49	0.02125	0.02125	0.02125	4.59357C <sub>c</sub>
30	33.14	21.98	37.05	73.64	48.85	82.33	0.01500	0.01500	0.01500	4.24884C <sub>c</sub>
30	26.39	17.51	29.51	87.98	58.36	98.36	0.01000	0.01000	0.01000	4.07106C <sub>c</sub>
30	18.23	12.09	20.38	121.50	80.59	135.84	0.00500	0.00500	0.00500	4.21042C <sub>c</sub>
30	14.76	9.79	16.50	147.74	98.00	165.18	0.00333	0.00333	0.00333	4.53212C <sub>c</sub>

Tabla 3. Fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y  $d_{L1}$ ,  $d$  y  $d_{L2}$  son los mismos

$b$ (cm)	$A_{sL1}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s2}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sL2}$ (cm <sup>2</sup> )	$d_{L1}$ (cm)	$d$ (cm)	$d_{L2}$ (cm)	$\rho_{L1}$	$\rho$	$\rho_{L2}$	$C_t$
30	29.25	12.02	37.89	80.99	80.99	80.99	0.01204	0.00495	0.01560	4.57722C <sub>c</sub>
40	33.81	13.90	43.81	70.08	70.08	70.08	0.01206	0.00496	0.01563	5.28320C <sub>c</sub>
50	37.83	15.55	49.03	62.64	62.64	62.64	0.01208	0.00497	0.01565	5.90993C <sub>c</sub>
60	41.47	17.04	53.74	57.15	57.15	57.15	0.01209	0.00497	0.01567	6.48037C <sub>c</sub>
70	44.81	18.42	58.08	52.89	52.89	52.89	0.01210	0.00497	0.01569	7.00816C <sub>c</sub>

Sustituyendo  $L = 10.00$  m,  $P = 600$  kN,  $L_P = 4.00$  m,  $M_{AB} = 800$  kN-m,  $M_{BA} = 1000$  kN-m para una carga concentrada en las ecuaciones (8) a (15) se obtienen:  $V_A = 340.00$  kN,  $V_B = 260.00$  kN,  $M_x = 340x - 800$  para  $0 \leq x \leq L_P$ ,  $M_x = 1600 - 260x$  para  $L_P \leq x \leq L$ ,  $L_1 = 2.35$  m,  $L_2 = 3.85$  m,  $x_m = 4.00$  m,  $M_m = 560.00$  kN-m.

Ahora sustituyendo esta información en las ecuaciones (31) a (39) se obtiene la función objetivo y las funciones de restricciones.

Función objetivo:

$$C_t = C_c [b(0.78d_{L1} + 8.75d + 1.23d_{L2} + 0.40) + 28A_{sL1}d_{L1} + 28A_{sL2}d_{L2} + 197.40A_{sL1} + 319.20A_s + 323.40A_{sL2}] .$$

Sujeto a:

$$\frac{2}{945} = d_{L1}A_{sL1} \left( 1 - \frac{177\rho_{L1}}{20} \right),$$

Tabla 4. Fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm

<b>b</b> <b>(cm)</b>	<b>A<sub>sL1</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>A<sub>s2</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>A<sub>sL2</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>d<sub>L1</sub></b> <b>(cm)</b>	<b>d</b> <b>(cm)</b>	<b>d<sub>L2</sub></b> <b>(cm)</b>	<b>ρ<sub>L1</sub></b>	<b>ρ</b>	<b>ρ<sub>L2</sub></b>	<b>C<sub>t</sub></b>
30	15.47	31.31	17.02	141.35	56.55	160.48	0.00365	0.01846	0.00353	4.52033C <sub>c</sub>
40	17.88	36.16	19.66	122.32	48.97	138.91	0.00365	0.01846	0.00354	5.21976C <sub>c</sub>
50	20.00	40.42	21.99	109.34	43.80	124.20	0.00366	0.01846	0.00354	5.84073C <sub>c</sub>
60	21.92	44.28	24.10	99.78	39.99	113.35	0.00366	0.01846	0.00354	6.40596C <sub>c</sub>
70	23.69	47.83	26.03	92.35	37.02	104.92	0.00366	0.01846	0.00354	6.92897C <sub>c</sub>

Tabla 5. Fijando  $b = 30$  cm, y  $ρ_{L1}, ρ$  y  $ρ_{L2} = 0.02125, 0.01500, 0.01000, 0.00500, 0.00333$ 

<b>b</b> <b>(cm)</b>	<b>A<sub>sL1</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>A<sub>s2</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>A<sub>sL2</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>d<sub>L1</sub></b> <b>(cm)</b>	<b>d</b> <b>(cm)</b>	<b>d<sub>L2</sub></b> <b>(cm)</b>	<b>ρ<sub>L1</sub></b>	<b>ρ</b>	<b>ρ<sub>L2</sub></b>	<b>C<sub>t</sub></b>
30	40.76	34.11	45.58	63.94	53.50	71.49	0.02125	0.02125	0.02125	5.46925C <sub>c</sub>
30	33.14	27.73	37.05	73.64	61.61	82.33	0.01500	0.01500	0.01500	5.10456C <sub>c</sub>
30	26.39	22.08	29.51	87.98	73.61	98.36	0.01000	0.01000	0.01000	4.94734C <sub>c</sub>
30	18.23	15.25	20.38	121.50	101.66	135.84	0.00500	0.00500	0.00500	5.21900C <sub>c</sub>
30	14.77	12.36	16.51	147.67	123.55	165.10	0.00333	0.00333	0.00333	5.67525C <sub>c</sub>

Tabla 6. Fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y  $d_{L1}, d$  y  $d_{L2}$  son los mismos

<b>b</b> <b>(cm)</b>	<b>A<sub>sL1</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>A<sub>s2</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>A<sub>sL2</sub></b> <b>(cm<sup>2</sup>)</b>	<b>d<sub>L1</sub></b> <b>(cm)</b>	<b>d</b> <b>(cm)</b>	<b>d<sub>L2</sub></b> <b>(cm)</b>	<b>ρ<sub>L1</sub></b>	<b>ρ</b>	<b>ρ<sub>L2</sub></b>	<b>C<sub>t</sub></b>
30	26.80	18.17	34.49	86.89	86.89	86.89	0.01028	0.00697	0.01323	5.29805C <sub>c</sub>
40	30.97	21.00	39.86	75.20	75.20	75.20	0.01030	0.00698	0.01325	6.11603C <sub>c</sub>
50	34.64	23.49	44.59	67.23	67.23	67.23	0.01031	0.00699	0.01326	6.84145C <sub>c</sub>
60	37.96	25.74	48.86	61.35	61.35	61.35	0.01031	0.00699	0.01328	7.50110C <sub>c</sub>
70	41.02	27.81	52.80	56.78	56.78	56.78	0.01032	0.00700	0.01328	8.11094C <sub>c</sub>

$$\frac{1}{675} = dA_{s2} \left(1 - \frac{177\rho}{20}\right),$$

$$A_{s2} = \rho bd,$$

$$A_{sL2} = \rho_{L2} bd_{L2}.$$

$$\frac{1}{378} = d_{L2} A_{sL2} \left(1 - \frac{177\rho_{L2}}{20}\right),$$

$$\rho_{L1}, \rho, \rho_{L2} \leq 0.02125,$$

$$\rho_{L1}, \rho, \rho_{L2} \geq 0.00333,$$

$$A_{sL1} = \rho_{L1} bd_{L1},$$

Los resultados se consideran no negativos.

La Tabla 4 muestra los resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y los parámetros libres son:  $A_{sL1}, A_{s2}, A_{sL2}, d_{L1}, d, d_{L2}, \rho_{L1}, \rho, \rho_{L2}$ .

La Tabla 5 muestra los resultados fijando  $b = 30$  cm, y  $\rho_{L1}, \rho, \rho_{L2} = 0.02125, 0.01500, 0.01000, 0.00500, 0.00333$ , y los parámetros libres son:  $A_{sL1}, A_{s2}, A_{sL2}, d_{L1}, d, d_{L2}$ . La Tabla 6 muestra los

**Tabla 7.** Comparación para la carga uniformemente distribuida

b (cm)	Costo Total			Volumen Total(m <sup>3</sup> )			Peso Total		
	VNP	VP	VP/VNP	VNP	VP	VP/VNP	VNP	VP	VP/VNP
30	3.84C <sub>c</sub>	4.58C <sub>c</sub>	1.19	2.09	2.55	1.22	2.14W <sub>c</sub>	2.61W <sub>c</sub>	1.22
40	4.42C <sub>c</sub>	5.28C <sub>c</sub>	1.19	2.44	2.96	1.21	2.50W <sub>c</sub>	3.03W <sub>c</sub>	1.21
50	4.95C <sub>c</sub>	5.91C <sub>c</sub>	1.19	2.74	3.33	1.21	2.81W <sub>c</sub>	3.41W <sub>c</sub>	1.21
60	5.43C <sub>c</sub>	6.48C <sub>c</sub>	1.19	3.03	3.67	1.21	3.10W <sub>c</sub>	3.75W <sub>c</sub>	1.21
70	5.87C <sub>c</sub>	7.01C <sub>c</sub>	1.19	3.29	3.98	1.21	3.37W <sub>c</sub>	4.07W <sub>c</sub>	1.21

**Tabla 8.** Comparación para la carga concentrada

b (cm)	Costo Total			Volumen Total (m <sup>3</sup> )			Peso Total		
	VNP	VP	VP/VNP	VNP	VP	VP/VNP	VNP	VP	VP/VNP
30	4.52C <sub>c</sub>	5.30C <sub>c</sub>	1.17	2.42	2.73	1.13	2.48W <sub>c</sub>	2.80W <sub>c</sub>	1.13
40	5.22C <sub>c</sub>	6.12C <sub>c</sub>	1.17	2.81	3.17	1.13	2.88W <sub>c</sub>	3.25W <sub>c</sub>	1.13
50	5.84C <sub>c</sub>	6.84C <sub>c</sub>	1.17	3.16	3.56	1.13	3.24W <sub>c</sub>	3.65W <sub>c</sub>	1.13
60	6.41C <sub>c</sub>	7.50C <sub>c</sub>	1.17	3.49	3.92	1.12	3.57W <sub>c</sub>	4.02W <sub>c</sub>	1.13
70	6.93C <sub>c</sub>	8.11C <sub>c</sub>	1.17	3.78	4.25	1.12	3.87W <sub>c</sub>	4.36W <sub>c</sub>	1.13

resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y  $d_{L1} = d = d_{L2}$ , y los parámetros libres son:  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ ,  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ .

#### 4 Resultados

Las Tablas 1, 2 y 3 muestran los resultados del ejemplo 1. La Tabla 1 muestra los resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm. La Tabla 2 muestra los resultados fijando  $b = 30$  cm, y  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2} = 0.02125, 0.01500, 0.01000, 0.00500, 0.00333$ .

La Tabla 3 muestra los resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$  son iguales. Para la Tabla 1 se observa que al incrementarse  $b$ , se incrementan  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ , disminuyen  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ , ligeramente se incrementan  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ , y  $C_t$  aumenta.

En la Tabla 2 se muestra que al disminuir  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ , las áreas decrecen  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ , aumentan  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ , y  $C_t$  decrece hasta  $4.07106C_c$  con  $\rho_{L1} = \rho = \rho_{L2} = 0.01000$ , y posteriormente empieza a incrementarse. Para la Tabla 3 se presenta que al incrementarse  $b$  y considerar  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$  iguales, se incrementan

$A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ , disminuyen  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ , ligeramente se incrementan  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ , y  $C_t$  aumenta.

Las Tablas 4, 5 y 6 se muestran los resultados del ejemplo 2. La Tabla 4 muestra los resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm.

La Tabla 5 muestra los resultados fijando  $b = 30$  cm, y  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2} = 0.02125, 0.01500, 0.01000, 0.00500, 0.00333$ . La Tabla 6 muestra los resultados fijando  $b = 30, 40, 50, 60, 70$  cm, y  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$  son iguales. Para la Tabla 4 se observa que al incrementarse  $b$ , se incrementan  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ , disminuyen  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ , ligeramente se incrementan  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ , y  $C_t$  aumenta. En la Tabla 5 se muestra que al disminuir  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ , las áreas decrecen  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ , aumentan  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ , y  $C_t$  decrece hasta  $4.94734C_c$  con  $\rho_{L1} = \rho = \rho_{L2} = 0.01000$ , y posteriormente empieza a incrementarse.

Para la Tabla 6 se presenta que al incrementarse  $b$  y considerar  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$  iguales, se incrementan  $A_{sL1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{sL2}$ , disminuyen  $d_{L1}$ ,  $d$ ,  $d_{L2}$ , ligeramente se incrementan  $\rho_{L1}$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{L2}$ , y  $C_t$  aumenta.

Ahora, los valores correspondientes se sustituyen en la ecuación (40) para obtener el volumen total de la trabe. Si se considera  $\mu = 3.5$



que es la relación del peso del acero de refuerzo al peso del concreto, y se sustituye en la ecuación (42) para encontrar el peso total de la trabe.

Las Tablas 7 y 8 muestran la comparación entre los costos, los volúmenes y los pesos de las traves no prismáticas y las traves prismáticas para los dos ejemplos. En la Tabla 7 se observa que las traves prismáticas tienen un costo total de un 19% mayor con respecto a las traves no prismáticas, y también las traves prismáticas tienen un volumen total y peso total de un 21% mayor con respecto a las traves no prismáticas (ejemplo 1).

En la Tabla 8 se muestra que las traves prismáticas tienen un costo total de un 17% mayor con respecto a las traves no prismáticas, y también las traves prismáticas tienen un volumen total y peso total de un 13% mayor con respecto a las traves no prismáticas (ejemplo 2).

## 5 Conclusiones

En el presente trabajo se ha presentado una metodología analítica para evaluar el diseño óptimo para traves de sección transversal rectangular con cartelas rectas (simétricas o no simétricas).

Esta investigación muestra dos ejemplos prácticos del modelo propuesto. El ejemplo 1 considera una carga uniformemente distribuida  $w = 100$  kN/m sobre la trabe. El ejemplo 2 considera una carga concentrada  $P = 600$  kN aplicada a una distancia  $L_P = 4.00$  m a partir del apoyo A.

Las principales conclusiones son:

1. Para un ancho  $b$  menor se presenta el diseño óptimo para ambos modelos (véase Tablas 1 y 4).
2. Las traves no prismáticas son más económicas con respecto a las vigas prismáticas (véase Tablas 7 y 8).
3. Las traves no prismáticas tienen menos volumen con respecto a las traves prismáticas (véase Tablas 7 y 8).
4. Las traves no prismáticas tienen menos peso con respecto a las traves prismáticas (véase Tablas 7 y 8).

Por lo tanto, la formulación del modelo propuesto para el diseño óptimo (costo mínimo) debe ser como sigue:

1. Los parámetros conocidos son: Momentos aplicados en los apoyos ( $M_{AB}$  y  $M_{BA}$ ) se obtienen a partir de un análisis estructural; Cargas transversales de la trabe ( $w$  y/o  $P$ ,  $L_P$ ); Longitud total de la trabe ( $L$ ); Resistencia de los materiales que intervienen en la construcción ( $f_y$  y  $f'_c$ ).

2. Por las ecuaciones (1) a (15) se obtienen  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $M_x$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $x_m$ ,  $M_m$  para cada tipo de carga. Los parámetros  $L_1$  y  $L_2$  son las distancias de las cartelas y se hacen coincidir con los puntos de inflexión.

3. La función objetivo se obtiene sustituyendo los parámetros  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $r$  en la ecuación (31).

4. Las funciones de restricciones se encuentran sustituyendo los parámetros  $M_{AB}$ ,  $M_m$ ,  $M_{BA}$ ,  $\phi_t$ ,  $f_y$ ,  $f'_c$  en las ecuaciones (32 a 39).

5. Si la función objetivo y las restricciones son definidas, se debe fijar el ancho  $b$  de la viga de acuerdo al reglamento (ACI 318S-19).

## Agradecimientos

La investigación descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias de la Facultad de Contabilidad y Administración de la Universidad Autónoma de Coahuila. Los autores también agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentación. El estudiante de doctorado Edith García Canales (CVU/Becario: 498580/287043) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) el apoyo económico.

## References

1. **Guldan, R. (1956).** *Estructuras apertadas y vigas continuas*. Buenos Aires: El ateneo.
2. **Portland Cement Association (1958).** *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section*. Chicago: Portland Cement Association.
3. **Just, D.J. (1977).** Plane frameworks of tapering box and I-section. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 103, No. 1, pp. 71–86.

4. **Schreyer, H.L. (1978).** Elementary theory for linearly tapered beams. *Journal of the Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 104, No. 3, pp. 515–527.
5. **Medwadowski, S.J. (1984).** Nonprismatic shear beams. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 110, No. 5, pp. 1067–1082. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:5(1067).
6. **Brown, C.J. (1984).** Approximate stiffness matrix for tapered beams. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 110 No. 12, pp. 3050–3055. DOI:10.1061(ASCE)0733-9445(1984)110:12(3050).
7. **Tena-Colunga, A. (2007).** *Análisis de estructuras con métodos matriciales*. Limusa.
8. **Shoostari, A. & Khajavi, R. (2010).** An efficient procedure to find shape functions and stiffness matrices of nonprismatic Euler-Bernoulli and Timoshenko beam elements. *European Journal of Mechanics- A/Solids*, Vol. 29, No.5, pp. 826–836. DOI:10.1016/j.euromechsol.2010.04.003.
9. **Yuksel, S.B. (2012).** Assessment of non-prismatic beams having symmetrical parabolic haunches with constant haunch length ratio of 0.5. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 42, No. 6, pp. 849–866. DOI:10.12989/sem.2012.42.6.849.
10. **Luévanos-Rojas, A. (2015).** Modelado para vigas de sección transversal “I” sometidas a una carga uniformemente distribuida con cartelas rectas. *Ingeniería Mecánica Tecnología y Desarrollo*, Vol. 5, No. 2, pp. 281–292.
11. **Luévanos-Soto, I. & Luévanos-Rojas, A. (2017).** Modeling for fixed-end moments of I-sections with straight haunches under concentrated load. *Steel and Composite Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 597–610. DOI:10.12989/scs.2017.23.5.597.
12. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 3, pp. 973–985. DOI:10.24507/ijic.12.03.959.
13. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 4, pp. 1027–1041. DOI:10.24507/ijic.12.04.1027.
14. **Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para traveses de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 1, *Computación y Sistemas*, Vol. 23 No. 2, pp. 557–568. DOI:10.13053/CyS-23-2-2872.
15. **Sandoval-Rivas, R., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2019).** Modelado para traveses de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2, *Computación y Sistemas*, Vol. 23, No. 3, pp. 1115–1124. DOI:10.13053/CyS-23-3-2873.
16. **Rath, D.P., Ahlawat, A.S., & Ramaswamy, A. (1999).** Shape optimization of RC flexural members. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 125, No. 2, pp. 1439–1445. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:2(1439).
17. **Ceranic, B. & Fryer, C. (2000).** Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20, pp. 260–268. DOI:10.1007/s001580050156.
18. **Barros, M.H.F.M., Martins, R.A.F., & Barros, A.F.M. (2005).** Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC2-2001. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 30, pp. 236–242. DOI:10.1007/s00158-005-0516-2.
19. **Sahab, M.G., Ashour, A.F., & Toropov, V.V. (2005).** Cost optimization of reinforced concrete flat slab buildings. *Engineering Structures*, Vol. 27, pp. 313–322. DOI:10.1016/j.engstruct.2004.10.002.
20. **Aschheim, M., Hernández-Montes, E. & Gil-Martin, L. (2008).** Design of optimally reinforced RC beam, column, and wall sections. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 134, No. 2, pp. 231–239. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:2(231).
21. **Borda-Flores, J.L. & Rodríguez, G. (2010).** Optimización de secciones transversales de pórticos de hormigón armado mediante uso de la técnica de programación cuadrática secuencial SQP. *Mecánica Computacional*, Vol. 25, pp. 9719–9738.
22. **Bhalchandra, S.A. & Adsul, P.K. (2012).** Cost optimization of doubly reinforced rectangular beam section. *International Journal of Modern Engineering Research*, Vol. 2, No. 5, pp. 3939–3942.
23. **Yeh, J-P. & Yang, R.P. (2015).** Optimal design of continuous reinforced concrete beams using neural networks. *Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence*, Vol. 3, No. 4, pp. 1–15. DOI:10.14738/tmlai.34.1303.

24. **Luévanos-Rojas, A. (2016).** Numerical experimentation for the optimal design of reinforced rectangular concrete beams for singly reinforced sections. *DYNA*, Vol. 83, No. 196, pp. 134–142. DOI:10.15446/dyna.v83n196.48031.
25. **Álvarez-Gozalvez, E. (2016).** Diseño óptimo de vigas de hormigón armado sometidas a flexión diseño integral Costo vs Resistencia. *Ciencia Sur*, Vol. 2, No. 2, pp. 28–40.
26. **Chutani, S. & Singh, J. (2017).** Design optimization of reinforced concrete beams. *Journal of the Institution of Engineers (India): Series A*, Vol. 98, No. 4, pp. 429–435.
27. **Thomas, S.M. & Arulraj, G.P. (2017).** Optimization of singly reinforced RC beams. *International Journal of Research-Granthaalayah*, Vol. 5, No. 2, pp. 199–207.
28. **Hisham-Ajmal, P.C. (2017).** A study on cost optimized structural design of reinforced concrete beams. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, Vol. 8, No. 11, pp. 7–11.
29. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2018).** Optimización de vigas de concreto reforzado para secciones rectangulares con experimentos numéricos. *Computación y Sistemas*, Vol. 22, No. 2, pp. 599–606. DOI:10.13053/CyS-22-2-2542.
30. **American Concrete Institute (2019).** *Building code requirements for structural concrete, including the comments on the standards.* Committee 318.

Article received on 12/11/2019; accepted on 15/07/2020.  
Corresponding author is Amulfo Luévanos Rojas.