

Filtro estimador por deconvolución a través de la inversa

Consuelo V. García Mendoza¹, José de Jesús Medel Juárez²

¹ Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Cómputo, D.F.,
México

² Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Computación, D.F.,
México

varinia400@hotmail.com, jjmedelj@yahoo.com.mx

Resumen. En este artículo se presenta el filtrado por deconvolución a través de la inversa para conocer la dinámica interna del modelo tipo caja negra con respuesta acotada y con evolución invariante en el tiempo. En vez de utilizar la pseudoinversa en la deconvolución al observar problemas de inversión y de singularidad, se propone la separación por bloques de matrices y usando la inversa para lograr una menor complejidad algorítmica y un error de estimación directo, sin perder de vista la estabilidad del sistema. Es así que se presenta la descripción del filtro aplicando su transformación a una forma diagonal, considerando: a) la diagonalización de matrices, b) el desarrollo del filtro diagonalizado, c) el funcional del error, d) el análisis de la complejidad algorítmica, d) la simulación del filtro de deconvolución de manera diagonal, y e) se dan las conclusiones correspondientes.

Palabras clave. Filtrado digital, deconvolución; diagonalización, inversa, pseudoinversa, funcional del error.

Inverse Deconvolution Estimation Filter

Abstract. This paper presents a deconvolution filter technique using a diagonal block inverse in order to learn the internal dynamics of a black-box model with bounded response and time-invariant evolution. Instead of using a pseudoinverse in deconvolution on problems of inversion and singularity, we propose a separation by matrix blocks and application of an inverse to achieve a lower algorithmic complexity and less error of direct estimation without losing the stability properties. With this in mind, we present a deconvolution filter applying its transformation into a diagonal form considering matrix diagonalization, diagonal filter description,

functional error, algorithm complexity analysis, and diagonal deconvolution applied to filter simulation.

Keywords. Deconvolution, diagonalization, inverse, pseudoinverse, functional error.

1. Introducción

En el área de control, hay un grupo de sistemas que solo pueden ser modelados como cajas negras, solo teniendo acceso a las señales de excitación (entradas) y a las respuestas generadas por estas en un sistema específico (salidas). En este modelo se conocen las entradas o estímulos que afectan al sistema (caja negra) y la respuesta del sistema; pero se desconoce la dinámica interna o función de transición que hace que el sistema tenga determinada respuesta al estímulo. Por ejemplo: a) Se conoce la cantidad de núcleos que recibe y emite un interior nuclear; pero se desconoce su función de transferencia isotrópica (es aquella función que relaciona la salida con la entrada y en la cual sus propiedades básicas no cambian independientemente de excitación que reciba, siempre y cuando ésta no haga que pierda su estabilidad) [1], b) Se conoce la cantidad de voltaje que recibe un motor de Corriente Directa (CD) y la cantidad de revoluciones por minuto (*rpm*) que realiza; pero se desconoce su dinámica interna de operación [2], c) Se conocen los factores que han provocado que algunas especies están en peligro de extinción, como el oso polar; pero se desconoce la medida exacta en que estos factores han propiciado esta situación.

Cualquiera de estos sistemas puede ser descrito con la relación estímulo-respuesta como en la figura 1 donde F representa los estímulos que afectan al sistema G , y C es la respuesta del sistema.

La **convolución** C , es el resultado de la interacción entre los estímulos F y el sistema G , por medio de la operación $F \circ G$. Para conocer la dinámica interna o función de transición del sistema G , requiriendo de la operación inversa, la **deconvolución** $(F \circ G)^{-1}$.

La deconvolución ha sido utilizada en la solución de diversos problemas tales como: a) la reconstrucción de imágenes en microscopía [3], b) el análisis de medidas sísmicas [4], c) la identificación de la concentración de ARNm (ácido ribonucleico) en los genes de diferentes tipos de células [5], d) en la identificación de biomarcadores candidatos en tejidos heterogéneos [6], e) en la dinámica de población de células [7], f) en la detección de alimentos irradiados [8], g) en la estimación de energías jet y el espectro de reacciones de alto fondo como las colisiones nucleares de iones pesados y el gran colisionador de hadrones [9], h) la estimación de parámetros cosmológicos de datos proporcionados en tres años por el explorador Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [10] y, i) todos los mencionados en [11, 12], entre otros.

Existen varios métodos para llevar a cabo la deconvolución como: en línea, homomórfica, iterativo y, estimación de sistemas, entre otros [3, 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Estos métodos buscan minimizar el error generado respecto a la función de transición original y su estimada.

Sin embargo hay una pérdida de información durante la transformación directa entre convolución y deconvolución. Que sumada a las pérdidas ya existentes en la propia información al viajar de un dispositivo a otro, o al cambiar de medio, hace que se pierda gran parte de la información buscada [21].

En este trabajo se propone la transformación del sistema descrito en la figura 1, en un sistema de diagonales, lo cual permite estimar la matriz G a través de su sistema equivalente de diagonales de F y C evitando usar así la pseudoinversa, logrando con esto disminuir la complejidad computacional del proceso de

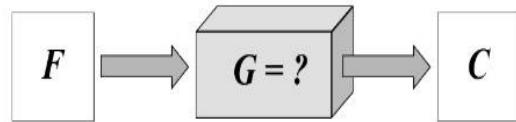


Fig. 1. Diagrama a bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra

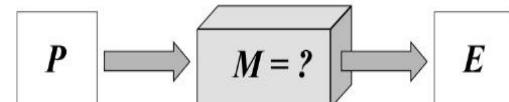


Fig. 2. Diagrama a bloques del sistema visto como un modelo tipo caja negra

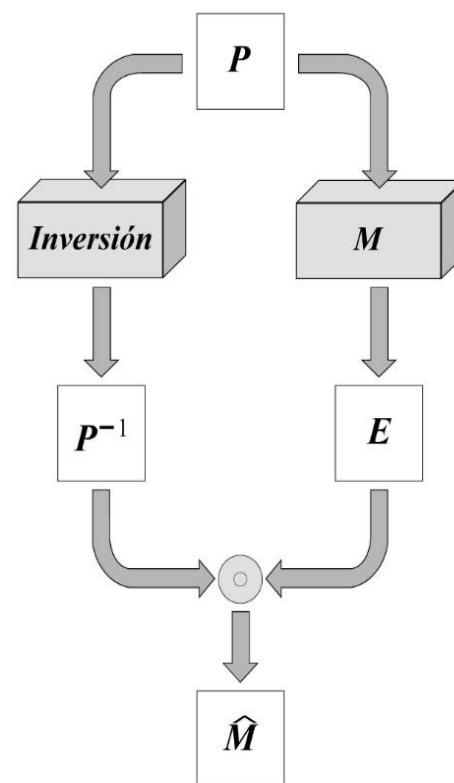


Fig. 3. Diagrama a bloques del estimador (3)

estimación y obtener un error de estimación tendiente a una constante.

2. Diagonalización del modelo tipo caja negra

De acuerdo con [19] el sistema convolucionado dentro de un intervalo T , de acuerdo con la figura 1, es descrito en (1), por el producto punto:

$$C = G \cdot F, \quad (1)$$

donde $C \in \mathbb{R}^{[n \times 1]}$, $G \in \mathbb{R}^{[n \times n]}$, $F \in \mathbb{R}^{[n \times 1]}$.

El principal problema se presenta cuando se quiere conocer a G en función de C y F . Para ello, comúnmente es necesario que se considere el proceso de pseudoinversa, basado en la técnica de Pen-Rose [20], obteniendo los valores y vectores propios aproximados para el vector F ; sin embargo este proceso implica una pérdida de información en la estimación de G . En este artículo se propone la diagonalización de las matrices G , C y F como sistema equivalente a (2), del cual a través de matrices diagonales se posible lograr la inversión de la diagonal de F y así obtener los valores estimados en la diagonal de G . Diagonalizando las matrices C , G y F de acuerdo con [22, 23, 24], el sistema descrito en (1) tiene una descripción afín en (2):

$$E = M \cdot P, \quad (2)$$

donde $E \in \mathbb{R}^{[n^2 \times n^2]}$, $M \in \mathbb{R}^{[n^2 \times n^2]}$, $F \in \mathbb{R}^{[n^2 \times n^2]}$.

Donde E es la matriz diagonal de la matriz C , M la matriz diagonal de G y P la matriz diagonal de F , respectivamente. De esta forma que el sistema de la figura 1, es afín al sistema mostrado en la figura 2.

3. Filtro estimador del sistema diagonalizado

Teorema 1 (filtro estimador). Dado el sistema (2), su estimador tiene la forma (3) de acuerdo a la figura 3.

$$\hat{M} = E \cdot P^{-1}, \quad (3)$$

con los coeficientes de \hat{M} se presentan en (4) y (5):

$$\hat{M} = \{\hat{M}_{i,j}\}_{i=\overline{1,n^2}, j=\overline{1,n^2}}, \quad (4)$$

$$\text{con } \hat{M}_{i,j} = \begin{cases} \frac{H(t_T, x_i)}{F(x_i)} & i = j, T = \overline{1, s}, s \in \mathbb{Z}_+, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\hat{M} = E \cdot P^{-1}. \quad (5)$$

Prueba 1. Considerando que en (2) las matrices E, M y P los valores de sus diagonales son diferentes de cero, el estimador \hat{M} simbólicamente es descrito en (5).

Con $\hat{M} \in \mathbb{R}_{[-1,1]}^{[n^2 \times n^2]}$, que simbólicamente se puede representar como $\hat{M}_{n^2 \times n^2}$, tiene la forma extendida (6):

$$= \begin{bmatrix} \hat{M}_{n \times n_{1,1}} & \hat{M}_{n \times n_{1,2}} & \dots & \hat{M}_{n \times n_{1,n}} \\ \hat{M}_{n \times n_{2,1}} & \hat{M}_{n \times n_{2,2}} & \dots & \hat{M}_{n \times n_{2,n}} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \hat{M}_{n \times n_{n,1}} & \hat{M}_{n \times n_{n,2}} & \dots & \hat{M}_{n \times n_{n,n}} \end{bmatrix}_{n^2 \times n^2}. \quad (6)$$

Cada elemento de la matriz $\hat{M} \in \mathbb{R}_{[-1,1]}^{[n^2 \times n^2]}$ de (6) se describe en (7):

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{n \times n, 1, 1} &= \begin{bmatrix} \frac{H(t_1, x_1)}{F(x_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{H(t_1, x_2)}{F(x_2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{H(t_1, x_n)}{F(x_n)} \end{bmatrix}_{n \times n}, \\
 \hat{M}_{n \times n, 2, 2} &= \begin{bmatrix} \frac{H(t_2, x_1)}{F(x_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{H(t_2, x_2)}{F(x_2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{H(t_2, x_n)}{F(x_n)} \end{bmatrix}_{n \times n}, \\
 &\quad \dots, \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{H(t_n, x_1)}{F(x_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{H(t_n, x_2)}{F(x_2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{H(t_n, x_n)}{F(x_n)} \end{bmatrix}_{n \times n}
 \end{aligned} \tag{7}$$

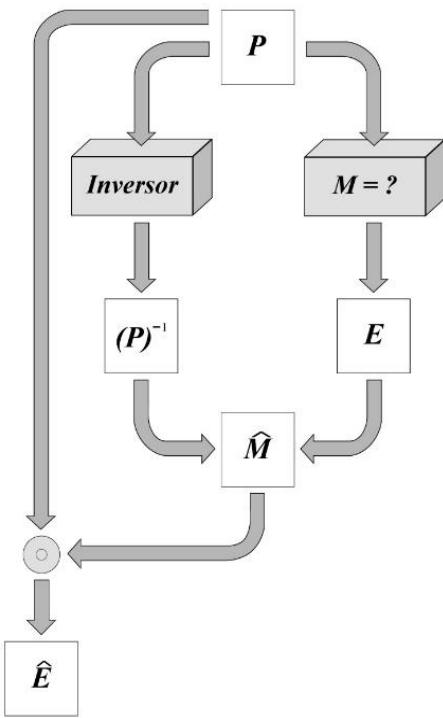


Fig. 4. Diagrama a bloques del filtro identificador descrito en (15)

Generalizando (7) se tiene (8):

$$\begin{bmatrix} \frac{H(t_i, x_1)}{F(x_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{H(t_i, x_2)}{F(x_2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{H(t_i, x_n)}{F(x_n)} \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \{\hat{M}_{n \times n, i, i}\}_{i=1, \overline{n}} \\ \frac{H(t_i, x_1)}{F(x_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{H(t_i, x_2)}{F(x_2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{H(t_i, x_n)}{F(x_n)} \end{bmatrix}_{n \times n}. \tag{8}$$

Los elementos que no forman parte de la diagonal de $\hat{M}_{n^2 \times n^2}$ son descritos por (9):

$$\{\hat{M}_{n \times n, i, j}\}_{\substack{i=1, \overline{n} \\ j=1, \overline{n}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall i \neq j. \tag{9}$$

De donde el estimador $\hat{G}_{n \times n}$ de (1) es descrito por los elementos de la diagonal de $\hat{M}_{n^2 \times n^2}$ en (10):

$$\begin{aligned}
 G_{1,1} &= \hat{M}_{1,1}, G_{1,2} = \hat{M}_{2,2}, \dots, G_{1,n} = \hat{M}_{1 \times n, 1 \times n}, \\
 G_{2,1} &= \hat{M}_{n+1, n+1}, G_{2,2} = \hat{M}_{n+2, n+2}, \dots, G_{2,n} = \hat{M}_{2 \times n, 2 \times n}, \\
 G_{3,1} &= \hat{M}_{(2 \times n)+1, (2 \times n)+1}, G_{3,2} \\
 &= \hat{M}_{(2 \times n)+2, (2 \times n)+2}, \dots, G_{3,n} \\
 &= \hat{M}_{3 \times n, 3 \times n}, \\
 G_{4,1} &= \hat{M}_{(3 \times n)+1, (3 \times n)+1}, G_{4,2} \\
 &= \hat{M}_{(3 \times n)+2, (3 \times n)+2}, \dots, G_{4,n} \\
 &= \hat{M}_{4 \times n, 4 \times n}, \\
 &\vdots \\
 G_{n,1} &= \hat{M}_{(n-1)+1, (n-1)+1}, G_{n,2} \\
 &= \hat{M}_{(n-1)+2, (n-1)+2}, \dots, G_{n,n} \\
 &= \hat{M}_{n^2, n^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Siendo diferentes de cero, solo los descritos en (8) ■.

4. Filtro estimador recursivo del sistema diagonalizado

Teorema 2 (filtro estimador recursivo). El estimador (3), expresado de manera recursiva

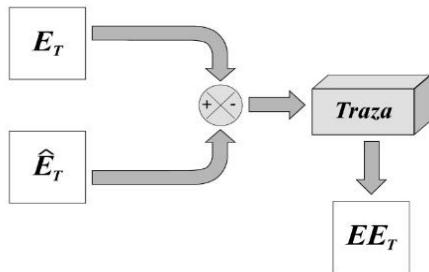


Fig. 5. Diagrama a bloques del error de estimación

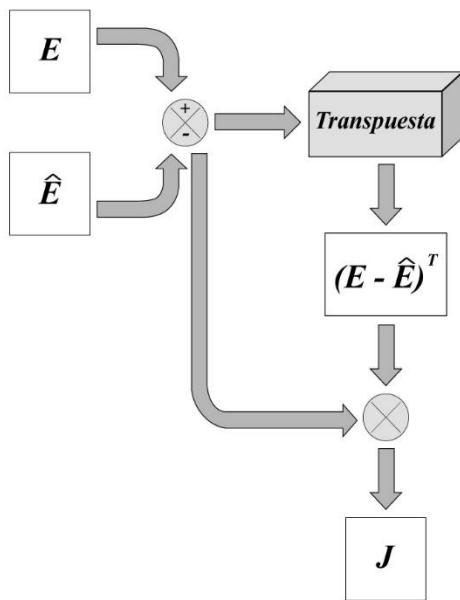


Fig. 6. Diagrama a bloques del funcional del error descrito en (7)

(11) para condiciones estacionarias en dos intervalos adyacentes con métricas descritas como T y $(T - 1)$:

$$\hat{M}_T = E_T(P_T)^{-1} + \hat{M}_{T-1} . \quad (11)$$

Prueba 2. En (12) se describe (3) para el conjunto de métricas de los intervalos que conforman a T :

$$\hat{M}_T := \sum_{t=1}^T E_t(P_t)^{-1}, \quad (12)$$

con condiciones estacionarias para el periodo de tiempo inmediato anterior, se tiene (13):

$$\hat{M}_{T-1} := \sum_{t=1}^{T-1} E_t(P_t)^{-1} . \quad (13)$$

Al ver (13) en (12) y tomando el último término de (12) se obtiene (14), que corresponde a (11):

$$\hat{M}_T = E_T(P_T)^{-1} + \hat{M}_{T-1} . \blacksquare \quad (14)$$

a. Error de estimación

Dada la señal de referencia E de acuerdo con la figura 3, y la respuesta del filtro identificador \hat{E} en (15):

$$\hat{E} = \hat{M}P, \quad (15)$$

como se ilustra en la figura 4.

La traza del error de estimación (16) del sistema (2) en el instante de tiempo T , es ilustrada en la figura 5:

$$EE_T = \text{traza}(E_T - \hat{E}_T). \quad (16)$$

4.1. Estimación óptima

Teorema 3 (estimación óptima). La estimación (3) es óptima de acuerdo con el rotacional del funcional del error $\nabla J / \hat{M} = 0$.

Prueba 3. El funcional del error (17)

$$J = (E - \hat{E})(E - \hat{E})^T, \quad (17)$$

como se ilustra en la figura 6.

Al sustituir a (3) en (17) se tiene (18):

$$J = (E - \hat{M}P)(E - \hat{M}P)^T. \quad (18)$$

Desarrollando la transpuesta de (18) en (19):

$$J = (E - \hat{M}P)(E^T - P^T \hat{M}^T). \quad (19)$$

De (19) su producto punto en (20):

$$J = EE^T - \hat{M}PE^T - EP^T\hat{M}^T + \hat{M}PP^T\hat{M}^T. \quad (20)$$

$$J_T = \mathbf{E}\{(EE^T)\}. \quad (26)$$

Con rotacional $\frac{\nabla J}{\hat{M}} = 0$ en (21):

$$\frac{\partial \times (EE^T - \hat{M}PE^T - EP^T\hat{M}^T + \hat{M}PP^T\hat{M}^T)}{\partial \hat{M}} = 0. \quad (21)$$

Desarrollando el rotacional se tiene (22)

$$-EP^T - EP^T + \hat{M}PP^T + \hat{M}PP^T = 0. \quad (22)$$

Organizando los términos en (22) se tiene (23):

$$-2EP^T + 2\hat{M}PP^T = 0. \quad (23)$$

Despejando el estimador \hat{M} de (22) se tiene (24):

$$\hat{M} = EP^{-1}. \quad (24)$$

Que corresponde con (3), de tal forma que se puede concluir que el estimador es óptimo ya que cumple con la condición $\frac{\nabla J}{\hat{M}} = 0$. ■

4.2. Funcional del error recursivo

Teorema 4 (funcional recursivo). El funcional del error recursivo (25) para un instante en el tiempo T :

$$J_T = \frac{1}{T}((EE_T)^2 + (T-1)(J_{T-1})). \quad (25)$$

Prueba 4. El funcional del error a través de la esperanza matemática \mathbf{E} , en el instante de tiempo n tiene la forma (26), considerando el error de estimación descrito en (7):

Para un proceso estacionario, se tiene (27):

$$J_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (E_t E_t^T). \quad (27)$$

Desarrollando (27) se tiene (28):

$$J_T = \frac{1}{T} \left((E_T E_T^T) + \sum_{t=1}^{T-1} (E_t E_t^T) \right). \quad (28)$$

En (29) se describe el funcional del error en el instante de tiempo $(T-1)$:

$$J_{T-1} = \frac{1}{(T-1)} \sum_{t=1}^{T-1} E_t E_t^T. \quad (29)$$

Despejando de (29) se obtiene (30):

$$\sum_{t=1}^{T-1} E_t E_t^T = (T-1)(J_{T-1}). \quad (30)$$

Utilizando (30) en (28) se obtiene la descripción recursiva del funcional del error descrita en (31):

$$J_T = \frac{1}{T} ((EE_T)^2 + (T-1)(J_{T-1})). \quad (31)$$

Lo que corresponde a la forma (25). ■

Donde la traza del funcional del error (25) es descrita como (32):

$$Tr = \sum_{i=1}^{n^2} J_{i,i}. \quad (32)$$

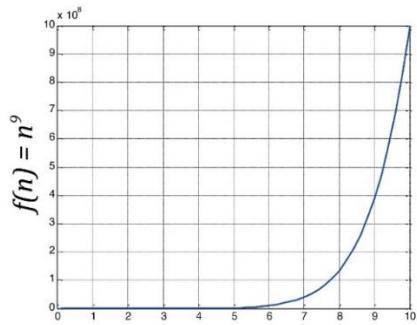


Fig. 7. Complejidad algorítmica de $(FF^T)^+$.

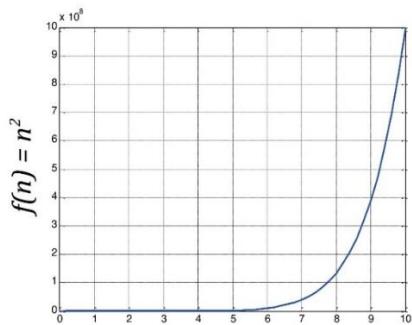


Fig. 8. Complejidad computacional de P^{-1} .

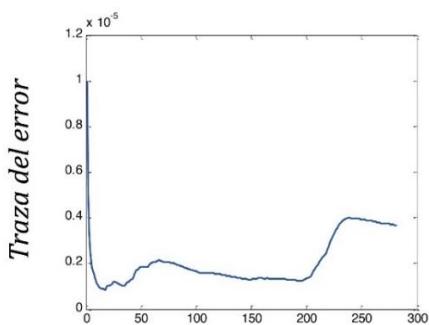


Fig. 9. La traza del funcional del error de identificación (32) para 300 iteraciones

Los $\{J_{i,i}\}$ son los elementos de la diagonal principal de J_T .

3. Discusión: Diagonalización con respecto a la pseudoinversa (Complejidad algorítmica)

La obtención de la matriz de ganancias del sistema (1) a través de la pseudoinversa de acuerdo con [19], se tiene en (33):

$$G = CF^T(FF^T)^+, \quad (33)$$

de $(FF^T)^+$. Donde FF^T , es una matriz singular, que requiere conocer sus valores y vectores propios para encontrar su pseudoinversa, lo cual tiene una complejidad algorítmica de la forma $O(n^9)$ de acuerdo con [25, 26, 27], como se observa en la figura 7.

El sistema equivalente de (1) de manera diagonal tiene la forma (2). La estimación de los parámetros de (2) es descrita por el estimador en (3) a través del inverso multiplicativo de cada una de las componentes de entrada del sistema descrito en (2), lo cual tiene una complejidad algorítmica $O(n^2)$ de acuerdo con [25, 26, 27], como se observa en la figura 8.

5. Experimentación

Se describe el comportamiento del funcional del error (25) y del filtro estimador (11), para ello se establece un sistema de referencia con las señales de entrada y salida (34) y (35):

$$F(i) = 0.005 \cos(i), \quad (34)$$

$$G(t-i) = (0.005 \sin(t-i) + 0.03 * \text{rand}) * 0.005 \cos(i). \quad (35)$$

Dadas (34) y (35) como sistema de referencia se construyó el sistema (1) que después fue transformado en (2) de manera diagonal para finalmente ser utilizado como referencia en las simulaciones que a continuación se ilustran.

En la figura 9, se ilustra la traza del funcional del error (25) para un proceso de estimación con 300 iteraciones. El sistema de referencia es del tipo caja negra con condiciones entrada-salida, acotadas.

El funcional del error recursivo (25), en la figura 10, se muestran 50 trazas con 220 iteraciones cada una, incluyendo a la mejor descripción de ellas en el sentido de Monte-Carlo [28, 29].

La curva representativa de acuerdo a Monte-Carlo [28, 29, 30] de los funcionales de error del

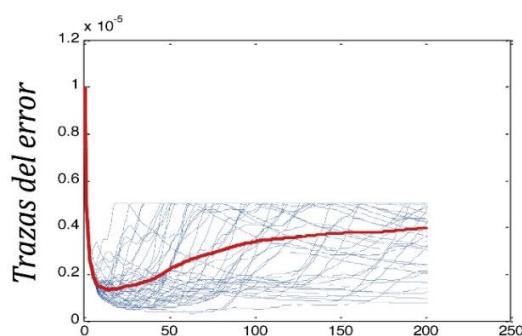


Fig. 10. 50 trazas del funcional del error (32) con un recorrido de 220 iteraciones cada una. Y la curva representativa de acuerdo a Monte-Carlo [29]

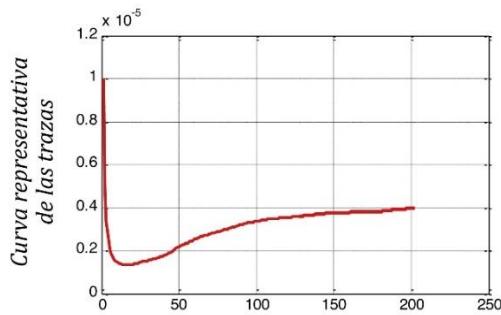


Fig. 11. Curva representativa de las trazas de los funcionales de error de acuerdo con Monte – Carlo

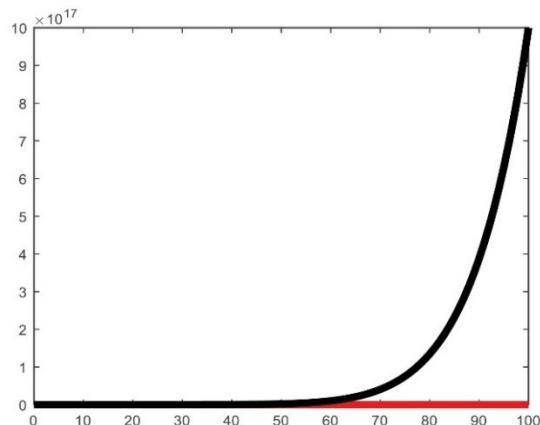


Fig. 12. Complejidad algorítmica de $(FF^T)^{+P^{-1}}$

sistema de identificación se ilustra en la figura 11.

6. Conclusiones

Transformar a un sistema de la forma (1) a la forma diagonal (2), permitió estimar G_{nn} a través de la inversa en lugar de utilizar pseudoinversa, logrando con ello disminuir el error de estimación [19] y la complejidad computacional del proceso de estimación, como se observa en las figuras 7 y 8. Así como una rápida discriminación de los elementos de (9), para solo enfocarse a los elementos de la diagonal principal. El lograr solo considerar a la diagonal principal del vector transformado a la matriz (7) con elementos descritos en (8), y ver que cada uno de ellos está en función del cociente $\left\{ \frac{H(t_i, x_1)}{F(x_1)} \right\}, i = \overline{1, n}$, como se observa en la figura 12 en donde se comparan ambas complejidades.

Agradecimientos

Agradecemos al Instituto Politécnico Nacional, a la SIP, COFAA y EDI por su apoyo para la realización de este trabajo.

Referencias

1. **Breit, G. (1964).** Limited Applicability of the Theory of Nucleon Tunneling. *Physical Review*, 135(6B), pp. 1323–1337, doi: 10.1103/PhysRev.135.B1323.
2. **Medel, J.J., Parrazales, R.U., & Orozco, R.P. (2011).** Estimador estocástico para un sistema tipo caja negra. *Revista Mexicana de Física*, Vol. 57, No. 3, pp. 204–210, doi: 10.1103/PhysRev.135.B1323.
3. **Chacón, M. (2007).** *Procesamiento Digital de Imágenes*. Trillas.
4. **Cordero, S. (2003).** Seismograms Deconvolution by Digital Division and Inverse Filtering Spectral Simulation and Digital Seismograms. *Compendium of Research Papers*, CNDG-Library Geophysical Institute of Peru, Vol. 4, pp. 131–146.
5. **Riedel, N. & Berg, J. (2013).** Statistical mechanics approach to the sample deconvolution problem. *Physical Review E*, 87(042715), pp. 1–6, doi: 10.1103/PhysRevE.87.042715.
6. **Repsilber, D., Kern, S., Telaar, A., Walzl, G., Black, G.F., Selbig, J., Parida, S.K., Kaufmann, H.S., & Jobsen, M. (2011).** Biomarker discovery in heterogeneous tissue samples – taking the in-silico

deconfounding approach. *BMC Bioinformatics*, Vol. 11, No. 27, pp. 1–15, doi: 10.1186/1471-2105-11-27.

7. **Lu, P., Nakorchevskiy, A., & Marcotte, E.M. (2003).** Expression deconvolution: a reinterpretation of DNA microarray data reveals dynamic changes in cell populations. *Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 100, No. 18, pp. 10370–10375, doi: 10.1073/pnas.1832361100.
8. **Marcazzó, J., Cruz-Zaragoza, E., Montiel, L., Chernov, V., & Calderón, T. (2012).** Thermoluminescence characteristics of the irradiated minerals extracted from red pepper (*Capsicum annuum* L.) spice. *Revista Mexicana de Física*, 58, pp. 228–233.
9. **Dong, D.W. & Gyulassy, M. (1993).** Neural filters for jet analysis. *Physical Review E*, Vol. 47, No. 4, pp. 2913–2922, doi: 10.1103/PhysRevE.47.2913.
10. **Shafieloo, V. & Souradeep, T. (2008).** Estimation of primordial spectrum with post-WMAP 3-year data. *Physical Review D*, 78(023511), pp. 1–10, doi: 10.1103/PhysRevD.78.023511.
11. **Medel, J.J. & Zagaceta, M.T. (2010).** Estimación-identificación como filtro digital integrado: descripción e implementación recursiva. *Revista Mexicana de Física*, Vol. 56, No. 1, pp. 1–8.
12. **Medel, J.J. & Zagaceta, M.T. (2012).** Estimador de parámetros para sistemas de orden superior. *Revista Mexicana de Física*, Vol. 58, No. 2, pp. 127–132.
13. **Bandzuch, P., Morháč, M., & Kristiak, J. (1996).** Study of the Van Cittert and Gold Iterative Methods of Deconvolution and their Application in the Deconvolution of Experimental Spectra of Positron Annihilation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 384(1997), pp. 506–515, doi: 10.1016/S0168-9002(96)00874-1.
14. **De la Rosa, J.I., Miramontes, G., García, E., Esquivel, M.A., & Villa, J. (2006).** A Comparative Evaluation of four Algorithms for Numeric Solution of the Deconvolution on Unidimensional Systems. *Computación y Sistemas*, Vol. 10, No. 2, pp. 135–158.
15. **Grewal, M.S. & Andrews, A.P. (2008).** *Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB*. Wiley, 3 ed.
16. **Diniz, P.S.R. (2013).** *Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation*. Springer, 4 ed.
17. **Jansson, P.A. (1984).** *Deconvolution with Applications in Spectroscopy*. Academic Press.
18. **Snieder, R., Sheiman, J., & Rodney, C. (2006).** Equivalence of the virtual-source method and wave-field deconvolution in seismic interferometry. *Physical Review E*, 73(066620), pp. 1–9.
19. **Medel, J.J. & García, C.V. (2010).** Estimación de parámetros usando la deconvolución y la pseudoinversa: descripción e implementación recursiva. *Revista Mexicana de Física*, Vol. 56, No. 1, pp. 54–60.
20. **Palma, R., Medel, J.J., & Garrido, G. (2012).** A m-dimensional stochastic estimator. *Revista Mexicana de Física*, Vol. 58, No. 1, pp. 69–76.
21. **Karrenberg, U. (2013).** *Signals, Processes and Systems*. Springer, 3 ed.
22. **Larson, R. & Falvo, D.C. (2013).** *Elementary Linear Algebra*. Brooks/Cole, 7 ed.
23. **Schay, G. (2012).** *A Concise Introduction to Linear Algebra*. Birkhäuser.
24. **Gareth, W. (2011).** *Linear Algebra with Applications*. Jones and Bartlett Publishers, 6 ed.
25. **Sedgewick, R. & Flajolet, P. (2013).** *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Pearson Education, 2 ed.
26. **Basu, S.K. (2013).** *Design Methods and Analysis of Algorithms*. PHI Learning Private Limited, 2 ed.
27. **Cormen, T.H., Leiserson, Ch.E., & Rivest, R.L. (2001).** *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2 ed.
28. **Kroese, D.P., Taimre, T., & Botev, Z.I. (2011).** *Handbook of Monte Carlo Methods*. Wiley.
29. **Kalos, M.H. & Whitlock, P.A. (2008).** *Monte Carlo Methods*. Wiley-VCH.

Consuelo V. García Mendoza es ingeniera en sistemas computacionales por la Escuela Superior de Cómputo del IPN. Obtuvo su maestría y doctorado en Tecnología Avanzada por el CICATA-Legaría del IPN. Actualmente es profesora de la Escuela Superior de Cómputo del IPN. Su área de investigación es el filtrado digital de señales.

José de Jesús Medel Juárez es aeronáutico por la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Obtuvo su maestría y doctorado en la especialidad de Control Automático por el Cinvestav. Actualmente es investigador del Centro de Investigación en Computación del IPN. Su área de investigación es el control automático y el filtrado digital de señales.

Artículo recibido el 25/10/2013; aceptado el 03/12/2013.
Autor de correspondencia es C.V. García Mendoza.