

Optimización de vigas de concreto reforzado para secciones rectangulares con experimentos numéricos

Arnulfo Luévanos Rojas, Sandra López Chavarría, Manuel Medina Elizondo

Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria, Universidad Autónoma de Coahuila,
México

{arnulfol_2007, sandylopez5}@hotmail.com, drmanuelmediana@yahoo.com.mx

Resumen. En el diseño de vigas rectangulares de concreto reforzado se presentan dos casos: 1) Vigas simplemente reforzadas; 2) Vigas doblemente reforzadas o reforzadas por compresión. Este trabajo muestra un modelo óptimo para diseño de vigas rectangulares de concreto reforzado (caso general), es decir, vigas simplemente y doblemente reforzadas para obtener el costo mínimo. Los experimentos numéricos muestran la aplicación de las fórmulas del reglamento (ACI 318S-14), y el modelo para diseño considera dos casos: el caso 1 restringe el ancho de la viga b , y el caso 2 restringe el peralte efectivo d . El modelo muestra la mejor opción para diseño en cuanto al costo mínimo para la construcción de vigas.

Palabras clave. Diseño óptimo, costo mínimo, vigas rectangulares de concreto reforzado, vigas doblemente reforzadas o reforzadas por compresión.

Optimization of Reinforced Concrete Beams for Rectangular Sections with Numerical Experiments

Abstract. In the design of reinforced concrete rectangular beams are presented two cases: 1) Simply reinforced beams; 2) Doubly reinforced beams or reinforced by compression. This paper shows an optimal model for the design of reinforced concrete rectangular beams (general case), i.e., simply and doubly reinforced beams to obtain the minimum cost. Numerical experiments show the application of the formulas of the code (ACI 318S-14), and the model for design considers two cases: the case 1 restricts the width of the beam b , and the case 2 restricts the effective deep of the beam d . Model shows the best option to design in terms of the minimum cost for the construction of beams.

Keywords. Optimal design, minimum cost, reinforced concrete rectangular beams, doubly reinforced beams or reinforced by compression.

1. Introducción

En algunos casos una viga rectangular de concreto y simplemente reforzada puede no ser suficiente para resistir un momento determinado y por razones arquitectónicas no se debe cambiar la sección transversal de la viga y no se desea aumentar la resistencia del concreto, es decir, la sección transversal de la viga y la calidad del concreto se debe conservar. Bajo esta situación se debe incluir acero de refuerzo en la zona de compresión para aumentar la capacidad resistente de la viga a flexión. Al incrementar la cuantía de acero en tensión se puede presentar una viga sobrerreforzada, pero el acero de refuerzo incluido en la zona de compresión ayuda a que la viga tenga un comportamiento dúctil.

El diseño estructural es un proceso iterativo. El diseño inicial es el primer paso en el proceso. A pesar de los diversos aspectos del diseño estructural son controlados por muchos códigos y reglamentos, los ingenieros estructurales deben tener cuidado y usar su juicio, así como conseguir sus cálculos, si han de interpretar las diversas disposiciones del código de una manera que produce diseños eficientes y económicamente racionales.

Diseño estructural requiere de juicio, la intuición y la experiencia, además de la capacidad de diseñar estructuras que sean seguras, útiles y económicas.

Los códigos de diseño no necesariamente producen diseños que satisfacen todas estas condiciones.

La optimización estructural ha sido el tema de un gran número de trabajos presentados en el campo del diseño de estructuras. El objetivo de un diseñador es desarrollar una “solución óptima” para el diseño estructural bajo ciertas consideraciones. Esto normalmente implica la estructura más económica que no perjudique los efectos funcionales de la estructura para satisfacer las condiciones para las que se destina.

El objetivo del problema de optimización es minimizar el peso, el volumen o el costo de la estructura bajo ciertas restricciones de comportamiento determinístico.

Los modelos para diseño óptimo de estructuras despertaron gran interés entre los investigadores en el pasado hasta los más recientes.

Los modelos más importantes utilizando técnicas de optimización en el proceso de diseño y análisis estructural [1-14].

Este trabajo muestra el diseño de vigas rectangulares de concreto doblemente reforzadas utilizando las técnicas de optimización (caso general), es decir, vigas simplemente y doblemente reforzadas. La modelación matemática se desarrolla bajo los criterios de costo mínimo con un número reducido de variables. Los experimentos numéricos muestran la aplicación de las fórmulas del reglamento (ACI 318S-14), y el modelo considera dos casos: caso 1 se restringe el ancho de la viga b , y el caso 2 se restringe el peralte efectivo d .

2. Materiales y métodos

2.1. Técnicas de optimización

En los problemas de optimización el objetivo es minimizar el peso, el volumen o el costo de la estructura bajo ciertas restricciones de comportamiento determinístico. La formulación matemática de un problema de optimización estructural típico con respecto a las variables de diseño, las funciones objetivo y las restricciones pueden ser expresadas en términos matemáticos

estándar como un problema de programación no lineal de la siguiente [15-17]:

$$\text{Min } F(u_1, u_2 \dots u_n), \quad (1)$$

$$h_j(u) \leq 0, j = 1 \dots m, \quad (2)$$

$$u_i^l \leq u_i \leq u_i^s, i = 1 \dots n, \quad (3)$$

donde u es el vector de las variables de diseño, $F(u)$ es la función objetivo que se reduce al mínimo, $h_j(u)$ es la restricción del comportamiento, u_i^l y u_i^s son los límites inferior y superior de la variable de diseño típicos u_i .

El objetivo de la optimización es encontrar la mejor solución entre un conjunto de soluciones posibles, utilizando métodos cuantitativos eficientes. En el diseño de una viga, las variables de decisión representan las cantidades que se determinen, y un conjunto de valores de variables de decisión constituye una solución posible. Una función objetivo, que es ya sea maximizado o minimizado, expresa la meta, o criterio de comportamiento, en términos de variables de decisión. El conjunto de soluciones admisibles y, por lo tanto, el valor de la función objetivo, se ve limitada por factores que gobiernan el diseño de la viga.

2.2. Ecuaciones proporcionadas por el código ACI

La Figura 1, muestra la geometría de una sección rectangular de concreto doblemente reforzada típica con un bloque rectangular de tensiones simplificado, conforme a lo dispuesto en el Código ACI [18-20].

Las ecuaciones proporcionadas por el código ACI son [18]:

$$h = d + d_t, \quad (4)$$

$$M_u = \phi_f \left[(A_{st} - A_{sc})f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_{sc}f_y(d - d_c) \right], \quad (5)$$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c}, \quad (6)$$

$$a = \beta_1 c \rightarrow c = \frac{a}{\beta_1}, \quad (7)$$

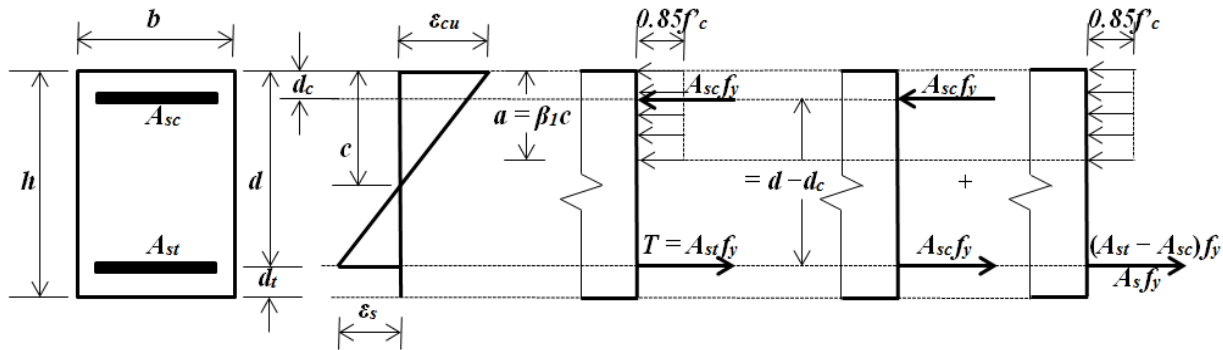


Fig. 1. Viga rectangular doblemente reforzada

$$\rho_b = \frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{600}{600 + f_y} \right), \quad (8)$$

$$0.65 \leq \beta_1 = \left(1.05 - \frac{f'_c}{140} \right) \leq 0.85, \quad (9)$$

$$\rho_{max} = 0.75\rho_b, \quad (10)$$

$$\rho_{min} = \begin{cases} \frac{0.25\sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{1.4}{f_y} \end{cases} \quad (\text{el mayor de los dos}), \quad (11)$$

$$A_{st} - A_{sc} = \rho b d, \quad (12)$$

donde M_u es el momento máximo último (momento máximo factorizado), ϕ es el factor de reducción de resistencia por flexión y su valor es 0.90, A_{st} es el área de refuerzo longitudinal a tensión, A_{sc} es el área de refuerzo longitudinal a compresión, d es la distancia desde la fibra extrema en compresión hasta el centroide del refuerzo longitudinal a tensión, a es la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos, d_c es la distancia desde la fibra extrema en compresión al centroide del refuerzo longitudinal en compresión, d_t es la distancia desde la fibra extrema en tensión al centroide del refuerzo longitudinal en tensión, c es la distancia medida desde la fibra extrema en compresión al eje neutro, f_y es la resistencia especificada a la fluencia del refuerzo, f'_c es la resistencia especificada a la compresión del concreto, ρ es la cuantía del refuerzo A_s ($A_{st} - A_{sc}$), evaluada

sobre el área bd , β_1 es el factor que relaciona la profundidad de bloque rectangular equivalente de esfuerzos de compresión con la profundidad del eje neutro, ρ_b es la cuantía del refuerzo A_s evaluada sobre el área bd que produce condiciones balanceadas de deformación unitaria, ρ_{max} es la cuantía del refuerzo máximo, ρ_{min} es la cuantía del refuerzo mínimo.

2.3. Función objetivo: costo mínimo

El costo total de la viga doblemente reforzada " C_T " es igual a la suma de los costos del acero de refuerzo " C_s " y el concreto " C_c ". Estos costos incluyen el costo de los materiales utilizados y el costo de fabricación. Los costos se refieren a los costos unitarios del acero de refuerzo y del concreto por una unidad de volumen. El costo de la viga de una unidad de longitud es:

$$C_T = C_s V_s + C_c V_c, \quad (13)$$

donde: V_s es el volumen de acero de refuerzo y V_c es el volumen de concreto por unidad de longitud de la viga. Estas ecuaciones son:

$$V_s = A_{st} + A_{sc}, \quad (14)$$

$$V_c = b(d + d_t) - (A_{st} + A_{sc}). \quad (15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (14 y 15), en la ecuación (13), se presenta la siguiente ecuación:

$$C_T = C_s(A_{st} + A_{sc}) + C_c \left[\frac{b(d + d_t)}{-(A_{st} + A_{sc})} \right]. \quad (16)$$

Si se asume que $\alpha = C_s/C_c$ y posteriormente se sustituye en la ecuación (16), se obtiene la función objetivo:

$$C_T = C_c[b(d + d_t) + (\alpha - 1)(A_{st} + A_{sc})]. \quad (17)$$

Un caso particular es cuando no se acepta acero de refuerzo por compresión ($A_{sc} = 0$) y se presenta la viga rectangular simplemente reforzada. Entonces la ecuación (17), se presenta como sigue:

$$C_T = C_c[b(d + d_t) + (\alpha - 1)A_{st}]. \quad (18)$$

2.3.1. Caso general (Viga rectangular doblemente reforzada)

La función objetivo para minimizar el costo es:

$$C_T = C_c[b(d + d_t) + (\alpha - 1)(A_{st} + A_{sc})]. \quad (19)$$

Las restricciones son:

$$\frac{M_u}{\phi_f f_y} = (A_{st} - A_{sc}) \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_{sc}(d - d_c), \quad (20)$$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c}, \quad (21)$$

$$\rho \leq \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{600}{600 + f_y} \right), \quad (22)$$

$$\rho \geq \begin{cases} \frac{0.25 \sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{1.4}{f_y} \end{cases}, \quad (23)$$

$$A_{st} - A_{sc} = \rho b d. \quad (24)$$

2.3.2. Caso particular (Viga rectangular simplemente reforzada)

La función objetivo para minimizar el costo es [14]:

$$C_T = C_c[b(d + d_t) + (\alpha - 1)A_{st}]. \quad (25)$$

Las restricciones son [14]:

$$\frac{M_u}{\phi_f} = A_{st} f_y \left(d - \frac{a}{2} \right), \quad (26)$$

$$a = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c}, \quad (27)$$

$$\rho \leq \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{600}{600 + f_y} \right), \quad (28)$$

$$\rho \geq \begin{cases} \frac{0.25 \sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{1.4}{f_y} \end{cases}, \quad (29)$$

$$A_{st} = \rho b d. \quad (30)$$

El problema de optimización se resuelve usando el software MAPLE 15, para evaluar el diseño óptimo con respecto al costo mínimo de una viga rectangular de concreto doblemente reforzada.

2.4. Problemas numéricos

Para realizar los experimentos numéricos con el modelo para el diseño óptimo de vigas rectangulares de concreto doblemente reforzadas se consideran dos casos: Caso 1, el ancho de la viga b se fija en un solo valor y el peralte efectivo d se restringe para ciertos valores. Caso 2, el peralte efectivo d se restringe para un solo valor y el ancho de la viga b se fija para varios valores.

2.4.1. Caso 1

Una viga de sección rectangular se restringe para $b = 25 \text{ cm}$, $d_c = d_t = 4 \text{ cm}$ y $d = 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140 \text{ cm}$. Se desea obtener la cuantía del acero de refuerzo ρ , el área de acero de refuerzo longitudinal a tensión A_{st} , el área de acero de refuerzo longitudinal a compresión A_{sc} , y la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos a , para $M_u = 1000 \text{ kN-m}$, $f'_c = 28 \text{ MPa}$ y $f_y = 420 \text{ MPa}$. La relación del costo del acero de refuerzo al costo del concreto es: $\alpha = 90$. Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación (19), para encontrar la función objetivo y en las ecuaciones (20 a 24) para obtener las restricciones, estas se muestran enseguida:

La función objetivo para minimizar el costo es:

Tabla 1. Resultados del problema numérico caso 1

Peralte efectivo d (cm)	Area de refuerzo longitudinal a tensión A_{st} (cm ²)	Area de refuerzo longitudinal a compresión A_{sc} (cm ²)	Cuantía del acero de refuerzo ρ	Profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos a (cm)	Costo total (\$/m)
50.000	60.6147	34.0522	0.02125	18.7500	0.97754Cc
60.000	51.3678	19.4928	0.02125	22.5000	0.79066Cc
70.000	45.2248	8.0373	0.02125	26.2500	0.65903Cc
80.000	40.1975	0.0000	0.02010	28.3747	0.56776Cc
90.000	33.9016	0.0000	0.01507	23.9305	0.53672Cc
100.000	29.5335	0.0000	0.01181	20.8472	0.52285Cc
110.000	26.2631	0.0000	0.09550	18.5387	0.51874Cc
110.920	26.0017	0.0000	0.00938	18.3542	0.51872Cc
120.000	23.6975	0.0000	0.00790	16.7277	0.52091Cc
130.000	21.6189	0.0000	0.00665	15.2604	0.52741Cc
140.000	19.8942	0.0000	0.00568	14.0430	0.53706Cc
150.000	18.4365	0.0000	0.00492	13.0140	0.54908Cc

$$C_T = C_c[0.25d + 0.01 + 89A_{st} + 89A_{sc}], \quad (31)$$

Las restricciones son:

$$\frac{1}{378} = (A_{st} - A_{sc}) \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_{sc}(d - 0.04), \quad (32)$$

$$a = \frac{300\rho d}{17}, \quad (33)$$

$$\rho \leq 0.02125, \quad (34)$$

$$\rho \geq \begin{cases} 0.00315 \\ 0.00333 \end{cases}, \quad (35)$$

$$A_{st} - A_{sc} = 0.25\rho d. \quad (36)$$

Los resultados del problema numérico para el caso 1 se muestran en la Tabla 1.

2.4.2. Caso 2

Una viga de sección rectangular se restringe para $d = 26$ cm, $d_c = d_t = 4$ cm y $b = 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 230, 250, 270$ cm.

Se desea obtener la cuantía del acero de refuerzo ρ , el área de acero de refuerzo longitudinal a tensión A_{st} , el área de acero de refuerzo longitudinal a compresión A_{sc} , y la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos a , para $M_u = 1000$ kN-m, $f'_c = 28$ MPa y $f_y = 420$ MPa. La relación del costo del acero de refuerzo al costo del concreto es: $\alpha = 90$.

Sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación (19), para encontrar la función objetivo y en las ecuaciones (20 a 24), para obtener las restricciones, estas se muestran enseguida:

La función objetivo para minimizar el costo es:

$$C_T = C_c[0.30b + 89A_{st} + 89A_{sc}]. \quad (37)$$

Las restricciones son:

$$\frac{1}{378} = (A_{st} - A_{sc}) \left(0.26 - \frac{a}{2} \right) + 0.22A_{sc}, \quad (38)$$

$$a = \frac{78\rho}{17}, \quad (39)$$

$$\rho \leq 0.02125, \quad (40)$$

Tabla 2. Resultados del problema numérico caso 2

Ancho de la viga b (cm)	Área de refuerzo longitudinal a tensión A_{st} (cm ²)	Área de refuerzo longitudinal a compresión A_{sc} (cm ²)	Cuantía del acero de refuerzo ρ	Profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos a (cm)	Costo total (\$/m)
100.000	122.4476	67.1976	0.02125	9.7500	1.98784Cc
120.000	122.8871	56.5871	0.02125	9.7500	1.95732Cc
140.000	123.3265	45.9765	0.02125	9.7500	1.92680Cc
160.000	123.7660	35.3660	0.02125	9.7500	1.89628Cc
180.000	124.2055	24.7555	0.02125	9.7500	1.86575Cc
200.000	124.6450	14.1450	0.02125	9.7500	1.83523Cc
220.000	126.0845	3.5345	0.02125	9.7500	1.80471Cc
226.662	125.2309	0.0000	0.02125	9.7500	1.79454Cc
230.000	124.6911	0.0000	0.02085	9.5671	1.79975Cc
250.000	121.9322	0.0000	0.01876	8.6070	1.83520Cc
270.000	119.7848	0.0000	0.01706	7.8291	1.87608Cc
290.000	192.0746	0.0000	0.01566	7.1843	1.92075Cc

$$\rho \geq \begin{cases} 0.00315 \\ 0.00333 \end{cases}, \quad (41)$$

$$A_{st} - A_{sc} = 0.26\rho b. \quad (42)$$

Los resultados del problema numérico para el caso 2 se muestran en la Tabla 2.

3. Resultados

Tabla 1, presenta los resultados para el Caso 1 utilizando las técnicas de optimización. Los parámetros constantes (conocidos) son: M_u , ϕ_f , β_1 , d_c , d_t , b , f_y , f'_c , ρ_{max} , ρ_{min} y d . Las variables de diseño (incógnitas) son: A_{st} , A_{sc} , ρ y a . El costo mínimo del material total es $C_t = 0.51872C_c$ \$/m (en términos del costo de concreto por unidad de volumen), el área de refuerzo longitudinal a tensión es $A_{st} = 26.0017 \text{ cm}^2$, el área de refuerzo longitudinal a compresión es $A_{sc} = 0.00 \text{ cm}^2$, la cuantía del acero de refuerzo es $\rho = 0.00938$, el peralte efectivo es $d = 110.920 \text{ cm}$ y la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos es $a = 18.3542 \text{ cm}$. También se

investigaron otros valores de d para validar el modelo propuesto, y se observa que al disminuir o aumentar el peralte óptimo se incrementan los costos totales.

Tabla 2 muestra los resultados para el Caso 2 utilizando las técnicas de optimización. Los parámetros constantes (conocidos), son: M_u , ϕ_f , β_1 , d_c , d_t , b , f_y , f'_c , ρ_{max} , ρ_{min} y b . Las variables de diseño (incógnitas) son: A_{st} , A_{sc} , ρ y a . El costo mínimo del material total es $C_t = 1.79454C_c$ \$/m (en términos del costo de concreto por unidad de volumen), el área de refuerzo longitudinal a tensión es $A_{st} = 125.2309 \text{ cm}^2$, el área de refuerzo longitudinal a compresión es $A_{sc} = 0.00 \text{ cm}^2$, la cuantía del acero de refuerzo es $\rho = 0.02125$, el ancho de la viga es $b = 226.662 \text{ cm}$ y la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos es $a = 9.7500 \text{ cm}$. También se investigaron otros valores de b para validar el modelo propuesto, y se observa que al disminuir o aumentar el ancho de la viga se incrementan los costos totales.

En los dos casos se verifica que las vigas más económicas se presentan en secciones

simplemente reforzadas, es decir, no se requiere acero de refuerzo por compresión.

4. Conclusiones

Este estudio aborda el diseño de costo mínimo (casos 1 y 2), para vigas rectangulares de concreto doblemente reforzadas. El caso 1 asume que los parámetros constantes son: M_u , ϕ_f , β_1 , d_c , d_t , f_y , f'_c , ρ_{max} , ρ_{min} y b , y que las variables de diseño son: A_{st} , A_{sc} , ρ , d y a . El caso 2 considera que los parámetros constantes son: M_u , ϕ_f , β_1 , d_c , d_t , f_y , f'_c , ρ_{max} , ρ_{min} y d , y que las variables de diseño son: A_{st} , A_{sc} , ρ , b y a .

La aplicación significativa de la base b restringida y el peralte efectivo d se limita (caso 1), cuando se desea menor peso y menor volumen de los miembros estructurales. El peralte efectivo d restringido y la base b se limita (caso 2), cuando se desea mantener oculta la viga dentro la losa, se presenta lo que se llama una viga ancha.

La investigación presentada en este documento concluye de la siguiente manera:

1. Las vigas más económicas se presentan en secciones simplemente reforzadas, cuando no existen limitaciones en cuanto a dimensiones de las vigas.
2. Las vigas doblemente reforzadas se vuelven necesarias cuando por razones de espacio o arquitectónicas no es posible modificar la sección transversal, y no es posible o no se desea aumentar la calidad del concreto. La sección no es capaz de resistir el momento aplicado aunque se le provee de la cuantía máxima permitida.

El procedimiento desarrollado como resultado de esta investigación puede servir como base para el diseño de vigas de concreto reforzado, mientras que una estructura diseñada utilizando la sección óptima no necesariamente proporcionar un diseño óptimo para toda la estructura en términos de costos del material.

Las sugerencias para investigaciones futuras son: 1) El diseño óptimo de otros tipos de miembros estructurales de concreto reforzado y acero estructural; 2) El diseño óptimo de estructuras enteras.

Referencias

1. Ha, T. (1993). Optimum design of unstiffened built-up girders. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 119, No. 9, pp. 2784–2792.
2. Torrano, S. y Martí, P. (1997). Diseño óptimo de geometría y de propiedades de estructuras de hormigón armado. *Anales de Ingeniería Mecánica*, Vol. 2, No. 11, pp. 161–168.
3. Botello, S., Marroquin, J.L., Oñate, E., & Horebeek, J. (1999). Solving structural optimization problems with genetic algorithms and simulated annealing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 8, pp. 1069–1084.
4. Rath, D.P., Ahlawat, A.S., & Ramaswamy, A. (1999). Shape optimization of RC flexural members. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 125, No. 2, pp. 1439–1445.
5. Ceranic, B. & Fryer, C. (2000). Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20, pp. 260–268.
6. Jarmai, K., Snyman, J.A., Farkas, J., & Gondos, G. (2003). Optimal design of a welded I-section frame using four conceptually different optimization algorithms. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 25, pp. 54–61.
7. Leps, M. & Sejnoha, M. (2003). New approach to optimization of reinforced concrete beams. *Computer and Structures*, Vol. 81, pp. 1957–1966.
8. Barros, M.H.F.M., Martins, R.A.F., & Barros, A.F.M. (2005). Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC2-2001. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 30, pp. 236–242.
9. Sahab, M.G., Ashour, A.F., & Toropov, V.V. (2005). Cost optimization of reinforced concrete flat slab buildings. *Engineering Structures*, Vol. 27, pp. 313–322.
10. Zou, X., Chan, C., Li, G., & Wang, Q. (2007). Multi objective optimization for performance-based design of reinforced concrete frames. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 133, No. 10, pp. 1462–1474.
11. Aschheim, M., Hernández-Montes, E., & Gil-Martin, L. (2008). Design of optimally reinforced RC beam, column, and wall sections. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 134, No. 2, pp. 231–239.

12. Borda-Flores, J.L. & Rodríguez, G. (2010). Optimización de secciones transversales de pórticos de hormigón armado mediante uso de la técnica de programación cuadrática secuencial SQP. *Mecánica Computacional*, Vol. 25, pp. 9719-9738.
13. Bhalchandra, S.A. & Adsul, P.K. (2012). Cost optimization of doubly reinforced rectangular beam section. *International Journal of Modern Engineering Research*, Vol. 2, No. 5, pp. 3939–3942.
14. Luévanos-Rojas, A. (2016). Numerical experimentation for the optimal design of reinforced rectangular concrete beams for singly reinforced sections. *DYNA*, Vol. 83, No. 196, pp.134–142.
15. Kalashnikov, V.V. (1978). Some problems of lexicographic minimization. *Optimizatsia*, Vol. 21, No.38, pp. 109-120.
16. Kalashnikov, V.V. (1980). Separate step method for minimization of III conditioned functions, *Optimizatsia*, Vol. 25, No. 42, pp. 70–85.
17. Kalashnikov, V.V. (1982). Method for minimization of III-conditioned functions by selecting singular directions. *Optimizatsia*, Vol. 30, No. 47, pp. 35–49.
18. ACI 318S-13 (American Concrete Institute) (2013). *Building code requirements for structural concrete*. Committee 318.
19. González-Cuevas, O.M. y Robles-Fernández Villegas, F. (2005). *Aspectos fundamentales del concreto reforzado*. México: Limusa.
20. McCormac, J.C. & Brown, R.H. (2013). *Design of reinforced concrete*. New York: John Wiley & Sons.

Article received on 30/01/2017; accepted 17/08/2017.
Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.