

# Modelos de regresión para el pronóstico de series temporales con estacionalidad creciente

Sergio David Madrigal Espinoza

División de Estudios de Posgrado, FIME, UANL,  
San Nicolás de los Garza, NL,  
Mexico

sergio.madrigales@uanl.edu.mx

**Resumen.** Se compara el desempeño de tres modelos de regresión, en términos de su efectividad predictiva, para el caso de series temporales con estacionalidad creciente. Se emplearon 617 series en el cotejo así como tres modelos de los cuales, uno es propuesta original de este trabajo. Adicionalmente, se compararon estos modelos contra uno de raíces unitarias, típicamente empleado para el pronóstico de las series de interés. Entre los resultados más importantes, se muestra que la efectividad de los modelos de regresión dependerá del horizonte de pronóstico así como del grado de su curvatura. A menor curvatura y mayor horizonte, mejor será su desempeño. Se mostrarán las condiciones bajo las cuales, los modelos de regresión pueden pronosticar tan bien o incluso mejor que la alternativa típica. Por último, se realiza un análisis de los intervalos de predicción y sobre cómo mejorar su efectividad.

**Palabras clave.** Modelos de regresión, series temporales, estacionalidad, econometría.

## Regression Models for Time Series with Increasing Seasonality

**Abstract.** In this paper, three regression models are compared according to their performance in terms of forecast accuracy, for the case of time series with increasing seasonality. 617 series are used in the comparison as well as three models, being one of them an original contribution of this work. In addition, the regression models are compared with the autoregressive approach, commonly used in the forecast of these series. The results indicate that the performance of the regression models depends on the forecast horizon and on the degree of curvature of the series. At fewer curvature and longer forecast horizon, its performance is better. The conditions under which the regression models outperform the autoregressive approach are discussed. Also, the performance of the

prediction intervals in order to improve its effectiveness is analyzed.

**Keywords.** Regression models, time series, seasonality, econometrics.

## 1. Introducción

En el contexto de la Econometría, los modelos de regresión pueden ser preferidos ante otras metodologías, no sólo por costumbre, sino por sencillez y riqueza en interpretación. Algunos análisis típicamente realizados con esta clase de modelos son: el *ceteris paribus*, el de elasticidades y análisis con varios regresores, por mencionar algunos.

Un *modelo de regresión*, es aquel en el que existe una variable dependiente, que es explicada por una o más variables independientes. Es común que hayan varias variables independientes que expliquen un fenómeno. Si el tiempo es una de esas variables, se debe tomar en cuenta que la serie puede exhibir estacionalidad.

Para propósitos de este trabajo, se supondrá que el tiempo es la única variable independiente y que explica la serie en su totalidad, incluyendo cada uno de sus patrones. En [11], se hace referencia a este tipo de modelos de regresión como «puramente deterministas», mientras que en [8], se emplea el término «altamente determinista», haciendo referencia a que las desviaciones de los modelos siguen algún proceso autorregresivo. Sin embargo, en el contexto econométrico, aún cuando las desviaciones de la regresión están autocorrelacionadas, se sigue considerando al modelo como uno de regresión, aunque hay cosas que cambian, como el método de estimación, de mínimos cuadrados

ordinarios, a mínimos cuadrados iterativamente reponderados. En este trabajo, se empleará el término «regresión» para hacer referencia a modelos altamente deterministas lineales y no lineales (con transformación de potencia u otro tipo de interacción paramétrica no lineal) que dependen del tiempo y contemplando que la fuente de variación del modelo, muestre o no autocorrelaciones. Por ejemplo, cuando se hable de un modelo de «regresión lineal», se estará hablando de un modelo de regresión lineal múltiple cuyas desviaciones pueden o no estar autocorrelacionadas.

El objetivo del presente trabajo es caracterizar el desempeño de pronóstico de diversos modelos de regresión, al pronosticar series con estacionalidad creciente. En la Fig. 1 se muestra una serie con el patrón de interés. Son las ventas nacionales de vehículos subcompactos por mes, desde enero de 1995, hasta diciembre de 2006. Se aprecia que las ventas tuvieron un crecimiento constante en su tendencia hasta aproximadamente el año de 2004. Después de esta fecha, las ventas empezaron a bajar, creando una tendencia con forma parabólica. Se observa también que las amplitudes estacionales crecen de forma proporcional a la tendencia. Es para series de esta naturaleza, para las que se desea conocer, ¿cuál es el modelo de regresión que mejor las pronostica?

Para el caso de estacionalidad creciente, el método empleado no es puramente de regresión lineal, ya que se debe emplear la transformación logarítmica o alguna otra transformación de la familia Box-Cox para lograr que la estacionalidad creciente, observada en los datos, se convierta en constante. Después, se utiliza el modelo de regresión lineal con tendencia polinomial y variables dicotómicas. Por último, la transformación inversa es aplicada al modelo y se utiliza para el pronóstico de la serie.

En este trabajo, se proponen dos alternativas que, hasta donde se tiene conocimiento, no se han empleado en el contexto econométrico y mucho menos han sido contrastadas con el procedimiento con transformación. La ventaja de las propuestas, consiste en que no necesitan ningún tipo de transformación de potencia, facilitando la interpretación directa de los componentes de cada modelo.

La primera de estas alternativas consiste en extender un modelo de regresión lineal, empleado

para el caso de tendencia lineal y estacionalidad creciente, al caso de tendencia polinomial. El resultado es un modelo de regresión lineal, que no necesita ningún tipo de transformación para modelar el patrón de estacionalidad creciente. Sin embargo, este modelo utiliza muchos parámetros, lo que puede conducir a un sobreajuste.

La segunda alternativa, consiste en un modelo de regresión que utiliza a lo mucho, un poco más de la mitad de los parámetros empleados en la primera alternativa, pero manteniendo a la vez, una buena capacidad de modelado. La desventaja de este procedimiento radica en su no linealidad, aunque este problema se puede solucionar si se supone el conocimiento de uno o dos parámetros.

Los modelos de regresión utilizados en este trabajo, son recomendados para el pronóstico de series temporales con estacionalidad creciente y desviaciones autocorrelacionadas. No deben ser empleados si las desviaciones de la serie que se debe pronosticar exhiben *heterocedasticidad*; su varianza no es constante a través del tiempo. De esta forma, no se recomiendan los modelos de regresión para series temporales como las de los mercados de divisas, ya que son volátiles y por tanto, heterocedásticas. Tampoco es recomendable el empleo de los modelos de regresión, si la serie que se debe pronosticar muestra cambios repentinos en sus patrones; la metodología de modelos de suavizado exponencial, sería más indicada en esta situación, ya que sus modelos están especialmente diseñados para lidiar con este problema.

Aparte de comparar los modelos mencionados entre sí, también, se empleará un modelo con dos raíces unitarias, una asociada a la tendencia y otra a la estacionalidad, y con transformación de Box-Cox. A este modelo, se hará referencia como *seasonal auto - regressive integrated and transformed (SARIT) process*. Aunque este modelo no sea una regresión propiamente dicha, es considerado un procedimiento típico para el pronóstico de las series de interés. Así, se podrá conocer el desempeño de los modelos de regresión, comparado con alternativas comúnmente empleadas en la literatura.

La *competición M*, es una colección de 1001 series temporales de naturaleza demográfica, industrial y macroeconómica, que ha sido utilizada

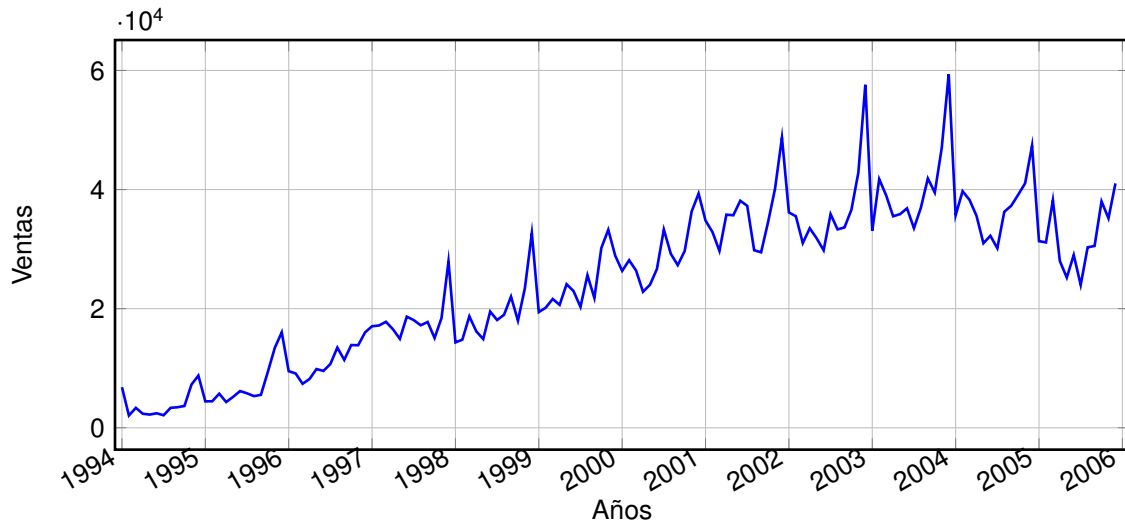


Fig. 1. Ventas nacionales de vehículos subcompactos por mes

para comparar la efectividad de diferentes metodologías de pronóstico [18]. Las frecuencias de las series temporales de la competición M son mensual, trimestral y anual, siendo las de frecuencia mensual las que más abundan, con 617. En este trabajo, se utilizarán las series mensuales de la competición M, para comparar la efectividad de los modelos de regresión.

Los resultados obtenidos indican que los modelos de regresión, pueden ser una buena alternativa de pronóstico, comparados con alternativas típicas de la literatura como el modelo SARIT. Esto siempre y cuando se observe que el grado de curvatura de los modelos sea el indicado. Por ejemplo, el modelo de regresión con variables dicotómicas y transformación de potencia así como la segunda alternativa propuesta, no deben emplearse si el grado del polinomio que modela la tendencia es mayor o igual que tres. La primera alternativa de regresión, no debe emplearse si su grado es mayor o igual que uno. Aunque esto parezca restrictivo, lo cierto es que hasta un 85.7% de las series pueden ser modeladas con estas imposiciones. El horizonte de pronóstico también es relevante. Mientras que la primera y segunda alternativas pronostican mejor horizontes mayores a cuatro y siete, respectivamente, el modelo de regresión con transformación de potencia pronostica mejor que

el modelo SARIT desde el segundo horizonte de pronóstico. En general, la segunda alternativa es la que mejores resultados de pronóstico dará, además de ser la que más series puede pronosticar.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: Primero, se verán los antecedentes y el marco teórico. Después, la metodología, donde se mostrarán los tres modelos de regresión utilizados en la comparación, así como el modelo SARIT típicamente empleado en estos casos. Luego, se indicarán los lineamientos observados durante el desarrollo del experimento comparativo, cuyos resultados serán mostrados (resumidamente) y discutidos. Al final, se presentan conclusiones y referencias.

## 2. Antecedentes

Existen varias alternativas para el pronóstico de series temporales con estacionalidad creciente. Algunos ejemplos son:

1. Métodos de descomposición [5, 6, 19].
2. Modelos ARIMA con transformación logarítmica o de Box-Cox [3, 4].
3. Modelos ARIMA con filtros diferenciadores y componentes deterministas [2, 7, 8].
4. Suavizado exponencial [1, 13, 14, 16, 21].

### 5. Modelos periódicos autorregresivos [9, 10, 20, 23].

Cada una de estas metodologías puede exhibir diversas virtudes y defectos. Véase [17] para una lista exhaustiva. No se pretende, de ninguna manera, desacreditar o favorecer ninguna de estas metodologías. Sólo se observa que los modelos de regresión, son preferidos por los economistas, debido que pueden modelar todos los patrones observados con parámetros. Así, es posible asignar significados a éstos que puedan ser de utilidad, como crecimiento, incrementos debidos a la estacionalidad etc. Además, los modelos de regresión permiten realizar diversos análisis de interés como: el *ceteris paribus*, el de elasticidades y análisis con varios regresores.

Aun cuando se puede argumentar que lo anterior es posible con otras metodologías de pronóstico, ya sea por utilidad o por costumbre, los modelos de regresión son los más empleados en textos econométricos como [24].

## 3. Marco teórico

En el presente documento, se empleará la metodología de regresión para el pronóstico de series con estacionalidad creciente. A continuación, se presentan dos modelos conocidos de regresión, así como un tercero que es propuesta original de este trabajo. Note que los siguientes modelos se deben emplear si la serie de interés, además de mostrar estacionalidad creciente, también muestra tendencia lineal. La extensión a tendencias polinomiales es el tema de la siguiente sección.

### 3.1. Alternativas de regresión

Un modelo simple pero efectivo para el pronóstico de series temporales con tendencia lineal y estacionalidad creciente es el siguiente:

$$BC(y_t, \lambda) = \beta_0 t + \sum_{s=1}^m \beta_s D_{s,t} + \mu_t, \quad (1)$$

donde  $y_t$  es la observación realizada al tiempo  $t$  ( $t = 1, \dots, n$ );  $\beta_0$  es una constante que representa la pendiente o racha de crecimiento de los datos;

$\beta_s$  representa un incremento o decremento en la serie debido a la estación  $s$  ( $s = 1, \dots, m$ );  $D_{s,t}$  son variables binarias que toman un valor igual a uno si la estación  $s$  se ocurre al tiempo  $t$  o cero de otro modo;  $\mu_t$  es la fuente de variación del modelo; finalmente,  $BC(y_t, \lambda)$  representa alguna transformación de Box-Cox de la serie con la potencia « $\lambda$ ». La ecuación (1) describe un modelo de uso común en la literatura, sobretodo en textos de econometría como [24]. Note que este modelo es adecuado si la serie exhibe tendencia lineal. Más adelante, se verá cómo extender este y los siguientes modelos para el caso de tendencia no lineal.

Un segundo modelo de regresión para el pronóstico de series temporales con tendencia lineal y estacionalidad creciente puede encontrarse en [2]. Su propuesta es la siguiente:

$$y_t = \sum_{s=1}^m (\alpha_s + \beta_s t) D_{s,t} + \mu_t. \quad (2)$$

El modelo (2) ajusta una recta, con intercepto  $\alpha_s$  y pendiente  $\beta_s$ , a cada uno de los  $m$  conjuntos de datos que representan una estación. La ecuación (2), constituye un modelo de regresión lineal que no necesita ningún tipo de transformación de potencia para modelar el patrón de estacionalidad creciente. En [8], se reporta que este modelo pronostica mejor que otras alternativas similares de la literatura. Su desventaja radica en la excesiva utilización de parámetros. Sólo para el caso de tendencia lineal, este modelo utilizará  $2m$  parámetros, lo cual aumenta la probabilidad de que el modelo sobreajuste la serie y conduzca a malos pronósticos.

En [17], se propone un modelo de regresión, para el caso particular con tendencia lineal, que ajusta una recta a cada estación. Adicionalmente, este modelo supone que todas estas rectas se interceptan en un solo punto del plano. La ecuación de este modelo es como sigue:

$$y_t = y_0 + \sum_{s=1}^m \beta_s (\gamma_0 + t) D_{s,t} + \mu_t, \quad (3)$$

donde  $y_0$  y  $\gamma_0$  componen la coordenada  $(-\gamma_0, y_0)$  en la que se interceptan las rectas. Imponer esta

restricción, reduce el número de parámetros a utilizar. Para el caso de tendencia lineal, este modelo utilizará solamente  $m + 2$  parámetros, casi la mitad de los utilizados por el modelo de la ecuación (2).

En la siguiente sección, se verá la extensión de cada uno de estos modelos para el caso de tendencias polinomiales. Se verá también, el modelo SARIT contra el cual, se comparará el desempeño de los modelos de regresión.

## 4. Metodología

### 4.1. Generalización para tendencias polinomiales

Se desea comparar los modelos vistos en la sección anterior, en términos de su pronóstico, y sin limitarse al caso de tendencia lineal. Es necesario extender los modelos de regresión, dotándolos de la capacidad de pronosticar series con tendencia no lineal (polinomial). Además, se desea comparar los modelos de regresión contra alguna alternativa, típicamente empleada en la literatura para el pronóstico de las series de interés. Por esta razón, se presenta el modelo SARIT con transformación de Box-Cox. Las versiones extendidas, así como la alternativa típica, se presentan a continuación:

(a) El modelo con transformación de Box-Cox (MTBC):

$$BC(y_t, \lambda) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_d t^d + \sum_{s=1}^m D_{s,t} \beta_s + \mu_t. \tag{4}$$

Es a este modelo, al que se designó en la introducción como el modelo clásico con variables dicotómicas y transformación de Box-Cox. Su extensión al caso no lineal, no implica ninguna novedad. Simplemente, se modificó la tendencia lineal ( $\alpha t$ ) por una polinomial ( $\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_d t^d$ ). El parámetro  $d$ , denota el grado del polinomio que modela la tendencia de la serie.

(b) El modelo de regresión lineal (MRL):

$$y_t = \sum_{s=1}^m (\alpha_s + \beta_s t + \gamma_s t^2 + \dots + \omega_s t^d) D_{s,t} + \mu_t. \tag{5}$$

Este modelo, en lugar de ajustar una recta, ajusta una curva a cada conjunto de datos que representa una estación. Es una extensión que, si bien ha sido sugerida, jamás ha sido empleada en la literatura. Su desempeño de pronóstico, es una de las incógnitas que este trabajo revelará. En la introducción de este trabajo, se hizo referencia a este modelo como la primera alternativa. Es importante notar que, a pesar de que la tendencia es modelada con un polinomio de grado  $d$ , el MRL es, como su nombre lo indica, un modelo de regresión lineal múltiple; no es lineal respecto al tiempo, sino a los parámetros  $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \dots, \omega_s$ , ya que éstos interactúan de manera lineal (suma ponderada por los términos  $t^i, i = 0, 1, \dots, d$ ).

(c) El modelo de regresión no lineal (MRNL):

$$y_t = y_0 + \sum_{s=1}^m \beta_s (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_{d-1} t^{d-1} + t^d) D_{s,t} + \mu_t. \tag{6}$$

Esta es una alternativa completamente nueva. Mediante el polinomio  $\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_{d-1} t^{d-1} + t^d$ , se modela la tendencia de la serie. No es necesario multiplicar el último término por un parámetro porque, implícitamente,  $\beta_s$  lo contiene. A este modelo, se hizo referencia en la introducción, como la segunda alternativa.

(d) Un modelo SARIT con transformación de potencia:

$$\Delta_1 \Delta_m BC(y_t, \lambda) = \mu_t. \tag{7}$$

El filtro  $\Delta_1$ , sirve para remover la tendencia de la serie mientras que  $\Delta_m$ , remueve su estacionalidad. Para remover el efecto de estacionalidad creciente, se emplea la transformación de Box-Cox. Se considera que este modelo puede dar

buena idea del desempeño de pronóstico de los modelos de regresión, contra alternativas típicamente empleadas en la literatura.

## 4.2. Lineamientos observados

Al comparar estos modelos, se observaron los siguientes lineamientos:

- I. Se pronosticaron las 617 series mensuales de la competición M con cada modelo.
- II. Para evitar problemas de optimización, se cambió la escala original de las series, dividiendo cada serie entre su valor máximo y luego, multiplicando por cien.
- III. Antes de ajustar cada modelo de regresión a una serie determinada, primero, se ajustaron polinómios con grados del uno al diez. Esto para tener una mejor idea del grado de curvatura de la tendencia de cada serie. Se seleccionó el polinomio que minimizaba el Criterio de Información de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés). Cuando se ajusta un modelo a un conjunto de datos, se espera que las desviaciones sean mínimas (o que alguna otra medida de bondad de ajuste, como la función de verosimilitud, sea optimizada). Siempre es posible lograr este objetivo añadiendo parámetros al modelo. Sin embargo, esto producirá un sobreajuste. Es decir, el modelo se ajustará bien a los datos conocidos, pero lo hará mal con datos nuevos. El criterio AIC, permite elegir el modelo que, utilizando menos parámetros, da un mejor ajuste. Se espera que el modelo que tiene el menor valor de AIC para un conjunto de datos, sea el que mejor los pronostique..
- IV. Se supuso que la fuente de variación  $\mu_t$ , era un proceso AR( $p$ ), siendo  $p = 0, 1, 2, \dots, p_{\text{máx}}$ , donde  $p_{\text{máx}}$  podía tomar alguno de los valores 0, 1, 3, 6, 9 ó 12. El caso  $p_{\text{máx}} = 0$ , denota la situación en la que la fuente de variación, seguía un proceso normal, independiente e idénticamente distribuido.
- V. Una vez postulado un valor para  $p$ , una optimización local adicional para el estimador del parámetro  $d$  era realizada.
- VI. Para cada modelo y cada serie, los valores de  $p$  y  $d$ , se seleccionaron de tal forma que el criterio AIC fuera el mínimo. Lo propio se hizo para el estimador del parámetro  $\lambda$  en los casos con transformación de potencia. Los parámetros de cada modelo se estimaron de tal forma que su función de verosimilitud fuera máxima.
- VII. Para los modelos con transformación Box-Cox, el AIC se calculaba directamente de la serie transformada. Esto es lo sugerido en [3].
- VIII. Para el MRNL, el logaritmo de la verosimilitud fue calculado suponiendo que los parámetros  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{d-1}$  eran conocidos. Es decir, se linealizó el modelo. Sin embargo, estos parámetros si fueron incluidos al momento de calcular la penalización del criterio AIC.
- IX. Como periodo de ajuste, se tomaron todos los datos de cada serie, salvo los últimos doce, que fueron designados como periodo de prueba. Para conocer el desempeño de los modelos, se contrastó el pronóstico de cada uno con las observaciones del periodo de prueba.
- X. Para comparar el desempeño de los modelos, durante cada uno de los doce horizontes de pronóstico, se empleó el estadístico *absolute forecast error* (AFE), definido de la siguiente manera:
 
$$AFE_h = |y_{n-12+h} - \hat{y}_{n-12+h}|, \quad h = 1, \dots, 12.$$
 El estadístico AFE, brinda información bastante precisa sobre la desviación de pronóstico ocurrida en el horizonte  $h$ , de forma independiente a las desviaciones de los horizontes pasados. Gracias a esta característica, AFE puede determinar el horizonte de pronóstico para el cual, cada modelo tiene un mejor desempeño. Además, puesto que los datos ya están escalados, es posible comparar el desempeño de cada modelo con cada serie, directamente y sin porcentajes.

- XI. Adicionalmente, se empleará el estadístico *root mean squared forecast error* (RMSFE), definido de la siguiente manera:

$$RMSFE = \sqrt{\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} (y_{n-12+i} - \hat{y}_{n-12+i})^2}.$$

El estadístico RMSFE, resume en un solo dato, el desempeño del modelo durante los doce horizontes de pronóstico. Será de utilidad para determinar, globalmente, que modelo es el mejor.

- XII. Todo lo anterior se realizó con GNU R [15], el *software* estadístico de código abierto. En particular, la función `arima()` del paquete `stats` [22], fue de mucha ayuda, pues incluye la capacidad de estimar modelos de regresión lineal con desviaciones autocorrelacionadas. El paquete `Mcomp` [12], fue de la mayor utilidad, pues contiene las series de la competición M de una manera ordenada y fácil de entender.

## 5. Resultados

### 5.1. Pronóstico

En la Tabla 1, se muestran las medias sobre las 617 series, de los estadísticos  $AFE_h$  ( $h = 1, \dots, 12$ ) y RMSFE. También, se muestra la media sobre todas las series y valores de  $h$ , obtenidas con cada modelo. Durante el experimento, se encontraron resultados aberrantes. Como regla, todos los pronósticos que condujeran a un AFE promedio, sobre los doce horizontes de pronóstico, mayor que 70, fueron excluidos. Resultó que el MTBC, era el modelo más inestable (con 37 exclusiones), seguido del MRNL (7) y el modelo SARIT (3). La naturaleza lineal y la falta de transformaciones de potencia, hicieron que el MRL no tuviera observaciones aberrantes. Los resultados indican que, entre los modelos de regresión, la efectividad del pronóstico dependerá del horizonte. Por ejemplo, para  $h = 1, 2, 3$  el modelo MTBC es la mejor alternativa entre los modelos de regresión. Para el resto de los horizontes, la mejor alternativa de regresión es

el MRNL, con la excepción de  $h = 10, 12$  donde el MRL lo hizo mejor. Sin embargo, es un hecho que los modelos de regresión fueron superados por el modelo SARIT, prácticamente en todos los valores de  $h$ .

**Tabla 1.** Estadísticos promedio, excluyendo resultados aberrantes

$h$	MTBC	MRL	MRNL	SARIT
1	6.55	9.54	7.86	5.94
2	7.44	10.14	8.57	7.41
3	9.09	11.3	9.61	7.77
4	10.44	11.43	9.67	8.43
5	11.65	12.15	9.73	8.88
6	13.84	12.79	11.22	10.13
7	15.87	13.12	12.08	11.05
8	17.29	12.39	12.03	11.13
9	19.38	12.8	11.94	11.86
10	21.26	13.36	13.73	12.64
11	23.71	13.1	12.92	12.92
12	27.03	13.49	14.11	14.32
RMSFE	21.25	14.35	13.1	12.28
Media	15.29	12.13	11.12	10.21
Excluidos	37	0	7	3

Según la Tabla 1, el modelo SARIT supera el desempeño de los modelos de regresión. Sin embargo, esta tendencia puede revertirse, excluyendo más datos aberrantes de los resultados. Esto podría ser de utilidad, únicamente si fuera posible conocer, de antemano, cuales son las circunstancias que causaran resultados aberrantes con cada modelo. ¿Cómo saber, a priori, si uno de estos modelos terminará en un mal pronóstico? Después de investigar, fue posible responder esta pregunta. Resultó que la bondad en el desempeño está fuertemente asociada a valores pequeños de  $d$ . En la Tabla 2, se muestran las medias, para cada valor de  $d$  y con cada modelo.

En la Tabla 2, se muestran los valores del estimador del parámetro  $d$  para los cuales, el pronóstico con cada modelo será *inacceptable*. Se supondrá que un modelo con valores promedio del estadístico AFE por encima de 12 es indeseable (no confundir con aberrante). Para el MTBC, esto pasará cuando  $d \geq 3$ . De hecho, las observaciones aberrantes

**Tabla 2.** Medias, respecto a cada valor de  $d$ . Entre parentesis, está el número de series con ese valor de  $d$  para cada modelo. El asterisco indica los casos en los que se observaron (y removieron) pronósticos con valores promedio del estadístico AFE mayores que 500 (nueve en total). Esto sólo ocurrió con el MTBC

$d$	MTBC	MRL	MRNL
1	9.46 (184)	11.11 (420)	8.1 (262)
2	11.37 (107)	13.72 (134)	10.75 (267)
3	15.4 (91)	13.6 (36)	23.13 (59)
4	26.6* (69)	18.26 (27)	39.81 (18)
5	37.64* (104)	-	33.04 (7)
6	59.05* (44)	-	49.28 (4)
7	46.55 (9)	-	-

ocurren cuando  $d$  toma los valores cuatro, cinco y seis. El MRL, se debe emplear únicamente si  $d = 1$ . Aunque esto parezca restrictivo, se debe observar que hubieron 420 series (68%) que cumplieron con esta característica. Finalmente, el MRNL debe emplearse sólo si  $d = 1$  ó  $d = 2$ . Aún con esta restricción, el MRNL es el que mejor desempeño tuvo cuando tomó los valores de  $d$  para los que es recomendado. De hecho, tomando estos valores, el MRNL podrá pronosticar aceptablemente 529 series (85.7%).

Considerando los valores de  $d$  para los cuales, cada modelo de regresión muestra un pronóstico aceptable, se elaboraron tres tablas en las que se compara cada modelo de regresión contra el modelo SARIT. Puesto que ahora se conoce a priori, cuál serie puede ser pronosticada aceptablemente con cada modelo, se espera que los resultados sean diferentes a los obtenidos en la Tabla 1. Los resultados de las comparaciones, aparecen en las Tablas 3, 4 y 5. Se están presentando las medias del estadístico AFI para cada valor de  $h$ , indicando los valores del estimador del parámetro  $d$  y el porcentaje de las series empleado en cada comparación. No hubo datos aberrantes que remover.

A grandes rasgos, los resultados indican que los modelos de regresión mostrarán un mejor desempeño de pronóstico a mediano y largo plazo que la alternativa típica de la literatura. De hecho, el MTBC será mejor para cada valor de  $h$  que el modelo SARIT, salvo en el caso  $h = 1$ . El MRL,

**Tabla 3.** MTBC Vs. SARIT,  $d = 1$  y  $d = 2$ , 47.2%

$h$	MTBC	SARIT
1	7.24	6.49
2	7.65	8.06
3	8.72	8.81
4	9.07	9.33
5	9.12	9.95
6	10.05	11.64
7	11.35	12.4
8	11.35	12.23
9	11.18	12.74
10	11.8	13.15
11	11.31	13.86
12	13.1	14.64
RMSFE	12.1	12.99
Media	10.16	11.11

**Tabla 4.** MRL Vs. SARIT,  $d = 1$ , 68%

$h$	MRL	SARIT
1	8.82	6.19
2	9.73	8.4
3	10.42	8.74
4	10.71	9.38
5	11.09	10.32
6	11.8	11.39
7	11.86	12.4
8	11.1	12.58
9	11.31	13.35
10	12.26	13.81
11	11.86	14.16
12	12.36	15.61
RMSFE	13.13	13.29
Media	11.11	11.36

será mejor a partir de la segunda mitad del año ( $h \geq 7$ ). Finalmente, el MRNL mostrará su mejor desempeño en los últimos dos cuatrimestres del año ( $h \geq 5$ ). Esto demuestra que los modelos de regresión, no sólo son valiosos por sus interpretaciones econométricas, sino por que pueden brindar un pronóstico tan bueno o incluso mejor que alternativas típicas de la literatura. Esto siempre y cuando se emplee la información del estimador de  $d$  en forma adecuada.



**Tabla 5.** MRNL Vs. SARIT,  $d = 1$  y  $d = 2$ , 85.7%

$h$	MRNL	SARIT
1	7	5.83
2	6.97	7.12
3	8.18	7.72
4	8.5	8.17
5	8.53	9.15
6	9.58	9.88
7	10.42	10.63
8	10.12	10.83
9	9.93	11.33
10	11.5	12.12
11	10.65	12.4
12	11.83	13.44
RMSFE	11.09	11.65
Media	9.44	9.89

## 5.2. Intervalos de predicción

Una de los aspectos más relevantes de un modelo de pronóstico son sus intervalos predictivos. Básicamente, se espera que éstos cumplan con la cobertura teórica indicada, pero que también, sean tan estrechos como sea posible. Aunque estos objetivos estén en conflicto, se espera que haya un modelo que cubra mejor que los demás, a la vez que la amplitud de sus intervalos predictivos sea razonablemente reducida. Se puede decir, que los modelos de regresión tienen intervalos de predicción reducidos, mas no cumplen con la cobertura teórica. Empleando un nivel de confianza de 95%, los modelo MTBC, MRL y MRNL, mostraron una cobertura media de 33%, 46% y 65% con amplitudes medias de 65.71, 17.51 y 22, respectivamente. La diferencia entre la cobertura postulada y la observada, se debe a que la deducción de los intervalos de predicción supone que los parámetros de cada modelo son conocidos. Esta suposición, produce una disminución en la estimación de la varianza de los intervalos de predicción, que son de la forma:

$$\hat{y}_{n+h} \pm 1.96\sigma_h, \quad h = 1, 2, \dots, 12,$$

donde  $\sigma_h$  es la desviación del error de pronóstico  $h$  pasos adelante. Puesto que se supuso que los

parámetros eran conocidos, este valor debe estar siendo subestimado. Para corregir esta situación, se buscará un valor  $k$ , tal que  $k * \sigma_h$ , sea un estimador adecuado de la desviación del pronóstico. Es decir,  $k$  es una constante de corrección que compensa la suposición de información perfecta. El valor de  $k$  que produce una cobertura observada similar a la teórica para el MRNL es  $k = 3.34$  con amplitud media de 73.46. Para los modelos MTBC y MRL, no fue posible encontrar un valor de  $k$  menor a cincuenta, por lo que se concluye que este ejercicio no puede realizarse con estos modelos.

Sin embargo, si se observa la cobertura mediana en lugar de la media, los valores de  $k$  para los modelos MTBC, MRL y MRNL son  $k = 23.2$ , 2.94 y  $k = 1.74$  con las amplitudes medianas 58.37, 45.8 y 34.77, respectivamente.

¿Cobertura media o mediana? Se recomienda observar la cobertura mediana en lugar de la media. Ésto, no sólo por que es la única disponible para dos de los tres modelos, sino por la naturaleza del estadístico cobertura, al que se puede ver como una variable aleatoria que toma valores en el intervalo  $[0, 1]$  y cuya esperanza está cerca del límite derecho del intervalo. La distribución de esta variable no es simétrica; sus realizaciones aberrantes, ocurrirán siempre hacia la izquierda y no podrán ser compensadas por valores mucho mayores que 0.95. Es en estos casos, en los que el estadístico mediana es más robusto que la media y por eso es recomendado.

## 6. Conclusiones

Se estudió el desempeño de tres modelos de regresión y se compararon frente a una alternativa típica de la literatura. Los resultados indican que el desempeño de pronóstico de los modelos de regresión, dependerá del grado de curvatura de su tendencia así como del horizonte de pronóstico. Entre menor sea la curvatura y mayor el horizonte de pronóstico, el desempeño de los modelos de regresión será mejor.

En cuanto a intervalos predictivos se refiere, los modelos de regresión no tendrán un buen desempeño, debido a que la deducción de éstos supone que los parámetros son conocidos. Únicamente se

puede esperar un buen desempeño si se aplica una corrección a la varianza que sea consecuente con dicha suposición. Es importante señalar que la mejora que se menciona, aplica si el estadístico observado es la cobertura mediana y no la media.

De los tres modelos de regresión que se emplearon en el cotejo, uno de ellos, el MRNL, es propuesta y contribución original de esta investigación. Los resultados indican que el desempeño de pronóstico de este modelo, es al menos tan bueno como el del MTBC. Debido a las características del MRNL, se recomienda su empleo si se busca una alternativa al MTBC. Esto debido, no sólo al desempeño de pronóstico mostrado por el MRNL, sino a que resulta sencillo ver a este modelo como uno de regresión lineal, para lo cual basta suponer el conocimiento de uno o dos parámetros.

## Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento al Programa de Mejoramiento al Profesorado (PROMEP) por financiar la presente investigación. La clave del proyecto es: 103.5/12/3585.

## Referencias

- Akram, M., Hyndman, R. J., & Ord, J. K. (2009).** Exponential smoothing and non-negative data. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, Vol. 51, No. 4, pp. 415–432.
- Bowerman, B. L., Koehler, A. B., & Pack, D. J. (1990).** Forecasting time series with increasing seasonal time variation. *Journal of Forecasting*, Vol. 9, pp. 419–436.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008).** *Time series analysis: Forecasting and Control*. WILEY, 4 edition.
- Chatfield, C. & Prothero, D. L. (1973).** Box jenkins seasonal forecasting: Problems in a case study (with discussion). *Journal of The Royal Statistical Society A*, Vol. 136, pp. 295–336.
- Cleveland, W. S. (1983).** Seasonal and calendar adjustment. In *Handbook of Statistics*, volume 3. Elsevier Science Publishers B.V., 39–72.
- Dagum, E. B. (1982).** Revisions of time varying seasonal filters. *Journal of Forecasting*, Vol. 1, pp. 20–28.
- Franses, P. H. (1996).** Recent advances in modeling seasonality. *Journal of Economic Surveys*, Vol. 10, pp. 299–345.
- Franses, P. H. & Koehler, A. B. (1998).** A model selection strategy for time series with increasing seasonal variation. *International Journal of Forecasting*, Vol. 14, No. 3, pp. 405–414.
- Ghysels, E. (1991).** Are business cycle turning points uniformly distributed throughout the year? Cahiers de recherche 9135, Université de Montréal, Département de sciences économiques.
- Ghysels, E. (1994).** On the periodic structure of the business cycle. *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 12, pp. 289–293.
- Hylleberg, S., Engle, R. F., Granger, C. W. J., & Yoo, B. S. (1990).** Seasonal integration and cointegration. *Journal of Econometrics*, Vol. 44, No. 1-2, pp. 215–238.
- Hyndman, R. J. (2012).** *Mcomp: Data from the M-competitions*. R package version 2.04.
- Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Ord, J. K., & Snyder, R. D. (2005).** Prediction intervals for exponential smoothing state space models. *International Journal of Forecasting*, Vol. 24, pp. 17–37.
- Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Ord, J. K., & Snyder, R. D. (2008).** *Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach*. Springer, 1 edition.
- Ihaka, R. & Gentleman, R. (1996).** R: A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 5, No. 3, pp. 299–314.
- Koehler, A. B., Snyder, R. D., & Ord, J. K. (2001).** Forecasting models and prediction intervals for the multiplicative holt-winters method. *International Journal of Forecasting*, Vol. 17, pp. 269–286.
- Madrigal Espinoza, S. D. (2011).** Pronóstico de series temporales con estacionalidad. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Makridakis, S., Andersen, A., Carbone, R., Fildes, R., Hibon, M., Lewandowski, R., Newton, J., Parzen, E., & Winkler, R. (1982).** The accuracy of extrapolation (time series) methods: Results of a forecasting competition. *Journal of Forecasting*, Vol. 1, No. 2, pp. 111–153.
- Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. (1998).** *Forecasting Methods and Applications*. John Wiley, 3 edition.

20. **Novales, A. & de Fruto, R. D. (1997).** Forecasting with periodic models: A comparison with the time invariant coefficient models. *International Journal of Forecasting*, Vol. 13, pp. 393–405.
21. **Ord, J. K., Koehler, A. B., & Snyder, R. D. (1997).** Estimation and prediction for a class of dynamic nonlinear statistical models. *Journal of American Statistical Association*, Vol. 92, pp. 1621–1629.
22. **Team, R. C. (2012).** *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
23. **Wells, J. M. (1997).** Modelling seasonal patterns and long-run trends in U.S. time series. *International*

*Journal of Forecasting*, Vol. 13, pp. 407–420.

24. **Wooldridge, J. M. (2001).** *Introducción a la Econometría*. Thomson Learning.

**Sergio David Madrigal Espinoza** es profesor de tiempo completo en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Sus investigaciones están relacionadas con el análisis de series temporales, modelos de pronóstico, juegos de azar y cómputo estadístico.

*Article received on 16/09/2013; accepted on 01/09/2014.*